PHAN HUY KHẢI

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN
TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương I.

CƠ SỞ LÍ THUYẾT

§ 1. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Định nghĩa

Cho hai số a và b. Ta nói rằng

1. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

2. $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

2. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1. Nếu $a > b$, $b > c$ thì $a > c$.

(Tính chất bắc cầu của bất đẳng thức).

Chứng minh :

Ta có

$$a - c = (a - b) + (b - c). \tag{1}$$

Vì $a > b$ nên $a - b > 0$; tương tự $b - c > 0$ (do $b > c$).

Vì thế $(a - b) + (b - c) = 0$ (do tổng của hai số dương là số dương). Theo định nghĩa, từ $a - c > 0$ suy ra $a > c \Rightarrow$ đ.p.c.m.

2. Nếu $a > b$ thì

$$ma > mb \text{ nếu } m > 0,$$
$$ma < mb \text{ nếu } m < 0.$$

3. Nếu $a > b$; $c > d$ thì $a + c > b + d$.

4. Nếu $a > b$; $c < d$ thì $a - c > b - d$.

5. Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$, thì $ac > bd$.

6. Nếu $a > b > 0$ và $0 < c < d$, thì $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

7. Nếu $a > b > 0$ thì $a^n > b^n$, $\forall n$ nguyên dương.

8. Nếu $a > b$ thì $a^{2n+1} > b^{2n+1}$, $\forall n$ tự nhiên.

Chú ý :

- Chứng minh các tính chất từ 2. đến 6. đều dựa trực tiếp vào định nghĩa của bất đẳng thức và chứng minh tương tự như 1. (và xin dành cho bạn đọc).

- Bây giờ ta chứng minh 7.

Áp dụng hằng đẳng thức quen biết

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

ta có

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Do a - b > 0 (vì a > b) còn biểu thức trong dấu ngoặc còn lại là tổng của n số dương, vì thế biểu thức ấy dương. Vì thế $a^n - b^n > 0$.

Theo định nghĩa suy ra $a^n > b^n$. Tính chất 7 được chứng minh.

- Chuyển sang chứng minh 8.

Xét ba trường hợp sau :

1. Giả sử $a = 0 \Rightarrow a^{2n+1} = 0$. Do $a > b \Rightarrow b < 0 \Rightarrow b^{2n+1} < 0$ (luỹ thừa bậc lẻ của một số âm là số âm) $\Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

2. Giả sử a < 0. Vì $a > b \Rightarrow b < 0$.

Từ $a > b \Rightarrow 0 < -a < -b$. Vậy theo 7. suy ra

$$(-a)^{2n+1} < (-b)^{2n+1} \Rightarrow -a^{2n+1} < -b^{2n+1} \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}.$$

3. Giả sử a > 0. Khi đó

- Nếu $b \le 0$ thì $a^{2n+1} > 0 \ge b^{2n+1}$.

- Nếu b > 0 thì từ a > b > 0, theo 7. suy ra $a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

Tóm lại ta luôn có $a^{2n+1} > b^{2n+1}$. Tính chất 8 được chứng minh.

3. Các bất đẳng thức thông dụng

3.1. Bất đẳng thức Cô-si

Cho $a_1, a_2, ... a_n$ là các số không âm. Khi đó

1. $$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \qquad (1)$$

2. Dấu bằng xảy ra trong (1) khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh :

Ta sử dụng nguyên lí quy nạp toán học để chứng minh.

- Với n = 2 bất đẳng thức (1) có dạng

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}. \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \ge a_1 a_2$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \ge 0. \qquad (3)$$

Vì (3) hiển nhiên đúng, nên (2) đúng. Từ (3) suy ra dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2$.

Vậy bất đẳng thức Cô-si đúng khi n = 2.

- Giả sử bất đẳng thức (1) đã đúng đến n = k, tức là với mọi a_1, a_2, ..., $a_k \geq 0$ ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k},$$

và dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = ... = a_k$.

- Xét khi n = k + 1. Với a_1, a_2, ..., a_{k+1} không âm, ta có

$$S_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k+1}}{k+1} = \frac{k\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} + a_{k+1}}{k+1}. \qquad (4)$$

Từ (4) và theo giả thiết quy nạp, ta có

$$S_{k+1} \geq \frac{k\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} + a_{k+1}}{k+1}. \qquad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra (theo giả thiết quy nạp) $\Leftrightarrow$

$$a_1 = a_2 = ... = a_k.$$

Đặt $a_1 a_2 ... a_k = \alpha^{k(k+1)}$ và $a_{k+1} = \beta^{k+1}$. Khi đó (5) có dạng

$$S_{k+1} \geq \frac{k\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}}{k+1}. \qquad (6)$$

Từ (6) đi đến

$$S_{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1 a_2 ... a_{k+1}} \geq \frac{k\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}}{k+1} - \alpha^k\beta. \qquad (7)$$

Bằng phép tính ta có

$$VF(7) = \frac{k\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - k\alpha^k\beta - \alpha^k\beta}{k+1} = \frac{1}{k+1}\left[k\alpha^k(\alpha - \beta) - \beta\left(\alpha^k - \beta^k\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{k+1}\left[k\alpha^k - \beta\left(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + ... + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{k+1}\left[\alpha^{k-1}(\alpha - \beta) + \alpha^{k-2}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + ... + \right.$$

$$\left. + \alpha^2\left(\alpha^{k-2} - \beta^{k-2}\right) + \alpha\left(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}\right)\right]$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)^2}{k+1}\left[\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}(\alpha + \beta) + ... + \right.$$

$$\left. + \alpha^2\left(\alpha^{k-3} + \alpha^{k-4} + ... + \beta^{k-3}\right) + \alpha\left(\alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}\beta + ... + \beta^{k-2}\right)\right].$$

Vì $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, nên từ trên suy ra

$$VF(7) \geq 0 \text{ và } VF(7) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Từ đó dựa vào (7) và theo tính chất bắc cầu của bất đẳng thức ta có

$$S_{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}} \geq 0$$

tức là
$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}}. \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = ... = a_k \\ \alpha = \beta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = a_{k+1}$$

Vậy bất đẳng thức Cô-si cũng đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra (1) đúng với $\forall n = 1, 2 ...$ Bất đẳng thức Cô-si được chứng minh hoàn toàn.

Chú ý :

Với bạn đọc ở chương trình học cơ sở, rất hay sử dụng bất đẳng thức Cô-si khi $n = 2, 3, 4$. Chúng tôi xin giới thiệu cách chứng minh khi $n = 4$, $n = 3$.

• ***Với n = 4***

Ta có cách chứng minh đơn giản sau đây :

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si khi $n = 2$, ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}}. \quad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cô-si khi $n = 2$, ta có

$$\sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2} \cdot \sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \quad (3)$$

Dấu bằng xảy ra trong (3) $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) và (2), hay

$$\begin{cases} \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_3 + a_4}{2} \\ a_1 = a_2 \ ; \ a_3 = a_4 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4.$$

Vậy bất đẳng thức Cô-si đúng với $n = 4$.

• ***Với n = 3***

Cách chứng minh như sau :

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với $n = 4$, ta có

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}. \quad (4)$$

Do a_1, a_2, a_3 không âm nên $a_1+a_2+a_3 \geq 0$. Tuy nhiên nếu $a_1+a_2+a_3=0$ thì bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng (vì khi đó $a_1=a_2=a_3=0$ và cả hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh đều bằng 0).

Vì thế

$$(4) \Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^4 \geq a_1a_2a_3\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^3 \geq a_1a_2a_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}. \quad (5)$$

Theo trường hợp n = 4, thì dấu bằng trong (5) xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1=a_2=a_3=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=a_1=a_2=a_3.$$

Vậy bất đẳng thức Cô-si đúng khi n = 3.

3.2. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là 2n số bất kì. Khi đó ta có

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}. \quad (2)$$

(Lưu ý rằng nếu trong (2) $b_i = 0$, thì ta sẽ hiểu là a_i tương ứng cũng = 0).

Chứng minh :

Xét tam thức bậc hai sau đây

$$f(x) = \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)x + \left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)$$

Ta có thể viết lại f(x) dưới dạng sau :

$$f(x) = \left(a_1x-b_1\right)^2+\left(a_2x-b_2\right)^2+...+\left(a_nx-b_n\right)^2. \quad (3)$$

Như vậy từ (3) suy ra $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in R$. (4)

Ta chỉ quan tâm khi $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$ (Vì nếu $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0$ thì $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ và lúc này (1) hiển nhiên đúng vì cả hai vế đều = 0).

Như thế f(x) là tam thức bậc hai mà $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in R$, $a = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$, nên theo định lí về dấu của tam thức bậc hai ta có $\Delta' \leq 0$, hay

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 - \left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + ... + b_n^2\right) \leq 0,$$

tức là

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2.$$

Vậy phần 1 của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski được chứng minh.

Theo (3) dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi hệ sau đây

$$\begin{cases} a_1x - b_1 = 0 \\ a_2x - b_2 = 0 \\ .... \\ a_nx - b_n = 0 \end{cases}$$

có nghiệm. Điều này tương đương với

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$$

(với cách hiểu khi $b_i = 0$ thì $a_i = 0$).

Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski được chứng minh hoàn toàn.

Chú ý :

Ta cũng có thể thấy rằng : Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski xem như hệ quả của bất đẳng thức Cô-si.

Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow \left|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}. \quad (5)$$

Ta chỉ cần xét khi $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$ và $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 > 0$ (vì nếu một trong hai tổng trên bằng 0, chẳng hạn $b_1^2 + ... + b_n^2 = 0$ thì (5) hiển nhiên đúng vì cả hai vế của nó đều bằng 0). Vì thế

$$(5) \Leftrightarrow \frac{\left|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}} \leq 1. \quad (6)$$

Theo tính chất của giá trị tuyệt đối, ta có

$$VT(6) \le \frac{|a_1b_1|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}.\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}}+\ldots+\frac{|a_nb_n|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}.\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}}. \qquad (7)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$\begin{cases} \dfrac{|a_1|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}.\dfrac{|b_1|}{\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1^2}{a_1^2+\ldots+a_n^2}+\dfrac{b_1^2}{b_1^2+\ldots+b_n^2}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{|a_n|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}.\dfrac{|b_n|}{\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_n^2}{a_1^2+\ldots+a_n^2}+\dfrac{b_n^2}{b_1^2+\ldots+b_n^2}\right) \end{cases}. \qquad (8)$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức trên, ta có

$$VF(7) \le \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{a_1^2+\ldots+a_n^2}+\frac{b_1^2+\ldots+b_n^2}{b_1^2+\ldots+b_n^2}\right)=1.$$

Từ đó theo tính chất bắc cầu của bất đẳng thức suy ra (6) đúng.

Dấu bằng trong (5) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) và (8) cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_nb_n \\ \dfrac{|a_i|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}=\dfrac{|b_i|}{\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}} \end{cases} \qquad \forall i=\overline{1,n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski được chứng minh hoàn toàn dựa vào bất đẳng thức Cô-si.

Bất đẳng thức Trê-bư-sep

Cho hai dãy tăng $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$.

Khi đó ta có

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \le n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n). \qquad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi

hoặc $a_1=a_2=\ldots=a_n$, hoặc $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

Chứng minh :

Đặt $a=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Do $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, nên tồn tại một chữ số i sao cho

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_i \le a \le a_{i+1} \le \ldots \le a_n.$$

Lấy số b tuỳ ý sao cho

$$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_i \le b \le b_{i+1} \le \dots \le b_n.$$

Khi đó với mọi $k = \overline{1,n}$ rõ ràng, ta có

$$(a_k - a)(b_k - b) \ge 0$$

$$\Rightarrow a_k b_k - b a_k - a b_k + ab \ge 0, \quad \forall k=\overline{1,n} \qquad (*)$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức dạng (*), ta có

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - b\sum_{k=1}^{n} a_k - a\sum_{k=1}^{n} b_k + nab \ge 0. \qquad (**)$$

Vì $b\sum_{k=1}^{n} a_k = nab$, nên từ (**) suy ra $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - a\sum_{k=1}^{n} b_k \ge 0$,

hay $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ge \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k$, tức là

$$n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \ge (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n).$$

Cũng từ đó suy ra dấu bằng trong (1) xảy ra, nghĩa là hoặc $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Bất đẳng thức Trê-bư-sep được chứng minh.

Chú ý :

Đôi khi bất đẳng thức Trê-bư-sep được phát biểu dưới dạng tương đương sau :

Cho dãy tăng $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ và dãy giảm $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n$.

Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \ge n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n). \qquad (2)$$

Dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow$

hoặc $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Thật vậy bằng cách đặt $b_i = -b'_i$, ta có $b'_1 \le b'_2 \le \dots \le b'_n$.

Áp dụng bất đẳng thức Trê-bư-sep cho hai dãy tăng

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \text{ và } b'_1 \le b'_2 \ge \dots \le b'_n, \text{ ta có}$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b'_1 + b'_2 + \dots + b'_n) \le n(a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \dots + a_n b'_n)$$

$$\Leftrightarrow -(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \le -n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \ge n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

Vậy (2) đúng.

§ 2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trên miền D. Ta nói rằng

a) Số M là giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên miền D, và kí hiệu là

$$M = \max_{x \in D} f(x),$$

nếu như hai điều kiện sau đây đồng thời thoả mãn :

1. $f(x) \le M, \quad \forall x \in D$
2. Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

b) Số m là giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên miền D, và kí hiệu là

$$m = \min_{x \in D} f(x),$$

nếu như hai điều kiện sau đây đồng thời thoả mãn :

1. $f(x) \ge m, \qquad \forall x \in D$
2. Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

2. Các tính chất cơ bản của giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

2.1. Tính chất 1 :

Giả sử f(x) xác định trên D và A, B là hai tập hợp con của D, trong đó $A \subseteq B$. Giả sử tồn tại $\max_{x \in A} f(x)$, $\max_{x \in B} f(x)$, $\min_{x \in A} f(x)$, $\min_{x \in B} f(x)$. Khi đó ta có

$$\max_{x \in A} f(x) \le \max_{x \in B} f(x), \tag{1}$$

$$\min_{x \in A} f(x) \ge \min_{x \in B} f(x). \tag{2}$$

Chứng minh :

Ta chỉ cần chứng minh (1) (vì (2) được chứng minh hoàn toàn tương tự).

Giả sử $\max_{x \in A} f(x) = f(x_0)$, với $x_0 \in A$. Do $A \subset B$, nên từ $x_0 \in A$ suy ra $x_0 \in B$. Từ đó theo định nghĩa suy ra

$$f(x_0) \le \max_{x \in B} f(x), \text{ hay } \max_{x \in A} f(x) \le \max_{x \in B} f(x).$$

2.2. *Tính chất 2 :*

Giả sử hàm số f(x) xác định trên D và tồn tại $\max\limits_{x\in D} f(x)$ và $\min\limits_{x\in D} f(x)$. Khi đó ta có

$$\max_{x\in D} f(x) = -\min_{x\in D}\big(-f(x)\big)\ ;\ \min_{x\in D} f(x) = -\max_{x\in D}\big(-f(x)\big).$$

Chứng minh :

Giả sử $M = \max\limits_{x\in D} f(x)$.

