

**A/ Hình học phẳng:****MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ:**

$\Delta ABC$  : tam giác ABC;  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  là các góc của tam giác ABC;

$AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ ;  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  lần lượt là độ dài các đường cao ứng với  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

$l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$  lần lượt là độ dài các đường phân giác ứng với  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

$m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến ứng với  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

$R$ ,  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của  $\Delta ABC$ ;

$S_{ABC}$ ,  $p$  lần lượt là diện tích và nửa chu vi của  $\Delta ABC$ .

**CÔNG THỨC liên quan đến tam giác:**

Định lý hàm số Cos :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  ( và các công thức tương tự )

Định lý hàm số Sin :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}$  ( và các công thức tương tự )

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2}$  ( Công thức Heron )

$S_{ABC} = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$  :  $S_{ABC} = p \cdot r = \frac{abc}{4R}$

$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A}$  ;

$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$

$l_a = \frac{2S}{(b+c) \cdot \sin \frac{A}{2}} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} = \frac{bc \cdot \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$

**CÔNG THỨC liên quan đến tứ giác:**

$S_{ABCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \frac{B+D}{2}}$

Nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì  $S_{ABCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Nếu tứ giác ABCD vừa ngoại tiếp, vừa nội tiếp:  $S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$

Nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp và có tổng hai góc đối diện bằng  $2\varphi$  thì

$$S_{ABCD} = \sqrt{abcd} \cdot \sin\varphi$$

Nếu tứ giác ABCD nội tiếp ( O; R ) thì 
$$R = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{16S_{ABCD}^2}}$$

Nếu tứ giác ABCD nội tiếp ( O; R ) thì góc tạo bởi hai đường chéo là

$$\sin\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{ac + bd}$$

**BÀI TẬP** ( bắt buộc ):

+ **Dạng toán 10** : Hình học ( từ bài 103 đến bài 124 ) ở tài liệu/ trang 14 – 15 – 16.

**Bài tập sử dụng máy tính điện tử trong trường phổ thông - Tạ Duy Phượng.**

+ **Các bài tập mở rộng và nâng cao**:

**Bài 1**: Cho hình thang ABCD ca cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC . Biết AD = 5 cm; AC = 12 cm. Tính AB; góc B và chiều cao AH của hình thang ABCD.

**Bài 2**: Cho tam giác ABC có góc A bằng  $65^\circ$ , BC = 14,5 cm; AC – AB = 8,6 cm. Tính các góc B, C và diện tích tam giác ABC.

**Bài 3**: Cho tam giác ABC có các trung tuyến CM, AN, BP cắt nhau tại G. Biết AB = 3,2 cm; CM = 2,4 cm; AN = 1,8 cm. Tính ( chính xác đến 2 chữ số ở phần thập phân ):

a/ Chiều cao GH của tam giác AGM;

b/ Diện tích tam giác ABC.

**Bài 4**: Cho tam giác ABC cân tại A có độ dài đường cao AH bằng độ dài cạnh đáy BC. Gọi M là trung điểm của AC. Tính góc MBC ( làm tròn đến phút ).

**Bài 5**: Cho tam giác ABC vuông tại A có độ dài đường cao AH bằng 1 cm và diện tích tam giác ABC bằng  $1 \text{ cm}^2$ . Tính các cạnh của tam giác ABC .

**Bài 6**: Cho tam giác ABC có 3 góc đều nhọn. Biết AB = 32,25 cm; AC = 35,75 cm;

$\hat{A} = 63^\circ 25'$ . Tính diện tích tam giác ABC và BC;  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ .

**Bài 7**: Cho tam giác ABC có c = 23 cm; b = 24 cm; a = 7 cm. Tính  $\hat{A}$ ;  $S_{ABC}$ ; R và r ?

**Bài 8**: Cho hình chữ nhật ABCD. Qua đỉnh B vẽ đường vuông góc với đường chéo AC tại H. Gọi E, F, G thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CD.

a/ CMR : EFGH là hình bình hành

b/ Góc BEG là góc vuông, nhọn hay tù ? Vì sao ?

c/ Cho biết BH = 17,25 cm,  $\hat{BAC} = 38^\circ 40'$  . Tính  $S_{ABCD}$ .

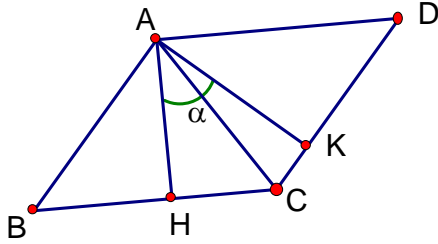
d/ Tính độ dài đường chéo AC ?

**Bài 9**: Cho hình bình hành ABCD có góc A tù. Kẻ hai đường cao AH và AK ( AH  $\perp$  BC, AK  $\perp$  CD). Biết  $\hat{HAK} = \alpha$  và độ dài hai cạnh AB = a , AD = b.

a/ Tính AH và AK.

b/ Tính tỉ số diện tích  $S_{ABCD}$  và diện tích  $S_{HAK}$ .

c/ Tính diện tích hình bình hành ABCD còn lại S khi khoét đi tam giác HAK



d/ Biết  $\alpha = 45^{\circ}38'25''$ ;  $a = 29,1945$  cm;  $b = 198,2001$  cm. Tính S ?

**Giải:** a/ Do  $\hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$  và  $\hat{HAK} + \hat{C} = 180^{\circ}$  nên  $\hat{B} + \hat{HAK} = 180^{\circ}$  Suy ra:  $AH = AB \cdot \sin B = a \cdot \sin \alpha$   
 $AK = AD \cdot \sin B = b \cdot \sin \alpha$

b/  $S_{ABCD} = BC \cdot AH = ab \sin \alpha$

$S_{HAK} =$

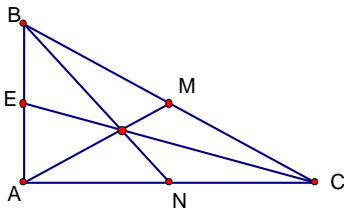
$$\frac{1}{2} AH \cdot AK \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a \sin \alpha \cdot b \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin^3 \alpha$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{ABCD}}{S_{HAK}} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

$$c/ S = S_{ABCD} - S_{HAK} = S_{ABCD} - \frac{S_{ABCD} \cdot \sin^2 \alpha}{2} = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2}\right) S_{ABCD} = ab \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2}\right) \sin \alpha$$

d/ Thế số vào tính  $S = 3079,663325$  cm<sup>2</sup>.

