MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ SỞ VỀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Tác Giả : Phí Thái Thuận
10 chuyên Toán THPT chuyên THĐ - Bình Thuận

Trong chương trình toán THCS và THPT thì phương trình nghiệm nguyên vẫn luôn là một đề tài hay và khó đối với học sinh. Các bài toán nghiệm nguyên thường xuyên có mặt tại các kì thi lớn, nhỏ, trong và ngoài nước. Trong bài viết này tôi chỉ muốn đề cập đến các vấn đề cơ bản của nghiệm nguyên (các dạng; các phương pháp giải) chứ không đi sâu (vì vốn hiểu biết có hạn). Tôi cũng sẽ không nói về phương trình Pell (vì nó có nhiều trong các sách) và phương trình Pythagore; Fermat (cũng có nhiều trong sách; khái niệm rất đơn giản) Chú ý: các bạn có thể tìm đọc thêm cuốn "phương trình và bài toán nghiệm nguyên" của thầy **Vũ Hữu Bình**.

Phương Pháp 1: Áp Dụng Tính Chia Hết

Dạng 1: phương trình dạng $ax + by = c$

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$2x + 25y = 8 \tag{1}$$

Giải: Có thể dễ dàng thấy y chẵn. Đặt $y = 2t$. Phương trình (1) trở thành: $x + 25t = 4$.

Từ đó ta có nghiệm phương trình này:

$$\begin{cases} x = 4 - 25t \\ y = 2t \\ t \in Z \end{cases}$$

Chú ý: Ta còn có cách thứ 2 để tìm nghiệm của phương trình trên. Đó là phương pháp tìm nghiệm riêng để giải phương trình bậc nhất 2 ẩn. Ta dựa vào định lí sau: Nếu phương trình $ax + by = c$ với $(a; b) = 1$ có 1 tập nghiệm là $(x_0; y_0)$ thì mọi nghiệm của phương trình nhận từ công thức:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \\ t \in Z \end{cases}$$

Định lí này chứng minh không khó (bằng cách thế trực tiếp vào phương trình) Dựa vào định lý này ; ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng của phương trình $ax + by = c$. Đối với các phương trình có hệ số $a; b; c$ nhỏ thì việc tìm nghiệm khá đơn giản nhưng với các phương trình có $a; b; c$ lớn thì không dễ dàng chút nào . Do đó ta phải dùng đến thuật toán Euclide (các bạn có thể tìm đọc các sách ; tôi sẽ không nói nhiều về thuật toán này) . Ngoài ra còn có thêm phương pháp hàm Euler .

Dạng 2: Đưa về phương trình ước số:

Ví dụ 2: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$2x + 5y + 3xy = 8 \tag{2}$$

Giải:

$(2) \Leftrightarrow x(2 + 3y) + 5y = 8$

$\Leftrightarrow 3[x(2 + 3y) + 5y] = 24$

$\Leftrightarrow 3x(2 + 3y) + 15y = 24$

$\Leftrightarrow 3x(2 + 3y) + (2 + 3y) \cdot 5 = 34$

$\Rightarrow (3x + 5)(3y + 2) = 34$

$34 = 17.2 = 34.1$

Lập bảng dễ dàng tìm được nghiệm phương trình trên.

Ví dụ 3: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - y = 6 \tag{3}$$

Giải:

$(3) \Leftrightarrow x^2 + x(3y - 2) + 2y^2 - y + a = 6 + a$

a là 1 số chưa biết; a sẽ đc xác định sau.

Xét phương trình: $x^2 + x(3y - 2) + 2y^2 - y + a = 0$

$\Delta = (3y - 2)^2 - 4(2y^2 - y + a) = y^2 - 8y + 4 - 4a$

Chọn $a = -3$

$\Rightarrow \Delta = y^2 - 8y + 16 = (y - 4)^2$

$\Rightarrow x_1 = -y - 1; x_2 = -2y + 3$

Từ đó ta có phương trình ước số: $(x + y + 1)(x + 2y - 3) = 3$

Dạng 3: Phương pháp tách các giá trị nguyên

Ví dụ 4: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$xy - x - y = 2 \tag{4}$$

Giải:

$(4) \Rightarrow x(y - 1) = y + 2$

$\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-1}$

$\Rightarrow x = 1 + \frac{3}{y-1}$

$\Rightarrow (y - 1)|3$

Phương Pháp 2: Phương Pháp Lựa Chọn Modulo (hay còn gọi là xét số dư từng vế)

Trước tiên ta có các tính chất cơ bản sau: 1 số chính phương chia 3 dư $0, 1$; chia 4 dư $0, 1$; chia 8 dư $0, 1, 4$

Ví Dụ 5: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^2 + y^2 = 2007 \tag{5}$$

Giải:

$x^2 \equiv 0; 1(mod4) \quad y^2 \equiv 0; 1(mod4)$

$\Rightarrow VT = x^2 + y^2 \equiv 0; 1; 2(mod4)$

Còn $VP = 2007 \equiv 3(mod4)$ Do đó phương trình trên vô nghiệm.

Có thể mở rộng thêm cho nhiều modulo như $5; 6; \cdots$ và mở rộng cho số lập phương; tứ phương; ngũ phương... Ta đến với ví dụ sau:

Ví dụ 6: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$19^x + 5^y + 1890 = 1975^{4^{30}} + 1993 \tag{6}$$

Giải:

Dễ thấy $VT \equiv 19^x(mod5)$.

Mặt khác: $19^x = (20 - 1)^x \equiv (-1)^x(mod5)$

x chẵn thì $19^x \equiv 1(mod5)$; x lẻ thì $19^x \equiv -1 \equiv 4(mod5)$

$\Rightarrow VT \equiv 1; 4(mod5)$

Còn $VP \equiv 1993 \equiv 3(mod5)$ (vô lí)

Do đó phương trình trên vô nghiệm.

Chú ý: Nhiều bài toán nghiệm nguyên trong đề thi vô địch toán các nước đôi khi phải xét đến modulo khác lớn ; ta xét đến ví dụ sau:

Ví Dụ 7:(Balkan1998) Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$m^2 = n^5 - 4 \tag{7}$$

Giải:

$m^2 \equiv 0; 1; 3; 4; 5; 9(mod11)$

$n^5 - 4 \equiv 6; 7; 8(mod11)$ (vô lí)

Do đó phương trình này vô nghiệm.

Chỉ 3 dòng; thật ngắn gọn và đẹp phải không nào. Nói chung để xét modulo hiệu quả còn phải tùy thuộc vào sự nhạy bén của người làm toán.

Nói thêm: Đối với các phương trình nghiệm nguyên có sự tham gia của các số lập phương thì modulo thường dùng là $modulo9$ vì $x^3 \equiv 0; 1; 8(mod9)$ (hãy tự chứng minh).

Ta xét Ví Dụ sau.