Khi đó theo định nghĩa giá trị lớn nhất, ta có

$$\begin{cases} f(x) \le M & \forall x \in D \\ f(x_0) = M, & \text{với } x_0 \in D. \end{cases}$$

Từ hệ trên suy ra

$$\begin{cases} -f(x) \ge -M & \forall x \in D \\ -f(x_0) = -M. & \end{cases} \qquad (*)$$

Theo định nghĩa của giá trị nhỏ nhất, từ (*) suy ra

$$\min_{x\in D}\big(-f(x)\big) = -M.$$

Như vậy ta đi đến $\max\limits_{x\in D} f(x) = -\min\limits_{x\in D}\big(-f(x)\big) \Rightarrow$ đ.p.c.m.

Phần sau chứng minh hoàn toàn tương tự.

Nhận xét :

Tính chất 2 cho phép ta chuyển bài toán tìm giá trị lớn nhất thành bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hoặc ngược lại. Điều này có ích trong nhiều trường hợp cụ thể sẽ xét sau này.

2.3. *Tính chất 3 :*

Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số cùng xác định trên miền D và thoả mãn điều kiện $f(x) \ge g(x) \quad \forall x \in D$.

Khi đó ta có $\max\limits_{x\in D} f(x) \ge \max\limits_{x\in D} g(x)$.

Chứng minh :

Giả sử $\max\limits_{x\in D} g(x) = g(x_0)$, với $x_0 \in D$

Từ giả thiết ta có $g(x_0) \le f(x_0)$. (1)

Vì $x_0 \in D$, nên theo định nghĩa giá trị lớn nhất ta có

$$f(x_0) \le \max_{x\in D} f(x). \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra $\max\limits_{x\in D} f(x) \ge \max\limits_{x\in D} g(x)$.

Đó là đ.p.c.m.

2.4. Tính chất 4 :

Giả sử f(x) xác định trên miền xác định D và miền D được biểu diễn dưới dạng

$$D = D_1 \cup D_2.$$

Giả thiết tồn tại $\max\limits_{x\in D_i} f(x)$ và $\min\limits_{x\in D_i} f(x)$ $\forall i=\overline{1,n}$.

Khi đó ta có công thức sau :

$$\max_{x\in D} f(x) = \max\left\{\max_{x\in D_1} f(x),\ \max_{x\in D_2} f(x)\right\}, \tag{1}$$

$$\min_{x\in D} f(x) = \min\left\{\min_{x\in D_1} f(x), \min_{x\in D_2} f(x)\right\}. \tag{2}$$

Chứng minh :

Ta chỉ cần chứng minh (1) (còn (2) được chứng minh bằng một cách hoàn toàn tương tự). Vì $D_i \subseteq D$, i = 1, 2 ; nên theo tính chất 2, ta có

$$\max_{x\in D_1} f(x) \le \max_{x\in D} f(x)\ ;\ \max_{x\in D_2} f(x) \le \max_{x\in D} f(x). \tag{3}$$

Từ (3) suy ra $\max\left\{\max\limits_{x\in D_1} f(x), \max\limits_{x\in D_2} f(x)\right\} \le \max\limits_{x\in D} f(x).$ (4)

Giả sử $\max\limits_{x\in D} f(x) = f(x_0)$, với $x_0 \in D$.

Vì $D = D_1 \cup D_2$ mà $x_0 \in D$ nên $x_0 \in D_1 \cup D_2$. Do vậy x_0 phải thuộc về ít nhất một trong hai tập D_1, D_2. Từ đó có thể cho là (mà không hề làm giảm sự tổng quát) $x_0 \in D_1$.

Từ $x_0 \in D_1$, nên theo định nghĩa về giá trị lớn nhất ta có

$$f(x_0) \le \max_{x\in D_1} f(x). \tag{5}$$

Lẽ hiển nhiên

$$\max_{x\in D_1} f(x) \le \max\left\{\max_{x\in D_1} f(x),\ \max_{x\in D_2} f(x)\right\}. \tag{6}$$

Từ (5), (6) suy ra

$$f(x_0) = \max_{x\in D} f(x) \le \max\left\{\max_{x\in D_1} f(x),\ \max_{x\in D_2} f(x)\right\}. \tag{7}$$

Bây giờ từ (4), (7) ta đi đến

$$\max_{x\in D} f(x) = \max\left\{\max_{x\in D_1} f(x),\ \max_{x\in D_2} f(x)\right\}.$$

Đó là đ.p.c.m.

Nhận xét :

1. Tính chất 4 có thể phát biểu dưới dạng mở rộng chút ít như sau : Nếu miền xác định D của hàm số f(x) có dạng

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

và giả sử tồn tại $\max\limits_{x \in D_i} f(x)$, $\min\limits_{x \in D_i} f(x)$, $\forall i = \overline{1, n}$. Khi đó ta có

$$\max_{x \in D} f(x) = \max\left\{\max_{x \in D_1} f(x), \ldots, \max_{x \in D_n} f(x)\right\},$$

$$\min_{x \in D} f(x) = \min\left\{\min_{x \in D_1} f(x), \ldots, \min_{x \in D_n} f(x)\right\}.$$

2. Nhờ tính chất 4 nói trên cho phép ta có thể biến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một miền xác định phức tạp thành một dãy các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số ấy trên các miền xác định đơn giản hơn (dĩ nhiên việc giải các bài toán : tìm $\max\limits_{x \in D_i} f(x)$, $\min\limits_{x \in D_i} f(x)$ nói chung là đơn giản hơn nhiều so với việc giải các bài toán tìm $\max\limits_{x \in D} f(x)$, $\min\limits_{x \in D} f(x)$). Vì lí do ấy nên tính chất 4 còn hay gọi là *nguyên lí phân rã.*

3. Dựa vào tính chất 2 ta có thể dựa vào phần 1 để chứng minh phần 2 của tính chất 4 như sau :

Theo tính chất 2 thì

$$\min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D}\left(-f(x)\right)$$

Dựa vào phần 1 của tính chất 4 (vừa chứng minh), ta có

$$\min_{x \in D} f(x) = -\left[\max\left\{\max_{x \in D_1}\left(-f(x)\right), \max_{x \in D_2}\left(-f(x)\right)\right\}\right]$$

$$= -\left[\max\left\{-\min_{x \in D_1} f(x), -\min_{x \in D_2} f(x)\right\}\right]$$

$$= \min\left\{\min_{x \in D_1} f(x), \min_{x \in D_2} f(x)\right\}.$$

Đó là đ.p.c.m.

2.5. Tính chất 5 :

Cho các hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ cùng xác định trên miền D. Đặt $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$. Giả sử tồn tại $\max\limits_{x\in D} f(x)$, $\min\limits_{x\in D} f(x)$). $\max\limits_{x\in D} f_i(x)$, $\min\limits_{x\in D} f_i(x)$ với mọi $i = \overline{1,n}$.

Khi đó ta có

$$\max_{x\in D} f(x) \le \max_{x\in D} f_1(x) + \max_{x\in D} f_2(x) + ... + \max_{x\in D} f_n(x), \quad (1)$$

$$\min_{x\in D} f(x) \ge \min_{x\in D} f_1(x) + \min_{x\in D} f_2(x) + ... + \min_{x\in D} f_n(x). \quad (2)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\max_{x\in D} f_i(x) = f_i(x_0), \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\min_{x\in D} f_i(x) = f_i(x_0), \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

Chứng minh :

Ta chứng minh (1) (với (2) phép chứng minh hoàn toàn tương tự).

Lấy tuỳ ý $x \in D$. Theo định nghĩa của giá trị lớn nhất ta có

$$f_i(x) \le \max_{x\in D} f_i(x), \quad \forall i=\overline{1,n} \quad (3)$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức (3), ta có

$$f(x) = f_1(x) + ... + f_n(x) \le \max_{x_i\in D} f_1(x) + ... + \max_{x_i\in D} f_n(x). \quad (4)$$

Vì bất đẳng thức (4) đúng với mọi $x \in D$, nên ta có

$$\max_{x\in D} f(x) \le \max_{x\in D} f_1(x) + ... + \max_{x\in D} f_n(x). \quad (5)$$

Vậy (1) đúng. Bây giờ ta xét khả năng có dấu bằng trong (1).

Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ mà $\max\limits_{x\in D} f_i(x) = f_i(x_0)$, $\forall i=\overline{1,n}$.

Từ đó ta có

$$\max_{x\in D} f_1(x) + ... + \max_{x\in D} f_n(x) = f_1(x_0) + ... + f_n(x_0) = f(x_0). \quad (6)$$

Do $f(x_0) \le \max\limits_{x\in D} f(x)$, nên từ (6) suy ra

$$\max_{x\in D} f_1(x) + ... + \max_{x\in D} f_n(x) \le \max_{x\in D} f(x). \quad (7)$$

Từ (5), (7) suy ra trong trường hợp này xảy ra dấu bằng trong (1). Đảo lại, giả sử dấu bằng trong (1) xảy ra, tức là

$$\max_{x\in D} f(x) = \max_{x\in D} f_1(x) + ... + \max_{x\in D} f_n(x). \quad (*)$$

Khi đó, gọi x_0 là giá trị $(\in D)$ sao cho $f(x_0) = \max\limits_{x\in D} f(x)$. Như thế, với $\forall i = 1, 2, ..., n$, ta cũng có $f_i(x_0) = \max\limits_{x\in D} f_i(x)$, vì nếu ngược lại, sẽ tồn tại $k \in \{1,...n\}$ mà $f_k(x_0) < \max\limits_{x\in D} f_k(x)$, suy ra (*) không còn đúng nữa (vế trái lớn hơn vế phải).

Vậy tính chất 5 được chứng minh.

Nhận xét :

1. Tính chất 5 cho ta thấy rằng nói chung không thể thay việc tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của một tổng các hàm số bằng việc tìm tổng các giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của từng hàm số đơn lẻ. Tuy nhiên, nếu điều này sẽ thực hiện được trong các trường hợp như đã xét ở trên, bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều.

2. Tính chất 5 cũng cho phép ta chứng minh bất đẳng thức Svác-xơ một cách độc đáo như sau :

Bất đẳng thức Svác-xơ

Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Khi đó ta có

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + ... + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + b_2 + ... + b_n)^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Chứng minh :

Giả sử xét hàm số $f_1(x) = a_1x^2 + 2b_1x$. Do $a_1 > 0$ nên theo tính chất của hàm số bậc hai, ta có

$$\min_{x\in R} f_1(x) = f_1\left(-\frac{b_1}{a}\right) = \frac{-b_1^2}{a_1}.$$

Tương tự xét $f_k(x) = a_kx^2 + 2b_kx$ và cũng có

$$\min_{x\in R} f_k(x) = \frac{-b_k^2}{a_k}, \qquad k = 2, 3, ..., n.$$

Đặt $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_n)x^2 + 2(b_1 + b_2 + ... + b_n)x.$$

Theo tính chất 5 của giá trị lớn nhất, ta có

$$\min_{x\in R} f_1(x) + \min_{x\in R} f_2(x) + ... + \min_{x\in R} f_n(x) \leq \min_{x\in R} f(x). \qquad (1)$$

Ta lại có $\min\limits_{x\in R} f(x) = -\dfrac{(b_1 + b_2 + ... + b_n)^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$.

Từ đó áp dụng (1) suy ra

$$-\frac{b_1^2}{a_1}-\frac{b_2^2}{a_2}-\ldots-\frac{b_n^2}{a_n}\le\frac{-(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

$$\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n^2}{a_n}\ge\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}. \qquad (2)$$

Bất đẳng thức Svac-xơ được chứng minh.

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi, tất cả các hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ cùng đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm chung. Vì $f_k(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất $x_k=-\frac{b_k}{a_k}$, và cũng như vậy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm duy nhất $x_*=-\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ nên dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}=\ldots=-\frac{b_n}{a_n}\Leftrightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\ldots=\frac{b_n}{a_n}.$$

Hoàn toàn tương tự như tính chất 5, ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau đây :

2.6. Tính chất 6 :

Giả sử $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ cùng xác định trên miền D và ta có $f_i(x)>0\ \ \forall x\in D,\ \ \forall i=\overline{1,n}$. Giả thiết tồn tại $\max\limits_{x\in D} f_i(x)$, $\min\limits_{x\in D} f_i(x)$, $\max\limits_{x\in D} f(x)$, $\min\limits_{x\in D} f(x)$, ở đây $f(x)=f_1(x)\,.\,f_2(x)\ldots f_n(x)$ và $i=\overline{1,n}$. Khi đó ta có

$$\max_{x\in D} f(x)\le\left(\max_{x\in D} f_1(x)\right)\left(\max_{x\in D} f_2(x)\right)\ldots\left(\max_{x\in D} f_n(x)\right), \qquad (1)$$

$$\min_{x\in D} f(x)\le\left(\min_{x\in D} f_1(x)\right)\left(\min_{x\in D} f_2(x)\right)\ldots\left(\min_{x\in D} f_n(x)\right). \qquad (2)$$

2.7. Tính chất 7 :

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng xác định trên miền D. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$. Giả sử tồn tại các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ trên D. Khi đó ta có

$$\max_{x\in D} h(x)\le\max_{x\in D} f(x)-\min_{x\in D} g(x), \qquad (1)$$

$$\min_{x\in D} h(x)\ge\min_{x\in D} f(x)-\max_{x\in D} g(x). \qquad (2)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\max_{x\in D} f(x) = f(x_0)\ ;\ \min_{x\in D} g(x) = g(x_0).$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\min_{x\in D} f(x) = f(x_0)\ ;\ \max_{x\in D} g(x) = g(x_0).$$

Chứng minh :

Ta chỉ cần chứng minh (1) Ta có

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x)).$$

Theo tính chất 5 ta có

$$\max_{x\in D} h(x) \le \max_{x\in D} f(x) + \max_{x\in D}\left(-g(x)\right). \qquad (3)$$

Theo tính chất 2, ta có

$$\max_{x\in D}\left(-g(x)\right) = -\min_{x\in D}\left[-\left(-g(x)\right)\right] = -\min_{x\in D} g(x). \qquad (4)$$

Thay (4) và (3) ta có

$$\max_{x\in D} h(x) \le \max_{x\in D} f(x) - \min_{x\in D} g(x).$$

Vậy (1) đúng.

Vẫn theo tính chất 5 thì dấu bằng trong (3) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho ta có

$$\max_{x\in D} f(x) = f(x_0)\ ;\ \max_{x\in D}\left(-g(x)\right) = -g(x_0).$$

Nhưng $\max\limits_{x\in D}\left(-g(x)\right) = -g(x_0) \Leftrightarrow -\min\limits_{x\in D} g(x) = -g(x_0)$

$$\Leftrightarrow \min_{x\in D} g(x) = g(x_0).$$

Đó chính là đ.p.c.m.