**Bài 10:** Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông lần lượt là  $\sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{3}$ . Hãy tính tổng các bình phương của các trung tuyến.



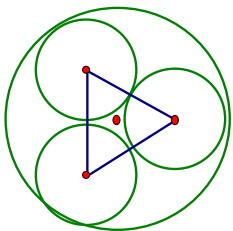
**Giải:** Do tam giác ABC vuông tại A nên  $a^2 = b^2 + c^2$ . Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến trong tam giác thì:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2} \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4} = \frac{3(b^2 + c^2)}{2}$$

Kết quả: 6,377839361.

**Bài 11:** Tính diện tích hình được tô đậm trong hình tròn đơn vị ?

**Giải:** Gọi R là bán kính đường tròn không tô đậm  $\rightarrow S = \pi R^2$ .



Diện tích hình quạt tròn  $S_{O_1AB} = \frac{\pi R^2}{6}$ . Ký hiệu  $OE = r$ . Vì đường tròn lớn có bán kính bằng 1 nên  $r + 2R = 1$  và  $\frac{R}{r+R} = \frac{O_1A}{OO_1} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ . Diện tích tam giác

cong ABC là  $S' = S_{O_1O_2O_3} - 3S_{O_1AB} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{S}{2}$ . Do đó diện tích phần tô đậm bằng:

$$\pi - 3S - S' = \pi - \frac{5}{2} \pi R^2 - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \pi - \left(\frac{5}{2} \pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 \rightarrow \text{thế R vào biểu thức rồi tính}$$

**Bài 13:** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính  $R = 6\sqrt{3}$  cm; góc OAB bằng  $51^{\circ}36'23''$ ; góc OAC bằng  $22^{\circ}18'42''$ .

a/ Tính diện tích và cạnh lớn nhất của tam giác khi tâm O nằm trong tam giác.

b/ Tính diện tích và cạnh nhỏ nhất của tam giác khi tâm O nằm ngoài tam giác.

**Bài 14:** Cho hình thang vuông ABCD (  $AB \parallel CD$ , góc B bằng góc C bằng  $90^\circ$  ).

Biết  $AB = 12,35$  cm;  $BC = 10,55$  cm; góc  $ADC = 57^\circ$  . Tính:

a/ Chu vi hình thang ABCD.

b/ Diện tích hình thang ABCD

c/ Các góc còn lại của tam giác ADC.

**Bài 15:** Cho tam giác ABC có góc B bằng  $120^\circ$ ,  $AB = 6,25$  cm;  $BC = 12,50$  cm. đường phân giác của góc B cắt AC tại D.

a/ Tính BD

b/ Tính tỉ số diện tích của các tam giác ABD và ABC

c/ Tính diện tích tam giác ABD.

**Bài 16:** Cho hình chữ nhật ABCD. Qua đỉnh B kẻ đường vuông góc với đường chéo AC tại H. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CD.

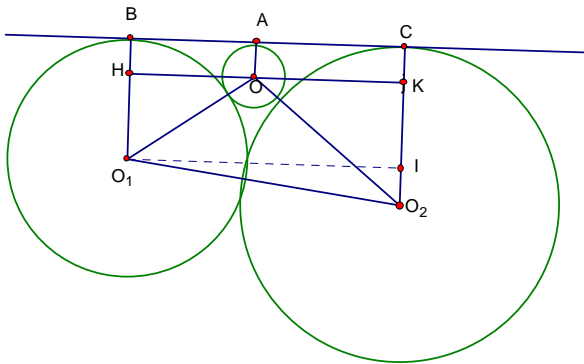
a/ Tính  $\sin \angle BEG$ .

b/ Biết  $BH = 17,25$  cm; góc  $BAC$  bằng  $38^\circ 40'$ . Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

c/ Tính độ dài đường chéo AC.

**Bài 17:**

Cho ba đường tròn  $(O;R)$ ,  $(O_1;R_1)$  và  $(O_2;R_2)$  tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với đường thẳng  $(d)$ . Tính R theo  $R_1$  và  $R_2$  .



**Giải:**

$$\text{Dùng } \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$$

**Bài 18)** Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh  $AC = \sqrt{2005}$  cm,  $AB = \sqrt{2007}$  cm. Tính độ dài đường cao AH ứng với cạnh huyền của tam giác ABC.

**Bài 19)** Cho tam giác ABC vuông tại A có diện tích bằng  $\sqrt{2007} \text{ cm}^2$ . Kéo dài AB về phía B một đoạn  $BD = \frac{\sqrt{7}}{7} AB$  . Tính diện tích tam giác ACD.

**Bài 20)** Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Kéo dài đường chéo AC về phía C một đoạn CE. Biết diện tích tứ giác ABCD là  $\sqrt{2007} \text{ cm}^2$ , diện tích tứ giác ABED là  $\sqrt{6021} \text{ cm}^2$ . Tính  $\frac{CE}{AC}$  .

**Bài 21)** Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB. Trên cạnh AD ta lấy điểm M, trên cạnh BC ta lấy điểm N sao cho  $AM = \frac{2}{3}AD$  và  $BN = \frac{2}{3}BC$

. Biết  $AB = \sqrt{2007} \cdot CD$ . Tính  $\frac{MN}{AB}$ .

**Bài 22:**

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi HE, HF lần lượt là các đường cao của các tam giác AHB và AHC. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết  $BE = 3,1245$  cm;  $CF = 5,4321$  cm.

