# C. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

## I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Cách giải cũng giống như giải biện luận các phương trình khác.

Nói chung ta phải giải quyết 3 vấn đề:

* Điều kiện có nghiệm
* Có bao nhiêu nghiệm
* Nghiệm số bằng bao nhiêu.

Giả sử xét phương trình: $\sqrt{A} = B$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 & (2) \\ A = B^2 & (3) \end{cases}$$

*Bước 1*: Giải phương trình (3). Điều kiện có nghiệm của (3) và số nghiệm .

*Bước 2*: Chọn nghiệm thỏa điều kiện (2), có nhiều cách, tổng quát ta có thể thế từng nghiệm của (2) vào (1) để được điều kiện nhận nghiệm đó. Sau cùng ta phải tổng hợp các nghiệm trên.

2. Biện luận số nghiệm của phương trình :

Nếu phương trình có dạng f(x) = k (với k không phụ thuộc vào x) ta giải bằng khảo sát hàm.

## II. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1:

Cho phương trình : $\sqrt{x^2 - 2x + m^2} = |x-1| - m$ (1)

1. Giải phương trình (1) với m = 2
2. Giải và biện luận phương trình (1) theo m.

(ĐH Quốc Gia TPHCM năm 1996).

Giải

1. Với m = 2: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 4} = |x-1| - 2$ (2)



. Xét $x \ge 1 :\Rightarrow x - 1 \ge 0$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ x^2 - 2x + 4 = (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 5 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x = \dfrac{5}{4} \end{cases} \text{ (loại)}$$

. Xét $x < 1$: $x - 1 < 0$:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 4} = -x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 2x + 4 = (x+1)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x = \dfrac{3}{4} \text{(loại)} \end{cases}$. Tóm lại phương trình cho vô nghiệm .

2. Xét $x \ge 1 : (1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + m^2} = x - 1 - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 - m \ge 0 \\ x^2 - 2x + m^2 = (x - 1 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 + m \\ 2mx = 2m + 1 \quad (3) \end{cases}$$

+ Nếu m = 0: (3) VN

+ Nếu $m \ne 0 : (3) \Leftrightarrow x = \dfrac{2m+1}{2m}$

vì $x \ge 1 + m \Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{2m} \ge 1 + m \Leftrightarrow \dfrac{-2m^2 + 1}{2m} \ge 0$

$\Leftrightarrow m \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee 0 < m \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ vì $x \ge 1 \Rightarrow \dfrac{2m+1}{2m} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \quad m > 0$

Vậy $0 < m \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nhận nghiệm $x = \dfrac{2m+1}{2m}$

Khi $m \le 0 \vee m > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: vô nghiệm

. Xét $x < 1$: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + m^2} = 1 - x - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m^2 = (1 - x - m)^2 \\ 1 - x - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx = 2m - 1 \\ x \le 1 - m \end{cases} \quad (4)$$

+ Nếu m = 0: (4) VN

+ Nếu $m \neq 0$ : (4) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2m-1}{2m}$

Vì $x \le 1-m \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{2m} \le 1-m \Leftrightarrow \dfrac{2m^2-1}{2m} \le 0$

$\Leftrightarrow m \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee 0 < m \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vì $x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{2m} < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2m} < 0 \Leftrightarrow m > 0$

Khi $0 < m \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: nghiệm $x = \dfrac{2m-1}{2m}$

Khi $m \le 0 \vee m > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ VN.

Tóm lại :

$0 < m \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nghiệm : $x = \dfrac{2m+1}{2m}$, $x = \dfrac{2m-1}{2m}$,

$m \le 0 \vee n > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: VN

Ví dụ 2:

Giải và biện luận theo tham số m phương trình sau:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} + \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \quad (*)$$

(CAO ĐẲNG HẢI QUAN NĂM 1997)

Giải

Điều kiện: $x \neq 0,\ m > 0,\ m \neq 1$.

(*) $\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{(1-\sqrt{m})^2 + (1+\sqrt{m})^2}{(1+\sqrt{m})(1-\sqrt{m})} \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+m}{1-m}$

$\Leftrightarrow (1-m)x^2 - (1+m)x + 1 - m = 0$

$\Delta = (1+m)^2 - (1-m)^2 = -3m^2 + 10m - 3$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = \dfrac{1}{3}$

. Nếu $\dfrac{1}{3} < m < 3$ : (*)VN



. Nếu $0 < m < \dfrac{1}{3} \vee m > 3$ : (*) có 2 nghiệm

$$x = \frac{1+m \pm \sqrt{-3m^2+10m-3}}{1-m}$$

. $m = 3 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$

. $m = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$

Ví dụ 3:

Cho phương trình : $\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + ax$ với a là tham số thực.