2.8. Tính chất 8 :

Giả sử f(x), g(x) là các hàm số xác định và dương khi $x \in D$. Đặt $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ và giả thiết tồn tại các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số h(x), f(x), g(x). Khi đó ta có

$$\max_{x\in D} h(x) \le \frac{\max\limits_{x\in D} f(x)}{\min\limits_{x\in D} g(x)}, \qquad (1)$$

$$\min_{x\in D} h(x) \ge \frac{\min\limits_{x\in D} f(x)}{\max\limits_{x\in D} g(x)}. \qquad (2)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$, sao cho

$$\max_{x\in D} f(x) = f(x_0)\ ;\ \min_{x\in D} g(x) = g(x_0).$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$, sao cho

$$\min_{x\in D} f(x) = f(x_0)\ ;\ \max_{x\in D} g(x) = g(x_0).$$

Chứng minh :

Tính chất 8 suy ra trực tiếp từ tính chất 6 với chú ý rằng (do $f(x) > 0,\ g(x) > 0,\quad \forall x \in D$)

$$\max_{x\in D}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{\min\limits_{x\in D} g(x)}\ ;\ \min_{x\in D}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{\max\limits_{x\in D} g(x)}.$$

2.9. Tính chất 9 :

1. Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên miền D. Khi đó với mọi n nguyên dương ta có

$$\max_{x\in D} f(x) = \sqrt[2n+1]{\max_{x\in D}\left[f^{2n+1}(x)\right]},$$

$$\min_{x\in D} f(x) = \sqrt[2n+1]{\min_{x\in D}\left[f^{2n+1}(x)\right]}.$$

2. Nếu thêm vào giả thiết $f(x) \geq 0$, thì với mọi n nguyên dương ta cũng có các công thức sau :

$$\max_{x\in D} f(x) = \sqrt[2n]{\max_{x\in D}\left[f^{2n}(x)\right]},$$

$$\min_{x\in D} f(x) = \sqrt[2n]{\min_{x\in D}\left[f^{2n}(x)\right]}.$$

Chứng minh :

Tính chất 9 được suy trực tiếp từ định nghĩa của giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số và các tính chất 7 và 8 của bất đẳng thức.

Nhận xét :

Trong thực tiễn, người ta thường sử dụng một trường hợp riêng của tính chất 9 như sau :

Nếu $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in D$, thì

$$\max_{x\in D} f(x) = \sqrt{\max_{x\in D} f^2(x)}\ ;\ \min_{x\in D} f(x) = \sqrt{\min_{x\in D} f^2(x)}.$$

Điều này sẽ rất có ích để giải các bài toán thuộc dạng : Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số $f(x)$ khi chúng được cho dưới dạng *căn bậc hai hoặc có chứa biểu thức với dấu giá trị tuyệt đối.*

2.10. Tính chất 10 :

Giả sử f(x) là hàm số xác định trên D và tồn tại $\max_{x\in D} f(x)$, $\min_{x\in D} f(x)$. Khi đó ta có

$$\max_{x\in D}|f(x)| = \max\left[\left|\max_{x\in D} f(x)\right|,\ \left|\min_{x\in D} f(x)\right|\right]. \qquad (1)$$

Chứng minh :

Áp dụng tính chất 2, thì hệ thức (1) có dạng tương đương sau đây :

$$\max_{x\in D}|f(x)| = \max\left[\left|\max_{x\in D} f(x)\right|,\ \left|\min_{x\in D} f(x)\right|\right]. \qquad (2)$$

Lấy tuỳ ý $x_0 \in D$, khi đó xảy ra hai khả năng sau :

1. Nếu $f(x_0) \geq 0$. Khi đó ta có

$$|f(x_0)| = f(x_0) \leq \max_{x\in D} f(x) \leq \left|\max_{x\in D} f(x)\right|. \qquad (3)$$

Từ (3) hiển nhiên suy ra

$$|f(x)| \leq \max\left[\left|\max_{x\in D} f(x)\right|,\ \left|\max_{x\in D}(-f(x))\right|\right]. \qquad (4)$$

2. Nếu $f(x_0) < 0$. Lúc này ta lại có

$$|f(x_0)| = -f(x_0) \leq \max_{x\in D}(-f(x)) \leq \left|\max_{x\in D}(-f(x))\right|.$$

Vì vậy ta cũng có

$$|f(x_0)| \leq \max\left[\left|\max_{x\in D}(-f(x))\right|,\ \left|\max_{x\in D} f(x)\right|\right]. \qquad (5)$$

Từ (4), (5) và để ý rằng x_0 là phần tử tuỳ ý của D, suy ra

$$|f(x_0)| \leq \max\left\{\left|\max_{x\in D} f(x)\right|,\ \left|\max_{x\in D}(-f(x))\right|\right\} \quad \forall x \in D. \qquad (6)$$

Không giảm tổng quát có thể cho là

$$\max\left\{\left|\max_{x\in D} f(x)\right|,\ \left|\max_{x\in D}(-f(x))\right|\right\} = \left|\max_{x\in D} f(x)\right|. \qquad (7)$$

(Trường hợp ngược lại được chứng minh bằng một cách hoàn toàn tương tự.)

Giả sử $\left|\max\limits_{x\in D} f(x)\right| = |f(x_0)|,\ x_0 \in D.$ (8)

Từ (7), (8) suy ra

$$|f(x_0)| == \max\left\{\left|\max_{x\in D} f(x)\right|,\ \left|\max_{x\in D}(-f(x))\right|\right\}. \qquad (9)$$

Từ (6), (9) và theo định nghĩa giá trị lớn nhất của hàm số, ta có ngay

$$|f(x_0)| = \max\left\{\left|\max_{x\in D} f(x)\right|,\ \left|\max_{x\in D}(-f(x))\right|\right\}.$$

Đó chính là đ.p.c.m.

2.11. Tính chất 11 :

Xét hàm số $f(x)$ xác định trên miền D và giả sử tồn tại $\min\limits_{x\in D} f(x)$, $\max\limits_{x\in D} f(x)$, trong đó

$$D_1 = \{x \in D : f(x) > 0\} \text{ và } D_2 = \{x \in D : f(x) \le 0\}.$$

Khi đó ta có công thức sau :

$$\min_{x\in D}|f(x)| = \min\left\{\min_{x\in D_1} f(x), \left|\max_{x\in D_1} f(x)\right|\right\}.$$

Chứng minh :

Vì $D_1 = \{x \in D : f(x) > 0\}$, nên $|f(x)| = f(x),\ \forall x \in D_1$. Theo giả thiết tồn tại $\min\limits_{x\in D}|f(x_1)|$, tức là tồn tại $\min\limits_{x\in D}|f(x_1)|$, và

$$\min_{x\in D_1}|f(x)| = \min_{x\in D_1}|f(x)|. \qquad (1)$$

Lại theo giả thiết thì tồn tại $\max\limits_{x\in D_2}|f(x)|$, tức là

$$f(x) \le \max_{x\in D_2}|f(x)|,\quad \forall x \in D_2,$$

hay $-f(x) \ge -\max\limits_{x\in D_2} f(x),\quad \forall x \in D_2.$ (2)

Do $D_2 = \{x \in D : f_2(x) \le 0\}$, nên từ (2) suy ra

$$|f(x)| \ge \left|\max_{x\in D_2} f(x)\right|,\quad \forall x \in D_2. \qquad (3)$$

Mặt khác giả sử $\max\limits_{x\in D_2} f(x) = f(x),\ x \in D_2$, nên ta có

$$\left|f(x)\right| = \left|\max_{x \in D_2} f(x)\right|. \tag{4}$$

Từ (3), (4) và theo định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số, ta thu được

$$\min_{x \in D_2}\left(\left|f(x)\right|\right) = \left|\max_{x \in D_2} f(x)\right|. \tag{5}$$

Áp dụng nguyên lí phân rã (tính chất 4) kết hợp với (1), (5) ta có

$$\min_{x \in D}\left|f(x)\right| = \min\left\{\min_{x \in D_1} f(x), \left|\min_{x \in D_2} f(x)\right|\right\}$$

$$= \min\left\{\min_{x \in D_1} f(x), \left|\max_{x \in D_2} f(x)\right|\right\}.$$

Tính chất 11 được chứng minh hoàn toàn.

2.12. Tính chất 12 :

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên D. Khi đó nếu gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên miền D, thì

$$\min\left|f(x)\right| = \begin{cases} 0, \text{ nếu } Mm \le 0 \\ \min\left\{\left|M\right|, \left|m\right|\right\}, \text{ nếu } Mm > 0 \end{cases}$$

Chứng minh :

1. Nếu $Mm \le 0$. Khi đó ta có $M \ge 0 \ge m$ (Chú ý là $M \ge m$).

Vì vậy dựa vào tính liên tục của hàm số $f(x)$ suy ra tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Ta có $\begin{cases} \left|f(x)\right| \ge 0 & \forall x \in D \\ \left|f(x_0)\right| = 0 & x_0 \in D. \end{cases}$

Dựa vào định nghĩa của giá trị bé nhất của hàm số suy ra

$$\min_{x \in D}\left|f(x)\right| = 0.$$

2. Nếu $Mm > 0$. Không giảm tổng quát có thể cho là $M > m > 0$ (trường hợp $0 > M > m$ chứng minh hoàn toàn tương tự). Như vậy ta có

Vì thế $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$.

$$\min_{x \in D}\left|f(x)\right| = \min_{x \in D} f(x) = m = \min\left\{M, m\right\} = \min\left\{\left|M\right|, \left|m\right|\right\}.$$

Tính chất 12 được chứng minh.

Chương II.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một miền D cho trước, chúng ta có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau. Trong phạm vi của cuốn sách này (dùng cho chương trình trung học cơ sở), chúng tôi chỉ trình bày ba phương pháp sau đây.

- Phương pháp bất đẳng thức
- Phương pháp miền giá trị hàm số
- Phương pháp chiều biến thiên hàm số.

§ 1. PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp bất đẳng thức được xem như là một trong những phương pháp thông dụng và hiệu quả nhất để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Phương pháp này, như tên gọi của nó, dựa trực tiếp vào định nghĩa của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số. Vì thế lược đồ chung của phương pháp bất đẳng thức tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số $f(x)$ trên một miền D cho trước nào đó có thể miêu tả như sau :

- Trước hết chứng minh một bất đẳng thức có dạng $f(x) \geq \alpha$ $\forall x \in D$ với bài toán tìm giá trị lớn nhất (hoặc $f(x) \leq \alpha$ $\forall x \in D$ với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất).

- Sau đó chỉ ra một phần tử $x_0 \in D$ sao cho ta có đẳng thức $f(x_0) = \alpha$. Cần lưu ý rằng trong hai bước nói trên, không được xem nhẹ bước nào. Tuỳ dạng của bài toán cụ thể, mà ta sẽ lựa chọn một phương pháp chứng minh bất đẳng thức thích hợp, cũng như cách chỉ ra phần tử $x_0 \in D$ ở bước 2 của thuật toán.

1. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Cô-si

Bài 1.

Cho hàm số $f(x) = \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x}$

xét trên miền $D = \{x : -1 \le x \le 1\}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D.

Bài giải :

Từ hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \\ 1+x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 1,$$

suy ra D cũng chính là miền xác định của $f(x)$. Với mọi $x \in D$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{1-x}\ .\ \sqrt[4]{1+x} \le \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2}, \tag{1}$$

$$\sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{1-x}\ .\ 1 \le \frac{\sqrt{1-x}+1}{2}, \tag{2}$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{1+x}\ .\ 1 \le \frac{\sqrt{1+x}+1}{2}. \tag{3}$$

Từ (1), (2), (3) bằng cách cộng từng vế của chúng, ta có

$$f(x) \le 1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \qquad \forall x \in D. \tag{4}$$

Vì dấu bằng trong (1), (2), (3) đều xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$, nên dấu bằng trong (4) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng xảy ra trong (1), (2), (3). Do vậy dấu bằng trong (4) chỉ xảy ra khi $x = 0$.

Lại áp dụng bất đẳng thức Cô-si, với mọi $x \in D$ ta có

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+x}\ .\ 1 \le \frac{1+(1+x)}{2}, \tag{5}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-x}\ .\ 1 \le \frac{1+(1-x)}{2}. \tag{6}$$

Từ (5), (6) đi đến

$$1 + \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \le 3. \tag{7}$$

Vì dấu bằng trong (5), (6) đều xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$, nên dấu bằng trong (7) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng xảy ra trong (5) và (6). Vì thế dấu bằng trong (7) xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Từ (4) và (7) đi đến

$$f(x) \le 3, \qquad \forall x \in D.$$

Theo trên ta có $f(0) = 3$, mà $0 \in D$. Từ đó ta đi đến kết quả sau :

$$\max_{x \in D} f(x) = 3.$$

Bài 2.

Tìm giá trị bé nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = (xyz+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-x-y-z, \text{ trên miền}$$

$$D = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$$

Bài giải :

Viết lại hàm số f(x, y, z) dưới dạng sau :

$$f(x,y,z) = \left(yz+\frac{y}{z}\right)+\left(xy+\frac{x}{y}\right)+\left(xz+\frac{z}{x}\right)+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}-(x+y+z). \quad (1)$$

Lấy (x, y, z) tuỳ ý thuộc D. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$yz+\frac{y}{z} \ge 2y,$$

$$xy+\frac{x}{y} \ge 2x,$$

$$xz+\frac{z}{x} \ge 2z.$$

(Chú ý là $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$). Từ đó suy ra

$$f(x,y,z) \ge x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

$$f(x,y,z) \ge \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right) \ge 6.$$

Như vậy ta có $f(x,y,z) \ge 6, \quad \forall (x,y,z) \in D$.

Vì $(1, 1, 1) \in D$ và $g(1, 1, 1) = 6$, nên ta đi đến kết quả sau :

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 6.$$

Chú ý :

Ta có bài toán tổng quát sau :

$$\min_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D} f(x_1,x_2,\dots,x_n) = 2n,$$

trong đó :

$$f(x_1,x_2,x_n)=(x_1x_2...x_n+1)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)+\frac{x_2}{x_3x_4...x_n}+$$

$$+\frac{x_3}{x_4x_5...x_nx_1}+...+\frac{x_n}{x_1x_2...x_{n-2}}+\frac{x_1}{x_2x_3...x_{n-1}}-x_1-x_2-...-x_n$$

và $D=\{(x_1,...,x_n):x_i>0\quad \forall i=\overline{1,n}\}$.

Bài 3.

1. Cho hàm số

$$f(x,y,z)=\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)},$$

xét trên miền $D=\{(x,y,z):x>0,\ y>0,\ z>0,\ xyz=1\}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của f(x,y,z) trên D.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z)=\left(x^3+y^3+x^3\right)\left(\frac{1+xy^2}{z^3}+\frac{1+yz^2}{x^3}+\frac{1+zx^2}{y^3}\right),$$

trên miền $D=\{(x,y,z)\ x>0,\ y>0,\ z>0 \text{ và } xyz=1\}$.