**Bài 23:** Cho tam giác ABC có diện tích là  $S_0$ . Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm M, N sao cho:  $\frac{AM}{AB} = m$ ;  $\frac{AN}{AC} = n$  với  $0 < m, n < 1$ . BN cắt CM tại D.

a/ Tính diện tích các tam giác BMC, ABN, AMN theo  $S_0$ .

b/ Tính tỉ số các diện tích:  $\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}}$ ,  $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}$  và tính  $\frac{S_{BCD}}{S_{ABC}}$  theo m và n.

**Bài 24:** Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB = 5$  và  $AD = 3$ . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho  $AM = 1,5$  và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho  $BN = 1,8$ . Gọi I là giao điểm của CM và AN. Tính IA, IB, IC (chính xác đến 4 chữ số thập phân)

**Bài 25:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn tâm I nội tiếp  $\Delta ABC$  tiếp xúc với BC tại D. Biết  $AB = 18$ ,  $BC = 25$ ,  $AC = 21$ . Tính AD (chính xác đến 4 chữ số thập phân) và số đo góc IAD (độ, phút, giây)

**Bài 26:** Cho tam giác ABC vuông ở A, phân giác trong BD, phân giác ngoài BE (D,E thuộc AC) Biết  $AD = 3$ cm,  $DC = 5$ cm.

- a) Tính độ dài AB, BC
- b) Tính độ dài AE.

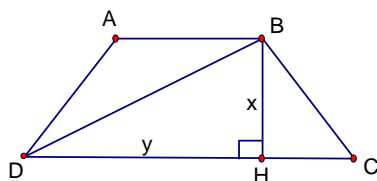
**Bài 27:** Cho tam giác ABC vuông ở A có  $BC = 10$ cm, đường cao  $AH = 4$ cm. Gọi I, K là hình chiếu của H trên AB và AC.  $S_{AIHK} = ?$

**Bài 28:** Tính diện tích tam giác biết độ dài ba trung tuyến của nó bằng 15cm, 36cm, 39 cm.

**PHẦN NÂNG CAO:**

**Bài 1:** Tính chiều cao hình thang cân có diện tích bằng  $12 \text{ cm}^2$ , đường chéo bằng 5 cm.

Giải:



Gọi BH là đường cao hình thang cân ABCD.

Ta có:  $DH = \frac{AB + CD}{2}$ . Đặt  $BH = x$  và  $DH = y$ . Ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 24 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 25 - 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$$

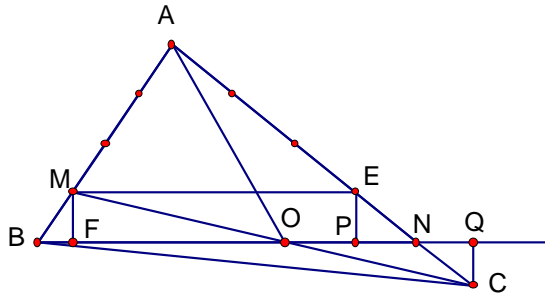
Suy ra:  $x = 4 ; y = 3$  hoặc  $x = 3 ; y = 4$ .

Do đó chiều cao của hình thang bằng 3 cm hoặc 4 cm.

**Bài 2:** ( trích đề thi học sinh giỏi CASIO tỉnh Phú Yên, năm học: 2008 – 2009 )

Cho tam giác ABC có diện tích bằng đơn vị. Trên cạnh AB lấy điểm M và trên cạnh AC lấy điểm N sao cho  $AM = 3BM$  và  $AN = 4CN$ . Đoạn BN cắt CM tại điểm O. Tính diện tích tam giác AOB và AOC.

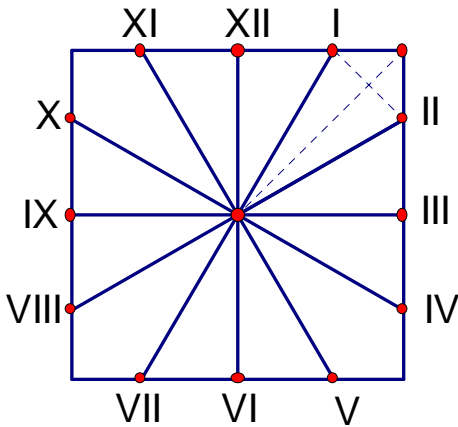
**Giải:**



- + Vẽ MF, EP, CQ cùng vuông góc với BO.
- +  $OM = OC$  (  $\Delta MOF = \Delta COQ$  )
- +  $S_{OAM} = S_{OAC}$  ( cùng chiều cao, cạnh đáy bằng nhau )
- +  $S_{BOF} = S_{BOC}$  ( cùng chiều cao, cạnh đáy bằng nhau )
- +  $S_{BON} = \frac{1}{3} S_{OAM} \rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} ; S_{OAC} = \frac{3}{8}$

**Bài 3:** ( trích đề thi học sinh giỏi CASIO tỉnh Phú Yên, năm học: 2008 – 2009 )

Vẽ một tấm bìa lên mặt đồng hồ hình vuông và dùng các vị trí chỉ giờ làm các đường biên ( xem hình ). Nếu  $t$  là diện tích của 1 trong 8 miền tam giác ( như miền giữa 12 giờ và 1 giờ ) và  $T$  là diện tích của 1 trong 4 tứ giác ( như tứ giác giữa 1 giờ và 2 giờ ). Tính tỉ số  $\frac{T}{t}$  ?



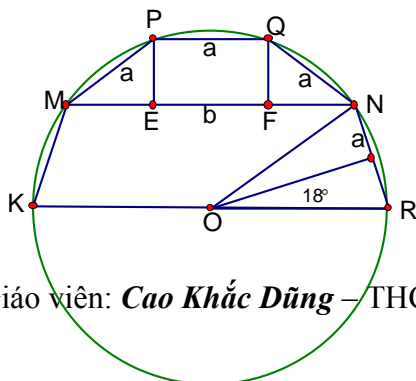
số  $\frac{T}{t}$  ?

**Giải:**

+

**Bài 4:** ( trích đề thi học sinh giỏi CASIO tỉnh Phú Yên, năm học: 2008 – 2009 )

Trong hình dưới đây, dây PQ và MN song song với bán kính  $OR = 1$ . Các dây MP, PQ, NR đều có độ dài bằng  $a$ , dây MN có độ dài bằng  $b$ .



