Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên bậc hai, hai ẩn.

I.LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI:

Trong khi giải phương trinh bậc hai hai ẩn học sinh thường lúng túng không rõ phương pháp giải. Qua quá trình giảng giải tôi xin đưa ra một số phương pháp giải "phương trình nghiệm nguyên bậc hao hai ẩn". Việc giải phương trình này còn giúp học sinh có kỹ năng tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức bậc hai hai ẩn và phân tích đa thức thành nhân tử, đồng thời cũng biết được cách giải một số phương trình nghiệm nguyên bậc hai hai ẩn.

II.NỘI DUNG

A. Xét phương trình $a_1x^2 + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5y^2 + a_6 = 0$.Trong đó $a_1 \neq 0$ hoặc $a_2 \neq 0$, $a_5 \neq 0$

B. Các phương pháp giải.
a.Phương pháp thứ nhất Viết vế trái thành tổng các bình phương

Dạng 1. $A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$

Ví dụ; giải phương trình nghiệm nguyên:
$5x^2 + 2y^2 + 4xy + 9y - 8x + 14 = 0(1)$

Lưu ý: Để viết vế traí thành tổng các bình phương nhất là bình phương của một tam thức cần có cách tách hợp lý. Ta biết hang tử có bình phương thì hệ số là số chính phương, do đó
$5x^2 = 4x^2 + x^2$

$2y^2 = y^2 + y^2$

Phương trình (1)
$\Leftrightarrow 4x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 4xy - 4x - 4x + 9y + 14 = 0$

Ta coi bình phương của một tam thức $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2$ là bình phương của nhị thức với biểu thức thử nhất là (a+b) và bểu thức thứ hai là c.
Vậy (1) $\Leftrightarrow 4x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 4xy - 4x - 4x + 9y + 14 = 0$

$\Leftrightarrow ((2x)^2 + 2.2x(y-1) + (y-1)^2) + (x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$

$(2x + y - 1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + y - 1)^2 + (y+3)^2 + (x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

Bài tập: giải các phương trình nghiệm nguyên:

1, $2x^2 + 5y^2 + 14 - 4xy - 8y - 4x = 0$

2, $5x^2 + 2y^2 + 14 + 4xy - 4y + 8x = 0$

3, $5x^2 + 10y^2 + 3 - 12xy + 8y - 2x = 0$

4, $10x^2 + 5y^2 + 38 - 12xy + 16y - 36x = 0$

5, $10x^2 + 4y^2 + 34 - 12xy + 20y - 36x = 0$

Giải:

1, $2x^2 + 5y^2 + 14 - 4xy - 8y - 4x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 4y^2 + y^2 - 4xy - 8y - 4x + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y + 1)^2 + (x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

2, $5x^2 + 2y^2 + 14 + 4xy - 4y + 8x = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 4xy + 8x - 4y + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + y + 1)^2 + (x+2)^2 + (y-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

3, $5x^2 + 10y^2 + 3 - 12xy + 8y - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + x^2 + 9y^2 + y^2 - 12xy - 2x + 8y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-3y-1)^2+(x+1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ x+1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

4, $10x^2+5y^2+38-12xy+16y-36x=0$

$\Leftrightarrow x^2+9x^2+4y^2+y^2+38-12xy+16y-36x=0$

$\Leftrightarrow ((3x)^2-2.3x.(2y+5)+(2y+5)^2)+(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=0$

$\Leftrightarrow (3x-2y-5)^2+(x-3)^2+(y-2)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ x-3=0 \\ y-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

5, $9x^2+x^2+4y^2+34-12xy+20y-36x=0$

$\Leftrightarrow (3x+2y-5)^2+(x-3)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ x-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

Dạng 2. $A^2+B^2+C^2+...=m^2+n^2+p^2+... \Leftrightarrow \begin{cases} A=\pm m \\ B=\pm n \\ C=\pm p \end{cases}$

và các hoán vị của chúng.

