

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

LÊ VĂN HẢI

BÀI TOÁN CHẤP NHẬN PHÂN RÃ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 0112**

**Người hướng dẫn khoa học:
GIÁO SƯ - TIẾN SỸ : NGUYỄN BƯỜNG**

THÁI NGUYÊN, năm - 2012

Mục lục

Lời nói đầu	3
1 Một số khái niệm cơ bản	6
1.1 Tập lồi - Hàm lồi	6
1.2 Không gian Hilbert	13
1.3 Một số ánh xạ cơ bản	23
2 Thuật toán CQ và thuật toán CQ nối lỏng	27
2.1 Thuật toán CQ	27
2.2 Thuật toán CQ nối lỏng	31

Lời nói đầu

Cho N, M là 2 số nguyên dương và tập C, Q là hai tập lồi khác rỗng của không gian Ôcolit R^N và R^M . Bài toán chấp nhận phân rã được giới thiệu trong [3] là bài toán tìm một điểm x^* thỏa mãn tính chất:

$$x^* \in C, Ax^* \in Q, \quad (0.1)$$

trong đó A là ma trận thực $M \times N$. Một trường hợp đặc biệt của (0.1) là bài toán tuyến tính có ràng buộc.

$$Ax = b, x \in C.$$

Bài toán đã được nghiên cứu rộng rãi trong các tài liệu của Landweber giới thiệu về phương pháp lặp và gọi là phương pháp chiếu lặp Landweber được đề xuất năm 1951.

Bài toán chấp nhận phân rã đã được Elfving và Censor [3] ứng dụng trong việc tìm ra phương pháp để phục hồi ảnh, tìm ra phương pháp giải các bài toán và đã thu được những thành công. Để giải bài toán chấp nhận phân rã Byrne [1] giới thiệu thuật toán lặp CQ với việc xác định một dãy lặp theo công thức:

$$x_{n+1} = P_C \left(x_n - \gamma A^T (I - P_Q) Ax_n \right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

ở đây A^T là ma trận chuyển vị của A , $x_o \in C$ là giá trị ban đầu và $\gamma > 0$ là tham số được chọn một cách thích hợp. Nhưng cách giải của thuật toán CQ là phức tạp và không thông dụng khi đó đòi hỏi những cách giải đơn giản hơn thông dụng hơn.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu và trình bày một số kết quả và chứng minh đơn giản về thuật toán CQ đồng thời và thuật toán CQ nói lỏng để đưa thuật toán trở nên thông dụng hơn.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Giới thiệu một số kiến cơ bản về các tập hợp, các khái niệm về không gian Hilbert, các tính chất của không gian Hilbert và các ví dụ của không gian Hilbert, giới thiệu về hàm lỗi và dưới vi phân.

Chương 2. Trình bày thuật toán CQ, thuật toán CQ nói lỏng.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Giáo sư - Tiến sỹ Nguyễn Bường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và chân thành của thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các giáo sư công tác tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên -Đại học Quốc gia Hà nội, Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin -Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ Quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập ở trường.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên

tôi vượt qua những khó khăn trong cuộc sống để tôi có điều kiện tốt nhất khi học tập nghiên cứu.

Do điều kiện thời gian và trình độ còn hạn chế, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn. Tôi hy vọng được tiếp tục nghiên cứu đề tài trên trong thời gian tới.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, năm 2012
Tác giả

Lê văn Hải

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

1.1 Tập lồi - Hàm lồi

Định nghĩa 1.1. Tập hợp $C \subset H$ (H là không gian Hilbert) gọi là lồi nếu:

$x, y \in C, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Tức là hễ C chứa 2 điểm nào đó thì nó chứa cả đoạn thẳng nối 2 điểm ấy.

Ví dụ. Toàn không gian H , hình vuông hình tròn, các nửa không gian đóng $\{x : \langle a, x \rangle \leq \alpha\}$ $\{x : \langle a, x \rangle \geq \alpha\}$, hay các nửa không gian mở $\{x : \langle a, x \rangle < \alpha\}$, $\{x : \langle a, x \rangle > \alpha\}$

trong đó $\alpha \neq 0, \alpha \in H$ đều là những tập lồi.

Định nghĩa 1.2. Điểm $x \in H$ có dạng $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i$ với $a^i \in H, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ được gọi là một tổ hợp lồi của $a^1, a^2, \dots, a^k \in H$.

