CHƯƠNG 3:

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI.

A. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1.Định nghĩa và tính chất:

a. Định nghĩa : $|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a \leq 0 \end{cases}$

b. Tính chất :

$*|a| \geq 0$ $\quad * -|a| \leq a \leq |a|$ $\quad *|a+b| \leq |a| + |b|$ dấu " =" khi $ab \geq 0$

$*|a-b| \leq |a| + |b|$ dấu " =" xảy ra khi $ab \leq 0$

2. Phương pháp giải toán:

a. Dạng cơ bản:

$|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \vee A = -B$ cách1

$\Leftrightarrow A^2 = B^2$ cách 2

$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}$ cách 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \vee \begin{cases} A \leq 0 \\ A = -B \end{cases}$ cách 2

b. Các dạng khác:

Ta thường xét dấu các biểu thức trong các dấu trị tuyệt đối để khử dấu trị tuyệt đối trên mỗi khoảng. Giải phương trình trên mỗi khoảng.

Có thể dùng ẩn phụ.

II. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1:

Giải phương trình: $2|x+2| + 3|x-1| = 5$ (1)

Giải

Xét dấu x + 2 và x – 1

x	$-\infty$		-2			1		$+\infty$
x + 2		-	0	+		|	+	
x - 1		-	|	-		0	+	

. $x \leq -2 : (1) \Leftrightarrow -2(x+2) - 2(x-1) = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$ (loại)

. $-2 < x < 1 : (1) \Leftrightarrow 2(x+2) - 2(x-1) = 5 \Leftrightarrow 0x + 6 = 5 :$ vô nghiệm

. $x \geq 1 : (1) \Leftrightarrow 2(x+2) + 2(x-1) = 5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0 \ (1) \\ 2x - |y| - 7 = 0 \ (2) \end{cases}$

(ĐH Hàng Hải năm 1998).

Giải

Nhận xét: (1) Cho ta: $y < 0, \forall x \in R$

(2) Cho ta: $x > 0, \forall y \in R$

$\Rightarrow$ hệ chỉ có nghiệm khi $x > 0, y < 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 9 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$ giải ra: $x = \frac{44}{7}, y = -\frac{39}{7}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(x = \frac{44}{7}, y = -\frac{39}{7} \right)$

Ví dụ 3:

Định m để phương trình:

$$\left|-2x^2+10x-8\right| = x^2-5x+m \text{ có 4 nghiệm phân biệt.}$$

Giải

Phương trình cho $\Leftrightarrow \left|-2x^2+10x-8\right| - x^2+5x = m$

Đặt f(x) = $\left|-2x^2+10x-8\right| - x^2+5x$

Ta có: $f(x) = \begin{cases} x^2-5x+8 & \text{với } x \le 1 \vee x \ge 4 \\ -3x^2+15x-8 & \text{với } 1 \le x \le 4 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{với } x \le 1 \vee x \ge 4 \\ -6x+15 & \text{với } 1 \le x \le 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
2x - 5		-		-	0	+		+	
-6x + 15		+		+	0	-		-	
f'(x)		-		+	0	-		+	
f(x)	$+\infty$	↘	4	↗	$\frac{43}{4}$	↘	4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $4 < m < \frac{43}{4}$.

Ví dụ 4:

Giải và biện luận: $x + \frac{2m|x+m|}{x} = \frac{m^2}{x} (m \ne 0)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \ne 0$

(1) $\Leftrightarrow x^2+2m|x+m| = m^2$ (2)

Đặt $t = x+m \Rightarrow x = t-m \Rightarrow x^2 = t^2-2mt+m^2$

(2) $\Leftrightarrow t^2-2mt+m^2+2m|t| = m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t < 0 \\ t^2-4mt \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \begin{cases} t = 4m \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

. $t = 0 \Rightarrow x = -m$

. $t = 4m \Rightarrow x = 3m (m < 0)$

Tóm lại:

m < 0: Phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 3m$; $x_2 = -m$

m > 0: một nghiệm $x_2 = -m$

m = 0: VN (loại vì x = 0)

Ví dụ 5:

Định m để phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\left|x^2+2mx+1\right| = x+1 \ (1)$$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (x^2+2mx+1)^2 = (x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+(2m-1)x = 0 \ (2) \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+(2m+1)x+2 = 0 \ (3) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1-2m$

Ta nhận thấy x = 0 thỏa điều kiện $x \ge -1$, nê điều kiện cần để phương trình (1) có nghiệm duy nhất là: $\left[\begin{array}{l} 1-2m = 0 \\ 1-2m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \vee m > 1$

Thử lại: + với $m = \frac{1}{2}$: (3) $\Leftrightarrow x^2+2x+2 = 0$ VN

+ Vậy (1) có nghiệm duy nhất x = 0

+ Với m > 1: (3) cho af(-1) = - 2m + 2 < 0

$\Rightarrow$ (3) có nghiệm x > -1 $\Rightarrow$ không có nghiệm duy nhất (loại)

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ.

