MỞ RỘNG TỪ MỘT BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

(Nguyễn Công Phúc-10Toán, Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

I)Mở đầu

Trong đợt đi tập huấn huấn tại Vũng Tàu, có một bài toán nhìn vào khá khó nhưng lời giải cực kì đơn giản

Bài 1: Tồn tại hay không các số $a,b,c\in Z$ thỏa $a^3+b^4=c^5$

Lời giải.

Từ hằng đẳng thức $2^{25}=2^{24}+2^{24}$. Suy ra $\left(2^5\right)^5=\left(2^8\right)^3+\left(2^6\right)^4$

Chọn $a=2^8;b=2^6;c=2^5$. Vậy tồn tại a,b,c thỏa yêu cầu đề bài

Dưới đây là một số mở rộng của bài 1.

Bài 2:(Canada 1991) Chứng minh phương trình $x^2+y^3=z^5$ có vô số nghiệm nguyên dương

Lời giải.

Ta có: $2^m+2^m=2^{m+1}$. Đặt $x=2^{\frac{m}{2}}$; $y=2^{\frac{m}{3}}$; $z=2^{\frac{m+1}{5}}$, khi đó $x^2+y^3=z^5$.

Ta chỉ cần tìm m sao cho $\frac{m}{2};\frac{m}{3};\frac{m+1}{5}$ nguyên là xong. Đây là một bài toán bậc nhất đơn giản và ta có thể tìm được $m=6(5k+4)$.

Vậy $x=2^{3(5k+4)};y=2^{2(5k+4)};z=2^{6k+5}$ là nghiệm của phương trình nên có vô số nghiệm nguyên dương.

Bài 3: Chứng minh phương trình $x^2+y^3+z^4=t^5$ có vô số nghiệm nguyên dương.

Lời giải.

Ta có: $\left(3^{60n+12}\right)^2+\left(3^{40n+8}\right)^3+\left(3^{30n+6}\right)^4=\left(3^{24n+5}\right)^5$

Ta sẽ chọn $x=3^{60n+12};y=3^{40n+8};z=3^{30n+6};t=3^{24n+5}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên dương.

Để hiểu rõ hơn cách chọn x,y,z sao cho thỏa yêu cầu đề bài, chúng ta hãy đến một định lý

II) Nội dung

Định lý: Cho phương trình $x_1^{y_1}+x_2^{y_2}+\ldots+x_n^{y_n}=x_{n+1}^{y_{n+1}}\ (1)$ (với $x_1;x_2;\ldots;x_{n+1}$ là ẩn; $y_1;y_2;\ldots;y_{n+1}$ là các số nguyên dương cho trước)

Gọi $l=lcm\left(y_1;y_2;\ldots;y_n\right)$. Nếu $\left(l;y_{n+1}\right)=1$ thì phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Chứng minh định lý:

Ta có: $n^m+n^m+\ldots+n^m=n^{m+1}$. Đặt $x_i=n^{\frac{m}{y_i}}\left(\forall i=\overline{1,n}\right)$; $x_{n+1}=n^{\frac{m+1}{y_{n+1}}}$, khi đó (1) xảy ra.

Ta chỉ cần tìm m sao cho $\frac{m}{y_i}\in Z^+\left(\forall i=\overline{1,n}\right)$ và $\frac{m+1}{y_{n+1}}\in Z^+\ (2)$

Điều này tương đương $\begin{cases} m\,\vdots\, l \\ m+1\,\vdots\, y_{n+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=al \\ m=by_{n+1}-1\end{cases}\Rightarrow by_{n+1}-al=1\ (3)$

Hệ thức Bezout:

Nếu a,b là hai số nguyên (không đồng thời bằng 0) thì tồn tại các số nguyên u,v sao cho

$$\gcd(a;b) = au + bv$$

Theo hệ thức Bezout thì tồn tại $a, \mathrm{b} \in Z$ thỏa (3)

Mặt khác (3) là phương trình Diophantine bậc nhất nên tồn tại vô số số nguyên dương m thỏa (2).

Vậy phương trình (1) tồn tại vô số nghiệm nguyên dương

III) Một số ví dụ

Bài 1: Chứng minh phương trình $x^3 + y^5 = z^8$ có vô số nghiệm nguyên dương.

Lời giải.

Ta có hằng đẳng thức: $2^m + 2^m = 2^{m+1}$. Đặt $= 2^{\frac{m}{3}}; y = 2^{\frac{m}{5}}; z = 2^{\frac{m+1}{8}}$, khi đó $x^3 + y^5 = z^8$.

Ta cần tìm m sao cho $\frac{m}{3}; \frac{m}{5}; \frac{m+1}{8} \in Z^+ \Rightarrow \begin{cases} m = 15a \\ m+1 = 8b \end{cases} \Rightarrow 8b - 15a = 1$

Đây là phương trình Diophantine bậc nhất suy ra $b = 15n + 2$

Dẫn đến $m = 120n + 15 \Rightarrow x = 2^{40n+5}; \mathrm{y} = 2^{24n+3}; z = 2^{15n+2}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên dương.

Bài 2: Chứng minh phương trình $x^3 + y^4 + z^5 = t^7$ có vô số nghiệm nguyên dương.

Lời giải.

Ta có: $3^m + 3^m + 3^m = 3^{m+1}$. Đặt $x = 3^{\frac{m}{3}}; y = 3^{\frac{m}{4}}; z = 3^{\frac{m}{5}}; t = 3^{\frac{m+1}{7}}$

Ta cần chỉ m sao cho $\frac{m}{3}; \frac{m}{4}; \frac{m}{5}; \frac{m+1}{7} \in Z^+$. Suy ra: $\begin{cases} m = 60a \\ m+1 = 7b \end{cases} \Rightarrow 7b - 60a = 1$

$\Rightarrow b = 60n + 43 \Rightarrow x = 3^{140n+100}; y = 3^{105n+75}; z = 3^{84n+60}; t = 3^{60n+43}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên dương.

