

ĐẠI HỌC QUỐC GIA T.P HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG LÊ HỒNG PHONG T.P HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
NĂM 2012

MÔN THI: TOÁN (Chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1: Giải phương trình: $\sqrt{8x+1} + \sqrt{46-10x} = -x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

Câu 2: Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a là số nguyên dương, biết: $f(5) - f(4) = 2012$.

Chứng minh: $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 3: Cho ba số dương a ; b và c thỏa $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của :

$$A = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Câu 4: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O; R) có AC vuông góc BD tại H. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho:

$AM = \frac{1}{3} AB$. Trên cạnh HC lấy trung điểm N. Chứng minh MH vuông góc với DN.

Câu 5: Cho đường tròn tâm O và đường tròn tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B (O và I khác phía đối với A và B). IB cắt (O) tại E; OB cắt (I) tại F. Qua B vẽ $MN \parallel EF$ (M thuộc (O) và N thuộc (I)).

a) Chứng minh: Tứ giác OAIE nội tiếp.

b) Chứng minh: $AE + AF = MN$

Câu 6: Trên mặt phẳng cho 2013 điểm tùy ý sao cho khi 3 điểm bất kỳ thì tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa 2 điểm đó luôn bé hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1007 điểm (kể cả biên).

.....lết

Nguồn:  Hocmai.vn

ĐẠI HỌC QUỐC GIA T.P HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG LÊ HỒNG PHONG T.P HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
NĂM 2012

HƯỚNG DẪN GIẢI

MÔN THI: TOÁN (Chuyên)

Câu 1: Giải phương trình: $\sqrt{8x+1} + \sqrt{46-10x} = -x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

HDG:

Điều kiện : $\frac{-1}{8} \leq x \leq \frac{46}{10}$

$$\begin{aligned} \sqrt{8x+1} + \sqrt{46-10x} &= -x^3 + 5x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{8x+1} - 3 + \sqrt{46-10x} - 6 = -x^3 + 5x^2 + 4x - 8 \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{8x+1}-3)(\sqrt{8x+1}+3)}{\sqrt{8x+1}+3} + \frac{(\sqrt{46-10x}-6)(\sqrt{46-10x}+6)}{\sqrt{46-10x}+6} &= (1-x)(x^2-4x+8) \\ \Leftrightarrow \frac{-8(1-x)}{\sqrt{8x+1}+3} + \frac{10(1-x)}{\sqrt{46-10x}+6} &= (1-x)(x^2-4x+8) \\ \Rightarrow \begin{cases} 1-x=0 & (1) \\ \frac{-8}{\sqrt{8x+1}+3} + \frac{10}{\sqrt{46-10x}+6} = x^2-4x+8 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra: $x = 1$.

Từ (2), ta có : $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \geq 4$ với mọi x

$$\begin{aligned} \sqrt{46-10x} \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{46-10x} + 6 \geq 6 \Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{46-10x}+6} \leq \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ \text{suy ra : } \frac{10}{\sqrt{46-10x}+6} + \frac{-8}{\sqrt{8x+1}+3} &= \frac{10}{\sqrt{46-10x}+6} - \frac{8}{\sqrt{8x+1}+3} < \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Vậy : $\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6} + \frac{-8}{\sqrt{8x+1}+3} < x^2 - 4x + 8$, với mọi x .

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất : $x = 1$.

Câu 2: Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a là số nguyên dương, biết: $f(5) - f(4) = 2012$.

Chứng minh: $f(7) - f(2)$ là hợp số.

HDG:

Ta có :

$$f(5) - f(4) = 2012 \Leftrightarrow (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 2012 \Leftrightarrow 61a + 9b + c = 2012.$$

$$f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c$$

$$= 305a + 45b + 5c + 30a = 5(61a + 9b + c) + 30a = 2012 + 30a = 2(1006 + 15a)$$

Vì a là số nguyên nên ta được : $2(1006 + 15a)$ chia hết cho 2.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số

Câu 3: Cho ba số dương a, b và c thỏa $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của :

$$A = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

HDG:

$$\text{Ta có : } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = ab + bc + ca$$

$$\text{Ta có : } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si:

$$a^3 + b^2a \geq 2a^2b ; b^3 + bc^2 \geq 2b^2c ; c^3 + ca^2 \geq 2c^2a, \text{ dấu “=” xảy ra khi } a = b = c.$$

$$\text{suy ra: } a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

$$\text{suy ra: } \frac{1}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3 - 3(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\text{Đặt : } t = a^2 + b^2 + c^2, \text{ ta có : } 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 1 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{3},$$

$$\text{dấu “=” xảy ra khi } a = b = c = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta được : } A = 14t + \frac{3 - 3t}{2t} = \frac{28t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3t}{2t} = \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: } \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} \geq 2\sqrt{\frac{27t}{2} \cdot \frac{3}{2t}} = 9 \text{ dấu “=” xảy ra khi : } t = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} \left(\text{vì : } t \geq \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Suy ra: } A \geq 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3} \text{ dấu “=” xảy ra khi : } a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3} \text{ và } a = b = c \text{ suy ra: } a = b = c = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } A \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{23}{3}, \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Câu 4: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O; R) có AC vuông góc BD tại H. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho:

AM = 1/3 AB. Trên cạnh HC lấy trung điểm N. Chứng minh MH vuông góc với DN.

HDG:

+ Gọi E; F lần lượt là trung điểm của HB và MB,

Suy ra: $AM = MF = FB = \frac{1}{3} AB$.

+ Gọi K và G lần lượt là giao điểm của MH với DN và AE.