1.1. Giải phương trình: $\dfrac{|3-2x|-|x|}{|2+3x|+x-2}=5$

1.2. Xác định k để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt.
$$(x-1)^2=2|x-k|$$

1.3. Tìm tham số a sao cho phương trình: $|2x^2-3x-2|=5a-8x-2x^2$ có nghiệm duy nhất.

1.4. Định m để phương trình có nghiệm: $|x^2-2x+m|=x^2+3x-m-1$

1.5. Định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt :
$$|2x^2-(2m+1)x+m+2|=|x^2-(m-1)x+2-m|$$

Hướng dẫn và giải tóm tắt

1.1. Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
3 - 2x		+		+		+	0	-	
x		-		-	0	+		+	
$2+3x$		-	0	+		+		+	

Xét các trường hợp :

* $x\le -\frac{2}{3}$: phương trình cho $\Leftrightarrow \dfrac{3-x}{-2x-4}=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{23}{9} \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{23}{9}$

thỏa $x\le -\frac{2}{3}$.

* $-\frac{2}{3}<x\le 0$: phương trình cho $\Leftrightarrow \dfrac{3-x}{4x}=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{7} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$ không

thoả điều kiện $-\frac{2}{3}<x\le 0$.

* $0<x\le\frac{3}{2}$: phương trình cho $\Leftrightarrow \dfrac{3-3x}{4x}=5 \Leftrightarrow x=\frac{3}{23}$ thỏa điều kiện $0<x\le\frac{3}{2}$.

* $x>\frac{3}{2}$: phương trình cho $\Leftrightarrow \dfrac{-3+x}{4x}=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{19} \\ x>\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$

Tóm lại nghiệm : $x=-\frac{23}{9} \vee x=\frac{3}{23}$.

1.2. $(x-1)^2 = 2|x-k|(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x-k) = (x-1)^2 \\ 2(x-k) = -(x-1)^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2k + 1 = 0 \quad (2) \\ x^2 = 2k - 1 \quad (3) \end{array}\right.$

Để phương trình có nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Điều kiện là phương trình (2), (3), mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

Nhận xét nếu (2) và (3) có nghiệm chung thì nghiệm chung phải là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2k + 1 = 0 \quad (2) \\ x^2 = 2k - 1 \ (3) \end{cases}$$

(3) $\Leftrightarrow 2k = x^2 + 1$ thế vào (2), ta được :

$x^2 - 4x + x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow k = 1$

Ta loại k = 1

Với $k \neq 1$, điều kiện : $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2k - 1 > 0 \\ k \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < k < \dfrac{3}{2} \wedge k \neq 1$

1.3. $|2x^2 - 3x - 2| = 5a - 8x - 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + |2x^2 - 3x - 2| = 5a$

Đặt $f(x) = 2x^2 + 8x + |2x^2 - 3x - 2| = \begin{cases} 4x^2 + 5x - 2 \text{ nếu } x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 2 \\ 11x + 2 \text{ nếu } -\dfrac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 8x + 5 \text{ nếu } x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 2 \\ 11 \text{ nếu } -\dfrac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{-5}{8}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
8x + 5		-	0	+	|	+	|	+	
11		+	|	+	|	+	|	+	
f'(x)		-	0	+	|	+	|	+	
f(x)		$\searrow$	$\frac{-57}{16}$	$\nearrow$				$\nearrow$	

Bảng biến thiên cho ta phương trình có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{57}{16.5} = \dfrac{-57}{80}$

1.4. $|x^2 - 2x + m| = x^2 + 3x - m - 1 \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m - 1 \geq 0 \\ (x^2 - 2x + m)^2 = (x^2 + 3x - m - 1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m - 1 \geq 0 \\ 5x = 2m + 1 \vee 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m - 1 \geq 0 \\ x = \dfrac{2m+1}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 3x - m - 1 \geq 0 \\ x = -1 \vee x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $f(x) = x^2 + 3x - m - 1$

* Có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(\dfrac{2m+1}{5}\right) \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -3 \vee m \geq \dfrac{3}{4} \\ m \leq -3 \\ m \leq \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in R$

1.5. $\left|2x^2-(2m+1)x+m+2\right|=\left|x^2-(m-1)x+2-m\right|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-(2m+1)x+m+=x^2-(m-1)x+2-m\\2x^2-(2m+1)x+m+2=-x^2+(m-1)x-2+m\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ll}x^2-(m+2)x+2m=0 & (1)\\3x^2-3mx+4=0 & (2)\end{array}\right.}_{g(x)}$$

Để phương trình cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt, (2) có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm phân biệt của (1) và (2) khác nhau.

(1) có : $\Delta_1=(m-2)^2>0\Leftrightarrow m\neq 2: x_1=m, x_2=2$

(2) có : $\begin{cases}\Delta_2=9m^2-48>0\\g(m)\neq 0\\g(2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{-4\sqrt{3}}{3}\vee m>\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\\m\neq\dfrac{8}{3}\end{cases}$