Bài giải :

Lấy (x,y,z) tuỳ ý thuộc D, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3(1+y)(1+z)}{64(1+y)(1+z)}}$$

hay

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq\frac{3x}{4}. \tag{1}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{1+z}{8}+\frac{1+x}{8}\geq\frac{3y}{4}, \tag{2}$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8}\geq\frac{3z}{4}. \tag{3}$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta có

$$f(x,y,z)+\frac{3}{4}\geq\frac{1}{2}(x+y+z). \tag{4}$$

Lại theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \quad \text{(do } xyz = 1\text{)}.$$

Thay lại vào (4) ta đi đến

$$f(x,y,z) \ge \frac{3}{4}, \quad \forall (x, y, z) \in D.$$

Lại thấy $f(1,1,1) = \frac{3}{4}$ và rõ ràng $(1, 1, 1) \in D$.

Từ đó theo định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số, ta có

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{3}{4}.$$

2. Lấy (x,y,z) tuỳ ý thuộc D. Ta có

$$f(x,y,z) = \left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(\frac{1+xy^2}{z^3} + \frac{1+yz^2}{x^3} + \frac{1+zx^2}{y^3}\right) =$$

$$= 3 + \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{z^3}{y^3}\right) +$$

$$+\left(\frac{x^4y^2}{z^3} + \frac{xy^5}{z^3} + \frac{y^4z^2}{x^3} + \frac{yz^5}{x^3} + \frac{x^5z}{y^3} + \frac{x^2z^4}{y^3}\right) + \left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right). \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{z^3}{y^3} \ge 6\sqrt[6]{\frac{x^3}{y^3}\frac{x^3}{z^3}\frac{y^3}{z^3}\frac{y^3}{x^3}\frac{z^3}{x^3}\frac{z^3}{y^3}} = 6, \qquad (2)$$

$$\frac{x^4y^2}{z^3} + \frac{x^2y^4}{z^3} + \frac{y^4z^2}{x^3} + \frac{y^2z^4}{x^3} + \frac{x^4z^2}{y^3} + \frac{x^2z^4}{y^3} \ge$$

$$\ge 6\sqrt[6]{\frac{x^4y^2}{z^3} \cdot \frac{xy^5}{z^3} \cdot \frac{y^4z^2}{x^3} \cdot \frac{yz^5}{x^3} \cdot \frac{x^5z}{y^3} \cdot \frac{x^2z^4}{y^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4y^2}{z^3} + \frac{x^2y^4}{z^3} + \frac{y^4z^2}{x^3} + \frac{y^2z^4}{x^3} + \frac{x^4z^2}{y^3} + \frac{x^2z^4}{y^3} \ge 6xyz = 6, \qquad (3)$$

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \ge 3\sqrt[3]{xy^2 \,.\, yz^2 \,.\, zx^2} = 3xyz = 3. \qquad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1), ta có

$$f(x,y,z) \geq 18, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Vì (1, 1, 1) $\in$ D và f(1, 1, 1) = 18, nên suy ra

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 18.$$

Bài 4.

Cho hàm số

$$f(x,y,z,t) = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t},$$

xét trên miền $D = \{(x,\ y,\ z,\ t) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ t > 0\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của f(x, y, z, t) trên miền D.

Bài giải :

Ta có nhận xét sau đây : nếu a > 0, b > 0 thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}. \tag{1}$$

Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4. \tag{2}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}\ ; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}.$$

Từ đó suy ra (2) đúng, vậy (1) đúng. Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Trở lại bài toán của chúng ta. Trước hết viết lại hàm số đã cho dưới dạng sau :

$$f(x,y,z,t) = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t} + 4 - 4$$

$$= \left(\frac{x-t}{t+y} + 1\right) + \left(\frac{t-y}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y-z}{z-x} + 1\right) + \left(\frac{z-x}{z+t} + 1\right) - 4$$

$$= \frac{x+y}{t+y} + \frac{t+z}{y+z} + \frac{y+z}{z+x} + \frac{z+t}{x+t} - 4$$

$$= (x+y)\left(\frac{1}{t+y} + \frac{1}{z+x}\right) + (z+t)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+t}\right) - 4. \tag{3}$$

Lấy (x, y, z, t) tuỳ ý thuộc D, tức là x > 0, y > 0, z > 0, t > 0.

Từ (1) ta có $\dfrac{1}{t+y} + \dfrac{1}{z+x} \geq \dfrac{4}{x+y+z+t}$, (4)

$$\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+t}\geq\frac{4}{x+y+z+t}. \qquad (5)$$

Từ (3), (4), (5) có

$$f(x,y,z,t)\geq\frac{4(x+y)}{x+y+z+t}+\frac{4(z+t)}{x+y+z+t}-4,\ \text{hay}$$

$$f(x,\ y,\ z,\ t)\geq 0,\quad \forall (x,\ y,\ z,\ t)\in D.$$

Lại có f(1, 1, 1, 1) = 0 mà (1, 1, 1, 1) $\in$ D.

Vì thế suy ra kết quả sau :

$$\min_{(x,y,z,t)\in D} f(x,y,z,t)=0.$$

Chú ý :

Nếu đầu bài đòi hỏi : Tìm mọi giá trị của (x, y, z, t) $\in$ D làm cho hàm số f(x, y, z, t) đạt giá trị nhỏ nhất trên miền D thì ta làm như sau :

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ t + y = z + x (*)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ y + z = x + t (**)

Vì thế các điểm (x, y, z, t) $\in$ D cần tìm phải thoả mãn hệ sau :

$$\begin{cases}t+y=z+x\\ y+z=x+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=z>0\\ x=y>0\end{cases}.$$

Vậy nếu gọi

$$D_1=\{(x,\ y,\ z,\ t): x=y>0\ ;\ t=z>0\},$$

thì D_1 chính là tập hợp mọi điểm (x, y, z, t) $\in$ D thoả mãn yêu cầu đặt ra.

Bài 5.

Cho hàm số $f(x,y)=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$,

xét trên miền $D=\{(x,\ y): x>0, y>0 \text{ và } x^2+y^2=1\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x, y) trên D.

Bài giải :

Viết lại hàm số f(x, y) dưới dạng sau đây :

$$f(x,y)=\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2. \qquad (1)$$

Lấy (x, y) tuỳ ý thuộc D. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2x} \geq \sqrt{2} & (2) \\ y + \dfrac{1}{2y} \geq \sqrt{2} & (3) \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2 & (4) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{xy}} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{2} & (5) \end{cases}$$

Cộng từng vế (2), (3), (4), (5) và để ý đến (1) suy ra

$$f(x,y) \geq 3\sqrt{2} + 4.$$

Như vậy ta có $f(x,y) \geq 3\sqrt{2} + 4, \quad \forall (x,y) \in D.$

Mặt khác để ý dấu bằng đồng thời trong (2), (3), (4), (5) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y \\ x = \dfrac{1}{2x} \\ y = \dfrac{1}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1\ ; x > 0,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do vậy $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 4$ và để ý rằng $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \in D.$

Từ đó ta đi đến kết quả sau :

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3\sqrt{2} + 4.$$

Nhận xét :

Nếu như viết f(x,y) dưới dạng

$$f(x,y) = 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

hoặc $f(x,y) = 2 + \left(x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

Thì khi đó, nếu áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$f(x,y) \geq 8 \qquad (*)$$

Tuy nhiên ta có hai hệ phương trình tương đương :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{x} \\ y = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x} \\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} \\ x > 0,\ y > 0\ ;\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad (**)$$

Mà hệ (**) vô nghiệm, vậy ta có từ (*)

$$f(x,\ y) > 8 \qquad \forall (x,\ y) \in D_4.$$

Từ đó chưa có thể nói gì đến $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$. Đó chính là lí do vì sao phải viết f(x,y) dưới dạng như trên !

Qua đây cũng thấy rõ vai trò của phần 2/ trong các định nghĩa về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên một miền đã cho.

Bài 6.

Tìm giá trị bé nhất của hàm số

$$f(x,y) = x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2}$$

trên miền $D = \{(x,\ y) : x > y,\ y \geq 0\}$

Bài giải :

Với mọi $(x,\ y) \in D$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số dương sau đây

$$2x - 2y\ ;\ y + 1\ ;\ y + 1 \text{ và } \frac{8}{(x - y)(y + 1)^2}$$

ta có

$$(2x - 2y) + 2(y+1) + \frac{8}{(x-y)(y+1)^2} \geq 4\sqrt[4]{2(x-y)(y+1)^2 \cdot \frac{8}{(x-y)(y+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow f(x,\ y) \geq 3. \qquad (1)$$

Như vậy $\forall (x,\ y) \in D$, ta có đánh giá (1). Lại theo bất đẳng thức Cô-si, thì dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2(y+1) \\ 2(y+1) = \dfrac{8}{(x-y)(y+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ y + 1 = \dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vì $(3,\ 1) \in D$ và $f(3,\ 1) = 3$ (2), nên từ (1), (2) suy ra $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3$.

Bài 7.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x,\ y,\ z) = xyz$$

xét trên miền

$$D = \left\{(x,\ y,\ z) : x \geq 0,\ y \geq 0\ ;\ z \geq 0 \text{ và } \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2\right\}$$

Bài giải :

Lấy $(x,\ y,\ z)$ tuỳ ý $\in D$. Khi đó từ định nghĩa của D ta có

$$\frac{1}{1+x} = \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\frac{1}{1+x} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}. \qquad (1)$$

Lập luận tương tự

$$\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+z)(1+x)}}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+x)(1+y)}}. \qquad (3)$$

Nhân từng vế (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 8\frac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \text{ hay}$$

$$xyz \leq \frac{1}{8}. \tag{4}$$

Như vậy ta đã chứng minh được

$$f(x,y,z) \leq \frac{1}{8}, \quad \forall(x, y, z) \in D.$$

Mặt khác $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ mà $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in D$, nên

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{1}{8}.$$

Bài 8.

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

trên miền $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0 \text{ và } x + y + z = 1\}$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x,y) = 2x + 3y + \frac{6}{x} + \frac{10}{y}$ trên miền $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0 \text{ và } x + y \geq 4\}$

Bài giải :

1. Lấy (x, y, z) tuỳ ý thuộc miền D. Ta có

$$f(x,y,z) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{xyz}. \tag{1}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$1 + x = x + y + z + x \geq 4\sqrt[4]{x^2yz}. \tag{2}$$

Lập luận tương tự, có

$$1 + y \geq 4\sqrt[4]{xy^2z}, \tag{3}$$

$$1 + z \geq 4\sqrt[4]{xyz^2}. \tag{4}$$

Nhân từng vế (2), (3), (4) ta có

$$(1+x)(1+y)(1+y) \geq 64xyz. \qquad (5)$$

Từ (1), (5) suy ra

$$f(x,y,z) \geq 64, \quad \forall (x,y,z) \in D. \qquad (6)$$

Mặt khác $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 64$, và $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \in D$, nên ta đi đến

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 64.$$

2. Viết lại hàm số f(x, y) đã cho dưới dạng sau đây

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3x}{2} + \frac{6}{x} + \frac{5y}{2} + \frac{10}{y}. \qquad (1)$$

Lấy (x, y) tuỳ ý $\in$ D, khi đó ta có

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq 2. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\frac{3x}{2} + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{2}.\frac{6}{x}} = 6, \qquad (3)$$

$$\frac{5y}{2} + \frac{10}{y} \geq 2\sqrt{\frac{5y}{2}.\frac{10}{y}} = 10. \qquad (4)$$

Từ (2), (3), (4) đi đến

$$g(x,y) \geq 18 \qquad \forall (x, y) \in D. \qquad (5)$$

Mặt khác (2,2) $\in$ D và f(2,2) = 18, vậy ta có

$$\min_{(x,y)\in D} g(x,y) = 18.$$

Nhận xét :

1. Giả sử rằng có một bạn nào đó làm như sau :

Ta có $2x + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{2x.\frac{6}{x}} = 4\sqrt{3}$. (6)

$$3y + \frac{10}{y} \geq 2\sqrt{3y.\frac{10}{y}} = 2\sqrt{30}. \qquad (7)$$

Từ đó $g(x,y) \geq 4\sqrt{3} + 2\sqrt{30}, \quad \forall (x, y) \in D$.

Xét "lời giải" trên, để ý rằng dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$

$2x = \dfrac{6}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$; còn dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ $3y = \dfrac{10}{y} \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$. Điều đáng nói là $\left(\sqrt{3}, \sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)$ lại $\notin D$

$\left(\text{vì } \sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{10}{3}} < 4\right)$. Vì thế chưa có thể nói gì về $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

Nói khác đi bài toán không "quá đơn giản" như nhiều bạn tưởng.

2. Chìa khoá để giải bài toán trên là tách ra khỏi hàm số ban đầu thành phần $\dfrac{1}{2}(x+y)$. Làm sao lại "nghĩ" ra điều ấy ! Bản chất của vấn đề có thể được lí giải như sau :

Đưa vào số k ($0 < k < 2$), và viết lại hàm số đã cho dưới dạng sau :

$$f(x,y) = k(x+y) + (2-k)x + \frac{6}{x} + (3-k)y + \frac{10}{y}.$$

Lấy (x, y) tuỳ ý $\in$ D, ta có

$$f(x,y) \geq 4k + 2\sqrt{6(2-k)} + 2\sqrt{10(3-k)}. \qquad (*)$$

Dấu bằng trong (*) xảy ra khi và chỉ khi hệ sau thoả mãn

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x = \sqrt{\dfrac{6}{2-k}} \\ y = \sqrt{\dfrac{10}{3-k}}. \end{cases}$$

Vì thế để $(x,y) \in D$, ta cần có

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6}{2-k}} + \sqrt{\dfrac{10}{3-k}} = 4 \\ 0 < k < 2. \end{cases} \qquad (**)$$

Dễ thấy (**) $\Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$.

Đó chính là lí do vì sao ta lại làm xuất hiện thành phần $\dfrac{1}{2}(x+y)$ như trên !

Bài 9.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z)=\frac{x^6}{x^3+y^3}+\frac{y^6}{y^3+z^3}+\frac{z^6}{z^3+x^3}$$

xét trên miền

$$D=\left\{(x,y,z): x>0, y>0.z>0, xy\sqrt{xy}+yz\sqrt{yz}+zx\sqrt{zx}=1\right\}.$$

Bài giải :

Đặt $X=x^3,\ Y=y^3,\ Z=z^3$, thì

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=\min_{(x,y,z)\in D} F(X,Y,Z),\ \text{ở đây}$$

$$F(X,Y,Z)=\frac{X^2}{X+Y}+\frac{Y^2}{Y+Z}+\frac{Z^2}{Z+X}\ \text{và}$$

$$D'\left\{(X,Y,Z): X>0, Y>0, Z>0,\ \sqrt{XY}+\sqrt{YX}+\sqrt{ZX}=1\right\}.$$

Lấy (X,Y,Z) tuỳ ý $\in D'$. Khi đó theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\frac{X^2}{X+Y}+\frac{X+Y}{4}\geq 2\sqrt{\frac{X^2}{X+Y}+\frac{X+Y}{4}}=X.$$

Tương tự có

$$\frac{Y^2}{Y+Z}+\frac{Y+Z}{4}\geq Y,\ \frac{Z^2}{Z+X}+\frac{Z+X}{4}\geq Z.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có

$$F(X,Y,Z)\geq\frac{X+Y+Z}{2}. \qquad (1)$$

Lại theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$X+Y+Z=\frac{1}{2}\left[(X+Y)+(Y+Z)+(Z+X)\right]\geq\sqrt{XY}+\sqrt{YZ}+\sqrt{ZX} \qquad (2)$$

Từ (1) (2) và do $(X,Y,Z)\in D'$ nên có

$$F(X,Y,Z)\geq\frac{1}{2},\ \forall(X,Y,Z)\in D'.$$

Vì $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\in D'$ và $F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$, nên $\min\limits_{(X,Y,Z)\in D} F(X,Y,Z)=\frac{1}{2}$.