Ví Dụ 8: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1012 \tag{8}$$

Giải:

Dựa vào nhận xét trên : $(8) x^3+y^3+z^3 \equiv 0;1;2;3;6;7;8 (mod 9)$

Còn $1012 \equiv 4 (mod 9)$ (vô lí).

Do đó phương trình trên vô nghiệm .

Phương Pháp 3: Dùng Bất Đẳng Thức

Dạng 1: Đối với các phương trình mà các biến có vai trò như nhau thì người ta thường dùng phương pháp sắp xếp thứ tự các biến.

Ví Dụ 9: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x+y+z=3xyz \tag{9}$$

Giải:

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$\Rightarrow 3xyz = x+y+z \leq 3z$

$\Rightarrow xy \leq 1$

$\Rightarrow x=1; y=1$

$\Rightarrow z=1$

Nghiệm phương trình là $(1;1;1)$

Dạng 2: Đối với các phương trình nghịch đảo các biến ta cũng có thể dùng phương pháp này (nếu vai trò các biến cũng như nhau). Cách giải khác dành cho:

Ví Dụ 9: Chia 2 vế phương trình trên cho xyz ta được: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3$

Giải:

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$\Rightarrow \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3 \leq \frac{3}{x^2}$

$\Rightarrow x^2 \leq 1$

$\Rightarrow x=1$

$\Rightarrow y=1$ và

$z=1$. Ta xét đến một ví dụ tiếp theo để thấy sự hiệu quả của phương pháp này:

Ví Dụ 10: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

Giải:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Không mất tính tổng quát có thể giả sử:

$1 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3$.

Lần lượt thử: $x=1$; phương trình vô nghiệm nguyên.

Xét $x=2 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 4$

Mặt khác $y \geq x=2 \Rightarrow y \in \{2;3;4\}$.

Ta thử y lần lượt;

$y=2$ phương trình vô nghiệm nguyên;

$y = 3 \Rightarrow z = 6$
$y = 4 => z = 4$
Xét $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{y}$
$\Rightarrow y \leq 3$
Mặc khác $y \geq x = 3 \Rightarrow y = 3$
$\Rightarrow z = 3.$
Vậy nghiệm phương trình là $(2;3;6); (2;4;4); (3;3;3)$ và các hoán vị.

Dạng 3: Áp Dụng Các Bất Đẳng Thức Cổ Điển.

Ví Dụ 11: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x^6 + z^3 - 15x^2z = 3x^2y^2z - (y^2+5)^3 \tag{10}$$

Giải:
$(10) \Leftrightarrow (x^2)^3 + (y^2+5)^3 + z^3 = 3x^2z(5+y^2)$
Áp Dụng BDT Cauchy cho 3 số; ta đc $VT \geq VP$
Dấu $" = "$ xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = y^2 + 5 = z$
Từ phương trình $x^2 = y^2 + 5 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 5$
(phương trình ước số; dễ dàng tìm đc $x; y$ rồi tìm ra z).
Đáp số: nghiệm phương trình là $(x;y;z) = (3;2;9)$

Ghi chú: Việc Áp Dụng BDT vào bài toán nghiệm nguyên rất ít dùng vì ẩn ý dùng BDT rất dễ bị "lộ" nếu người ra đề không khéo léo. Tuy nhiên cũng có một vài trường hợp dùng BDT khá hay. Ta đến với Ví Dụ sau.

Ví Dụ 12: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau với $x; y; z$ là các số đôi 1 khác nhau.

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^2 \tag{11}$$

Giải:
Áp dụng BDT quen thuộc sau:
$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq (\frac{x+y+z}{3})^3$
$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^2 \geq \frac{(x+y+z)^3}{9}$
$\Rightarrow x + y + z \leq 9$. Vì $x; y; z$ khác nhau
$\Rightarrow x + y + z \geq 1 + 2 + 3 = 6$
$\Rightarrow x + y + z \in \{6; 7; 8\}$
Lần lượt thử các giá trị của $x + y + z$ ta tìm đc $x; y; z$
Đáp số: $(1;2;3)$ và các hoán vị .

Dạng 4: Áp dụng tính đơn điệu của bài toán. Ta chỉ ra 1 hoặc 1 vài giá trị của biến thoả phương trình rồi chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Ví Dụ 13: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau

$$3^x + 4^x = 5^x \tag{12}$$

Giải:
(12) $\Leftrightarrow (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$
$x = 1$; phương trình vô nghiệm nguyên
$x = 2$; thoả mãn.
$x \geq 3 \Rightarrow (\frac{3}{5})^x < (\frac{3}{5})^2 \quad (\frac{4}{5})^x < (\frac{4}{5})^2$
$\Rightarrow (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x < 1.$

Do đó $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Còn phương trình này thì sao nhỉ: $(\sqrt{3})^x + (\sqrt{4})^x = (\sqrt{5})^x$

Bằng cách tương tự; dễ dàng nhận ra $x = 4$ là nghiệm duy nhất.

Nói thêm : Đối với phương trình trên; ta có bài toán tổng quát hơn. Tìm các số nguyên dương $x; y; z$ thoả: $3^x + 4^y = 5^z$.

Đáp số đơn giản là $x = y = z = 2$ nhưng cách giải trên vô tác dụng với bài này. Để giải bài này thì hữu hiệu nhất là xét modulo (các phương trình chứa ẩn ở mũ thì phương pháp tốt nhất vẫn là xét modulo). Phần này chỉ nói thêm nên chúng ta tạm thời không giải bài toán này bây giờ mà sẽ để lại dịp khác.

Dạng 5: Dùng điều kiện Δ hoặc $\Delta' \geq 0$ để phương trình bậc 2 có nghiệm.

Ví Dụ 14: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^2 + 2y^2 = 2xy + 2x + 3y \qquad (13)$$

Giải:
(13) $\Leftrightarrow x^2 - 2x(y-1) + 2y^2 - 3y = 0$
$\Delta' = (y+1)^2 - (2y^2 - 3y) = -y^2 + 5y + 1 \geq 0$
Giải bất phương trình trên không khó; dễ dàng suy ra được:
$\frac{-\sqrt{29}}{2} \leq y - \frac{5}{2} \leq \frac{\sqrt{29}}{2}$

Do y nguyên nên dễ dàng khoanh vùng được giá trị của y và thử chọn. Nói chung thì phương pháp này được dùng khi $\Delta(\Delta')$ có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ (hoặc $f(y)$) với hệ số $a < 0$.

Còn khi $a > 0$ thì dùng phương pháp đã nói đến trong ví dụ 3 để đưa về phương trình ước số 1 cách nhanh chóng.

Phương Pháp 4: Phương pháp chặn hay ta có thể gọi nó bằng 1 cái tên khác là đẹp hơn là phương pháp đánh giá. Phương pháp đánh giá cơ bản dựa vào 2 nhận xét sau:

1. Không tồn tại $n \in Z$ thoả $a^2 < n^2 < (a+1)^2$ với $a \in Z$
2. Nếu $a^2 < n^2 < (a+2)^2$ với $a; n \in Z$ thì $n = a + 1$.