Mệnh đề 1.1. Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là lồi. Nếu C, D là các tập lồi thì $C + D = \{x + y : x \in C, y \in D\}$, $\alpha C = \{\alpha x : x \in C\}$ (do đó cả $C - D = C + (-1)D$) là các tập lồi.

Chứng minh. Nếu $\{C_\alpha\}$ là một họ tập lồi và $a, b \in \bigcap_{\alpha} C_\alpha$ thì với mỗi α ta có $a \in C_\alpha, b \in C_\alpha$, vì thế $[a, b] \subset C_\alpha$ và do đó $[a, b] \subset \bigcap_{\alpha} C_\alpha$.

Nếu C, D là các tập lồi và $a = x + y, b = u + v$ với $x, u \in C, y, v \in D$ thì $(1 - \lambda)a + \lambda b = [(1 - \lambda)x + \lambda u] + [(1 - \lambda)y + \lambda v] \in C + D$ với mọi $\lambda \in [0, 1]$ do đó $C + D$ là lồi. Tính lồi của λC chứng minh tương tự.

Định nghĩa 1.3. Tập con M của H được gọi là một nón (mũi tại gốc) nếu $x \in M, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in M$. Nón M gọi là nón lồi nếu tập M là tập lồi.

Định nghĩa 1.4. Giao của tất cả các tập lồi chứa E gọi là bao lồi của E và kí hiệu là $\text{conv}E$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E .

Định nghĩa 1.5. Điểm a gọi là điểm trong của C nếu tồn tại một hình cầu tâm a

$\{x \in H : \|x - a\| \leq r\}, \{x \in H : \|x - a\| < r\}$ nằm hoàn toàn trong C .

Hệ quả 1.1. Điểm a của tập lồi $C \subset H$ là điểm trong của C khi và chỉ khi với mỗi $x \in H$ tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho $a + \alpha(x - a) \in C$.

Định nghĩa 1.6. Tập C là compac nếu mọi dãy vô hạn $\{x^k\} \subset C$ đều chứa 1 dãy con $\{x^{k_n}\}$ hội tụ tới 1 phần tử của C .

Tập $C \subset H$ là compac $\Leftrightarrow C$ đóng và giới nội.

Định nghĩa 1.7. Hàm $f : S \rightarrow H$ xác định trên tập lồi thuộc H được gọi là lồi trên S nếu với $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0; 1]$ ta có:

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Định nghĩa 1.8. Hàm $f(x)$ xác định trên tập lồi $C \subset H$ được gọi là lồi mạnh, nếu tồn tại hằng số $\rho > 0$ đủ nhỏ (hằng số lồi mạnh) sao cho với mọi $x, y \in C$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có bất đẳng thức:

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \lambda(1 - \lambda)\rho\|x - y\|^2.$$

Mệnh đề 1.2. a) Mọi tổ hợp tuyến tính dương của các hàm lồi là lồi và là hàm lồi chặt nếu ít nhất một trong các hàm đã cho là lồi chặt.

b) Nếu $f(x), x \in H$, là hàm lồi thì $f(Ax + b)$ cũng là hàm lồi, trong đó A là ma trận vuông cấp n và $b \in H$.

c) Cận trên của một họ tùy ý các hàm lồi là hàm lồi.

Mệnh đề 1.3. Cho D là một tập lồi trong H , G là một tập lồi trong H và $\varphi(x, y)$ là một hàm lồi giá trị thực trên $D \times G$. Khi đó hàm:

$$f(x) = \inf_{y \in G} \varphi(x, y).$$

là lồi trên D .

Chứng minh. Giả sử $x^1, x^2 \in D$ và $x = (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2$ với $\lambda \in [0, 1]$ với mỗi $i=1,2$ lấy dãy $\{y^{i,k}\} \subset G$ sao cho:

$$\varphi(x^i, y^{i,k}) \rightarrow \inf_{y \in G} \varphi(x^i, y).$$

Do φ lồi nên

$$f(x) \leq \varphi(x, (1 - \lambda)y^{1,k} + \lambda y^{2,k}) \leq (1 - \lambda)\varphi(x^1, y^{1,k}) + \lambda\varphi(x^2, y^{2,k}).$$

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta nhận được:

$$f(x) \leq (1 - \lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Định nghĩa 1.9. Hàm $f : H \rightarrow H$ gọi là Lipschitz địa phương tại $\bar{x} \in H$ nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ và $K > 0$ sao cho:

$$|f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\| \quad (\forall x, y \in U) \quad (1.1)$$

hàm f được gọi là Lipschitz địa phương trên tập $C \in H$ nếu f Lipschitz địa phương tại mọi điểm $x \in C$ và f được gọi là Lipschitz với hằng số Lipschitz K trên tập $C \in H$ nếu (1.1) đúng với $\forall x, y \in C$.