Từ đó theo trên, suy ra ngay kết quả sau :

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét :

Cách giải trên là của Phan Huy Đức[1].

Bài 10.

Cho hàm số

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx},$$

xác định trên miền

$$D = \{(x,\ y,\ z) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \text{ và } x + y + z = 1\}.$$

Tìm giá trị bé nhất của f(x, y, z) trên D.

Bài giải :

Với mọi (x, y, z) ∈ D và theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) \geq 9,$$

hay $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx} \geq \frac{9}{xy+yz+zx}$. (1)

Từ (1) suy ra $\forall(x,y,z)\in D$, ta có

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{9}{xy+yz+zx},$$

hay $\forall(x,y,z)\in D$ thì

$$f(x,y,z) \geq \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{9}{xy+yz+zx}. \quad (2)$$

Lại theo bất đẳng thức Cô-si, thì $\forall(x,y,z)\in D$ có

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{xy+yz+zx} + \frac{1}{xy+yz+zx} \geq$$

$$\geq \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)^2}}. \quad (3)$$

[1] Con trai tác giả.

Bây giờ từ (2), (3) suy ra bất đẳng thức sau đây đúng $\forall(x,y) \in D$

$$f(x,y,z) \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}} + \frac{21}{3(xy+yz+zx)}. \qquad (4)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si lại có $\forall(x,y) \in D$

$$\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \leq \frac{x^2+y^2+z^2(xy+yz+zx)}{3} =$$

$$= \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}, \qquad (5)$$

và $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2 = 1$. (6)

Từ (4), (5), (6) ta đi đến bất đẳng thức sau đây đúng $\forall(x,y,z) \in D$

$$f(x,y,z) \geq \frac{3}{\frac{1}{3}} + \frac{21}{1} \quad \text{hay}$$

$$f(x,\ y,\ z) \geq 30, \quad \forall(x,\ y,\ z) \in D. \qquad (7)$$

Vì $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \in D$ và $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 30$ (8)

nên từ (7), (8) suy ra

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 30.$$

Nhận xét :

Nếu bài toán đòi hỏi thêm : Tìm tất cả các giá trị $(x,\ y,\ z) \in D$ để cho $f(x,\ y,\ z)$ đạt giá trị bé nhất, thì ta sẽ làm như sau :

Dấu bằng trong (7) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng trong (1), (3), (5), (6). Theo bất đẳng thức Cô-si, thì điều ấy xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình sau được nghiệm đúng.

$$\begin{cases} xy = yz = zx & (9) \\ x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx & (10) \\ x = y = z & (11) \\ x,\ y,\ z > 0 & (12) \\ x + y + z = 1 & (13) \end{cases}$$

((9) là điều kiện để trong (1) có dấu bằng ; (10) là điều kiện để trong (3) và (5) có dấu bằng ; (11) là điều kiện để trong (6) có dấu bằng ; còn (12) và (13) là điều kiện để $(x,\ y,\ z) \in D$).

Dễ thấy (7), (8), (9), (10), (11) có nghiệm duy nhất $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ là giá trị duy nhất của các biến số thuộc miền D thoả mãn yêu cầu đặt ra.

Bài 11.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{1+x+y} + (1-x)(1-y)(1-z)$$

trên miền $D = \{(x,\ y,\ z) : 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1\ ;\ 0 \le z \le 1\}$.

Bài giải :

Lấy phần tử tuỳ ý $(x,y,z) \in D$, khi đó $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Ngoài ra do vai trò bình đẳng của x, y, z nên ta có thể giả sử $x \ge y \ge z$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\frac{(1-y)(1-z) + (1+y+z)}{3} \ge \sqrt[3]{(1-y)(1-z)(1+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y+z} \ge (1-y)(1-z). \qquad (1)$$

Do $1 - x \ge 0$, nên từ (1) suy ra

$$\frac{1-x}{1+y+z} \ge (1-x)(1-y)(1-z). \qquad (2)$$

Vì $x \ge y \ge z$, và $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ nên hiển nhiên ta có

$$\frac{y}{1+y+z} \ge \frac{y}{z+x+1}, \qquad (3)$$

$$\frac{z}{1+y+z} \ge \frac{z}{1+x+y}. \qquad (4)$$

Cộng từng vế (2), (3), (4) có

$$1 \ge (1-x)(1-y)(1-z) + \frac{x}{1+y+z} + \frac{y}{1+z+x} + \frac{z}{1+x+y}. \qquad (5)$$

Như vậy ta đã chứng minh được $\forall(x, y, z) \in D$, thì

$$f(x, y, z) \leq 1. \qquad (6)$$

Do (1, 1, 1) ∈ D mà f(1, 1, 1) = 1, nên từ đó ta đi đến điều khẳng định

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x, y, z) = 1.$$

Nhận xét :

1. Nếu đầu bài cũng đòi hỏi tìm mọi giá trị (x, y, z) ∈ D để ứng với nó hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất, thì ta phải làm như sau :

Dấu bằng trong (1) xảy ra ⇔ đồng thời có dấu bằng trong (1), (2), (3), (4).

Dấu bằng trong (1 xảy ra ⇔ 1 – b = 1 – c = 1 + b + c

⇔ b = c = 0.

Dấu bằng trong (2) xảy ra ⇔ y = z = 0 hoặc x = 1.

Dấu bằng trong (3) xảy ra ⇔ y = 0 hoặc x = y.

Dấu bằng trong (4) xảy ra ⇔ z = 0 hoặc x = z.

Từ đó suy ra với giả thiết $x \geq y \geq z$, thì dấu bằng trong (5) xảy ra khi và chỉ khi

* Hoặc là y = z = 0
* Hoặc là x = 1 ; y = 1 ; z = 0
* Hoặc là x = 1 ; y = 0 ; z = 1
* Hoặc là x = 1 ; y = 1 ; z = 1.

Như vậy tập hợp tất cả các giá trị cần tìm của các phần tử $(x, y, z) \in D$ làm cho hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bao gồm các phần tử sau :

* Có hai thành phần bằng 0, thành phần thứ ba tuỳ ý.
* Có hai thành phần bằng 1, thành phần thứ ba = 0.
* Có ba thành phần bằng 1.

Chính vì thế, nếu đầu bài chỉ đòi hỏi tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của hàm số trên một miền đã cho, thì chỉ cần làm như định nghĩa để tránh những phức tạp không cần thiết !

Bài 12.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x,y,z)=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z},$$

trên miền

$$D=\{(x,y,z): x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z=1\}.$$

Bài giải :

Lấy (x, y, z) tuỳ ý thuộc miền D. Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}}\le\frac{1-x+\dfrac{2}{3}}{2}. \qquad (1)$$

Lập luận tương tự có

$$\sqrt{(1-y).\frac{2}{3}}\le\frac{1-y+\dfrac{2}{3}}{2}, \qquad (2)$$

$$\sqrt{(1-z).\frac{2}{3}}\le\frac{1-z+\dfrac{2}{3}}{2}. \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) với chú ý x + y + z = 1, ta có

$$\sqrt{\frac{2}{3}}f(x+y+z)\le 2$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)\le\sqrt{6},\quad \forall(x,y,z)\in D.$$

Mặt khác dễ thấy

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\le\sqrt{6}, \text{ và do } \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\in D \text{ nên suy ra}$$

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=\sqrt{6}.$$

Nhận xét :

1. Dễ thấy $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ cũng là phần tử duy nhất của D làm cho f(x, y, z) đạt giá trị lớn nhất nói trên.

2. Bằng cách lập luận hoàn toàn tương tự, ta có kết quả tổng quát sau : Với $n\ge 2$, thì

$$\max_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sqrt{n(n-1)}, \quad \text{ở đây}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{1 - x_1} + \sqrt{1 - x_2} + \ldots + \sqrt{1 - x_n} \text{ và}$$

$$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0 \text{ và } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}.$$

Bài 13.

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz$$

trên miền

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}.$$

Bài giải :

1. Lấy (x, y, z) tuỳ ý ∈ D. Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}. \qquad (1)$$

Rõ ràng $0 \leq xyz < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{(xyz)^2} \geq xyz.$ (2)

Vì thế từ (1) (2) có

$$xy + yz + zx - 2xyz \geq xyz \text{ hay}$$

$$f(x,y,z) \geq 0, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Mặt khác chẳng hạn f(1, 0, 0) = 0 và do (1, 0, 0) ∈ D nên

$$\min_{(x,y,z)} f(x,y,z) = 0.$$

2. Lấy (x,y,z) tuỳ ý ∈ D. Trước hết ta có thể thấy rằng

$$(x + y + z)(x + z - y)(y + z - x) \leq xyz. \qquad (3)$$

Chứng minh (3) như sau :

a) Nếu chỉ có một thừa số trong tích vế trái < 0 thì (3) hiển nhiên đúng

b) Giả sử có hai thừa số nào đó trong tích vế trái <0, chẳng hạn

$$\begin{cases} x + y + z < 0 \\ x + z - y < 0 \end{cases}.$$

Từ đó, sau khi cộng cả hai vế của hai bất đẳng thức trên ta có x < 0. Điều vô lí nhận được chứng tỏ rằng không thể có trường hợp b).

c) Cả ba thừa số ở vế trái đều > 0. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

$(X + Y)(Y + Z)(Z + X) \geq 8XYZ$ nếu $X > 0,\ Y > 0,\ Z > 0$

ta suy ngay ra (3), sau khi đặt $X = y + z - x$; $Y = x + z - y$; $Z = x + y - z$.

Vậy (3) đã được chứng minh với $\forall (x,y,z) \in D$.

Do x + y + z = 1, nên (3) có dạng sau

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) \le xyz$$

$$\Leftrightarrow 1-2(x+y+z)+4(xy+zx).8xyz \le xyz$$

$$\Leftrightarrow 4f(x,y,z) \le 1 + xyz$$

$$\Leftrightarrow f(x,y,z) \le \frac{1}{4}(1+xyz), \qquad \forall (x,y,z) \in D. \tag{4}$$

Lại theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\frac{1}{4}(1+xyz) \le \frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\right] = \frac{1}{4}.\frac{28}{27} = \frac{7}{27}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) ta đi đến

$$f(x,y,z) \le \frac{7}{27}, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Lại có $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$ và do $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \in D$ nên

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{7}{27}.$$

Nhận xét :

1. Muốn tìm hết các giá trị của biến số của miền D làm cho hàm số f(x, y, z) đạt giá trị bé nhất thì ta làm như sau (nếu đầu bài yêu cầu) :

Điều đó xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) và (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = yz = zx & (*) \\ \sqrt[3]{(xyz)^2} = xyz & (**) \end{cases}$$

Do $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$ và $xyz < 1$ nên từ (**) suy ra xyz = 0.

Kết hợp với x + y + z = 1, thì

$$(*)\ (**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = z = 0 \text{ hoặc} \\ y = 1, x = y = 0 \text{ hoặc} \\ z = 1, x = y = 0. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số f(x, y, z) đạt giá trị bé nhất trên D tại ba phần tử sau (1, 0, 0) ; (0, 1, 0) ; (0, 0, 1) của miền D.

2. Dễ thấy $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ là phần tử duy nhất của D làm cho hàm số f(x, y, z) đạt giá trị lớn nhất trên D.

Bài 14.

Tìm giá trị bé nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = \frac{2}{x^3(y+z)} + \frac{2}{y^3(x+z)} + \frac{2}{z^3(x+y)}$$

trên miền

$$D = \{(x,\ y,\ z) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\ ;\ xyz = 1\}.$$

Bài giải :

Thực hiện phép đổi biến $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$, $Z = \frac{1}{z}$. Khi đó

$$\frac{2}{x^3(y+z)} + \frac{2}{y^3(z+x)} + \frac{2}{z^3(x+y)} = \frac{2X^3YZ}{Y+Z} + \frac{2Y^3ZX}{Z+X} + \frac{2Z^3XY}{X+Y}.$$

Mặt khác do xyz = 1 nên XYZ = 1. Vì thế ta có

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \min_{(X,Y,Z)\in D} F(X,Y,Z),\text{ ở đây}$$

$$F(X,Y,Z) = 2\left(\frac{X^2}{Y+Z} + \frac{Y^2}{Z+X} + \frac{Z^2}{X+Y}\right),$$

$$D' = \{(X,\ Y,\ Z) : X > 0,\ Y > 0,\ Z > 0 \text{ và } XYZ = 1\}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có với mọi $(X,\ Y,\ Z) \in D'$ thì

$$\frac{X^2}{Y+Z} + \frac{Y+Z}{4} \geq X,$$

$$\frac{Y^2}{Z+X} + \frac{Z+X}{4} \geq Y,$$

$$\frac{Z^2}{X+Y} + \frac{X+Y}{4} \geq Z.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{2}F(X,Y,Z) \geq \frac{X+Y+Z}{2}. \quad (1)$$

Lại theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$X+Y+Z \geq 3\sqrt[3]{XYZ} = 3. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$F(X,Y,Z) \geq 3,\quad \forall (X,Y,Z) \in D'.$$

Mặt khác F(1, 1, 1) = 3 nên

$$\min_{(X,Y,Z)\in D} F(X,Y,Z) = 3.$$

Do vậy $\min_{(x,y,z)} f(x,y,z) = 3.$

Bài 15.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

trên miền

$$D = \{(x,\ y,\ z) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + z = 1\}.$$

Bài giải :

Lấy (x, y, z) tuỳ ý $\in$ D. Ta có

$$f(x,\ y,\ z) = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right). \tag{1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si có

$$\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)\left[(x+1) + (y+1) + (z+1)\right] \geq 9. \tag{2}$$

Do x + y + z = 1, nên từ (2) có

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4}. \tag{3}$$

Bây giờ từ (1) và (3) suy ra

$$f(x,y,z) \leq \frac{3}{4}, \text{ và do } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in D, \text{ nên}$$

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét :

1. Bằng lập luận tương tự, ta có kết quả sau :

$$\max_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{n}{n+1}, \text{ ở đây}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_1}{x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_2 + 2} + \frac{x_n}{x_n + n} \text{ và}$$

$$D = \left\{(x_1, ..., x_n) : x_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,n} \text{ và } x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\right\}.$$

Bài 16.

Cho hàm số

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z},$$

xét trên miền $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Tìm giá trị bé nhất của hàm số f(x, y, z) trên miền D.