Ta đến với Ví Dụ sau:

Ví Dụ 15: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^4 + x^2 + 1 = y^2 \tag{14}$$

Xét hiệu $(x^2+1)^2 - y^2 = x^2 \geq 0$
$\Rightarrow (x^2+1)^2 \geq y^2$
Xét hiệu $y^2 - (x^2)^2 = x^2 + 1 > 0 => y^2 > (x^2)^2$
$\Rightarrow (x^2)^2 < y^2 \leq (x^2+1)^2$
Theo nhận xét trên $\Rightarrow y^2 = (x^2+1)^2$
Thế vào phương trình ban đầu $\Rightarrow x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2$
$\Rightarrow x^2 = 0$
$\Rightarrow x = 0$

Nhận xét trên có thể mở rộng với số lập phương; ta đến với ví dụ tiếp theo:

Ví Dụ 16: Giải phương trình nghiệm nguyên sau :

$$x^3 - y^3 = 2y^2 + 3y + 1 \tag{15}$$

Giải:
Bằng cách trên ta có được : $(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3$
suy ra hoặc $x = y$ hoặc $x = y + 1$ lần lượt xét $x = y; x = y + 1$ ta tìm được các nghiệm phương trình là: $(-1; -1); (1; 0)$

Phương Pháp 5: Dùng tính chất của số chính phương .

Dạng 1: Trước tiên ta đến với 1 mệnh đề sau :
$xy = z^2$ với $(x; y) = 1$ thì

$$\begin{cases} x = k^2 \\ y = t^2 \\ kt = z \end{cases}$$

Chứng minh mệnh đề này không khó ; ta chứng minh bằng phản chứng: Giả sử $x; y$ không là số chính phương nên trong phân tích thành ước nguyên tố của x hoặc y tồn tại 1 số chứa ít nhất 1 ước nguyên tố p với số mũ lẻ . Giả sử là x . Vì $(x; y) = 1$nên y không chứa thừa số $p => z^2$ cũng chứa thừa số p với số mũ lẻ (vô lí trái với điều kiện z^2 là số chính phương) . Bây giờ ta đến với 1 ví dụ .

Ví Dụ 17: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$2x^4 + 3x^2 + 1 - y^2 = 0 \tag{16}$$

Giải:
$(16) \Rightarrow (x^2+1)(2x^2+1) = y^2$

Rõ ràng $(x^2+1;2x^2+1)=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+1=t^2 \\ 2x^2+1=z^2 \end{cases}$$

Từ phương trình $x^2+1=t^2 => (t-x)(t+x)=1$ (phương trình ước số) Từ đó tìm được nghiệm phương trình . Đáp số: $(x;y)=(0;1)$

Dạng 2:

Ta có mệnh đề thứ 2:

Nếu $n;t$ là các số nguyên thoả $n(n+1)=t^2$ thì hoặc $n=0$; hoặc $n+1=0$

Chứng minh mệnh đề này không khó:

Giả sử $n \neq 0; n+1 \neq 0 => t \neq 0$

$<=> n^2+n=t^2$

$<=> 4n^2+4n=4t^2$

$<=> (2n+1)^2=4t^2+1$

Dùng phương pháp chặn: $(2t)^2<(2n+1)^2<(2t+1)^2$

Vô lí do đó mệnh đề được chứng minh.

Bây giờ áp dụng mệnh đê trên ; ta đến với ví dụ sau .

Ví Dụ 18: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^2+2xy+y^2+5x+5y=x^2y^2-6 \tag{17}$$

Giải:

$(17) \Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+3)=x^2.y^2$

Suy ra hoặc $x+y+2=0$ hoặc $x+y+3=0$. Phương trình này vẫn còn những cách giải khác nhưng điều tôi muốn nhấn mạnh chính là việc dùng mệnh đề trên giúp cho lời giải bài toán trở nên ngắn gọn hơn .

Phương Pháp 6: Lùi vô hạn (hay còn gọi là phương pháp xuống thang). Phương pháp này dùng để chứng minh một phương trình $f(x;y;z;\cdots)$ nào đó ngoài nghiệm tầm thường $x=y=z=0$ thì không còn nghiệm nào khác. Phương pháp này có thể được diễn giải như sau: Bắt đầu bằng việc giả sử $(x_0;y_0;z_0;\cdots)$ là nghiệm của $f(x;y;z;\cdots)$. Nhờ những biến đổi ; suy luận số học ta tìm được 1 bộ nghiệm khác $(x_1;y_1;z_1;\cdots)$ sao cho các nghiệm quan hệ với bộ nghiệm đầu tiên bởi 1 tỉ số k nào đó . Ví Dụ: $x_0=k.x_1;y_0=k.y_1;\cdots$. Rồi lại từ bộ $(x_2;y_2;z_2;\cdots)$ thoả $x_1=k.x_2;y_1=k.y_2;\cdots$. Quá trình cứ tiếp tục dẫn đến: $x_0;y_0;z_0;\cdots$ chia hết cho k^s với s là 1 số tự nhiên tuỳ ý . Điều này xảy ra $<=> x_0=y_0=z_0=\cdots=0$.Để rõ ràng hơn ta xét một Ví Dụ .

Ví Dụ 19: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^2+y^2=3y^2 \tag{18}$$

Giải:

Gọi $(x_0; y_0; z_0)$ là 1 nghiệm của phương trình trên . Xét theo modulo 3 . Ta chứng minh $x_0; y_0$ đều chia hết cho 3 . Thật vậy ; rõ ràng vế phải chia hết cho 3 => $x_0^2 + y_0^2 \vdots 3$ Ta có: $x_0^2 \equiv 0; 1(mod 3)$ $y_0^2 \equiv 0; 1(mod 3)$ Do đó => $x_0^2 + y_0^2 \vdots 3$ <=> $x_0; y_0$ đều chia hết cho 3 . Đặt $x_0 = 3.x_1; y_0 = 3.y_1$. Thế vào và rút gọn: $3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2$ Rõ ràng $z_0 \vdots 3$. Đặt $z_0 = 3.z_1$. Thế vào và rút gọn: $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$ Do đó nếu $(x_0; y_0; z_0)$ là 1 nghiệm của phương trình trên thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là 1 nghiệm . Tiếp tục lý luận như trên thì $x_1; y_1; z_1$ đều chia hết cho 3 . Ta lại tìm được nghiệm thứ 2 là $(x_2; y_2; z_2)$ với $x_2; y_2; z_2 \vdots 3$. Tiếp tục và ta dẫn đến: $x_0; y_0; z_0 \vdots 3^k$. Điều đó chỉ xảy ra $\Leftrightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Ví Dụ 20: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz \quad (Korea 1996) \tag{19}$$

Giải:

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là 1 nghiệm của phương trình trên . $\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2.x_0.y_0.z_0$

Rõ ràng $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ chẵn (do $2.x_0.y_0.z_0$ chẵn) nên có 2 trường hợp xảy ra.