Định nghĩa 1.10. Cho hàm lồi chính thường f trên H , véc tơ $p \in H$ gọi là dưới gradient của f tại x^0 nếu:

$$\langle p, x - x^0 \rangle + f(x^0) \leq f(x), \forall x \in H.$$

Tập tất cả các dưới gradient của f tại x^0 được gọi là dưới vi phân của f tại x^0 . Kí hiệu là $\partial f(x^0)$.

Hàm f gọi là khả dưới vi phân tại x^0 nếu $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

Định lý 1.1. Một hàm lồi chính thường f trên H có dưới vi phân khác rỗng tại mỗi điểm $x^0 \in \text{int}(\text{dom}f)$ và $\partial f(x^0)$ là một tập lồi đóng.

Chứng minh. Do $x^0 \in \text{int}(\text{dom}f)$ nên $\text{int}(\text{epi}f) \neq \emptyset$. Dĩ nhiên $(x^0, f(x^0)) \notin \text{int}(\text{epi}f)$, nên ta có một siêu phẳng tách điểm đó với $\text{int}(\text{epi}f)$, tức là ta có một véc tơ $(t, t_{n+1}) \in H \setminus \{0\}$. Sao cho $\langle t, x^0 \rangle + t_{n+1}f(x^0) \geq \langle t, x \rangle + \alpha t_{n+1}, \forall (x, \alpha) \in \text{epi}f$ vì $(x, \alpha) \in \text{epi}f$. Kéo theo $(x, \beta) \in \text{epi}f, \forall \beta \geq \alpha$ cho nên ta cũng có $\langle t, x^0 \rangle + t_{n+1}f(x^0) \geq \langle t, x \rangle + t_{n+1}\beta, \forall \beta \geq \alpha$ cho $\beta \rightarrow +\infty \Rightarrow t_{n+1} \leq 0$.

Nếu $t_{n+1} = 0$ thì bất đẳng thức này trở thành $\langle t, x^0 \rangle \geq \langle t, x \rangle \forall x \in \text{dom}f$, tức là x^0 đạt cực đại của hàm tuyến tính $\langle t, x \rangle$ trên $\text{dom}f$, mà $x^0 \in \text{int}(\text{dom}f)$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $t = 0$ mâu thuẫn với $(t, t_{n+1}) \neq 0$ vậy $t_{n+1} < 0$. Đặt $p = \frac{-t}{t_{n+1}}, \alpha = f(x)$ ta sẽ nhận được $\langle p, x - x^0 \rangle + f(x^0) \leq f(x), \forall x \in H$.

Chứng minh $\partial f(x^0)$ lồi, lấy bất kỳ $p^1, p^2 \in \partial f(x^0), \lambda \in [0, 1]$ khi đó với $\forall x \in H$. Ta xét:

$$\begin{aligned} \langle \lambda p^1, x - x^0 \rangle &\leq \lambda (f(x) - f(x^0)) \\ \langle (1 - \lambda) p^2, x - x^0 \rangle &\leq (1 - \lambda) (f(x) - f(x^0)) \\ \Rightarrow \langle \lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2, x - x^0 \rangle &\leq f(x) - f(x^0). \end{aligned}$$

Vậy $\Rightarrow \lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2 \in \partial f(x^0) \Rightarrow \partial f(x^0)$ lồi nên $\partial f(x^0)$ là tập đóng, lấy $p^k \in \partial f(x^0), p^k \rightarrow p$. Từ $\langle p^k, x - x^0 \rangle + f(x^0) \leq f(x), \forall x \in H \Rightarrow \langle p, x - x^0 \rangle + f(x^0) \leq f(x), \forall x \in H$, chứng tỏ $p \in \partial f(x^0)$ nên suy ra $\lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2 \in \partial f(x^0)$ lồi. Chứng tỏ $p \in \partial f(x^0)$.

Mệnh đề 1.4. Nếu f là hàm lồi chính thường, khả vi tại điểm $x^0 \in \text{dom}f$ thì $\partial f(x^0) = \{\nabla f(x^0)\}$, nghĩa là $\nabla f(x^0)$ là véc tơ dưới gradient duy nhất của f tại x^0 .