+ Ta có: $\triangle AHB \sim \triangle DHC \Rightarrow AH : HB = DH : HC$

$\Rightarrow AH : (2HE) = DH : (2HN) \Leftrightarrow AH : HE = DH : HN$

$\Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle DHN \Rightarrow \widehat{NDH} = \widehat{EAH}$

+ Ta có : EF là đường trung bình của tam giác HMB $\Rightarrow HM \parallel EF$

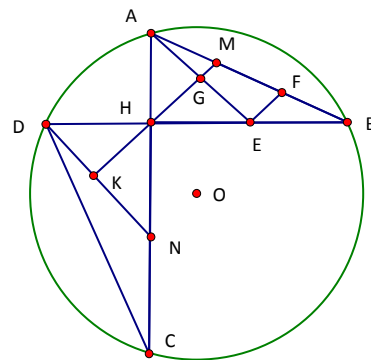
+ Xét $\triangle AEF$: $AM = MF$ và $MG \parallel EF \Rightarrow AG = GE$.

+ Xét $\triangle AEH$: vuông tại H có G là trung điểm của AE, suy ra:

$AG = HG = EG \Rightarrow \triangle AHG$ cân tại G $\Rightarrow \widehat{AHG} = \widehat{EAH}$

+ Ta có : $\widehat{KDH} + \widehat{DHK} = \widehat{EAH} + \widehat{DHK} = \widehat{AHG} + \widehat{DHK} = 90^\circ$, suy ra $\triangle DHK$ vuông tại K.

Vậy MH vuông góc với DN.(đpcm)



Câu 5: Cho đường tròn tâm O và đường tròn tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B (O và I khác phía đối với A và B). IB cắt (O) tại E; OB cắt (I) tại F. Qua B vẽ $MN \parallel EF$ (M thuộc (O) và N thuộc (I)).

a) Chứng minh: Tứ giác OAIE nội tiếp.

b) Chứng minh: $AE + AF = MN$

HDG:

a) + $\triangle BOE$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OEB}$;

+ $\triangle BIF$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IBF} = \widehat{IFB}$;

Do: $\widehat{OBE} = \widehat{IBF} \Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{IFB}$, suy ra: tứ giác OIFE nội tiếp.

+ Do: $\triangle AOI = \triangle BOI$ (c - c - c) $\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OBI}$

+ Ta có :

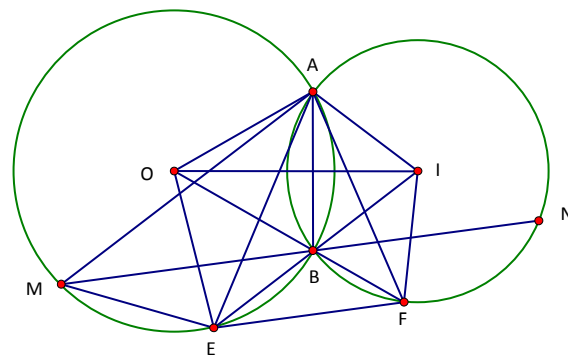
$\widehat{OAI} + \widehat{OEI} = \widehat{OBI} + \widehat{OBE} = 180^\circ$, suy ra tứ giác AOIE nội tiếp

Vậy 5 điểm O; A; I; E; F nằm trên cùng một đường tròn.

Vậy Tứ giác OAIE nội tiếp được.

b) + Xét đường tròn (O) : $\widehat{AMB} = \widehat{FOI} = \frac{1}{2} \text{Sđ } \widehat{AB}$

+ Do : $MN \parallel EF$ ta được : $\widehat{BEF} = \widehat{MBE}$ (slt)



+ Do 5 điểm O; A; I; E; F nằm trên cùng một đường tròn, suy ra: $\widehat{BEF} = \widehat{FOI}$

Suy ra: $\widehat{AMB} = \widehat{FOI} = \widehat{BEF} = \widehat{MBE}$ suy ra: $AM \parallel EB$.

Vậy tứ giác MABE là hình thang và nội tiếp đường tròn (O) suy ra: MABE là hình thang cân

$\Rightarrow MB = AE$.

+ Chứng minh tương tự ta được: $NB = AF$, suy ra: $AE + AF = MB + NB = MN$. (đpcm).

Câu 6: Trên mặt phẳng cho 2013 điểm tùy ý sao cho khi 3 điểm bất kỳ thì tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa 2 điểm đó luôn bé hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1007 điểm(kể cả biên).

HDG:

Gọi các điểm là : $A_1; A_2; A_3; \dots; A_i; A_{i+1}; A_{2012}; A_{2013}$. Ta chia các cặp điểm như sau: $(A_1; A_{2013});$

$(A_2; A_{2012}); \dots (A_i; A_{2013-i}); \dots (A_{1006}; A_{1008})$, và điểm A_{1007} .

Xét điểm A_{1007} với các cặp điểm đã cho, theo giả thiết trong mỗi cặp điểm tồn tại một điểm A_m sao cho đoạn thẳng $A_{1007}A_m$ có độ dài nhỏ hơn 1. Không mất tính tổng quát giả sử các điểm $A_1; A_2; \dots; A_{1006}$ có khoảng cách đến điểm A_{1007} nhỏ hơn 1, suy ra các điểm $A_1; A_2; \dots; A_{1006}$ nằm trong đường tròn tâm A_{1007} bán kính bằng 1.

Vậy tồn tại đường tròn có bán kính bằng 1 chứa 1007 điểm trong 2013 điểm đã cho. (đpcm).

Nguồn:  Hocmai.vn