Tính  $a^2 - b^2$  ?

**Giải:**

Ta có:  $R = \frac{a}{2 \sin 18^\circ}$  mà  $R = 1$

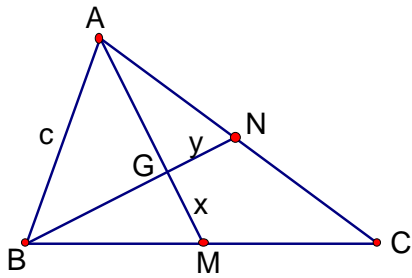
$\Rightarrow a = 2 \sin 18^\circ = 0,6180$ .

$$b = a(2\cos 36^\circ + 1) = 1,6180$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 \approx -2,236$$

**Bài 5:** Cho tam giác ABC có các trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau. Tính AB biết AC = b = 15,6789; BC = a = 12,1234.

**Giải:**



+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

Đặt AB = c; GM = x và GN = y.

Ta có AG = 2GM = 2x ; BG = 2GN = 2y.

$$\Rightarrow AG^2 + BG^2 = AB^2 = c^2$$

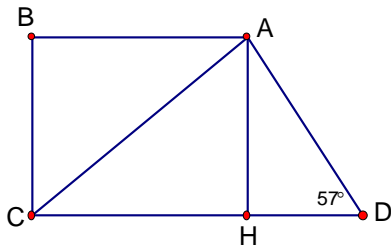
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = c^2$$

$$\text{Tương tự: } 4y^2 + x^2 = \frac{a^2}{4}; 4x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4y^2 + x^2 + 4x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \Leftrightarrow 5(4x^2 + 4y^2) = a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$$

**Bài 6:** Cho hình thang vuông ABCD ( AB // CD) và  $\angle B = 90^\circ$ . Biết AB = 12,35; BC = 10,35 và  $\angle D = 57^\circ$ . Tính chu vi hình thang ABCD ?

**Giải:**



**Bài 7:** Cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB = 3; AD = 5. Đường tròn tâm A bán kính 4 cắt BC tại E và cắt AD tại F.

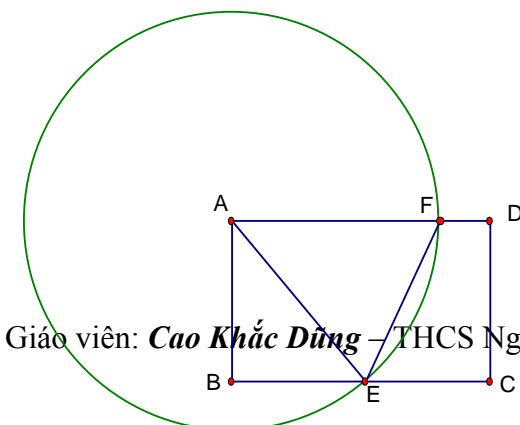
- a/ Tính gần đúng diện tích hình quạt tròn EAF
- b/ Tính gần đúng tỉ số diện tích hai phần hình chữ nhật do cung EF chia ra ?

**Giải:**

$$S_{EAF} \approx 6,78450$$

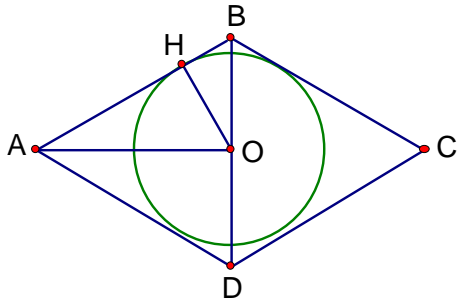
$$\frac{S_{ABEF}}{S_{EFDC}} \approx 2,53201$$

$$S_{EFDC}$$



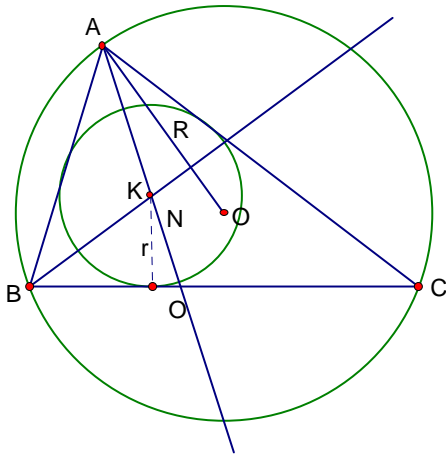
**Bài 8:** Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng 111,2009 cm và góc A bằng  $60^0$ . Tính diện tích phần không chung nhau giữa hình thoi và hình tròn nội tiếp ABCD.

**Giải:**



**Bài 9:** Cho tam giác ABC có AB = 4 dm; BC = 5 dm; CA = 6 dm. Tính gần đúng diện tích phần hình tròn ngoại tiếp khi khoét đi phần diện tích hình tròn nội tiếp tam giác ?

**Giải:**



+ Vận dụng công thức

$$2p = a + b + c; S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$R = \frac{abc}{4S}; r = \frac{S}{p}$$

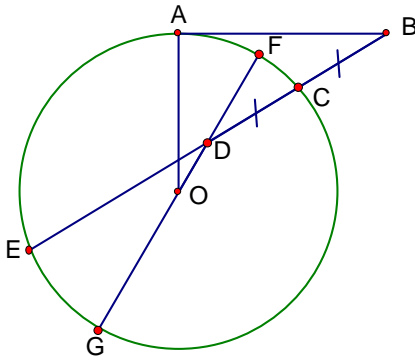
**Đáp số:**

$$S_{(O)} - S_{(K)} = \pi \left[ \left( \frac{abc}{4S} \right)^2 - \left( \frac{S}{p} \right)^2 \right]$$

**Bài 10:** Cho (O) và OA = R. Trên tiếp tuyến tại A với (O) lấy điểm B sao cho AB = 6 cm. Một điểm D ở bên trong đường tròn, BD cắt đường tròn tại C sao cho BC = CD = 3 cm, OD = 2 cm. Tính diện tích hình tròn (O) ?