Nếu f khả vi tại x^0 thì $f'(x^0, d) = \langle \nabla f(x^0), d \rangle$ vì thế véc tơ p là dưới gradient của f tại x^0 khi và chỉ khi $\langle p, d \rangle \leq \langle \nabla f(x^0), d \rangle$ với mọi d từ đó $\Rightarrow p = \nabla f(x^0)$.

Nếu f có tại x^0 một véc tơ dưới gradient duy nhất thì f khả vi tại x^0 .

Định lý 1.2. Giả sử $A : H \rightarrow H$ là toán tử tuyến tính và g là hàm lồi chính thường trên H . Khi đó với mọi $x \in H$

$$A^T \partial g(Ax) \subset \partial (g \circ A)(x).$$

Hơn nữa nếu g liên tục tại một điểm nào đó thuộc $\text{Im}(A)$ (ảnh của A) thì:

$$A^T \partial g(Ax) = \partial(g \circ A)(x) \quad \forall x \in H.$$

Định nghĩa 1.11. Cho tập lồi $C \subset H$ và $y \in H$. Ta gọi hình chiếu của y trên C là điểm $x^0 \in C$:

$$\|x^0 - y\| = \inf_{x \in C} \|x - y\| = d_C(y).$$

Kí hiệu: $x^0 = p(y)$ và $d_C(y)$ gọi là khoảng cách từ y tới C .

Bổ đề 1.1. Muốn cho điểm $x^* \in C$ là hình chiếu của điểm y trên tập lồi đóng C điều kiện cần và đủ là:

$$\langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0. \quad \forall x \in C \quad (1.2)$$

Chứng minh. Giả sử x^* là hình chiếu của y trên C lấy điểm tùy ý $x \in C$ và xét điểm $z = \lambda x + (1 - \lambda)x^*$. C lồi nên với mọi $\lambda \in [0, 1]$ thì $z \in C$ ta có:

$$\|z - y\|^2 = \lambda^2 \|x - x^*\|^2 + 2\lambda \langle x - x^*, x^* - y \rangle + \|x^* - y\|^2.$$

Do $\|z - y\|^2 \geq \|x^* - y\|^2$ nên $\lambda^2 \|x - x^*\|^2 + 2\lambda \langle x - x^*, x^* - y \rangle \geq 0$.

Do đẳng thức này đúng với mọi $\lambda \in [0, 1]$ nên $\langle x - x^*, x^* - y \rangle \geq 0$ từ đó suy ra (1.2). Ngược lại giả sử có (1.2) khi đó với mọi $x \in C$ ta có:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - x^*) + (x^* - y)\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 + 2\langle x - x^*, x^* - y \rangle + \|x^* - y\|^2 \\ &\geq \|x^* - y\|^2. \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ x^* là hình chiếu của y trên C .

Mệnh đề 1.5. Muốn cho điểm x^* của tập lồi đóng C là điểm cực tiểu của hàm lồi khả vi $f(x)$ trên C , điều kiện cần và đủ là $x^* = p(y^*)$ trong đó $y^* = x^* - \alpha \nabla f(x^*)$ với $\alpha > 0$ là một số bất kỳ.

Chứng minh. Đủ: Giả sử $x^* = p(y^*)$. Do $p(y^*)$ là hình chiếu của điểm y^* trên C nên ta có:

$$\langle x - x^*, y^* - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C.$$

Vì $y^* = x^* - \alpha \nabla f(x^*)$ và $\alpha > 0$ ta suy ra $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C$ nên x^* là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$ trên C .

Cần: Giả sử x^* là điểm cực tiểu của f trên C khi đó với mọi $x \in C$ ta có:

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0. \quad \text{hay} \quad -\alpha \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \leq 0, (\alpha > 0).$$

Nhưng $-\alpha \nabla f(x^*) = y^* - x^*$ do đó $\langle y^* - x^*, x - x^* \rangle \leq 0$ suy ra x^* là hình chiếu của điểm y^* trên C nghĩa là $x^* = p(y^*)$.

Mệnh đề 1.6. Nếu $f(x)$ là hàm lồi mạnh và khả vi trên tập lồi đóng C , thì:

a) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \rho \|x - y\|^2$ với mọi $x, y \in C$.

b) Với bất kỳ $x^0 \in C$ tập mức dưới $C_0 = \{x \in C : f(x) \leq f(x^0)\}$ bị chặn.

c) Tồn tại duy nhất điểm $x^* \in C$ sao cho $f(x^*) = \min \{f(x) : x \in C\}$.