Ví dụ: Giải phương trình:

$x^2-x-6+y^2=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x-24+4y^2=0$

$\Leftrightarrow \left|(2x-1)^2\right|+\left|(2y)^2\right|=25=3^2+4^2=0^2+5^2$

Do 2x-1 lẻ nên $\begin{cases} |2x-1| = 3 \\ |2y| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; -1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} |2x-1| = 5 \\ |2y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho có nghiệm:

(x,y) = (2,2), (3,0), (-1,-2),(-3,0);(2;-2);(-1;2);(-2;0)

<u>Bài tập</u>: Giải các phương trình nghiệm nguyên dương:

1, $x^2 = 100 + 6xy - 13y^2$

2, $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

<u>Giải</u>:

1, $x^2 = 100 + 6xy - 13y^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 6xy + 9y^2 + 4y^2 = 100$

$\Leftrightarrow |x-3|^2 + |2y|^2 = 100 = 6^2 + 8^2 = 0^2 + 10^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| = 6 \\ |2y| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} |x-3| = 8 \\ |2y| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 3 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} |x-3| = 10 \\ |2y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 0 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} |x-3| = 0 \\ |2y| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:

$(x, y) = \{(9;4)(11;3)(3;5) \}$

2, $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

$\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 = 169$

$\Leftrightarrow |x - 2y^2| + |y^2| = 169 = 12^2 + 5^2 = 0^2 + 13^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2y| = 12 \\ |y| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 5 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} |x-2y| = 5 \\ |y| = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = 12 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} |x-2y| = 0 \\ |y| = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 \\ y = 13 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:

$(x, y) = \{(22;5)(19;12)(26;13)\ \}$

__b.Phương pháp thứ hai__: Phân tích vế trái thành nhân tử

Dạng 1. A.B.C =0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{array}\right.$

Dạng 2. A.B.C... = m.n.p... (Với m, n,p là các số nguyên)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = m \\ B = n \\ C = p \end{array}\right.$$

và các hoán vị của chúng.

Ví dụ: Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

$3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6xy + 4xy + 8y^2 = 96$

$\Leftrightarrow (x+2y)(3x+4y) = 96 = 16.6 = 12.8 = 24.4$

Do x,y là các số nguyên dương nên

$(3x+4y) > (x+2y) \geq 3$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+4y = 16 \\ x+2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} 2x+4y = 12 \\ x+2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$ (loại)

Hoặc $\begin{cases} 2x+4y = 24 \\ x+2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -6 \end{cases}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $(x, y) = (4;1)$

Bài tập:

Giải các phương trình nghiệm nguyên:

1, $y^2 = x^2 + x + 6$

2, $x^2 - 25 = y(y+6)$

3, $x^2 - 6xy + 5y^2 = 121$

4, $5(x+y) = 3xy - 2$

5, $x^2 - x - xy + 3y - 6 = 0$

Giải:

1, $y^2 = x^2 + x + 6$

$\Leftrightarrow 4y^2 = 4x^2 + 4x + 24$

$\Leftrightarrow (2y)^2 - (4x^2 + 4x + 1) = 23$

$\Leftrightarrow (2y)^2 - (2x+1)^2 = 23$

$\Leftrightarrow (2y-2x-1)(2y+2x+1) = 23 = 1.23 = (-1).(-23) = 23.1 = (-23).(-1)$

$*\begin{cases}(2y+2x+1) = 23\\(2y-2x-1) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 6\\x = 5\end{cases}$

$*\begin{cases}(2y+2x+1) = 1\\(2y-2x-1) = 23\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 6\\x = -6\end{cases}$

$*\begin{cases}(2y+2x+1) = -23\\(2y-2x-1) = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -6\\x = -6\end{cases}$

$*\begin{cases}(2y+2x+1) = -1\\(2y-2x-1) = -23\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -6\\x = 5\end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên: $(x,y) = \{(5;6),(-6;6),(-6;-6),(5;-6)\}$

2, $x^2 - 25 = y(y+6)$

$\Leftrightarrow x^2 - (y^2 + 6y + 9) = 16$

$\Leftrightarrow x^2 - (y^2 + 6y + 9) = 16$

$\Leftrightarrow (x)^2 - (y+3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x-y-3)(x+y+3) = 16$

Do $(x-y-3) \le (x+y+3)$

Và $(x-y-3);(x+y+3)$ cùng tính chẵn lẻ nên

$(x-y-3)(x+y+3) = 2.8 = 4.4 = (-8)(-2) = (-4)(-4)$

$*\begin{cases}x-y-3 = 2\\x+y+3 = 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 5\\y = 0\end{cases}$

$*\begin{cases} x-y-3=4 \\ x+y+3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

$*\begin{cases} x-y-3=-8 \\ x+y+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$

$*\begin{cases} x-y-3=-4 \\ x+y+3=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên: $(x,y)=\{(5;0)(-5;0)(4;-3)(-4;-3)\}$