**Giải:**

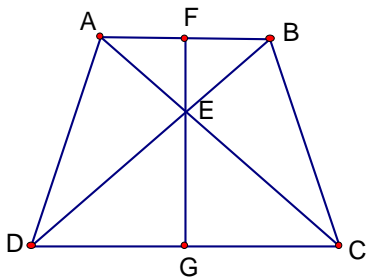




Ta có:  $BA^2 = BC \cdot BE$   
 $\Leftrightarrow 3(DE + 6) = 36 \Rightarrow DE = 6\text{cm}$   
 $DF \cdot DG = DE \cdot DC \Leftrightarrow (R - 2)(R + 2) = 6.3$   
 $\Leftrightarrow R^2 - 4 = 18 \Rightarrow R = \sqrt{22}$   
 $\Rightarrow S_{(O)} = \pi R^2 \approx 69,11503838$

**Bài 11:** Cho hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AB = 13,724 cm; cạnh bên AD = 21,867 cm. Biết hai đường chéo vuông góc với nhau. Tính  $S_{ABCD}$  ?

**Giải:** Ta có:



$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= EA^2 + EB^2 \\ CD^2 &= EC^2 + ED^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB^2 + CD^2 = 2AD^2$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{2AD^2 - AB^2}$$

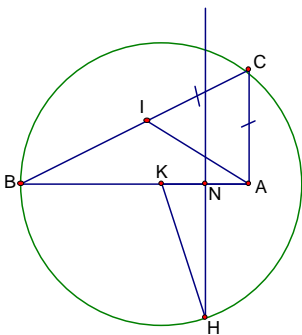
Đường cao  $h = FG = EF + EG$  nên  $h = \frac{AB + CD}{2}$

Do đó:

$$S_{ABCD} = \left( \frac{AB + CD}{2} \right)^2 = \left( \frac{AB + \sqrt{2AD^2 - AB^2}}{2} \right)^2 \Rightarrow S_{ABCD} \approx 429,2461\text{cm}^2$$

**Bài 12:** Cho tam giác ABC vuông tại A,  $AB = 2 \cdot AC$ . Trên cạnh BC lấy điểm I sao cho  $CI = CA$ , trên cạnh AB lấy điểm K sao cho  $BK = BI$ . Đường tròn tâm K bán kính KB cắt đường trung trực của AK tại H. Tính góc HBA ?

**Giải:**

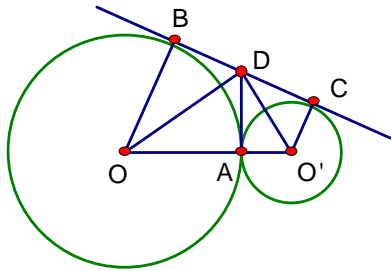


Đặt  $AB = 2AC = a$  thì  $BK = BI = a(\sqrt{5} - 1)$ ;  $KA = a(3 - \sqrt{5})$   
 Gọi N là trung điểm của AK, vì tam giác NHK vuông tại N nên:

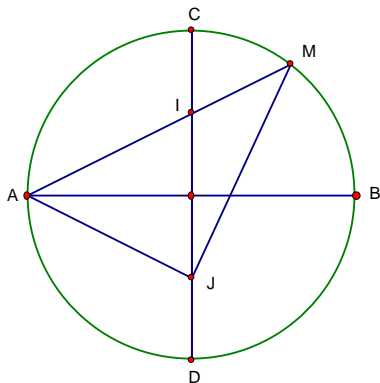
$$\cos \sphericalangle HKN = \frac{KN}{KH} = \frac{\frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5})}{a(\sqrt{5} - 1)} = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2(\sqrt{5} - 1)}$$

Ta được:  $\sphericalangle HKN = 72^\circ \Rightarrow \sphericalangle HBA = 36^\circ$

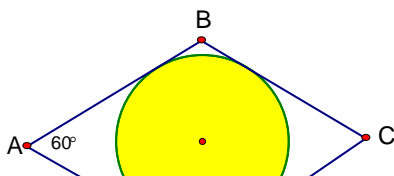
**Bài 13** : Cho hai đường tròn  $(O_1; R)$  và  $(O_2; r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$  ( $R > r$ ). Tiếp tuyến chung trong  $At$  cắt tiếp tuyến chung ngoài  $BC$  tại  $D$ . Tính góc  $ADC$  theo  $R$  và  $r$ .



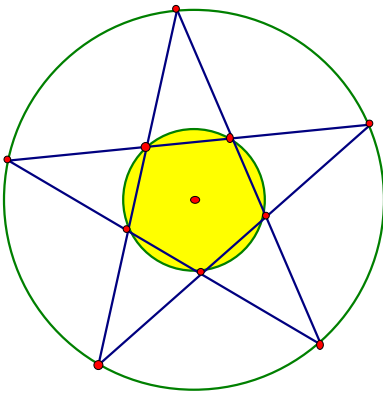
**Bài 14**: Cho đường tròn  $(O)$  có hai đường kính  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau. Gọi  $I$  và  $J$  là trung điểm của  $OC$  và  $OD$ .  $AI$  cắt  $(O)$  tại  $M$ . Tính  $\angle AJM$  ?



**Bài 15**: Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $111,2009$  cm và góc  $A$  bằng  $60^\circ$ . Tính tỉ số diện tích phần hình tròn nội tiếp  $ABCD$  với diện tích hình thoi còn lại khi khoét đi hình tròn ?