Chứng minh. a) Do hàm f lồi $\forall x, y \in C$ thì $f(x) - f(y) \leq \langle \nabla f(x), x - y \rangle$ hơn nữa do f lồi mạnh nên với $\lambda = \frac{1}{2}$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\rho\|x - y\|^2 &\leq \frac{1}{2} \left[f(x) - f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \right] + \frac{1}{2} \left[f(y) - f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \right] \\ &\leq \frac{1}{4} \langle \nabla f(x), x - y \rangle + \frac{1}{4} \langle \nabla f(y), y - x \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle. \end{aligned}$$

b) Do

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^1 \langle \nabla f[y + \lambda(x - y)], x - y \rangle d\lambda \\ &= \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\quad + \int_0^1 \langle \nabla f[y + \lambda(x - y)] - \nabla f(y), x - y \rangle d\lambda. \end{aligned}$$

Kết hợp với bất đẳng thức ở phần a ta được:

$$f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(x), x - y \rangle + \frac{1}{2}\rho\|x - y\|^2.$$

Nên ta có $0 \geq f(x) - f(x^*) \geq \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{1}{2}\rho \|x - x^*\|^2$

$$\Rightarrow \|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\rho} \langle \nabla f(x^*), x^* - x \rangle \leq \frac{2}{\rho} \|\nabla f(x^*)\| \times \|x - x^*\|.$$

Từ đó suy ra $\|x - x^*\| \leq \frac{2}{\rho} \|\nabla f(x^*)\|$ với $\forall x \in C_0$ nghĩa là C_0 bị chặn.

c) Do $f(x)$ liên tục trên tập compact $C_0 \subset C$ nên tồn tại $x^* \in C_0$ sao cho:

$$f(x^*) = \min \{f(x) : x \in C_0\} = \min \{f(x) : x \in C\}.$$

Vì hàm lồi mạnh cũng lồi chặt nên x^* là điểm cực tiểu duy nhất.

Mệnh đề 1.7. Giả sử $f(x)$ lồi mạnh trên tập lồi đóng C và x^* là điểm cực tiểu của f trên C . Khi đó với mọi $x \in C$ ta có:

$$\|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\rho} [f(x) - f(x^*)].$$

Hơn nữa nếu f khả vi thì

$$\|x - x^*\| \leq \frac{1}{\rho} \|\nabla f(x)\| \quad (1.3)$$

và

$$0 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{\rho} \|\nabla f(x)\|^2.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa hàm lồi mạnh với $\lambda = \frac{1}{2}$ nên:

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^*\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x^*) - \frac{1}{4}\rho \|x - x^*\|^2.$$

Từ đó ta có $f(x^*) \leq f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^*\right)$

$$\Rightarrow \|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\rho} [f(x) - f(x^*)].$$

Tại điểm cực tiểu x^* của f trên C suy ra $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ với mọi $x \in C$. Mặt khác ta lại có:

$$\begin{aligned} \rho \|x - x^*\|^2 &\leq \langle \nabla f(x) - \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \\ &\leq \langle \nabla f(x), x - x^* \rangle \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|x - x^*\|. \end{aligned}$$

Nghĩa là ta có bất đẳng thức (1.3).

Cuối cùng ta suy ra:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) - f(x^*) \leq \langle \nabla f(x), x - x^* \rangle \\ &\leq \|\nabla f(x)\| \times \|x - x^*\| \leq \frac{1}{\rho} \|\nabla f(x)\|^2. \end{aligned}$$

1.2 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.12. *Không gian tuyến tính (không gian véc tơ) X cùng với 1 tích vô hướng sau*

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X.$$

$$\langle \lambda x + \eta y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \eta \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X, \quad \forall \lambda, \eta \in K.$$

Gọi là 1 không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert X đầy đủ được gọi là 1 không gian Hilbert.

Ví dụ 1

Trong C^N với $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ta đặt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i}.$$

Khi đó C^N là 1 không gian Hilbert.

Ví dụ 2

Trong $C[a, b]$ ta xét tích vô hướng:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \quad (x(t), y(t) \in C[a, b]).$$

Khi đó

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Không gian $C[a, b]$ với chuẩn trên là không đầy đủ do đó không là không gian Hilbert. Nhưng với chuẩn

$$\|x\|_1 = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

thì $C[a, b]$ lại đầy đủ.