Trường Hợp 1: có 2 số lẻ ; 1 số chẵn. Không mất tính tổng quát giả sử $x_0; y_0$ lẻ ; z_0 chẵn. Xét theo modulo 4 thì: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \equiv 2(mod 4)$ Còn $2.x_0.y_0.z_0 \vdots 4$ (do z_0 chẵn) (vô lí)

Trường Hợp 2: 3 số đều chẵn. Đặt $x_0 = 2.x_1; y_0 = 2.y_1; z_0 = 2.z_1$ thế vào và rút gọn ta được: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4.x_1.y_1.z_1$ lập luận như trên ta lại được $x_1; y_1; z_1$ chẵn.

Quá trình lại tiếp tục đến: $x_0; y_0; z_0 \vdots 2^k$ với $k \in N*$

Điều đó xảy ra $\Leftrightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Tóm lại nghiệm phương trình là $(x; y; z) = (0; 0; 0)$

Phương Pháp 7: Nguyên Tắc Cực Hạn hay còn gọi là Nguyên Lí Khởi Đầu Cực Trị. Về mặt hình thức thì phương pháp này khác với phương pháp lùi vô hạn nhưng về ý tưởng sử dụng thì như nhau ; đều chứng minh 1 phương trình không có nghiệm không tầm thường. Phương pháp bắt đầu bằng việc giả sử $(x_0; y_0; z_0; \cdots)$ là nghiệm của $f(x; y; z; \cdots)$ với điều kiện ràng buộc với bộ $(x_0; y_0; z_0; \cdots)$. Ví Dụ như x_0 nhỏ nhất hoặc $x_0 + y_0 + \cdots$ nhỏ nhất... Bằng những phép biến đổi số học ta tìm được 1 bộ nghiệm khác $(x_1; y_1; \cdots)$ trái với những điều kiện ràng buộc trên. Ví dụ khi chon bộ $(x_0; y_0; z_0; \cdots)$ với x_0 nhỏ nhất ta lại tìm được bộ $(x_1; y_1; z_1; \cdots)$ thoả $x_1 < x_0$. Từ đó dẫn đến phương trình cho có nghiêm là $(0; 0; 0; .0)$. Ta hãy xét 1 ví dụ.

Ví Dụ 21: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4 \tag{20}$$

$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$

Giải:

Giả sử $(x_0; y_0; z_0; t_0)$ là 1 nghiệm phương trình trên với điều kiện x_0 nhỏ nhất.

Từ phương trình $\Rightarrow t$ chẵn. Đặt $t = 2.t_1$ Thế vào và rút gọn ta được: $4x_0^4 + 2y_0^4 + z_0^4 = 8t_1^4$

Rõ ràng z_0 chẵn. Đặt $z_0 = 2z_1$

$\Rightarrow 2x_0^4 + y_0^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4$

Tiếp tục y_0 chẵn. Đặt $y_0 = 2y_1$

$\Rightarrow x_0^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4$

Và dễ thấy x_0 cũng chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1$

$\Rightarrow 8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4$

Nhìn vào phương trình trên rõ ràng $(x_1; y_1; z_1; t_1)$ cũng là 1 nghiệm phương trình trên và dễ thấy $x_1 < x_0$ (vô lí do ta chọn x_0 nhỏ nhất)

Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $(0; 0; 0; 0)$

Chú ý: Ta cũng có thể chọn bộ $(x_0; y_0; z_0; t_0)$ thoả $x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ nhỏ nhất ; lý luận tương tự và dễ thấy $x_1 + y_1 + z_1 + t_1 < x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ từ đó cũng dẫn đến kết luận bài toán.

Phương Pháp 8: Sử Dụng Một Mệnh Đề Cơ Bản Của Số Học. Trước tiên ta đến với bài toán nhỏ sau:

Cho p là số nguyên tố có dạng $p = k \cdot 2^t + 1$ với t nguyên dương ; k là số tự nhiên lẻ.

Chứng minh rằng nếu $x^{2^t} + y^{2^t} \vdots p$ thì $x \vdots p; y \vdots p$

Chứng minh:

Giả sử $x \vdots p$ thì rõ ràng $y \vdots p$ Theo Fermat nhỏ: $x^{p-1} \equiv 1(modp)$ $y^{p-1} \equiv 1(modp)$ $p = k2^t + 1$ nên

$$\begin{cases} x^{k.2^t} \equiv 1(modp) \\ y^{k.2^t} \equiv 1(modp) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{k.2^t} + y^{k.2^t} \equiv 2(modp) \tag{21}$$

Mặt khác do k lẻ nên theo hằng đẳng thức $a^{2n+1} + b^{2n+1}$: $x^{k.2^t} + y^{k.2^t} = (x^{2^t} + y^{2^t}).A)$ (A là 1 số nào đó)

Rõ ràng:

$$x^{k.2^t} + y^{k.2^t} \equiv 0(modp) \quad \text{(do giả thiết } x^{2^t} + y^{2^t} \vdots \text{ p)} \tag{22}$$

Do đó theo (21); (22) ta có điều phải chứng minh.

Xét 1 trường hợp nhỏ của bài toán trên:

Khi $t = 1$; vì k lẻ nên $k = 2s + 1 \Rightarrow p = 4s + 3$

Lúc đó ta có mệnh đề sau:

p là số nguyên tố có dạng $p = 4s + 3$. Khi đó nếu $x^2 + y^2 \vdots p$ thì $x \vdots p; y \vdots p$
Mệnh đề hết sức đơn giản này lại là 1 công cụ vô cùng hiệu quả đối vơi nhiều bài toán khó.

Ví Dụ 22: (bài toán Lebesgue)

Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$x^2 - y^3 = 7$ (đây là 1 trường hợp nhỏ của phương trình Mordell)

Ghi chú: Phương trình Mordell là phương trình có dạng $x^2+k = y^3 (k; x; y \in Z)$; bài toán trên là trường hợp phương trình Mordell với $k = -7$

Giải:

Trước tiên ta có bổ đề nhỏ sau:

Mọi số nguyên có dạng $A = 4t+3$ đều có ít nhất 1 ước nguyên tố có dạng $p = 4s + 3$

Chứng Minh: Giả sử A không có ước nguyên số nào có dạng $p = 4s + 3$ $=> A = (4t_1 + 1)(4t_1 + 1) = 4.(4t_1.t_2 + t_1 + t_2) + 1 = 4h + 1$(vô lí) Do đó A có 1 ước dạng $4t_1 + 3$ Nếu $4t_1 + 3$ là số nguyên tố thì bổ đề được chứng minh. Nếu $4t_1 + 3$ là hợp số. Lý luận tương tự ta lại có $4t_1 + 3$ có 1 ước có dạng $4t_2 + 3$. Nếu $4t_2 + 3$ lại là hợp số thì lai tiếp tục. Vì quá trình trên là hữu hạn nên ta có điều phải chứng minh. Quay lại bài toán. $\Rightarrow x^2 = y^3 + 7$

Xét y chẵn $\Rightarrow y^3 + 7 \equiv 7 (mod 8) \Rightarrow x^2 \equiv 7 (mod 8)$ (vô lí do $x^2 \equiv 0; 1; 4 (mod 8)$)

Xét y lẻ viết lại phương trình: $x^2 + 1 = y^3 + 8$

$\Rightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

Nếu $y = 4k + 1 \Rightarrow y + 2 = 4k + 3$

Nếu $y = 4k + 3 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = (4k + 3)^2 - 2(4k + 3) + 4 = 4h + 3$

Do đó y luôn có 1 ước dạng $4n + 3$ và theo bổ đề trên thì $4n + 3$ luôn có ít nhất 1 ước nguyên tố $p = 4s + 3 \Rightarrow x^2 + 1 \vdots p = 4s + 3$

Theo mệnh đề trên $\Rightarrow x \vdots p; 1 \vdots p$ (vô lí) Do đó phương trình trên vô nghiệm.