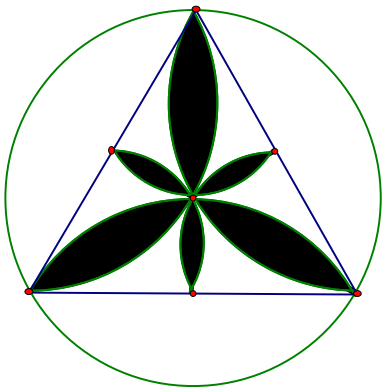


**Bài 16:** Tính diện tích hình được tô đậm trong hình tròn đơn vị ?



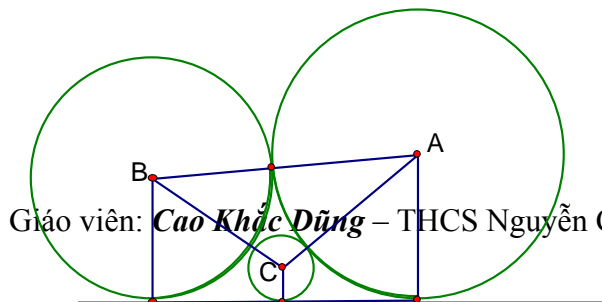
**Bài 17:**

Tính tỉ số diện tích phần bôi đen và diện tích tam giác đều trong hình tròn đơn vị ?



**Bài 18:**

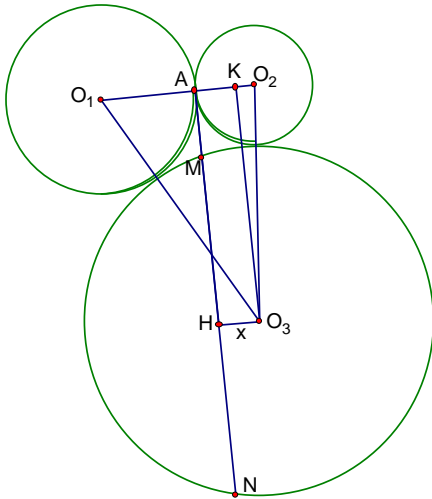
Cho 3 đường tròn ( A; 2 cm ); ( B; 1 cm ) và ( C ) lần lượt tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc với một đường thẳng ( như hình vẽ ).



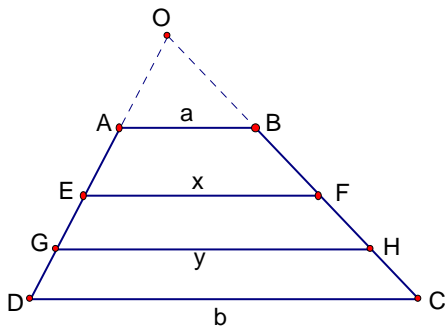
a/ Tính gần đúng bán kính R của đường tròn tâm C . **Đáp số:**  $\frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}}$

b/ Tính gần đúng diện tích S  
( phân gạch đậm ) giới hạn bởi 3 đường tròn và đường thẳng. **Đáp số:** 0,455485821

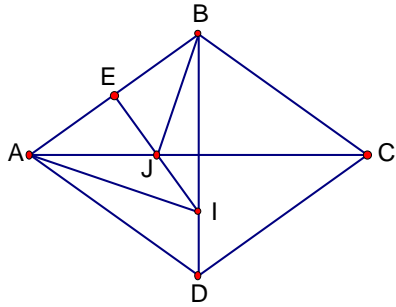
**Bài 19:** Cho 3 đường tròn  $(O_1; a)$ ,  $(O_2; b)$ ,  $(O_3; c)$  từng đôi một tiếp xúc ngoài nhau ( như hình vẽ ).Tiếp tuyến chung trong của  $(O_1)$  và  $(O_2)$  cắt  $(O_3)$  tại M và N. Tính độ dài MN theo a, b, c.



**Bài 20:** Hai đường thẳng EF, GH cùng song song với hai đáy  $AB = a < CD = b$  của hình thang và chia hình thang thành 3 phần có diện tích bằng nhau. Tính EF và GH theo a và b.

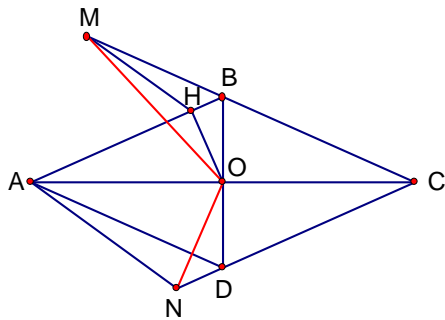


**Bài 21:** Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi ABCD. Vẽ đường trung trực của AB cắt AC và BD lần lượt tại I và J. Biết  $IB = a$ ;  $JA = b$ . Tính diện tích hình thoi ABCD.



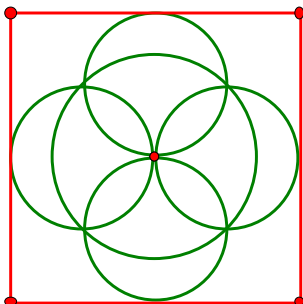
**Bài 22:**

Cho hình thoi ABCD có  $\angle BAD = 40^\circ$ , O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên cạnh AB. Trên tia đối của tia BC, trên tia đối của tia DC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho  $HM \parallel AN$ . Tính  $\angle MON$  ?



**Bài 23:** Viên gạch lát hình vuông với các họa tiết trang trí được tô bằng 3 loại màu ( như hình bên ). Hãy tính tỉ lệ phần trăm diện tích của mỗi màu có trong viên gạch này ?

Đáp số:  $S_{\text{tô đen}} = 4$  ( 25% );  $S_{\text{gạch chéo}} = 2,2832$  ( 14,27% );  $S_{\text{còn lại}} = 9,7168$  ( 60,73% )

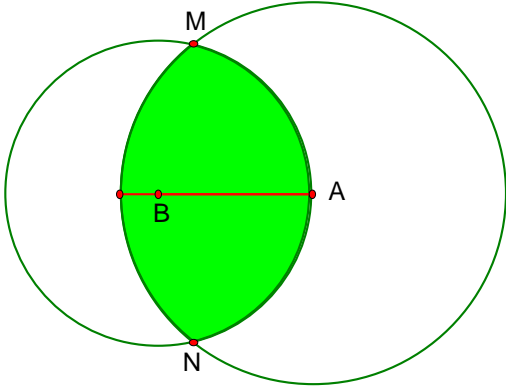


**Bài 24:**

Cho hai hình tròn (A) và (B) cắt nhau tại hai điểm M và N sao cho diện tích phần chung của hai đường tròn bằng nửa diện tích hình tròn (B). Tính tỉ số diện tích hình tròn (A) với (B).