Ví dụ 3

Trong không gian l_2 ta đưa vào tích vô hướng:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}.$$

$$(x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2, y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l_2).$$

Khi đó

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Không gian l_2 đầy đủ với chuẩn đó. Vậy l_2 là không gian Hilbert.

Ví dụ 4

Trong $L_2[a, b]$ ta đưa vào tích vô hướng:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt. \quad (x, y \in L_2[a, b])$$

là 1 không gian Hilbert.

Ví dụ 5

Xét không gian $L_2^{(p)}[a, b]$ gồm tất cả các hàm $x(t)$ có các đạo hàm $x^{(k)}(t) \in L_2[a, b]$, ($k = 0, 1, \dots, p$), với tích vô hướng:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^p \int_a^b x^{(k)}(t) \overline{y^{(k)}(t)} dt.$$

Khi đó $L_2^{(p)}[a, b]$ là 1 không gian Hilbert.

Mệnh đề 1.8. (*Bất đẳng thức cauchy- schwartz*).

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad (\forall x, y \in X). \quad (1.4)$$

Chứng minh. Nếu $\langle x, y \rangle = 0$ thì (1.4) đúng. Giả thiết $\langle x, y \rangle \neq 0$, với mọi $x, y \in X, \lambda \in K$, ta có:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle.$$

Lấy $\lambda = t \langle x, y \rangle$, trong đó t là số thực tùy ý, ta nhận được:

$$0 \leq \langle x, x \rangle + 2t |\langle x, y \rangle|^2 + t^2 |\langle x, y \rangle|^2 \langle y, y \rangle$$

nên ta $\Rightarrow \langle y, y \rangle > 0$, vì nếu $\langle y, y \rangle \leq 0$, khi $t < 0$ với $|t|$ khá lớn, thì tam thức đối với t ở vế phải sẽ nhỏ hơn 0.

Vì vậy

$$\Delta' = |\langle x, y \rangle|^4 - |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

nên ta suy ra (1.4)

Nhận xét:

Không gian tiền Hilbert X là 1 không gian định chuẩn với chuẩn:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (x \in X).$$

Khi đó bất đẳng thức Cauchy - Schwartz trở thành:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Ta có đẳng thức hình bình hành sau:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle \\ &\quad - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle. \\ &= 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.13. Toán tử tuyến tính liên tục A trong không gian Hilbert X được gọi là dương, nếu:

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad (\forall x \in X).$$

Kí hiệu : $A \geq 0$.

Tính chất 1.1. Giả sử A là toán tử dương trong không gian Hilbert X . Khi đó,

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle \quad (\forall x, y \in X).$$

Tính chất 1.2. Giả sử A là toán tử dương trong không gian Hilbert X . Khi đó,

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\| \cdot \langle Ax, x \rangle \quad (\forall x \in X).$$

Tính chất 1.3. Giả sử A là toán tử dương trong không gian Hilbert X , dãy $\{x_n\} \subset X$ thỏa mãn $\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ khi đó, $Ax_n \rightarrow 0$.

Tính chất 1.4. Giả sử X là không gian Hilbert, A là toán tử dương trong X . Đặt

$$m = \inf_{x \in X, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, M = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

Khi đó :

$$a) \quad \|A\| = M.$$

$$b) \quad m \in \sigma(A), M \in \sigma(A) \text{ và } \sigma(A) \subset [m, M].$$

Định lý 1.3. Giả sử X là không gian Hilbert, M là không gian con đóng của X . Khi đó, X là tổng trực tiếp của M và $M^\perp$, tức là mọi véc tơ $x \in X$ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$x = y + z \quad (y \in M, z \in M^\perp). \quad (1.5)$$

Chứng minh. Nếu $x \in M$ thì lấy $y=x$, $z=0$, và (1.5) đúng. Nếu $x \notin M$, ta có:

$$d = d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\| > 0,$$

bởi vì M đóng. Khi đó, tồn tại dãy $\{y_n\} \subset M$ sao cho:

$$\|x - y_n\| \rightarrow d.$$

Từ đẳng thức hình bình hành, ta có:

$$\begin{aligned} 2 \left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2 \right) &= \|(x - y_n) + (x - y_m)\|^2 \\ &\quad + \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 \\ &= 4 \left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \\ &\geq 4d^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq 4d^2. \end{aligned}$$

(Vì $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$).

$$\Rightarrow 4d^2 \geq 4d^2 + \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\|^2 \geq 4d^2, (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\| = 0, \text{ tức là } \{y_n\} \text{ là dãy Cauchy trong } M.$$

Bởi vì X là đầy đủ và M là đóng, cho nên M đầy đủ. Do đó, tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in M$. Hơn nữa,

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d.$$

Đặt $z = x - y$. Ta chứng minh $z \in M^\perp$.