Ví Dụ 23:

Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + 5 = y^3$ (phương trình Mordell với $k = 5$)

Giải:

Xét y chẵn $\Rightarrow y^3 \equiv 0 (mod 8)$

$\Rightarrow x^2 + 5 \equiv 0 (mod 8)$

$\Rightarrow x^2 \equiv (mod 8)$ (vô lí do $x^2 \equiv 0; 1; 4 (mod 8)$)

Xét y lẻ Nếu $y = 4k + 3 \Rightarrow y^3 \equiv 3 (mod 4)$

$\Rightarrow x^2 + 5 \equiv 3(mod4)$
$\Rightarrow x^2 \equiv 2(mod4)$ (vô lí $x^2 \equiv 0; 1; (mod4)$)
Nếu $y = 4k + 1$ Viết lại phương trình $x^2 + 4 = y^3 - 1$
$\Rightarrow x^2 + 4 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$
Rõ ràng $y^2 + y + 1 = (4k+)^2 + (4k + 1) + 1 = 4t + 3$
Do đó $y^3 - 1$ có ít nhất 1 ước nguyên tố $p = 4s + 3$
$\Rightarrow x^2 + 4 \vdots p = 4s + 3 \Rightarrow 4 \vdots p \Rightarrow p = 2$ (vô lí) Do đó phương trình trên vô nghiệm.

Và cuối cùng để thấy thêm sự hiệu quả của mệnh đề này ; ta hãy đến với bài toán của Euler .

Ví Dụ 24:

Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $4xy - x - y = z^2$

Nhưng trước hết hãy xem lời giải của Euler để nhìn nhận ra sự giá trị của mệnh đề trên:

Giả sử pt có tập nghiệm $(x; y; z) = (a; b; c)$ với c là giá trị nhỏ nhất của z. Suy ra $4ab - a - b = c^2 \Rightarrow 16ab - 4a - 4b = 4c^2$
$\Rightarrow (16ab - 4a) - (4b - 1) - 1 = 4c^2$
$\Rightarrow (4a - 1)(4b - 1) - 1 = 4c^2$ (*)
Cộng vào 2 vế (*) :
$4(4a - 1)^2 - 8(4a - 1)c$
Ta đc: $(4a - 1)(4b - 1) - 1 + (4(4a - 1)^2 - 8(4a - 1)c) = 4c^2 + 4(4a - 1)^2 - 8(4a - 1)c$
$\Rightarrow (4a - 1)(4b - 1 + 4(4a - 1) - 8c) = 4(c - (4a - 1))^2$
$\Rightarrow (4a - 1)[4(b + 4a - 1 - 2c) - 1) = 4(c - (4a - 1))^2$ (**)
Vậy nếu pt (*) có nghiệm là $(a; b; c)$ thì pt (*) cũng có nghiệm là $(a; b + 4a - 1 - 2c; c - (4a - 1))$
Vì c là giá trị nhỏ nhất của z Suy ra nghiệm $z = |c - (4a - 1)| > c$
$\Rightarrow |c - (4a - 1)|^2 > c^2$
$\Rightarrow pt(**) > (*)$
$\Rightarrow 4(c - (4a - 1))^2 = (4a - 1)(4b - 1 + 4(4a - 1) - 8c) > 4c^2 = (4a - 1)(4b - 1) - 1$
$\Rightarrow (4a - 1)(4b - 1 + 4(4a - 1) - 8c) > (4a - 1)(4b - 1)$
$\Rightarrow (4b - 1 + 4(4a - 1) - 8c) > 4b - 1$
$\Rightarrow 4(4a - 1) - 8c > 0$
$\Rightarrow 4a - 1 > 2c$ (1)
Vì a, b có vai trò như nhau nên ta cũng cm đc $4b - 1 > 2c$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4a - 1 \geq 2c + 1; 4b - 1 \geq 2c + 1$
$\Rightarrow$ pt (*) : $4c^2 = (4a - 1)(4b - 1) \geq (2c + 1)^2 - 1$
$\Rightarrow 4c^2 \geq 4c^2 + 4c$
$\Rightarrow c \leq 0$ (vô lí)

Vậy pt này vô nghiệm
Nhưng nếu dùng mệnh đề trên thì lời giải ngắn gọn hơn nhiều:
$4xy - x - y = z^2$
$\Rightarrow 4(4xy - x - y) = 4z^2$
$\Rightarrow 16xy - 4x - 4y = 4z^2$
$\Rightarrow (16xy - 4x) - (4y - 1) = 4z^2 + 1$
$\Rightarrow (4x - 1)(4y - 1) = 4z^2 + 1 = (2z)^2 + 1^2$
Rõ ràng $4x - 1; 4y - 1$ đều có dạng $4t + 3$.
Thật vậy: $4x - 1 = 4(x - 1) + 3; 4y - 1 = 4(y - 1) + 3$
Do đó $(4x - 1)(4y - 1)$ có ít nhất 1 ước nguyên tố $p = 4s + 3$
$\Rightarrow z^2 + 1 \vdots p = 4s + 3$
$\Rightarrow 1 \vdots p$ (vô lí) Do đó phương trình trên vô nghiệm.