1. Giải phương trình khi a = 0
2. Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

(ĐH Quốc Gia TPHCM Khối A đợt 3 năm 1998)

Giải

1. Khi a = 0 :

$$\frac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ \dfrac{3x^2-1-2x+1}{\sqrt{2x-1}} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3x^2-2x}{\sqrt{2x-1}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x = 0 \vee x = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

2. Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + ax \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-2x}{\sqrt{2x-1}} = ax \quad (*)$

Nhận xét với x = 0: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{0}{\sqrt{-1}} = 0$ (vô lý)

$\Rightarrow$ x = 0 không là nghiệm của (*)

$\Rightarrow x \neq 0$: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-1}} = a$

Đặt $f(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-1}} \quad \left(x > \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x-1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (không thỏa $x > \frac{1}{2}$) $\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại)

$\Rightarrow f'(x) > 0$ khi $x > \frac{1}{2}$

BBT:

| x | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | \|\| | + | |
| f(x) | \|\| | $-\infty \nearrow$ | $+\infty$ |

BBT cho $\forall a \in R$, phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 4:

Với những giá trị nào của a thì phương trình:

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = a \text{ có nghiệm .}$$

(ĐH Ngoại Thương TPHCM năm 1998 Khối D)

Giải

Đặt $f(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x})$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1-x+1+x}{(\sqrt[3]{1-x})^2 - \sqrt[3]{1-x^2} + (\sqrt[3]{1+x})^2} = 0$

$f'(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} = \dfrac{-\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2 = (1+x)^2 \Leftrightarrow x = 0$

BBT:

| x | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | \|\| | + | 0 | - | \|\| | - | |
| f(x) | 0 | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | 0 |

BBT cho ta phương trình có nghiệm khi $0 < a \le 2$



## III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ.

3.1. Cho phương trình: $\sqrt{x^2 + x + \dfrac{a^2}{(x-1)^2}} = x - \dfrac{a}{x-1}$ (1)

1. Giải phương trình (1) khi a = 1
2. Giải và biện luận phương trình (1) theo tham số a.

(ĐH Dân Lập Ngoại Ngữ Và Tin Học năm 1998).

3.2.

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

2. Tìm điều kiện của tham số thực m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} = m$$

(ĐH Y TPHCM năm 1999).

3.3. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = a$$

(ĐH Giao Thông Vận Tải TPHCM năm 1999).

3.4. Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

$$\sqrt{x^2 - 2mx + 1} + 2 = m$$

3.5. Định theo m số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x^4 + 4x + m} + \sqrt[4]{x^4 + 4x + m} = 6$$

3.6. Cho phương trình : $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = m$ (*)

1. Giải phương trình (*) khi $m = \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}$
2. Định m để phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

3.7. Giải phương trình :

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$$



## *HƯỚNG DẪN VÀ TÓM TẮT*

3.1. $\sqrt{x^2+x+\dfrac{a^2}{(x-1)^2}}=x-\dfrac{a}{x-1}$

Điều kiện : $\begin{cases} x-\dfrac{a}{x-1}\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{a}{x-1} \\ x\neq 1 \end{cases}$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow x^2+x+\frac{a^2}{(x-1)^2}=x^2+\frac{a^2}{(x-1)^2}-\frac{2ax}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+2x\frac{a}{x-1}=0\Leftrightarrow \frac{x(x-1+2a)}{x-1}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1-2a \end{array}\right.$$

1. Khi a = 1: x = 0, x = - 1

$$(1)\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{x-1}\Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x<1\vee x\geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình : x = 0

2. Giải và biện luận phương trình :

Điều kiện $x\geq \dfrac{a}{x-1}\Leftrightarrow x-\dfrac{a}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-x-a}{x-1}\geq 0$

$$f(0)=a,\ f(1-2a)=\frac{(1-2a)^2-1+2a-a}{1-2a-1}=\frac{a(3-4a)}{2a}$$

BBT:

| a | $-\infty$ | | 0 | | $\frac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(0) | | - | 0 | + | 0 | + | |
| a(3 - 4a) | | - | 0 | + | 0 | - | |
| f(1 - 2a) | | + | ‖ | + | 0 | - | |

. a < 0: 1 nghiệm

. a = 0: 1 nghiệm

. $0 < a < \frac{3}{4}$ : 2 nghiệm

. $a = \frac{3}{4}$ : 2 nghiệm

. $a > \frac{3}{4}$ : 1 nghiệm .