Do $y \in M$, với mọi số λ và mọi $v \in M$, ta có $y - \lambda v \in M$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow d^2 &\leq \|x - (y - \lambda v)\|^2 = \|z + \lambda v\|^2 \\
 &= \langle z + \lambda v, z + \lambda v \rangle \\
 &= \|z\|^2 + \bar{\lambda} \langle z, v \rangle + \lambda \overline{\langle z, v \rangle} + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\
 &= d^2 + \bar{\lambda} \langle z, v \rangle + \lambda \overline{\langle z, v \rangle} + |\lambda|^2 \|v\|^2. \\
 \Rightarrow \bar{\lambda} \langle z, v \rangle + \lambda \overline{\langle z, v \rangle} + |\lambda|^2 \|v\|^2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Lấy $\lambda = t \langle z, v \rangle$, trong đó t là một số thực tùy ý, nên ta suy ra:

$$|\langle z, v \rangle|^2 \left\langle 2 + t \|v\|^2 \right\rangle \geq 0.$$

Nếu $\langle z, v \rangle \neq 0$ ta lấy $0 > t > -\frac{2}{\|v\|^2}$, thì

$$t |\langle z, v \rangle|^2 \left\langle 2 + t \|v\|^2 \right\rangle < 0.$$

Vậy, $\langle z, v \rangle = 0$ với $\forall v \in M$, tức là $z \in M^\perp$.

Như vậy ta có:

$$x = y + z \quad (y \in M, z \in M^\perp).$$

Ta chứng minh cách phân tích là duy nhất

Giả sử ta có:

$$x = y' + z' \quad y' \in M, z' \in M^\perp.$$

Khi đó, $y - y' = z' - z$ với $y - y' \in M, z' - z \in M^\perp$.

$$\Rightarrow 0 = \langle y - y', z' - z \rangle = \langle y - y', y - y' \rangle = \|y - y'\|^2.$$

$$\Rightarrow y = y', z = z'.$$

Định nghĩa 1.14. Véc tơ $y \in M$ được gọi là hình chiếu của x lên không gian con đóng M . Khi đó $P : X \rightarrow X$ ứng với mỗi $x \in X$ với hình chiếu y của x lên M . P gọi là toán tử chiếu hay phép chiếu của không gian X lên không gian con đóng M của X .

Nhận xét:

+ P liên tục và $\|P\| = 1$.

+ $I - P$ là toán tử chiếu lên không gian con đóng $M^\perp$.

Định lý 1.4. *Giả sử P là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian Hilbert X . Khi đó,*

$$P \text{ là toán tử chiếu} \Leftrightarrow P = P^*, P^2 = P.$$

Đồng thời, P là toán tử chiếu lên không gian con đóng $M = R(P)$.

Chứng minh. Điều kiện cần: Giả sử P là toán tử chiếu lên không gian con đóng M . Ta chứng minh $P = P^*, P^2 = P$.

Lấy x, y bất kì thuộc X . Giả sử:

$$x = u + v, y = z + \omega \quad (u, z \in M; v, \omega \in M^\perp).$$

$$\Rightarrow \langle Px, y \rangle = \langle u, z + \omega \rangle = \langle u, z \rangle = \langle u + v, z \rangle = \langle x, Py \rangle.$$

$$\Rightarrow P = P^*.$$

Với mọi $x \in X$, ta có:

$$P^2x = P(Px) = Pu = u = Px \Rightarrow P^2 = P$$

Điều kiện đủ: Giả sử $P^2 = P, P = P^*$. Ta chứng minh không gian con tuyến tính $M = R(P)$ của X là đóng.

Lấy $u \in M$. Khi đó, tồn tại dãy $\{u_n\} \subset M$ hội tụ đến u . Do $u_n \in R(P)$, nên $u_n = Pv_n$ với $v_n \in X$. $\Rightarrow u_n = Pv_n = P^2v_n = P(Pv_n) = Pu_n$.
 $\Rightarrow u = Pu, (n \rightarrow \infty) \Rightarrow u \in R(P) = M$. suy ra M đóng.