Các dạng cơ bản của phương trình vô định nghiệm nguyên mình đã giới thiệu hết. Việc sắp xếp các dạng ; phương pháp là theo chủ ý của mình nên ít nhiều sẽ sai sót. Sau đây là phần nói thêm về các phương trình vô định siêu việt và phương trình khác (kiến thức sơ sài nên mình nói cũng sơ thôi)

Đầu tiên là phương trình dạng mũ : Như đã nói thì phương trình dạng mũ thường có phương pháp chung là xét Modulo (nhưng không phải là luôn luôn)

Ta đến với các Ví Dụ cơ bản:
Ví Dụ 25: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$2^x + 7 = y^2 \quad (x \in Z; y \in Z) \tag{23}$$

Giải:
$x = 0$: phương trình vô nghiệm $x = 1 \Rightarrow y = \pm 3$
Xét $x \geq 2$
$\Rightarrow 2^x \equiv 0 (mod 4)$
$7 \equiv 3 (mod 4)$
$\Rightarrow y^2 = 2^x + 7 \equiv 3 (mod 4)$ (vô lí do $y^2 \equiv 0; 1; 4 (mod 4)$)
Nghiệm phương trình là $(x; y) = (1; 3); (1; -3)$
Ví Dụ 26: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$2^x + 21 = y^2 (x \in Z; y \in Z) \tag{24}$$

Giải:
Xét x lẻ . Đặt $x = 2k + 1$
$\Rightarrow 2^x = 2.4^k = 2(3 + 1)^k \equiv 2 (mod 3)$
$\Rightarrow 2^x + 21 \equiv 2 (mod 3)$ (do $21 \vdots 3$)
$\Rightarrow y^2 \equiv 2 (mod 3)$ (vô lí) (do $y^2 \equiv 0; 1 (mod 3)$)
Xétx chẵn. Đặt $x = 2k$

$\Rightarrow 2^{2k} + 1 = y^2$
$\Rightarrow y^2 - 2^{2k} = 1$
$\Rightarrow (y - 2^k)(y + 2^k) = 1$
Phương trình ước số; quá đơn giản. Đáp số $(x; y) = (2; 5); (2; -5)$
Ví Dụ 26: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336 \quad \text{với } x < y < z \text{ (Việt Nam 1982)} \tag{25}$$

Giải:
$(25) \Leftrightarrow 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2336 = 2^5.73$
Rõ ràng $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ lẻ

$$\begin{cases} 2^x = 2^5 \\ 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 73 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 5.$
$1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 73$
$\Rightarrow 2^{y-x}(1 + 2^{z-y}) = 72 = 2^3.9$
Lý luận như trên $\Rightarrow 2^{y-x} = 2^3$
$\Rightarrow y = 8$
$\Rightarrow z = 11$
Nghiệm phương trình là $(x; y; z) = (5; 8; 11)$

Chú ý: Với cách giải trên ta có thể xử đẹp phương trình dạng này: $2^x + 2^y + 2^z = 2^n$ $(x \le y \le z; n \in N)$
Đáp số: $(x; y; z) = (n - 2; n - 2; n - 1)$
Ví dụ 27: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$5x^3 = y^3 + 317 \tag{26}$$

Giải: Trong phương trình này có sự tham gia của số lập phương và như đã nói ở phần phương pháp lựa chọn modulo thì trong bài này ; modulo ta xét sẽ là modulo 9 $y = 0$; phương trình vô nghiệm nguyên .
$y = 1 \Rightarrow x = 4$
$y \ge 2$
$\Rightarrow 3^y \equiv 0(mod 9)$
$317 \equiv 2(mod 9)$
$\Rightarrow 5x^3 = y^3 + 317 \equiv 2(mod 9)$ (vô lí vì $5x^3 \equiv 0; 5; 4(mod 9)$)
Ta đến với các bài toán khó hơn
Ví Dụ 28: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x^y = y^x \tag{27}$$

Giải:

Rõ ràng$x = y$ là 1 nghiệm. Xét $x \neq y$.
Không mất tính tống quát giả sử $x < y$
$\Rightarrow \sqrt[x]{x^y} = y$
$\Rightarrow x^{\frac{y}{x}} = y$ do y nguyên nên $x^{\frac{y}{x}}$ nguyên.
$\Rightarrow y \vdots x$.
Đặt $y = tx$,
Thế vào ta được: $x^t = tx \Rightarrow x^{t-1} = t$
Rõ ràng $t \geq 2$ (vì đã giả sử $x \neq y$) $t = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$ $t \geq 3$; lúc đó rõ ràng $x \geq 2$
Ta chứng minh: $x^{t-1} > t$ Do $x \geq 2$ nên ta chỉ việc chứng minh: $2^{t-1} > t$.
Ta cm quy nạp theo t. $t = 3$; đúng .
Giả sử khẳng định đúng với $t = k$ tức là $2^{k-1} > k$
Ta cm khẳng định đúng với $t = k+1$ tức là chứng minh $2^k > k+1$. Rất đơn giản ; theo giả thiết quy nạp thì: $2^{k-1} > k \Rightarrow 2^k > 2k > k+1$ (do $k > 1$)
Do đó phương trình vô nghiệm với $t \geq 3$ Kết luận: nghiệm phương trình là $(x; y) = (a; a); (2; 4); (4; 2)$ với $a \in Z$
Chú ý: Ta có thể giải phương trình theo cách khác .Nhưng trước hết ; ta cần chứng minh mệnh đề sau: $a^n \vdots b^n \Leftrightarrow a \vdots b$
Ta chứng minh phần thuận ; phần đảo là điều hiển nhiên . Trong phân tích $a; b$ ra dạng chuẩn tắc thì số nguyên tố p có lũy thừa tương ứng là $s; t$. Do đó trong phân tích $a^n; b^n$ ra dạng chuẩn tắc thì số nguyên tố p có lũy thừa tương ứng là $ns; nt$. Vì $a^n \vdots b^n \Rightarrow ns \geq nt \Rightarrow s \geq t$ Vì p được chọn tuỳ ý nên $a \vdots b$
Quay lại với bài toán . Ta chỉ xét trường hợp $x \neq y$ Không mất tính tổng quát giả sử $x > y$. Đặt $x = y + t \Rightarrow x^y = y^{y+t} \Rightarrow x^y \vdots y^y$
$\Rightarrow x \vdots y \Rightarrow x = ty$.
Rồi làm tương tự như trên
Ví Dụ 29: Giải phương trình nghiệm nguyên không âm sau

$$2^x - 3^y = 1 \tag{28}$$

Giải:
Xét theo modulo 3
Viết lại phương trình $2^x - 1 = 3^y$
Xét: $y = 0 => x = 1$. Xét $y \geq 1$
$\Rightarrow 3^y \equiv 0(mod3)$
$\Rightarrow 2^x - 1 \equiv 0(mod3)$
Mặt khác: $2^x - 1 = (3-1)^x - 1 \equiv (-1)^x - 1(mod3)$
$\Rightarrow x$ chẵn (vì x chẵn thì $(-1)^x - 1 = 0 \equiv 0(mod3)$

Đặt $x = 2k \Rightarrow 2^{2k} - 1 = 3^y \Rightarrow (2^k - 1)(2^k + 1) = 3^y$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^k + 1 = 3^u \\ 2^k - 1 = 3^v \\ u + v = y \end{cases}$$

$\Rightarrow (2^k + 1) - (2^k - 1) = 2 = 3^u - 3^v$
$\Rightarrow 2 + 3^v = 3^u$
Nếu $u = 0 \Rightarrow 3^v = -1$ (vô lí)
Nếu $u \geq 1 \Rightarrow 3^u \equiv 0(mod3)$

$\Rightarrow 2 + 3^v \vdots 3 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u = 1. \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$ Kết luận: nghiệm phương trình là $(x; y) = (0; 1); (2; 1)$