Bài 3: Chứng minh phương trình $a^2 + b^4 + c^5 + d^7 = e^3$ có vô số nghiệm nguyên dương

Lời giải.

Từ hằng đẳng thức: $4^m + 4^m + 4^m + 4^m = 4^{m+1}$

Suy ra đặt $a = 4^{\frac{m}{2}} = 2^m; \mathrm{b} = 4^{\frac{m}{4}} = 2^{\frac{m}{2}}; c = 4^{\frac{m}{5}}; d = 4^{\frac{m}{7}}; e = 4^{\frac{m+1}{3}}$

Ta cần chỉ m sao cho $\frac{m}{2}; \frac{m}{5}; \frac{m}{7}; \frac{m+1}{3} \in Z^+ \Rightarrow \begin{cases} m = 70x \\ m+1 = 3y \end{cases} \Rightarrow 3y - 70x = 1 \Rightarrow x = 3n + 2$

$\Rightarrow a = 2^{210n+140}; b = 2^{105n+70}; c = 4^{42n+28}; d = 4^{30n+20}; e = 4^{70n+47}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên dương.

Bài 4: Chứng minh phương trình $2x^3 + 3y^4 = z^5$ có vô số nghiệm nguyên dương

Lời giải.

Ta luôn có: $2x^3 + 3y^4 = z^5 \Leftrightarrow x^3 + x^3 + y^4 + y^4 + y^4 = z^5$

$$5^m + 5^m + 5^m + 5^m + 5^m = 5^{m+1}$$

Đặt $x = 5^{\frac{m}{3}}; y = 5^{\frac{m}{4}}; z = 5^{\frac{m+1}{5}}$. Ta cần tìm m sao cho $\begin{cases} m \vdots 12 \\ m+1 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow m = 60n + 24$

Chọn $x = 5^{20n+8}; y = 5^{15n+6}; z = 5^{12n+5}$, khi đó $2x^3 + 3y^4 = z^5$.

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên dương.

<u>Bài 5:</u> Chứng minh phương trình $2a^2 = b^3 + c^5$ có vô số nghiệm nguyên.

<u>Lời giải.</u>

<u>Cách 1:</u> Từ phương trình ban đầu suy ra $a^2 + a^2 + (-b)^3 = c^5$

Mà: $3^m + 3^m + 3^m = 3^{m+1}$ nên đặt $a = 3^{\frac{m}{2}}; b = -3^{\frac{m}{3}}; c = 3^{\frac{m+1}{5}}$

Ta tìm m sao cho $\begin{cases} m \vdots 6 \\ m+1 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow m = 30n + 24$

Dẫn đến $a = 3^{15n+12}; b = -3^{10n+8}; c = 3^{6n+5}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên.

<u>Cách 2</u>: Phương trình ban đầu ta có: $a^2 + a^2 + (-c)^5 = b^3$

Đặt $a = 3^{\frac{m}{2}}; b = 3^{\frac{m+1}{3}}; c = -3^{\frac{m}{5}}$. Ta cần tìm m sao cho $\begin{cases} m \vdots 10 \\ m+1 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow m = 30n + 20$

Dẫn đến $a = 3^{15n+10}; b = 3^{10n+7}; c = -3^{6n+4}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên.

<u>IV) Bài tập áp dụng</u>

<u>Bài 1:</u> Chứng minh phương trình $2a^3 = b^4$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $a = 2^{4n+1}; b = 2^{3n+1}$

<u>Bài 2:</u> Chứng minh phương trình $x^4 + y^5 = z^9$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $x = 2^{45n+20}; y = 2^{36n+16}; z = 2^{20n+9}$

<u>Bài 3:</u> Chứng minh phương trình $a^3 + b^4 = c^7$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $a = 2^{28n+16}; b = 2^{21n+12}; c = 2^{12n+7}$

<u>Bài 4:</u> Chứng minh phương trình $a^2 + b^4 + c^5 = d^3$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $a = 3^{30n+10}; b = 3^{15n+5}; c = 3^{12n+4}; d = 3^{20n+7}$

<u>Bài 5:</u> Chứng minh phương trình $x^2 + y^4 + z^6 = t^5$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $x = 3^{30n+12}; y = 3^{15n+6}; z = 3^{10n+4}; t = 3^{12n+5}$

<u>Bài 6:</u> Chứng minh phương trình $x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^9 = x_5^2$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $x_1 = 4^{210n+105}; x_2 = 4^{126n+63}; x_3 = 4^{90n+45}; x_4 = 4^{70n+35}; x_5 = 4^{315n+158}$

<u>Bài 7:</u> Chứng minh phương trình $x^2 = 2y^3 + 3z^5 + 4t^7$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $x = 9^{105n+53}; y = 9^{70n+35}; z = 9^{42n+21}; t = 9^{30n+15}$

<u>Bài 8:</u> Chứng minh phương trình $3a^5 + 4b^6 = c^7$ có vô số nghiệm nguyên dương.

HD: Chọn $a = 7^{42n+18}; b = 7^{35n+15}; c = 7^{30n+13}$

<u>Bài 9:</u> Chứng minh phương trình $a^2 + b^4 + c^6 = x^3 + y^5 + z^7$ có vô số nghiệm nguyên.

HD: Chọn $a = 5^{210n+150}; b = 5^{105n+75}; c = 5^{70n+50}; x = -5^{140n+100}; y = -5^{84n+60}; z = 5^{60n+43}$

Bài viết xin kết thúc.