Giáo viên: **Cao Khắc Dũng** – THCS Nguyễn Huệ

**Bài 25:** Cho tam giác ABC có góc A nhọn,  $AC = c$ ;  $AB = b$ . Cho biết diện tích tam giác là:  $S = \frac{2}{5}bc$ .



**Một số bài tập về hình học không gian:**

**Bài 1:** Cho hình chóp tứ giác đều O.ABCD có độ dài cạnh đáy bằng  $a$ , độ dài cạnh bên bằng  $l$ .

a/ Tính diện tích xung quang, diện tích toàn phần và thể tích hình chóp O.ABCD theo  $a$  và  $l$ .

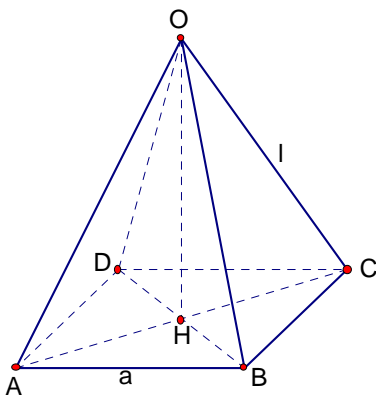
b/ Tính diện tích xung quang, diện tích toàn phần và thể tích hình chóp O.ABCD theo  $a = 5,75$  cm và  $l = 6,15$  cm.

**Giải:**

$$a/ S_{xq} = a\sqrt{4l^2 - a^2} ; S_p = a\sqrt{4l^2 - a^2} + a^2$$

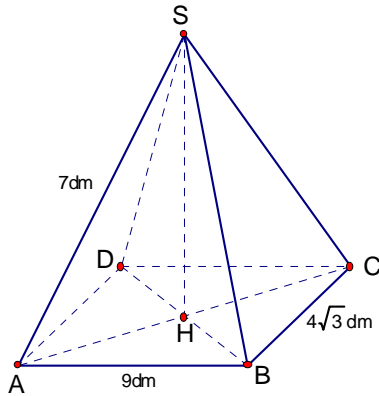
$$V = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}}$$

b/



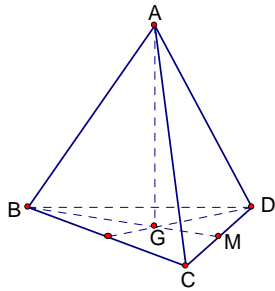
**Bài 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB = 9$  dm,  $AD = 4\sqrt{3}$  dm và chân đường cao hình chóp là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật đáy. Cạnh bên  $SA = 7$  dm. Tính gần đúng chiều cao SH và thể tích hình chóp?

**Giải:**



**Bài 3:** Cho hình tứ diện ABCD có các cạnh  $AB = 7$ ,  $BC = 6$ ,  $CD = 5$ ,  $BD = 4$  và chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) là trọng tâm của tam giác BCD. Tính gần đúng với 5 chữ số thập phân thể tích của khối tứ diện đó ?

**Giải:**



+ Tính trung tuyến  $BM = \frac{\sqrt{79}}{2}$

+ Tính đường cao AG do

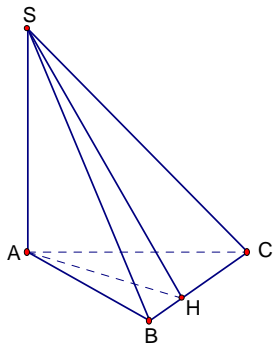
$$BG = \frac{2}{3}BM; AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} \Rightarrow AG = \frac{\sqrt{362}}{3}$$

+ Tính diện tích tam giác BCD theo công thức Herông:

+  $V \approx 20,97452$

**Bài 4:** Cho tứ diện S ABC có cạnh SA vuông góc với đáy (ABC),  $SB = 8$  cm;  $SC = 15$  cm;  $BC = 12$  cm và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) góc  $68^{\circ}52'$ . Tính gần đúng diện tích toàn phần tứ diện S ABC.

**Giải:**



+ Tính  $S_{SBC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

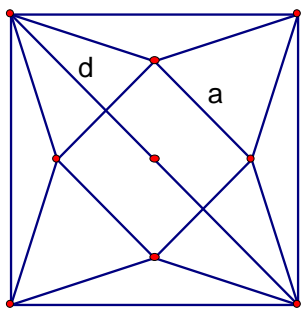
+ Kẻ  $SH \perp BC \Rightarrow SH = \frac{2S_{SBC}}{BC} \Rightarrow SA = SH \cdot \sin 68^{\circ}52'$

$$AH = SH \cdot \cos 68^{\circ}52'$$

$$\Rightarrow S_{tp} = 124,4661746 \text{ cm}^2$$

**Bài 5:** Người ta cắt một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho 4 đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp. Tính cạnh đáy của hình chóp để thể tích lớn nhất?

**Giải:**



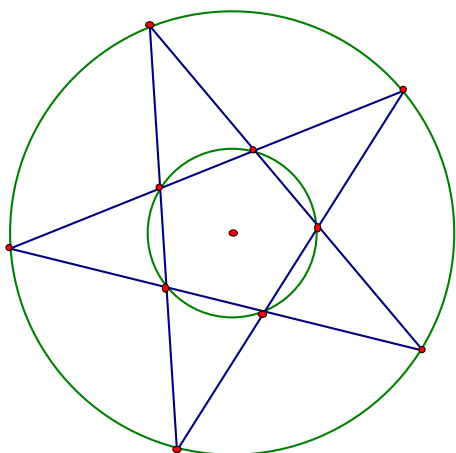
$$2d + a = \sqrt{2}; V = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow V^2 = \frac{1}{9} a^4 \left( d^2 - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{1}{9\sqrt{2}} a^4 \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$\frac{256}{9\sqrt{2}} \left( \frac{a}{4} \right)^4 \left( d - \frac{a}{2} \right) \leq \frac{256}{9\sqrt{2}} \cdot \frac{\left( d + \frac{a}{2} \right)^5}{3125} = \frac{32}{28125}$$

$$\left( \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \leq \left( \frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \left( d - \frac{a}{2} \right)}{5} \right)^5 \right)$$