3, $x^2-6xy+5y^2=121$

$\Leftrightarrow x^2-6xy+9y^2-4y^2=121$

$\Leftrightarrow (x-3y)^2-(2y)^2=121$

$\Leftrightarrow (|x-3y|+|2y|)(|x-3y|-|2y|)=121$

Do $(|x-3y|+|2y|)\geq(|x-3y|-|2y|)$

Và $(|x-3y|+|2y|);(|x-3y|-|2y|)$ cùng tính chẵn lẻ nên

$*\begin{cases} (|x-3y|+|2y|)=121 \\ (|x-3y|-|2y|)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3y|=61 \\ |2y|=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3y|=61 \\ y=\pm 30 \end{cases}$

Nếu $y=30$ Thì $|x-90|=61 \Rightarrow x=151;29$

Nếu $y=-30$ Thì $|x+90|=61 \Rightarrow x=-151;-29$

$*\begin{cases} (|x-3y|+|2y|)=11 \\ (|x-3y|-|2y|)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3y|=11 \\ |2y|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 11 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho cónghiệm nguyên: $(x,y)=\{(29;30),(151;30),(-29;-30),(-151;-30),(11;0),(-11;0)\}$

4, $5(x+y)=3xy-2$

$\Leftrightarrow 5(x+y)-3xy=-2$

$\Leftrightarrow 15(x+y)-9xy=-6$

$\Leftrightarrow 15x-9xy=-6$

$\Leftrightarrow 3x(5-3y)-5(5-3y)+25=-6$

$\Leftrightarrow (3x-5)(3y-5)=31$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\leq y \Rightarrow 3x-5\leq 3y-5$

$*\begin{cases}3x-5=1\\3y-5=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=12\end{cases}$

$*\begin{cases}3x-5=-1\\3y-5=-31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=\dfrac{-26}{3}\end{cases}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên: $(x,y)=\{(2;12)(12;2)\ \}$

5, $x^2-x-xy+3y-6=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x-xy+3y+2x-6=0$

$\Leftrightarrow x(x-3)-y(x-3)+2(x-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-y+2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3;y\in Z\\y=x+2;x\in Z\end{array}\right.$

c.Phương pháp thứ ba: Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Ta coi phương trình bậc hai hai ẩn là phương trình bậc hai một ẩn còn ẩn kia là hằng số.Chẳng hạn $f_{(x,y)}=0$ ta coi y hằng số.

Dạng 1. nếu $\Delta_y=ay^2+by+c$ có hệ số a < 0.

hoặc $\Delta_y=by+c$ có hệ số b < 0.

Để phương trình $f_{(x,y)}=0$ có nghiệm thì $\Delta_y\ge 0$ từ đó tìm được một nghiệm là y và suy ra nghiệm còn lại x.

Ví dụ: giải phương trình nghiệm nguyên:

$(3x^2+xy+y^2)=x+8y$

$\Leftrightarrow 3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0$

Coi phương trình này là phương trinh bậc hai ẩn x. Ta có $\Delta_y=-27y^2+9y+1$.

Để pt đã cho có nghiệm thì $\Delta_y=-27y^2+9y+1\ge 0$

$\Leftrightarrow -0,01\le y\le 3,3; y\in Z$

$y\in\{0,1,2,3\}$ Thay vào ta được

Nếu $y=0\Rightarrow 3x^2-x=0$

$\Leftrightarrow 3x^2-x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\x=0\end{array}\right.$

Nếu $y=1\Rightarrow 3x^2+2x-5=0$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-5}{3} \end{array}\right.$

Nếu $y=2 \Rightarrow 3x^2+5x-4=0$

$\Delta = 25+48=73$ (không phải là số chính phương)

Nếu $y=3 \Rightarrow 3x^2+8x+3=0$

$\Delta^{/}=16-9=7$ (không phải là số chính phương)

pt đã cho có 2 nghiệm:(x,y) =(0,0);(1,1)

Bài tập:

Giải các phương trình nghiệm nguyên:

1, $x^2+xy+y^2-2x-y=0$

2, $x^2-xy+y^2=x+y$

Giải:

1, $x^2+xy+y^2-2x-y=0 \quad \Leftrightarrow x^2+x(y-2)+y^2+y=0$

$\Delta = y^2-4y+4-4y^2+4y$

$\Delta = 4-3y^2$

Để phương trình đã cho có nghiệm nguyên thì

$4-3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$

Nếu $y=-1 \Rightarrow x^2-x+1-2x+1=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Nếu $y=0 \Rightarrow x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