Bài giải :

Lấy (x, y, z) tuỳ ý $\in$ D. Ta có

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$$

$$= (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) -$$

$$-3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right).$$

Do $(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left[(x+y) + (y+z) + (z+x)\right]\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right),$$

nên theo bất đẳng thức Cô-si có

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \ge \frac{9}{2}.$$

Vẫn theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2 \; ; \; \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \ge 2 \; ; \; \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \ge 2.$$

Vì thế $\forall (x, y, z) \in D$ bất đẳng thức sau luôn đúng

$$f(x, y, z) \ge \frac{9}{2} - 3 + 6 \quad \text{hay} \quad f(x,y,z) \ge \frac{15}{2}.$$

Mặt khác chẳng hạn

$f(1,\ 1,\ 1) = \dfrac{15}{2}$, vì do $(1,\ 1,\ 1) \in D$, nên ta đi đến kết luận sau

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{15}{2}.$$

Nhận xét :

Nếu trong bài toán trên ta làm như sau :

Lấy $(x,\ y,\ z)$ tuỳ ý $\in D$. Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{x} \ge 2, \qquad (1)$$

$$\frac{y}{z+x} + \frac{z+x}{y} \ge 2, \qquad (2)$$

$$\frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{z} \ge 2. \qquad (3)$$

Từ đó suy ra $f(x,y,z) \ge 6$. (4)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{y+z} = \dfrac{y+z}{x} \Leftrightarrow (x)^2 = (y+z)^2$

$\Leftrightarrow y + z = x$ (do $x,\ y,\ z > 0$) (5)

Tương tự dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow z + x = y$ (6)

dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x + y = z$. (7)

Vì $x,\ y,\ z > 0$ suy ra không tồn tại $(x,\ y,\ z) \in D$ đồng thời thoả mãn (5), (6), (7). Điều đó có nghĩa là không tồn tại $(x,\ y,\ z) \in D$ để có $f(x,\ y,\ z) = 6$. Vậy không thể kết luận được

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 6$$

(và thực tế không có điều đó !) Qua đây các bạn thấy rõ tầm quan trọng của phần 2 trong các định nghĩa về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên miền D đã cho.

Bài 17.

Cho hàm số $f(x,\ y) = x^2y(4 - x - y)$ xét trên miền

$$D = \{(x,\ y) : x \ge 0,\ y \ge 0\ ;\ x + y \le 6\}$$

Tìm giá trị lớn và nhỏ nhất của $f(x,\ y)$ trên miền D.

Bài giải :

1. Đặt $D_1 = \{(x,\ y) : x \ge 0,\ y \ge 0\ ;\ 4 \le x + y \le 6\}$

$D_2 = \{(x,\ y) : x \ge 0,\ y \ge 0\ ;\ x + y \le 4\}$

Khi đó dễ thấy $D = D_1 \cup D_2$

Theo tính chất 4 (nguyên lí phân rã), ta có

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \max\left\{\max_{(x,y)\in D_1} f(x,y)\,;\ \max_{(x,y)\in D_2} f(x,y)\right\}. \qquad (1)$$

Lấy (x, y) tuỳ ý $\in D_1$ thì $4 - x - y \le 0$, do vậy

$$f(x,y) \le 0, \qquad \forall (x,y) \in D_1.$$

Mặt khác $f(2, 2) = 0$ và do $(2, 2) \in D_1$.

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 0. \qquad (2)$$

Lấy (x,y) tuỳ ý $\in D_2$, tức là $x \ge 0,\ y \ge 0\ ;\ 4 - x - y \ge 0$.

Khi đó theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$f(x,y) = 4\frac{x}{2}\frac{x}{2}y(4-x-y) \le 4\left[\frac{\frac{x}{2}\frac{x}{2}y(4-x-y)}{4}\right]^4$$

$$\Rightarrow f(x,y) \le 4, \qquad \forall (x,y) \in D_2$$

Mặt khác $f(2, 1) = 4$ và do $(2, 1) \in D_2 \Rightarrow$

$$\max_{(x,y)\in D_2} f(x,y) = 4. \qquad (3)$$

Bây giờ từ (1), (2), (3) suy ra

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \max\{0, 4\} = 4.$$

2. Vẫn theo nguyên lí phân rã (tính chất 4), ta có

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \min\left\{\min_{(x,y)\in D_1} f(x,y),\ \min_{(x,y)\in D_2} f(x,y)\right\}. \qquad (4)$$

Theo tính chất 2

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -\max_{(x,y)\in D}\big(-f(x,y)\big). \qquad (5)$$

Ta có $-f(x,y) = x^2y(xy + y - 4)$.

Vẫn theo nguyên lí phân rã (tính chất 4), thì

$$\max_{(x,y)\in D}\big(-f(x,y)\big) = \max\left\{\max_{(x,y)\in D_1}\big(-f(x,y)\big);\ \max_{(x,y)\in D_2}\big(-f(x,y)\big)\right\}. \qquad (6)$$

Lấy (x, y) tuỳ ý $\in D_2$, thì $x + y - 4 \le 0$, suy ra

$$-f(x,y) \le 0,\ \forall (x,y) \in D_2.$$

Lại có $-f(2, 2) = 0$, vả lại vì $(2, 2) \in D_2$ nên

$$\max_{(x,y)\in D}\left(-f(x,y)\right) = 0. \qquad (7)$$

Lấy (x, y) tuỳ ý $\in D_1$, thì $x + y - 4 \geq 0$, nên theo bất đẳng thức Cô-si

$$-f(x,y) = 4\frac{x}{2}.\frac{x}{2}y(x+y-4) \leq \left[\frac{\frac{x}{2}.\frac{x}{2}y(x+y-4)}{4}\right]^4$$

$$\Rightarrow -f(x,y) \leq 4\left(\frac{x+y-2}{2}\right)^4.$$

Vì $(x, y) \in D_1$, nên $x + y - 2 \leq 4 \Rightarrow -f(x,y) \leq 64, \quad \forall (x,y) \in D_1$.

Lại có $-f(4, 2) = 64$ với $(4, 2) \in D_1$, nên

$$\max_{(x,y)\in D}\left(-f(x,y)\right) = 64. \qquad (8)$$

Bây giờ từ (6), (7), (8) có $\max\limits_{(x,y)\in D}\left(-f(x,y)\right) = \max\{0, 64\} = 64$.

Do vậy $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -64$.

Tóm lại ta đi đến kết quả sau :

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 4 \text{ và } \min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -64.$$

Bài 18.

Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số

$$f(x,y) = x + \frac{1}{y(x-y)}\ ;\ g(x,y) = x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2}$$

$$h(x,y) = x + \frac{1}{y(x-y)^2} \text{ và } k(x,y) = x + \frac{1}{xy(x-y)},$$

trên cùng miền $D = \{(x,y) : x > y > 0\}$.

Bài giải :

Lấy (x,y) tuỳ ý $\in$ D. Khi đó theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$x + \frac{1}{y(x-y)} = y + (x-y) + \frac{1}{y(x-y)} \geq 3\sqrt[3]{y(x-y)\frac{1}{y(x-y)}}$$

$$\Rightarrow f(x,y) \geq 3, \quad \forall (x,y) \in D. \qquad (1)$$

$$x+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}=(x-y)+\frac{y+1}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}-1$$
$$\geq 4\sqrt[4]{(xy)\left(\frac{y+1}{2}\right)^2\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}}-1$$
$$\Rightarrow g(x,y)\geq 3,\qquad \forall(x,y)\in D \tag{2}$$
$$x+\frac{1}{y(x-y)^2}=y+\frac{x-y}{2}+\frac{x-y}{2}+\frac{1}{(x-y)^2}$$
$$\geq 4\sqrt[4]{y\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\frac{1}{(x-y)^2}}$$
$$\Rightarrow h(x,y)\geq 2\sqrt{2},\qquad \forall(x,y)\in D. \tag{3}$$
$$y(x-y)\leq\left[\frac{y+(x-y)}{2}\right]^2=\frac{x^2}{4}$$
$$\Rightarrow x+y(x-y)\geq x+\frac{4}{x^3}. \tag{4}$$

Lại theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x+\frac{4}{x^3}=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{4}{x^3}\geq 4\sqrt[4]{\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{4}{x^3}}$$

hay $x+\dfrac{4}{x^3}\geq\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{12}.$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra

$$k(x,y)\geq\frac{4}{3}\sqrt[4]{12},\quad \forall(x,y)\in D. \tag{6}$$

Vẫn theo bất đẳng thức Cô-si, thì

- Dấu bằng trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-y\\ y=\dfrac{1}{y(x-y)}\\ x>y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\ y=\dfrac{1}{y^2}\\ x>y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}.$$

- Dấu bằng trong (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{y+1}{2}\\ x-y=\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+1=2(x-y)\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1.\end{cases}$$

- Dấu bằng trong (3) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x-y}{2} \\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt[3]{2} \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{3} \\ y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

- Dấu bằng trong (4) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{4}{x^3} \\ y = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{12} \\ y = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{12}. \end{cases}$$

Như vậy ta có

$$f(2, 1) = 3,$$
$$g(2, 1) = 3,$$
$$h\left(\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

và $h\left(\sqrt[4]{12}, \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}\right) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{12}.$

Rõ ràng các phần tử (2, 1), $\left(\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right)$ và $\left(\sqrt[4]{12}, \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}\right)$ đều thuộc D.

Vì lẽ đó kết hợp với (1), (2), (3), (4) suy ra

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3\ ; \quad \min_{(x,y)\in D} g(x,y) = 3\ ;$$

$$\min_{(x,y)\in D} h(x,y) = 2\sqrt{2} \text{ và } \min_{(x,y)\in D} k(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{12}.$$

Bài 19.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2}.$$

trên miền $D = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0 \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Bài giải :

Lấy (x, y, z) tuỳ ý ∈ D. Do x > 0, y > 0, z > 0 và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên

$$0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\ ;\ 0 < z < 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số $2x^2$, $1 - x^2$, $1 - x^2$, ta có

$$2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)\geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2(1-x^2)^2\leq \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow x(1-x^2)\leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1-x^2}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^2+z^2}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2. \qquad (1)$$

Lập luận tương tự có

$$\frac{y}{z^2+x^2}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2, \qquad (2)$$

$$\frac{z}{x^2+y^2}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2. \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) và chú ý là $x^2+y^2+z^2=1$ suy ra

$$f(x,y,z)\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mặt khác do $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\in D$ và $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

nên suy ra

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 20.

1. Cho hàm số $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, xét trên miền

$$D=\left\{(x,y,z): x>0,\ y>0,\ z>0 \text{ và } x^{2002}+y^{2002}+z^{2002}=3\right\}$$

Tìm giá trị lớn nhất của f(x,y,z) trên miền D.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y,z)=\frac{x^{20}}{y^{11}}+\frac{y^{20}}{z^{11}}+\frac{z^{20}}{x^{11}}$

trên miền $D=\{(x,y,z): x>0,\ y>0,\ z>0 \text{ và } x+y+z=2001.$

Bài giải :

Lấy (x,y,z) tuỳ ý ∈ D.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2000 số 1 và 2 số x^{2002}, ta có

$$\frac{\underbrace{1+\ldots+1}_{2000\text{ số}}+x^{2002}+x^{2002}}{2002}\geq\sqrt[2002]{x^{2002}.x^{2002}}$$

hay $\dfrac{2000+2x^{2002}}{2002}\geq x^2.$ (1)

Lập luận tương tự có

$$\frac{2000+2y^{2002}}{2002}\geq y^2. \quad (2)$$

$$\frac{2000+2z^{2002}}{2002}\geq z^2. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) và có

$$\frac{3\ .\ 2000+2(x^{2001}+y^{2002}+z^{2002})}{2002}\geq x^2+y^2+z^2. \quad (4)$$

Vì $(x,y,z)\in D\Rightarrow x^{2002}+y^{2002}+z^{2002}=3,$ nên từ (4) có

$$f(x,y,z)\leq 3.$$

Như thế $f(x,y,z)\leq 3,\quad \forall(x,y,z)\in D.$

Mặt khác f(1, 1, 1) = 3 và do (1, 1, 1) ∈ D, nên suy ra

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=3.$$

2. Lấy (x,y,z) tuỳ thuộc D. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 20 số sau :

11 số y, 8 số 667, và số $\dfrac{x^{20}}{y^{11}667^8}$, ta có

$$\frac{x^{20}}{y^{11}667^8}+11y+8.667\geq 20\sqrt[20]{\frac{x^{20}}{y^{11}667^8}.y^{11}.667^8}=20x. \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự có

$$\frac{y^{20}}{z^{11}667^8}+11y+8.667\geq 20y, \quad (2)$$

$$\frac{z^{20}}{x^{11}667^8}+11x+8.667\geq 20z. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3), suy ra

$$\frac{1}{667^8}f(x,y,z)+11(x+y+z)+24.667\geq 20(x+y+z). \quad (4)$$

Vì x + y + z = 2001, nên từ (4) có

$$\frac{f(x,y,z)}{667^8}+16008\geq 18009$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)\geq 2001.667^8=3.667^9$$

Vậy $f(x,y,z)\geq 3.667^9$, $\forall(x,y,z)\in D$.

Lại thấy (667, 667, 667) $\in$ D và f(667, 667, 667) = 3.667^9, nên đi đến kết quả sau :

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=3.667^9.$$

Bài 21.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x,\ y,\ z)=x^3y+y^3z+z^3x$ trên miền

$$D=\{(x,\ y,\ z):x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ ;\ x+y+z=1\}.$$

Bài giải :

Lấy (x,y,z) tuỳ ý $\in$ D. Luôn có thể cho rằng $x=\max\{x,y,z\}$

(do đó suy ra $y^3z\leq x^2yz,\ z^3x\leq z^2x^2$). Vì vậy

$$f(x,\ y,\ z)=x^3y+y^3z+z^3x\leq x^3y+x^2yz+\frac{1}{2}z^3x+\frac{1}{2}z^3x$$

$$\leq x^3y+x^2yz+\frac{1}{2}zx^3+\frac{1}{2}z^2x^2=x^2(x-z)\left(y+\frac{z}{2}\right).$$

Tóm lại

$$f(x,y,z)\leq x^2(x+z)\left(y+\frac{z}{2}\right). \qquad (1)$$

Chú ý là

$x^2(x+z)\left(y+\frac{z}{2}\right)=3^3\left[\frac{x}{3}.\frac{x}{3}.\frac{x+z}{3}\left(y+\frac{z}{2}\right)\right]$, vì thế theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$VF(1)\leq 3^3\left[\frac{\frac{x}{3}.\frac{x}{3}.\frac{x+z}{3}+\left(y+\frac{z}{2}\right)}{4}\right]^4=3^3\left(\frac{x+y+z}{4}\right)^4. \qquad (2)$$

Do x + y + z = 1, nên từ (1), (2) đi đến

$$f(x,y,z) \le \frac{3^3}{4^4}, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Mặt khác ta có $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right) \in D$ và $f\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right) = \frac{3^3}{4^4}$. Do đó ta đi đến kết luận sau đây :

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{27}{81}.$$

Nhận xét :

1. Ta giải thích vì sao lại chọn điểm $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right)$ như trên

Để trong (2) có dấu bằng ta cần có

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{x+z}{3} = y + \frac{z}{2} \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Chú ý là với $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = 0$ làm cho trong (1) cũng có dấu bằng. Ngoài ra, qua cách giải thích trên ta thấy chỉ có các điểm sau đây của miền D

$$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right) ; \left(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}\right) ; \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right) ; \left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) ; \left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right) ; \left(0,\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$$

làm cho f(x,y,z) đạt giá trị lớn nhất trên D.