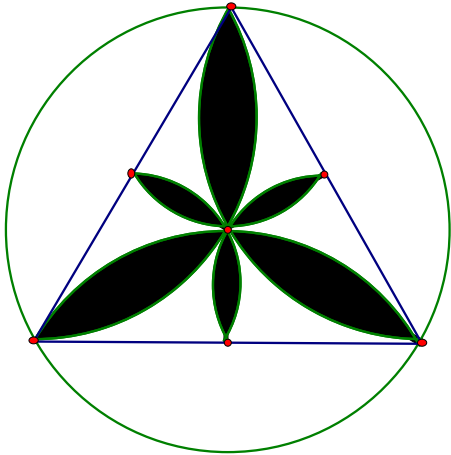
$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{4\sqrt{2}}{75\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{a}{4} = d - \frac{a}{2}$$

**Bài 1:** Tính diện tích hình gạch chéo trong hình tròn đơn vị ?

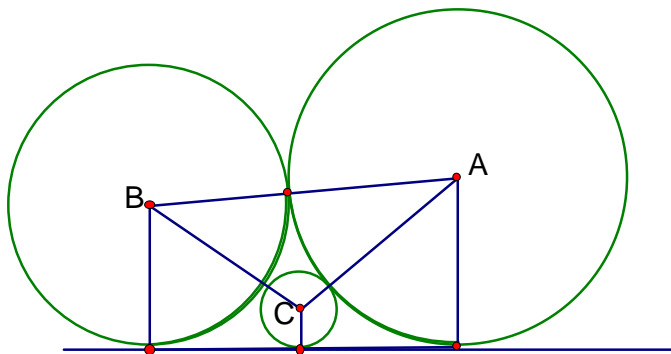


**Bài 2:** Tính tỉ số diện tích phần bôi đen và diện tích tam giác đều trong hình tròn đơn vị ?



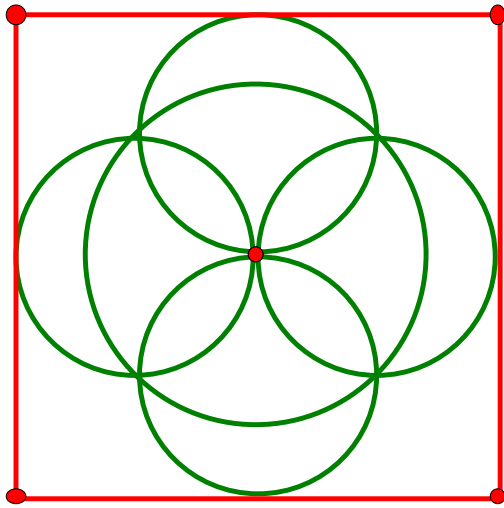


**Bài 3:** Cho 3 đường tròn ( A; 2 cm ); ( B; 1 cm ) và ( C; R ) lần lượt tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc với một đường thẳng ( như hình vẽ ).



- Tính gần đúng bán kính R của đường tròn tâm C
- Tính gần đúng diện tích S ( phần gạch chéo ) giới hạn bởi 3 đường tròn và đường thẳng.

**Bài 4:** Viên gạch lát hình vuông với các họa tiết trang trí được tô bằng 3 loại màu ( như hình bên ). Hãy tính tỉ lệ phần trăm diện tích của mỗi màu có trong viên gạch này ?



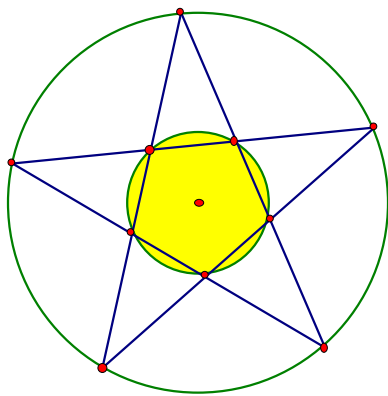
**Giải:** Gọi  $OA = r$  là bán kính đường tròn nhỏ,  $OB = R = 1$  là bán kính đường tròn lớn.  
 Áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác  $OAB$ , ta được:

$$\frac{OA}{\sin 18^\circ} = \frac{OB}{\sin(180^\circ - 36^\circ - 18^\circ)} \Rightarrow r = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 126^\circ} \approx 0,381966011$$

Diện tích  $S'$  của hình tròn nhỏ bằng  
 $S' = \pi r^2 \approx 0,458352191$

Diện tích  $S$  của cả ngôi sao ( khi chưa khoét đi hình tròn nhỏ ) bằng:

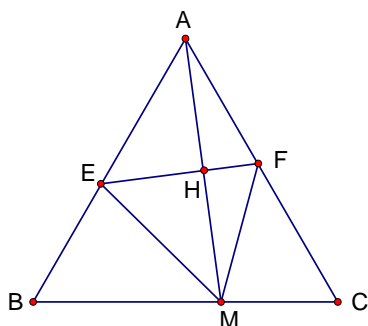
$$S = 10S_{OAB} = 10 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin AOB = 5 \cdot r \cdot \sin 26^\circ \approx 1,122569941$$



Vậy diện tích phần tô đậm bằng  $S - S' = 1,122569941 - 0,458352191 = 0,66421775$

Do đó tỉ số diện tích phần tô đậm và phần còn lại bằng  $\frac{0,664217750}{\pi - 0,664217750} = 0,268113538$

Bài tập: Cho tam giác ABC có độ dài cạnh bằng a. Trên BC lấy M sao cho  $BM = b$  ( $b < a$ ). Đường trung trực của AM cắt AB, AC lần lượt tại E, F. Tính theo a và b:  
 a/ EF .  
 b/ Diện tích tam giác MEF.



Bài tập: Cho hình vẽ