Ví Dụ 30: Giải phương trình nghiệm nguyên không âm sau:

$$3^x + 4^y = 5^z \tag{29}$$

Bài toán này đã được đề cập trong phần trước và đây là lời giải của nó:
Xét theo modulo 3 $3^x + 4^y = 3^x + (3 + 1)^y \equiv 1(mod3)$
$\Rightarrow 5^z = (6 - 1)^z \equiv (-1)^z \equiv 1(mod3)$
$\Rightarrow z$ chẵn . Đặt $z = 2a$
$\Rightarrow 3^x + 4^y = 5^{2a}$
$\Rightarrow 3^x = 5^{2a} - (2^y)^y = (5^a - 2^y)(5^a + 2^y)$
Do đó có 2 trường hợp xảy ra:
Trường Hợp 1:

$$\begin{cases} 5^a - 2^y = 3^m \\ 5^a + 2^y = 3^n \end{cases}$$

$(m; n \geq 1)$ Điều này không xảy ra vì $(5^a - 2^y) + (5^a + 2^y) = 2.5^a = 3^m + 3^n \vdots 3$ Nhưng 2.5^a thì không chia hết cho 3

Trường Hợp 2:

$$\begin{cases} 5^a - 2^y = 1 \\ 5^a + 2^y = 3^x \end{cases}$$

$\Rightarrow (5^a - 2^y) + (5^a + 2^y) = 2.5^a = 3^x + 1 \equiv 1(mod3)$
$\Rightarrow 2.5^a = 2.(6 - 1)^a \equiv 2.(-1)^a \equiv 1(mod3)$
Do đó a lẻ . Ta có: $5^a - 2^y = 1 \equiv 1(mod3)$
$\Rightarrow (6 - 1)^a - (3 - 1)^y \equiv (-1)^a - (-1)^y \equiv 1(mod3)$
Do a lẻ nên rõ ràng y chẵn . Đặt $a = 2k + 1; y = 2t$
$\Rightarrow 5^{2k+1} + 2^{2t} = 3^x$
Nếu $t = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = z = 2$
Nếu $t \geq 2 \Rightarrow 2^{2t} \equiv 0(mod8)$

Ta có $5^{2k+1} = 5.25^k = 5.(24+1)^k \equiv 5(mod 8)$
$\Rightarrow VT \equiv 5(mod 8)$
Tuy nhiên xét modulo 8 cho vế phải . Nếu x chẵn ; $x = 2s \Rightarrow 3^x = 9^s = (8+1)^s \equiv 1(mod 8)$
Nếu x lẻ ; $x = 2s+1 \Rightarrow 3^x = 3.9^s \equiv 3(mod 8)$
Từ đó ta có $VP = 3^x \equiv 1; 3(mod 8)$ còn $VT \equiv 5(mod 8)$ (vô lí)
Kết luận: nghiệm của phương trình là $(x; y; z) = (2; 2; 2)$
Ví Dụ 31: Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

$$2^x + 5^y = 19^z \tag{30}$$

Giải:
$19^z = (18+1)^z \equiv 1(mod 3)$
$\Rightarrow 2^x + 5^y = (3-1)^x + (6-1)^x \equiv (-1)^x + (-1)^y \equiv 1(mod 3)$
$\Rightarrow x; y$ lẻ . Đặt $x = 2k+1$
$\Rightarrow 2^x = 2.4^k = 2(5-1)^k \equiv 2.(-1)^k(mod 5)$
Nếu k chẵn $\Rightarrow 2^x \equiv 2(mod 5)$
Nếu k lẻ
$\Rightarrow 2^x \equiv 3(mod 5)$
$\Rightarrow VT = 2^x + 5^y \equiv 2; 3(mod 5)$
Còn $VP = 19^z = (20-1)^z \equiv (-1)^z \equiv 1; 4(mod 5)$ Vô lí do đó phương trình trên vô nghiệm .
Bài toán với các nghiệm nguyên tố
Ví Dụ 31 : Tìm $n \in N$ để:

1. $n^4 + n^2 + 1$ là số nguyên tố
2. $n^5 + n + 1$ là số nguyên tố
3. $n^4 + 4^n$ là số nguyên tố

Giải:

1. $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ là số nguyên tố $<\Rightarrow n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow p = 3$
2. $n^5 + n + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1)$ làm như trên ta cũng được $n = 1$
3. Chú ý là n lẻ $\Rightarrow n + 1 \vdots 2$ $n^4 + 4^n = (n^2 + 2^n + 2^{\frac{n+1}{2}}.n)(n^2 + 2^n - 2^{\frac{n+1}{2}}$

Đáp số: $n = 1; p = 5$

Ví Dụ 32:

Tìm số nguyên tố p để $5p^2 + 1$ là số nguyên tố

Giải:

p chẵn $\Rightarrow p = 2 \Rightarrow 5p^2 + 1 = 21$ (không thoả) p lẻ $\Rightarrow 5p^2 + 1$ chẵn nên là hợp số . Vậy không tồn tại số p thoả điều kiện trên .

Ví Dụ 33:

Tìm các số nguyên tố $x; y; z$ thoả: $x^y + 1 = z^2$

Giải:

Xét x lẻ $\Rightarrow x^y + 1 = z^2$ chẵn $\Rightarrow z = 2$

$\Rightarrow x^y = 3$ (không tồn tại $x; y$ thoả)

Xét x chẵn $\Rightarrow x = 2$ $2^y + 1 = z^2$

Nếu y lẻ . Đặt $y = 2k + 1$

$\Rightarrow 2^y = 2.4^k = 2.(3 + 1)^k \equiv 2(mod 3) \Rightarrow 2^y + 1 \equiv 0(mod 3)$

$\Rightarrow z^2 \vdots 3$

$\Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = 3$

Nếu y chẵn $\Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow 5 = z^2$ (vô lí) . Kết luận: nghiệm của phương trình là $(x; y; z) = (2; 3; 3)$

Từ bài toán trên hẳn chúng ta dễ dàng hình dung là lời giải bài toán sau: Tìm các số nguyên tố $x; y; z$ thoả: $x^y + 1 = z$

Các Phương Trình chứng minh vô số nghiệm:

Ví Dụ 34: Chứng minh rằng phương trình $x^3 + y^3 = z^4$ có vô số nghiệm .

Giải:

Ta xây dựng nghiệm của phương trình này .

$<\Rightarrow (\frac{x}{z})^3 + (\frac{y}{z})^3 = z$

Đặt $\frac{x}{z} = a; \frac{y}{z} = b \Rightarrow x = az; y = bz$. Thế vào ta được: $z^3(a^3 + b^3) = z^4$

$\Rightarrow z = a^3 + b^3$

$\Rightarrow x = az = a(a^3 + b^3); y = bz = b(a^3 + b^3)$

Phương trình có vô số nghiệm có dạng: $(x; y; z) = (a(a^3 + b^3); b(a^3 + b^3); a^3 + b^3)$

Tổng quát hoá bài toán với phương trình $x^n + y^n = z^{n+1}$ Với cách giải trên ; phương trình có vô số nghiệm có dạng: $(x; y; z) = (a(a^n + b^n); b(a^n + b^n); a^n + b^n)$

Chú ý: Công Thức trên chưa chắc đã lấy hết tất cả các nghiệm của bài toán nhưng chúng ta chỉ cần có như vậy để hoàn thành bài toán .