Bài 22.

Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3},$$

$$h(x,y,z) = \frac{yz}{z^2(y+z)} + \frac{zx}{y^2(y+x)} + \frac{xy}{z^2(x+y)},$$

và $g(x,y,z) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{3}{x+y+z}$

xét cùng trên miền $D = \{(x,y,z) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \text{ và } xyz = 1\}$.

Bài giải :

a) Lấy $(x,y,z) \in D$ tuỳ ý. Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x}{6} + \ldots + \frac{x}{6}\right)}_{6 \text{ số}} + \left(\frac{y^2}{6} + \frac{y^2}{6} + \frac{y^2}{6}\right) + \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{6}\right) \geq 11\sqrt[11]{\frac{x^6y^6z^6}{6^{11}}}.$$

Do $xyz = 1$, nên ta có $f(x,y,z) \geq \dfrac{11}{6}, \quad \forall (x,y,z) \in D$

Mặt khác $f(1,1,1) = \dfrac{11}{6}$, và do $(1, 1, 1) \in D$, nên

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{11}{6}.$$

b) Lấy $(x,y,z) \in D$, sau đó đặt $x = \dfrac{1}{X}$, $y = \dfrac{1}{Y}$, $z = \dfrac{1}{Z}$.

Như vậy sẽ có $X > 0$, $Y > 0$, $Z > 0$ và $XYZ = 1$. Khi đó ta có

$$h(x,y,z) = \frac{X^2}{Y+Z} + \frac{Y^2}{Y+Z} + \frac{Z^2}{Z+X}$$

$$= \frac{X^2 + X(Y+Z)}{Y+Z} + \frac{Y^2 + Y(Z+X)}{Z+X} + \frac{Z^2 + Z(X+Y)}{X+Y} - (X+Y+Z)$$

$$= (X+Y+Z)\left(\frac{X}{Y+Z} + \frac{Y}{Z+X} + \frac{Z}{Y+Z} - 1\right). \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$X + Y + Z \geq 3\sqrt[3]{XYZ} = 3,$$

$$\left(\frac{X}{Y+Z} + \frac{Y}{Z+X} + \frac{Z}{Y+Z} - 1\right) \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Vì thế từ (1) suy ra

$$h(x,y,z) \geq \frac{3}{2}, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Mặt khác $h(1,1,1) = \dfrac{3}{2}$, vả lại $(1, 1, 1) \in D$ nên

$$\min_{(x,y,z)\in D} h(x,y,z) = \frac{3}{2}.$$

c) Ta có $g(x,y,z)=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{3}{x+y+z}$

$$=\frac{x+y+z}{xyz}+\frac{3}{x+y+z}.$$

Lấy $(x,y,z)\in D$, khi đó do $xyz = 1$, nên

$$g(x,y,z)=x+y+z+\frac{3}{x+y+z}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$

$$\Rightarrow\ x+y+z\ge 3. \quad (3)$$

Rõ ràng $\forall(x,y,z)\in D$, thì

$$g(x,y,z)\ge 4. \quad (4)$$

Thật vậy

$$(4)\Leftrightarrow\ (x+y+z)+\frac{3}{(x+y+z)}\ge 4$$

$$\Leftrightarrow\ (x+y+z)^2-4(x+y+z)+3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x+y+z-1)(x+y+z-3)\ge 0. \quad (5)$$

Theo (3), thì (5) đúng, vì thế (4) đúng.

Mặt khác $(1, 1, 1)\in D$ và $g(1, 1, 1) = 4$, nên từ (4) suy ra

$$\min_{(x,y,z)\in D} g(x,y,z)=4.$$

Bài 23.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z)=\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$$

và giá trị lớn nhất của các hàm số

$$g(x,y,z)=x+16xyz,$$

$$h(x,y,z)=x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz},$$

trên miền

$$D=\{(x,y,z): x>0,\ y>0,\ z>0 \text{ và } x+y+z=1\}.$$

Bài giải :

a) Lấy (x,y,z) tuỳ ý thuộc D. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$2+\frac{1}{x}=1+1+\frac{x+y+z}{x}=1+1+1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\ge 5\sqrt[5]{\frac{yz}{x^2}}.$$

Tương tự

$$2+\frac{1}{y}\geq 5\sqrt[5]{\frac{zx}{y^2}},$$

$$2+\frac{1}{z}\geq 5\sqrt[5]{\frac{xy}{z^2}}.$$

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên và thấy

$$f(x,y,z)\geq 125,\quad \forall(x,y,z)\in D.$$

Mặt khác do $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\in D$ và $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=125$, nên

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=125.$$

b) Lấy (x, y, z) $\in$ D, ta có (để ý rằng x + y + z = 1)

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x+16xyz \\ &= 1-(y+z)+16yz(1-y-z) \\ &= 1+16yz-(y+z)(1+16yz). \qquad (1) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$y+z\geq 2\sqrt{yz},$$

$$1+16yz\geq 8\sqrt{yz}.$$

Vì thế ta đi đến

$$(y+z)(16yz+1)\geq 16yz. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$g(x,y,z)\leq 1,\quad \forall(x,y,z)\in D. \qquad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ 16yz=1 \\ x+y+z=1 \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=z=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Vì $g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=1$, nên kết hợp với (3) ta thu được kết quả sau

$$\max_{(x,y,z)\in D} g(x,y,z)=1.$$

c) Lấy (x,y,z) $\in$ D. Ta có

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{x.4y.16z}. \\ &= x+\frac{1}{2}\sqrt{x.4y}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z}. \qquad (4) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sqrt{x.4y} \le \frac{x+4y}{2}, \tag{5}$$

$$\sqrt[3]{x.4y.16z} \le \frac{x.4y.16z}{3}. \tag{6}$$

Từ (4), (5), (6) suy ra

$$h(x,y,z) \le x + \frac{x+4y}{4} + \frac{x+4y+16z}{12}$$

$$\Rightarrow h(x,y,z) \le \frac{4}{3}(x,y,z).$$

Vì x + y + z = 1, nên

$$h(x,y,z) \le \frac{4}{3}, \quad \forall(x,y,z) \in D. \tag{7}$$

Dấu bằng xảy ra trong (7) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 4y = 16z \\ x+y+z=1 \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{21} \\ y = \dfrac{4}{21} \\ z = \dfrac{1}{21}. \end{cases}$

Vì $h\left(\frac{16}{21}, \frac{4}{21}, \frac{1}{21}\right) = \frac{4}{3}$ và do $\left(\frac{16}{21}, \frac{4}{21}, \frac{1}{21}\right) \in D$ nên có

$$\max_{(x,y,z)\in D} h(x,y,z) = \frac{4}{3}.$$

Bài 24.

Cho hàm số $f(x,y) = x^2 + 3x + y^2 + 3y + \dfrac{9}{x^2+y^2+1}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của f(x,y) trên miền

$$D = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0 \text{ và } xy = 1\}.$$

Bài giải :

Lấy (x,y) tuỳ ý thuộc D. Ta có

$$f(x,y) = (x^2+y^2+1) + 3x + 3y + \frac{9}{x^2+y^2+1} - 1.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$f(x,y) \ge 4\sqrt[4]{3x.3y.(x^2+y^2+1).\frac{9}{x^2+y^2+1}} - 1 \ \text{ hay}$$

$$f(x,y) \ge 4\sqrt[4]{81xy} - 1.$$

Do xy = 1, nên có $f(x,y) \ge 11, \quad \forall (x,y) \in D$.

Lại thấy f(1, 1) = 11 vì do (1, 1) $\in$ D, nên suy ra $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 11$.

Bài 25.

Tìm giá trị bé nhất của hàm số

$$f(x,y,z,t) = \frac{2z + \frac{1}{z} + t + \frac{2}{t}}{x^2 + y^2}$$

trên miền

$$D = \{(x,y,z,t) : 0 < y \le x \le 4 \; ; x + y \le 7 \; ; 2 \le z \le 3 \le t\}.$$

Bài giải :

Lấy (x,y,z,t) tuỳ ý $\in$ D.

Do $x \le 4$ và $x - y \ge 0 \Rightarrow x(x - y) \le 4(x - y)$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 4 hoặc x = y.

Do $y > 0$ và $x + y \le 7$ nên $y(x + y) \le 7y$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x + y \le 7$.

Từ (1) và (2) sau khi cộng từng vế của chúng ta được

$$x^2 + y^2 \le 4x + 3y = x + 3(x + y) \le 4 + 21 = 25. \tag{3}$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = 4 \; ; \; y = 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$2z + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{4} + \frac{7z}{4} \ge 2\sqrt{\frac{1}{z}.\frac{z}{4}} + \frac{7z}{4}.$$

Vì $z \ge 2$ nên $2z + \frac{1}{z} \ge \frac{9}{2}$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} = \frac{z}{4} \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad z = 2.$

Lại lập luận tương tự ta có

$$\frac{2}{t} + t = \frac{2}{9}t + \frac{2}{t} + \frac{7}{9}t \ge 2\sqrt{\frac{2}{9}t\frac{2}{t}} + \frac{7}{9}t.$$

Vì $t \ge 3$ nên

$$\frac{2}{t} + t \ge \frac{11}{3}. \tag{5}$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{9}t = \frac{2}{t} \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$

Từ (3), (4), (5) có

$$f(x,y,z,t) \geq \frac{\frac{9}{2} + \frac{11}{3}}{25}$$

hay $f(x,y,z,t) \geq \frac{49}{150}$, $\forall(x,y,z,t) \in D$.

Mặt khác $f(4,3,2,3) = \frac{49}{150}$ và $(4,3,2,3) \in D$ nên ta đi đến kết quả

$$\min_{(x,y,z,t)\in D} f(x,y,z,t) = \frac{49}{150}.$$

Bài 26.

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z) = \frac{xy\sqrt{z-1} + yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3}}{xyz},$$

trên miền $D = \{(x,y,z) : x \geq 2,\ y \geq 3,\ z \geq 1\}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$$

trên miền $D = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$.

Bài giải :

1. * Lấy $(x,y,z) \in D$ tuỳ ý. Ta có

$$f(x,y,z) \geq 0$$

Mặt khác $f(2, 3, 1) = 0$, và do $(2, 3, 1) \in D$ nên

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 0$$

* Ta đưa $f(x,y,z)$ về dạng sau

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x-2}}{x} + \frac{\sqrt{y-3}}{y} + \frac{\sqrt{z-1}}{z}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$\sqrt{(z-1).1} \leq \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-1}}{z} \leq \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(y-3).3} \le \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-3}}{y} \le \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\sqrt{(x-2).2} \le \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Từ đó sau khi cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta đi đến

$$f(x,y,z) \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Lại thấy $f(4,6,2) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Từ đó suy ra $\max\limits_{x \in D} f(x,y,z) \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Lấy $x \in D$ tuỳ ý, tức là $0 \le x \le 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sqrt{4(1-x^2).x^2} \le \frac{4(1-x^2)+x^2}{2} = \frac{4-3x^2}{2}$$

$$\Rightarrow 13\sqrt{x^2-x^4} \le \frac{52-39x^2}{4}. \qquad (1)$$

Lại theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$\sqrt{9x^2.4(1+x^2)} \le \frac{9x^2+4(1+x^2)}{2} = \frac{13x^2+4}{2}$$

$$\Rightarrow 9\sqrt{x^2+x^4} \le \frac{39x^2+12}{4}. \qquad (2)$$

Cộng từng vế (1), (2) và có

$$f(x) \le 16, \quad \forall x \in D. \qquad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(1-x^2) = x^2 \\ 9x^2 = 4(1+x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Như thế ta có $\frac{2\sqrt{5}}{5} \in D$ và $f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 16$.

Kết hợp với (3) suy ra $\max\limits_{x \in D} f(x) = 16$.

Bài 27.

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y,z)=\frac{y-2}{x^2}+\frac{z-2}{y^2}+\frac{x-2}{z^2}$$

trên miền $D=\{(x,y,z): x>1,\ y>1,\ z>1\ ;\ x+y+z=xyz\}$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số

$$f(x,y,z)=xyz$$

trên miền $D=\left\{(x,y,z): x^2+2y^2+2x^2z^2+y^2z^2+3x^2y^2z^2=9\right\}$.

Bài giải :

1. Lấy (x,y,z) tuỳ ý $\in$ D, ta có

$$x>1,\ y>1,\ z>1 \text{ và } x+y+z=xyz.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1. \tag{1}$$

Ta có $f(x,y,z)=\dfrac{y-2}{x^2}+\dfrac{z-2}{y^2}+\dfrac{x-2}{z^2}$

$$=\frac{y-2+x}{x^2}+\frac{z-2+y}{y^2}+\frac{x-2+y}{z^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{(x-1)+(y-1)}{x^2}+\frac{(y-1)+(z-1)}{y^2}+\frac{(z-1)+(x-1)}{z^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=(x-1)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\right)+(y-1)\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)+(z-1)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cô-si và chú ý là $x>1$, $y>1$, $z>1$, ta thu được bất đẳng thức sau

$$f(x,y,z)\ge\frac{2(x-1)}{xz}+\frac{2(y-1)}{yx}+\frac{2(z-1)}{zy}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra

$$f(x,y,z)\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-2. \tag{3}$$

Hiển nhiên ta có

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\ge3\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right). \tag{4}$$

Bây giờ từ (1), (3), (4) có

$$f(x,y,z) \geq \sqrt{3} - 2, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Do $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \leq D_1$ và $f\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 2$, nên

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \sqrt{3} - 2.$$

2. Lấy $(x,y,z) \in D$ tuỳ ý. Theo định nghĩa của D ta có

$$x^2 + 2y^2 + 2x^2z^2 + y^2z^2 + 3x^2y^2z^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + y^2 + x^2z^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2 = 9 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$VT(*) \geq 9\sqrt[9]{x^{12}y^{12}z^{12}}.$$

Vì thế từ (*) suy ra $|xyz| \leq 1$, hay

$$-1 \leq f(x,y,z) \leq 1, \qquad \forall (x,y,z) \in D.$$

Do $(-1,\ 1,\ 1) \in D$ và $f(-1,\ 1,\ 1) = -1$

$(1,\ 1,\ 1) \in D$ và $f(1,\ 1,\ 1) = 1$, nên

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 1\ ; \quad \min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = -1.$$

Bài 28.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x,y) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ trên miền

$$D = \left\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3 + y^3 = 1\right\}.$$

Bài giải :

Đặt

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2\sqrt[5]{2}}\ ; \qquad \beta = \frac{2\sqrt[5]{2}}{1 + 2\sqrt[5]{2}}.$$

Giả sử (x, y) là điểm tuỳ ý của D. Khi đó theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x^3 + 5\alpha = x^3 + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha \geq 6\sqrt[6]{x^3\alpha^5}$$

$$\Rightarrow x^3 + 5\alpha \geq 6\sqrt{x}.\sqrt[6]{\alpha^5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \leq \frac{x^3 + 5\alpha}{6\sqrt[6]{\alpha^5}}. \qquad (1)$$

Tương tự ta có

$$2\sqrt{y} \le \frac{y^3 5\beta}{3\sqrt[6]{\beta^5}}. \tag{2}$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có

$$f(x,y) \le \frac{x^3 + y^3 + 5(\alpha+\beta)}{6\sqrt[6]{\alpha^5}}. \tag{3}$$

$\left(\text{Chú ý là } \sqrt[6]{\beta^5} = \dfrac{2}{\sqrt[6]{(1+2^5\sqrt{2})^5}} = 2\sqrt[6]{\alpha^5}\right)$

Vì $x^3 + y^3 = 1$ và $\alpha + \beta = 1$, nên từ (3) suy ra $\forall (x,y) \in D$ ta có

$$f(x,y) \le \frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^5}} = \sqrt[6]{\left(1+2\sqrt[5]{2}\right)^5}. \tag{4}$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ hệ sau thoả mãn

$$\begin{cases} \alpha = x^3 \\ \beta = y^3 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\alpha} \\ y = \sqrt[3]{\beta}. \end{cases}$$

Như vậy ta có

$$\left(\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\beta}\right) \in D \text{ mà } f\left(\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[3]{\beta}\right) = \sqrt[6]{\left(1+2\sqrt[5]{2}\right)^5}.$$

Do đó $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = \sqrt[6]{\left(1+2\sqrt[5]{2}\right)^5}$.