3.2.

1. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ Điều kiện $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 3-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$

Mxđ: $D = [1,3]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}} = \frac{-2x+4}{2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}(\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1})}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

BBT:

| x | 1 | | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | ‖ | | 0 | | ‖ |
| y | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | $\sqrt{2}$ |

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất là g(2) = 2

Giá trị nhỏ nhất là g(1) = g(3) = $\sqrt{2}$

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} = m$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{2} \le t \le 2$ (theo câu 1)

$t^2 = x - 1 + 3 - x + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(3-x)} = \frac{t^2-2}{2}$

$(*) \Leftrightarrow t - \left(\frac{t^2-2}{2}\right) = m \Leftrightarrow f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1 = m$

$f'(t) = -t + 1, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$



BBT:

| t | $\sqrt{2}$ | | 3 |
|---|---|---|---|
| f'(t) | | - | |
| f(t) | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | 1 |

BBT $\Rightarrow$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \le m \le \sqrt{2}$

3.3. $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = a$ (1) MXD: $D = [-1,1]$

Đặt $f(x) = \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - 6x\sqrt{1-x^2} = \frac{x(6x^2-7)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}$

BBT:

| x | | $\sqrt{\frac{7}{6}}$ | | -1 | | 0 | | 1 | | $\sqrt{\frac{7}{6}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + | ‖ | + | 0 | - | ‖ | - | |
| f(x) | | | | 0 | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | 0 | | |

(1) có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a = 3$

3.4. $\sqrt{x^2 - 2mx + 1} + 2 = m$ (1)

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 = (m-2)^2$ và $m \ge 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - (m^2 - 4m + 3) = 0$ và $m \ge 2$

$\Delta' = m^2 + m^2 - 4m + 3 = 2(m-1)^2 + 1 > 0, \quad \forall m$

Vậy: m < 2: phương trình (1) VN

. $m \ge 2$ : phương trình (1) có 2 nghiệm

$x_1 = m + \sqrt{2m^2 - 4m + 3}$ , $x_2 = m - \sqrt{2m^2 - 4m + 3}$

3.5. $\sqrt{x^4+4x+m}+\sqrt[4]{x^4+4x+m}=6 \quad (1)$

Đặt $t=\sqrt[4]{x^4+4x+m} \quad (t\ge 0)$

$(1)\Leftrightarrow t^2+t-6=0 \;\Leftrightarrow t=2$

$t=2:\sqrt[4]{x^4+4x+m}=2\Leftrightarrow x^4+4x+m=16$

$\Leftrightarrow f(x)=x^4+4x=16-m$

f(x) liên tục trên R, $f'(x)=4x^2+4$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow f(-1)=-3$

BBT:

| x | $-\infty$ | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | |
| f(x) | $+\infty$ | $\searrow$ | -3 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ BBT ta suy ra:

. $16-m<-3\Leftrightarrow m>19:(1)VN$

. $16-m=-3\Leftrightarrow m=19:(1)$ có 1 nghiệm x = - 1

. $16-m>-3\Leftrightarrow m<19:(1)$ có 2 nghiệm : $x_1<-1<x_2$

3.6. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m \quad (1)$

1. Khi $m=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}}$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}} \qquad (2)$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2(x+1-x)}=\sqrt{2}$

$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}\le\sqrt{2(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})}\le\sqrt{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{1-x}\\ \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$



2. Giả sử $x_0$ là nghiệm của phương trình (1) thì 1 - $x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (1), nên để (1) có nghiệm duy nhất ta phải có:

$x_0=1-x_0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$

Thay $x=\dfrac{1}{2}$ vào (1) : $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}=m\Rightarrow\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}}=m$

Thử lại: với $m=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}}$ theo câu 1 thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $m=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}}$ thì (1) có nghiệm duy nhất.

3.7.

Điều kiện $-1\le x\le 1$

$\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}=(\sqrt{1+x})^3-(\sqrt{1-x})^3$

$=(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(1+x+1-x+\sqrt{1-x^2})$

$=(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x^2})$.

Phương trình cho $\Leftrightarrow\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2+2\sqrt{1-x^2}}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}\,(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1+x-1+x=\sqrt{2}\;\;\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in[-1,1]$.