Ví Dụ 35: Chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^3 = z^7$ có vô số nghiệm .

Giải: Dựa vào Hằng Đẳng Thức sau : $2^a + 2^a = 2^{a+1}$

Đặt $x = 2^{\frac{a}{4}}; x = 2^{\frac{a}{3}}$

$\Rightarrow x^4 + y^3 = 2^a + 2^a = 2^{a+1}$ Chọn $z = 2^{\frac{a+1}{7}}$ Do $x; y; z$ nguyên nên

$$\begin{cases} a \vdots 3 \\ a \vdots 4 \\ a + 1 \vdots 7 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 84t + 48$ Kết luận: Phương trình có vô số nghiệm có dạng: $(x; y; z) = (2^{21t+12}; 2^{28t+16}; 2^{12t+7})$

Ví Dụ 36: Chứng minh rằng phương trình $7x^2 + 3y^7 = z^{11}$ có vô số nghiệm .

Giải:

Đặt $a = 2.7 = 14$ Rõ ràng tồn tại vô số số n để $an + 1 \vdots 11$

Thật vậy ; xét phương trình $14n + 1 = 11k$ (rõ ràng có vô số nghiệm)

Chú ý $7 + 3 = 10$ Do đó phương trình có vô số nghiệm có dạng: $x = 10^{\frac{an}{2}}; y = 10^{\frac{an}{7}}; 10^{\frac{an+1}{11}}$

Do $an \vdots 2; an \vdots 7; an + 1 \vdots 11$ nên $x; y; z$ nguyên.

Còn với phương trình này thì sao nhỉ: $7x^2 + 3y^2 = 6.z^{11}$ Rất đơn giản Ta đưa về phương trình ở Ví dụ trên $7.6^{10}x^2 + 3.6^{10}y^2 = (6.z)^{11}$

Sau đây là phần các bài tập ; mình sẽ xếp các bài tập không theo từng dạng và các bạn phải xác định dạng của nó để có phương án xử lí thích hợp.

Phương trình với tập Z:

1. $3x + 7y = 9$
2. $25x + 7y = 16$
3. $x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 3y = 5$
4. $2x^2 + 3y^2 + xy - 3x - 3 = y$
5. $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 1599$
6. $x^2 + y^2 = 16z + 6$
7. $x! + y! = (x + y)!$
8. $x! + y! = z!$
9. $19x^3 - 17y^3 = 50$
10. $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$

11. $x^2 = y^3 + 16$

12. $x^2 + y^2 = 6(z^2 + t^2)$

13. $xy - 2y - 3x + x^2 = 3$

14. $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$

15. $x^3 - y^3 - xy = 15$

16. $x^2 + xy + y^2 = x + y$

17. $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$

18. $x^3 + y^3 = (x + y)^2$

19. $y^3 - x^3 = 2x + 1$

20. $x^4 + x^2 + 4 = y^2 - y$

21. $x^2 + y^2 = 7z^2$

22. $x^2 = y^3 + 16$

23. $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ (Hàn Quốc 1988)

24. $6(6x^2 + 3y^2 + z^2) = 5t^2$

25. $19x^2 + 28y^2 = 2001$

26. $x^2 + xy + y^2 = 2x + y$

27. $x^2y^2 = z^2(z^2 - x^2 - y^2)$ (Bulgari 1998)

28. $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n = 1 = y^2$

29. $y^3z^2 + (y^3 - 2xy)z + x(x - y) = 0$

30. $x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0$

31. $2(x + y + z) + 9 = 3xyz$

32. $x^4 + (x + 1)^4 = y^2 + (y + 1)^2$

33. $y^3 = x^3 + 2x + 1$

34. $(x - 2)^4 - x^4 = y^3$

35. $x^4 - 2y^2 = 1$

Tập N

36. $xyz = 2(x + y + z)$

37. $x + y + z + t = xyzt$

38. $x_1 + x_2 + ... + x_{12} = x_1.x_2...x_{12}$

39. $x^n + x^{2n} = y^{2n}$

40. $m^3 + n^3 = n^3$

41. $x^2 + y^2 = 2011(10 - z)$

42. $2^n + 12^2 = z^2 - 9$

Các bài Toán với số nguyên tố:

43. Tìm x để $x^4 + 4^x$ là số nguyên tố

44. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{p}$

45. $(p - 1)! + 1 = p^n$ (p nguyên tố ; $n \in N$)

46. $p(p + 1) + q(q + 1) = n(n + 1)$ $\quad p; q; n$ nguyên tố .

47. $p^2 = 8q + 1$ ($p; q$ nguyên tố)

Các bài toán khó:

48. (APMO) Tìm n nguyên dương để phương trỉnh sau có nghiệm $x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$

49. Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm: (Brazil 1990) $a^3 + 1990b^3 = c^4$

50. (Rumani 2001) $x^3 + y^3 + z^3 = n.x^2y^2z^2$ ($n; x; y; z \in N$).

51. $(a - b)^2 = k(4ab - 1)$ ($a; b \in Z$)

52. $1! + 2! + ... + x! = y^z$ $x; y; z \geq 1$

53. Cho $n \in Z$ CMR nếu $A = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ là số nguyên thì A là số chính phương

54. (Nga 1996) $2x^x = y^y + z^z$ $x; y; z \in N$

55. Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = x^2$ $a; b; c; x \in Z$

56. $3^x + 4^y = 7^z$ $(x; y; z \in Z)$

57. $5^x = 1 + 2^y$ $x; y \in N$

58. $3^x + 3^y = 6^z$ $x; y \in N$

59. $m! + 48 = 48(m + 1)^n$

60. $(a^2 + b^2)^c = (ab)^{1999}$ $(a; b; c \in N)$

61. $(a^2 + b^2)^m = (ab)^n(a; b; m; n \in N)$

62. $28^x = 19^y + 87^z$ $(x; y; z \in Z)$

63. (Sáng Tác) Chứng minh rằng phương trình $a^5 + b^{1980} = c^{19}$ có vô số nghiệm .

64. (Sáng Tác) $2^n - 1 = 343x^3$ $(x; n \in N)$

65. (IMO 2006) $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$

66. Tìm n để phương trình có nghiệm $(x+y+u+v)^2 = n^2xyuz$ $(x; y; u; v; n \in n)$

67. $x^2 + y^2 + z^2 = 1975^{30^4} - x - y - z$ $x; y; z \in Z$

68. $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ là số nguyên và $\frac{x^2+y^2}{x+y} \vdots 1978$. CMR $x = y$

69. $k = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ $k; n \in N$

70. $x^4 + y^4 = z^4$ $x; y; z \in N$