Nếu $y=1 \Rightarrow x^2+x+1-2x-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên:

$(x,y)=\{(1;-1),(2;-1),(0;0),(2;0),(1;1),(0;1)\}$

2, $x^2-xy+y^2=x+y$

$\Leftrightarrow x^2-x(y+1)+y^2-y=0$

$\Delta = y^2+2y+1-4y^2+4y=-3y^2+6y+1$

Để phương trình đã cho có nghiệm nguyên thì $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow -3y^2+6y+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow -0{,}154 \leq y \leq 2{,}154$

$y \in \{0;1;2\}$

Nếu $y = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Nếu $y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Nếu $y = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên:
$(x, y) = \{(0;0), (1;0), (0;1), (2;1), (1;2), (2;2)\}$

Dạng 2. Nếu $\Delta_y = ay^2 + by + c$ có hệ số a là một số chính phương Để phương trình $f_{(x,y)} = 0$ có nghiệm thì $\Delta_y = m^2$ từ đó tìm được một nghiệm là y và suy ra nghiệm còn lại x.

Ví dụ : giải phương trình nghiệm nguyên:

1, $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - y = 6$

$\Leftrightarrow x^2 + (3y - 2)x + 2y^2 - y - 6 = 0$

Coi phương trình này là phương trinh bậc hai ẩn x.

$\Delta_y = y^2 - 8y + 16 + 12$

Để pt đã cho có nghiệm thì $\Delta_y = m^2$

$\Delta_y = y^2 - 8y + 16 + 12 = m^2$

$\Leftrightarrow m^2 - (y-4)^2 = 12$

$(m - y + 4)(m + y - 4) = 12 = 2.6 = -2.(-6)$

Vì(m+y-4)≥ (m-y+4)Và chúng có cùng tính chẵn lẻ.Nên

$\begin{cases} m - y + 4 = 2 \\ m + y - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ y = 6 \end{cases}$ Thay y=6 vào pt đã cho ta có:

$x^2 + 72 + 18x - 2x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 16x + 60 = 0$

Pt này vô nghiệm.

$\begin{cases} m - y + 4 = -6 \\ m + y - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ y = 6 \end{cases}$

Pt đ ã cho vô nghiệm

2, $xy - 2y - 3x + x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - x(y-3) - 2y - 6 = 0$ Coi phương trình này là phương trinh bậc hai ẩn x.

$\Delta_y = y^2 - 6y + 9 + 24$

Để pt đã cho có nghiệm thì $\Delta_y = m^2$

$\Delta_y = y^2 + 2y + 1 + 32 = m^2$

$\Leftrightarrow m^2 - (y+1)^2 = 32$

$\Leftrightarrow \left(|m| + |y+1|\right)\left(|m| - |y+1|\right) = 32$

Do $\left(|m| + |y+1|\right) \geq \left(|m| - |y+1|\right)$

Và $\left(|m| + |y+1|\right); \left(|m| - |y+1|\right)$ có cùng tính chẵn lẻ, $\left(|m| + |y+1|\right) \geq 0$

nên $\left(|m| - |y+1|\right) \geq 0$ .Ta có

$*\begin{cases} |m| - |y+1| = 2 \\ |m| + |y+1| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 9 \\ |y+1| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 9 \\ y = 6; -8 \end{cases}$

$*\begin{cases} |m| - |y+1| = 4 \\ |m| + |y+1| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 6 \\ |y+1| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 6 \\ y = 1; -3 \end{cases}$

Nếu $y = 6 \Rightarrow x^2 - 3x - 12 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Delta = 9 + 4.18 = 81 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-3+9}{2} = 3$; $x_2 = \dfrac{-3-9}{2} = -6$

Nếu $y = -8 \Rightarrow x^2 - 3x + 16 - 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 10 = 0$

phương trinh có nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = 10$

Nếu $y = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta' = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_1 = 1 + 3 = 4$; $x_2 = 1 - 3 = -2$

Nếu $y = -3 \Rightarrow x^2 - 3x + 6 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 6$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên:

$(x, y) = \{(3;6), (-6;6), (10;-8), (1;-8), (4;1), (-2;1)(0;-3)(6;-3)\}$

3, $x^2 + xy + y^2 - x^2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2\left(1 - y^2\right) + xy + y^2 = 0$

Coi phương trình này là phương trinh bậc hai ẩn x.