Bài 29.

Cho hàm số

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + 2\sqrt{1+\frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên miền

$$D = \left\{(x,y,z) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \text{ và } x \ge \max\{y,z\}\right\}.$$

Bài giải :

Lấy (x,y,z) tuỳ ý $\in$ D. Như vậy ta có $x > 0$, $y > 0$. $z > 0$ và

$$\frac{x}{y} \ge 1\ ;\ 0 < \frac{z}{x} \le 1. \tag{1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$1+\frac{y}{z}\ge 2\sqrt{\frac{y}{z}}\ ;\ 1+\ \frac{z}{x}\ge 2\sqrt{\frac{z}{x}}.$$

Do đó

$$f(x,y,z)\ge \frac{x}{y}+2\sqrt{2}.\sqrt[4]{\frac{y}{z}}+3\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{\frac{z}{x}}. \qquad (2)$$

Thực hiện phép biến đổi căn thức, ta có

$$VF(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{y}+4\sqrt[4]{\frac{y}{z}}+6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x}{y}+3\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}\right)\sqrt[6]{\frac{z}{x}}. \qquad (3)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cô-si, có

$$\frac{x}{y}+4\sqrt[4]{\frac{y}{z}}+6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}=\frac{x}{y}+\left(\underbrace{\sqrt[4]{\frac{y}{z}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{y}{z}}}_{4\text{ lần}}\right)+\left(\underbrace{\sqrt[6]{\frac{z}{x}}+\ldots+\sqrt[6]{\frac{z}{x}}}_{11\text{ lần}}\right)$$

$$\ge 11.\sqrt[11]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}}. \qquad (4)$$

Từ (1) và để ý rằng $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$ còn $\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}<0$, nên từ (2), (3), (4) đi đến

$$f(x,y,z)\ge\frac{11\sqrt{2}}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}\right),\text{ hay}$$

$$f(x,y,z)\ge 1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}\qquad\forall(x,y,z)\in D. \qquad (5)$$

Mặt khác, chẳng hạn (1, 1, 1) ∈ D và

$$f(1,1,1)=1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}.$$

Vì thế từ (5) suy ra

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}.$$

Bài 30.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}$$

trên miền $D=\{(x,y):x>0,\ y>0\ ;\ x+y=1\}$.

Bài giải :

Lấy (x,y) tuỳ ý $\in$ D, thì $x > 0$, $y > 0$ và $x + y = 1$. Do vậy

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}. \tag{1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, thì

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{x}, & (2) \\ \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{y}. & (3) \end{cases}$$

Từ (2), (3) đi đến

$$f(x,y) + \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right), \text{ hay}$$

$$f(x,y) \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}. \tag{4}$$

Ta lại có thể viết

$$f(x,y) = \frac{1-y}{\sqrt{y}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right). \tag{5}$$

Bây giờ từ (4), (5), ta có

$$2f(x,y) \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}, \text{ hay}$$

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right). \tag{6}$$

Từ (6) và lại theo bất đẳng thức Cô-si suy ra

$$f(x,y) \geq \frac{1}{\sqrt[4]{xy}} \geq \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}}. \tag{7}$$

Do $x + y = 1$, vì vậy từ (7) ta có

$$f(x,y) \geq \sqrt{2}, \qquad \forall (x,y) \in D. \tag{8}$$

Rõ ràng $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$ và $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$. Kết hợp với (8) ta thu được kết quả sau :

$$\min_{(x,y) \in D} f(x,y) = \sqrt{2}.$$

Nhận xét :

Dễ thấy $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ là phần tử duy nhất của D làm cho hàm số f(x,y) nhận giá trị bé nhất.

Bài 31.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{1-x-2x^2}$$

trên miền $D=\left\{x:-1\le x\le\frac{1}{2}\right\}$.

Bài giải :

Nhận xét rằng D chính là miền xác định của hàm số f(x). Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sqrt{1-x-2x^2}=\sqrt{1.(1-x-2x^2)}\le\frac{1+\left(1-x-2x^2\right)}{2},\quad \forall x\in D.$$

Vì thế

$$f(x)\le\frac{x}{2}+\frac{1+\left(1-x-x^2\right)}{2}$$

hay $f(x)\le 1-x^2,\quad \forall x\in D.$ (1)

Từ (1) suy ra $f(x)\le 1,\quad \forall x\in D.$ (2)

Chú ý hệ phương trình

$$\begin{cases}1=1-x-x^2\\ 1-x^2=1\\ -1\le x\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

có nghiệm (và có nghiệm duy nhất $x^*=0$).

Như thế, từ $0\in D$ và f(0) = 1, cùng với (2) ta đi đến

$$\max_{x\in D} f(x)=1.$$

Nhận xét :

1. Nếu ở bài trên ta không dùng bất đẳng thức Cô-si, mà dùng *bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski* thì sao ? Cụ thể là với $x\in D$ và theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski, thì

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1.\sqrt{1-x-2x^2}\le\sqrt{\frac{1}{4}+1}.\sqrt{x^2(1-x^2-2x^2)}$$

hay $f(x)\le\sqrt{\frac{5}{4}}.\sqrt{-\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}\le\frac{5}{4}.$ (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi hệ sau thoả mãn

$$\begin{cases}\sqrt{1-x-2x^2}=2x^2\\ x+\frac{1}{2}=0\\ -1\le x\le\frac{1}{2}.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ x=-\frac{1}{2}\\ -1\le x\le\frac{1}{2}.\end{cases}\qquad(*)$$

Vì hệ (*) vô nghiệm, nên không chỉ ra được dấu bằng trong (2). Nghĩa là cách giải này không chứng nhận được. Vậy sử dụng bất đẳng thức Cô-si là phương pháp hợp lí.

2. Bây giờ lại xét bài toán sau :

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x)=3-2x+\sqrt{5-x^2+4x}$$

trên miền $D=\{x:-1\le x\le 5\}$.

Ta nhận thấy D cũng chính là miền xác định của hàm số f(x). Về mặt hình thức thì bài toán này "giống hệt" bài toán trên. Ta thử dùng phương pháp với bất đẳng thức Cô-si xem sao. Gọi $x\in D$ là phần tử tuỳ ý. Theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$\sqrt{5-x^2+4x}=\sqrt{1(5-x^2+4x)}\le\frac{1+(5-x^2+4x)}{2}.$$

Vì thế

$$f(x)\le 3-2x+\frac{1+(5-x^2+4x)}{2},\ \text{hay}$$

$$f(x)\le 6-\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)\le 6,\quad \forall x\in D.\qquad(3)$$

Mặt khác xét hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 1 = 5 - x^2 + 4x \\ x = 0 \\ -1 \le x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{hoặc } x = 2 + 2\sqrt{2} \\ x = 0 \\ -1 \le x \le 5. \end{cases} \qquad (**)$$

Rõ là hệ (**) vô nghiệm, vì thế bằng phương pháp này không chỉ ra được lúc nào thì dấu bằng trong (3) xảy ra.

Nói cách khác phương pháp bất đẳng thức Cô-si lại không thích hợp cho thí dụ này ! Ta lại thử áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski. Ta có $\forall x \in D$, thì

$$f(x) = -1 + (-2)(x-2) + \sqrt{1.(5 - x^2 + 4x)}$$

$$\le -1 + \sqrt{4+1}.\sqrt{(x^2 - 4x + 4) + (5 - x^2 + 4x)}\text{, hay}$$

$$f(x) \le -1 + 3\sqrt{5}, \qquad \forall x \in D. \qquad (4)$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} -2\sqrt{5 - x^2 + 4x} = x - 2 \\ -1 \le x \le 5 \end{cases} \text{ ta có nghiệm}$$

$$x = 2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Như vậy $2 - \frac{6\sqrt{5}}{5} \in D$ và $f\left(2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}\right) = 3\sqrt{5} - 1.$

Kết hợp với (4) có $\max\limits_{x \in D} f(x) = 3\sqrt{5} - 1.$

Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski tỏ ra có ích trong thí dụ này !

Bài 32.

Cho hàm số

$$f(x,y,z,t) = (x + z)(y + t),$$

xét trên miền

$D = \{(x,y,z,t) : a(x^2 + y^2) + b(z^2 + t^2) = 1\}$, ở đây a và b là hai số dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đó.

Bài giải :

Lấy (x,y,z,t) tuỳ ý thuộc D. Ta thấy

$$f(x,y,z,t) = (x + z)(y + t)$$

$$= xy + zt + xt + zy. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x + y \geq 2|xy| \geq 2xy.$$

Vì a > 0, b > 0, nên có

$$\frac{ab}{a+b}(x^2 + y^2) \geq \frac{2ab}{a+b}xy. \tag{2}$$

Lí luận tương tự có

$$\frac{ab}{a+b}(x^2 + t^2) \geq \frac{2ab}{a+b}zt. \tag{3}$$

Ngoài ra áp dụng lí luận trên lại có

$$\frac{a^2}{a+b}x^2 + \frac{b^2}{a+b}t^2 \geq \frac{2ab}{a+b}xt, \tag{4}$$

$$\frac{a^2}{a+b}y^2 + \frac{b^2}{a+b}z^2 \geq \frac{2ab}{a+b}yz. \tag{5}$$

Cộng từng vế (2), (3), (4), (5) ta được

$$a(x^2 + y^2) + b(z^2 + t^2) \geq \frac{2ab}{a+b}\big(f(x,y,z,t)\big). \tag{6}$$

Do $(x,y,z,t) \in D$ nên từ (6) suy ra

$$f(x,y,z,t) \leq \frac{a+b}{2ab}, \qquad \forall (x,y,z,t) \in D. \tag{7}$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4) (5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = t \\ ax = bt \\ ay = bz \\ a(x^2 + y^2) + b(z^2 + t^2) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = t = \dfrac{ax}{b} \\ 2ax^2 + 2b\dfrac{a^2x^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt{\dfrac{b}{2a(a+b)}} \\ z = t = \sqrt{\dfrac{a}{2b(a+b)}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = y = -\sqrt{\dfrac{b}{2a(a+b)}} \\ z = t = -\sqrt{\dfrac{a}{2b(a+b)}}. \end{cases}$$

Như vậy ta thấy

$$\left(x^*,y^*,z^*,t^*\right)=\left(\sqrt{\frac{b}{2a(a+b)}},\sqrt{\frac{b}{2a(a+b)}},\sqrt{\frac{a}{2b(a+b)}},\sqrt{\frac{a}{2b(a+b)}}\right)\in D$$

và $f\left(x^*,y^*,z^*,t^*\right)=\dfrac{a+b}{2ab}$.

Kết hợp với (7) và theo định nghĩa của giá trị lớn nhất của hàm số ta suy ra

$$\max_{(x,y,z,t)\in D} f(x,y,z,t)=\frac{a+b}{2ab}.$$

Bài 33.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x,y,z)=x^n y+y^n z+z^n x$, trên miền

$D=\{(x,y,z): x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ và $x+y+z=1\}$, ở đây n là số tự nhiên.

Bài giải :

1. Nếu n = 0, thì f(x,y,z) = x + y + z = 1, ∀(x,y,z) ∈ D.

Do vậy

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=1.$$

2. Nếu n = 1, thì f(x,y,z) = xy + yz + zx.

Dễ thấy $xy+yz+zx\leq\dfrac{1}{3}(x+y+z)^2$. Vì thế

$$f(x,y,z)\leq\frac{1}{3}\quad\forall(x,y,z)\in D.$$

Lại có $f\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$, mà $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)\in D$ nên

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=\frac{1}{3}.$$

3. Nếu n > 1, lấy (x,y,z) tuỳ ý ∈ D. Có thể giả sử mà không hề làm giảm tổng quát rằng x = max(x,y,z).

Do $y\leq x\Rightarrow y^n z\leq x^{n-1}yz$.

Do $y\leq x\Rightarrow z^n x\leq zx^n$ và $z^n x\leq z^2x^{n-1}$.

Vì n > 1 nên $\dfrac{n-1}{n}\geq\dfrac{1}{2}$ hay $\dfrac{n-1}{n}z\geq\dfrac{z}{2}$. Như vậy ta có

$$f(x,y,z) = x^n y + y^n z + z^n x \le x^n y + x^{n-1}yz + \frac{1}{2}z^n x + \frac{1}{2}z^n x \le$$

$$\le x^n y + x^{n-1}yz + \frac{zx^n}{2} + \frac{z^2x^{n-1}}{2} = x^{n-1}(x+z)\left(y + \frac{z}{2}\right) \le$$

$$\le x^{n-1}(x+z)\left(y + \frac{n-1}{n}z\right) = n^n\left[\underbrace{\frac{x}{n}.\frac{x}{n}...\frac{x}{n}}_{n-1 \text{ thừa số}}.\frac{x+z}{n}\left(y+\frac{n-1}{n}z\right)\right]. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, thì

$$\underbrace{\frac{x}{n}.\frac{x}{n}...\frac{x}{n}}_{n-1 \text{ thừa số}}.\frac{x+z}{n}\left(y+\frac{n-1}{n}z\right) \le \left[\frac{(n-1)\frac{x}{n} + \frac{x+z}{n} + y + \frac{n-1}{n}z}{n+1}\right]^{n+1}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) và rút gọn, ta đi đến bất đẳng thức sau

$$f(x,y,z) \le n^n \frac{(x,y,z)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}. \qquad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra chỉ khi

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \\ \dfrac{x}{n} = \dfrac{x+z}{n} = y + \dfrac{n-1}{n}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n}{n+1} \\ y = \dfrac{1}{n+1} \\ z = 0. \end{cases}$$

Như vậy $f\left(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, 0\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Do đó

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Tóm lại ta có kết quả sau

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } n = 0 \\ \dfrac{1}{3}, & \text{nếu } n = 1 \\ \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, & \text{nếu } n = 2, 3, ... \end{cases}$$