$\Delta_y = y^2 - 4y^2\left(1 - y^2\right) = y^2 - 4y^2 + 4y^4 = 4y^4 - 3y^2 = y^2\left(4y^2 - 3\right)$

Để pt đã cho có nghiệm thì Δ_y là số chính phương

$\Rightarrow 4y^2 - 3 = m^2 \Leftrightarrow |2y|^2 - |m|^2 = 3 \Leftrightarrow \left(|2y| - |m|\right)\left(|2y| + |m|\right) = 3$

$*\begin{cases} |2y| - |m| = 1 \\ |2y| + |m| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2y| = 2 \\ |m| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ m = \pm 1 \end{cases}$

Nếu y = 1 $\Rightarrow x^2+x+1-x^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
Nếu y = -1 $\Rightarrow x^2-x+1-x^2=0 \Leftrightarrow -x+1=0 \Leftrightarrow x=1$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên: $(x,y)=\{(-1;1),(1;-1)\}$

d.*Phương pháp thứ tư*: dùng tính chất của số chính phương:
Nếu phương trình $f_{(x,y)}=0$ có dạng $A^2_{(x,y)}=B_{(x)}$ hoặc $A^2_{(x,y)}=B_{(y)}$ Thì
$\begin{cases} B_{(x)}=m^2 \\ B_{(x)}\ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} B_{(y)}=m^2 \\ B_{(y)}\ge 0 \end{cases}$

Ví dụ: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình;
$x^2+(x+y)^2=(x+9)^2$
$\Leftrightarrow (x+y-9)^2=9(9-2y)$
Do 18-2y chẵn và18-2y<18 . để pt có nghiệm thì 18-2y là số chính phương.
$18-2y=0 \Leftrightarrow y=9; x=0$
$18-2y=4^2=16 \Rightarrow y=1; x=20$
$18-2y=2^2=4 \Rightarrow y=7; x=8$

Vậy pt đã cho có 3 nghiệm:(x,y) =(0;9);(8;7);(20:1)
C. Phương trình đưa được về dạng bậc hai hai ẩn:
1. Giải phương trình nghiệm nguyên
a. $x^4 - 2y^4 - x^2y^2 - 4x^2 - 7y^2 - 5 = 0$
Đ ặt $t=x^2$ ta c ó: $t^2 - 2y^4 - ty^2 - 4t - 7y^2 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow t^2 - (y^2+4)t - (2y^4+7y^2+5) = 0$
Đây là phương trình bậc hai đối với ẩn
b. Giải phương trình nghiệm nguyên
$x^3 + 7y = y^3 + 7x$ $(x\neq y)$ $\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 7(x-y) \Leftrightarrow x^2+xy+y^2=7$
$\Leftrightarrow x^2+xy+y^2-7=0$
$\Delta_y = y^2-4y^2+28=28-3y^2$
Để phương trình đã cho có nghiệm nguyên thì $\Delta_y \ge 0$
$\Rightarrow 28-3y^2 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 \le 9 \Leftrightarrow y^2 \in \{1;4;9\}$
Nếu y = -1 $\Rightarrow x^2-x+1-7=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x_1=-2; x_2=3$
Nếu y = 1 $\Rightarrow x^2+x+1-7=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x_1=2; x_2=-3$
Nếu y = -2 $\Rightarrow x^2-2x+4-7=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x_1=-1; x_2=3$
Nếu y = 2 $\Rightarrow x^2+2x+4-7=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x_1=1; x_2=-3$
Nếu y = 3 $\Rightarrow x^2+3x+9-7=0 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=-1; x_2=-2$
Nếu y = -3 $\Rightarrow x^2-3x+9-7=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1; x_2=2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên:
$(x,y)=\{(-2;-1),(3;-1),(2;1),(-3;1),(-1;-2),(3;-2)(1;2)(-3;2)(-1;3)(-2;3)(1;-3)(2;-3)\}$

III. KẾT LUẬN:

Qua giảng dạy rút ra cho học sinh những phương pháp giải cụ thể cho từng loại toán thì học sinh có thói quen nhận dạng và sử dụng phương pháp giải thích hợp và phát huy khả năng tư duy của học sinh. Tuy nhiên bài viết có thể có nhiều sai sót mong quý bạn đọc góp ý giúp đỡ.

Tôi xin chân thành cảm ơn.
Ngày 30 tháng 5 năm 2008
Người viết:
Phan Thị Nguyệt.