Mặt khác, toán tử tuyến tính liên tục $Q = I - P$ cũng thỏa mãn các điều kiện $Q = Q^*, Q^2 = Q$.

$$\text{Thật vậy, } Q = I - P^* = I - P = Q^*,$$

$$Q^2 = (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = Q.$$

Do đó, $N = R(Q)$ là không gian con đóng của X .

Với mọi $x, y \in X$, ta có:

$$\begin{aligned}\langle Px, Qy \rangle &= \langle QPx, y \rangle = \langle (I - P)Px, y \rangle. \\ &= \langle (P - P^2)x, y \rangle = \langle (P - P)x, y \rangle = 0.\end{aligned}$$

Bởi vì khi x, y chạy khắp X , thì Px, Qy chạy khắp M, N cho nên suy ra $M \perp N$. Hơn nữa, với mọi $x \in X$,

$$x = Px + (I - P)x = Px + Qx, (Px \in M, Qx \in N).$$

Do đó $X = M \oplus N$ và P, Q là các toán tử chiếu lên M, N tương ứng.

Định lý 1.5. *Giả sử M_1, M_2 là các không gian con đóng của không gian Hilbert X , P_1, P_2 là các toán tử chiếu lên M_1, M_2 (tương ứng). Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

a) $M_1 \perp M_2$.

b) $P_1P_2 = 0$ hoặc $P_2P_1 = 0$.

c) $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu.

Đồng thời $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu lên $M_1 \oplus M_2$.

Chứng minh. $a \Rightarrow b$: Giả sử $M_1 \perp M_2$. Lấy $x \in X$. Do $P_1x \in M_1$, nên P_1x có hình chiếu bằng 0 trên M_2 ,

$$P_2P_1x = 0 \Rightarrow P_2P_1 = 0 \Rightarrow P_1P_2 = P_1^*P_2^* = (P_2P_1)^* = 0.$$

$b \Rightarrow a$: Giả sử $P_2P_1 = 0$. Lấy $u \in M_1, v \in M_2$. Khi đó:

$$u = P_1u, v = P_2v.$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \langle P_1u, P_2v \rangle = \langle P_2P_1u, v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0.$$

suy ra $M_1 \perp M_2$

$b \Rightarrow c$: Giả sử $P_2P_1 = 0$. Khi đó:

$$P_1P_2 = P_1^*P_2^* = (P_2P_1)^* = 0.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (P_1 + P_2)^2 &= P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 \\ &= P_1^2 + P_2^2 = P_1 + P_2.\end{aligned}$$

suy ra $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu.

$c \Rightarrow b$: Giả sử $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu. Do đó

$$P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0 \quad (1.6)$$

Nhân P_1 về bên trái với hai vế (1.6), ta nhận được:

$$P_1 P_2 + P_1 P_2 P_1 = 0 \quad (1.7)$$

Nhân P_1 về bên phải với hai vế (1.7) ta nhận được:

$$P_1 P_2 P_1 = 0 \text{ suy ra } P_2 P_1 = 0.$$

Bây giờ ta giả sử có một trong ba điều kiện a,b,c, chẳng hạn $M_1 \perp M_2$. Đặt $M = M_1 \oplus M_2$. Gọi P là toán tử chiếu lên M . Khi đó, với mọi $x \in X$, ta có:

$$x = Px + (I - P)x.$$

Bởi vì $Px \in M$, cho nên:

$$Px = u + v \quad (u \in M_1, v \in M_2).$$

$$\Rightarrow x = u + v + (I - P)x.$$

Vì $v \perp M_1$, $(I - P)x \perp M_1$, nên $v + (I - P)x \perp M_1$. Do đó, u là hình chiếu của x lên M_1 , tức là:

$$u = P_1 x.$$

Tương tự, ta có:

$$v = P_2 x.$$

Vì vậy,

$$Px = P_1 x + P_2 x \quad \forall x \in X.$$

suy ra $P = P_1 + P_2$, tức là $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu lên $M_1 \oplus M_2$.

Định lý 1.6. *Giả sử M_1, M_2 là các không gian con đóng của không gian Hilbert X , P_1, P_2 là các toán tử chiếu lên M_1, M_2 (tương ứng). Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

a) $M_1 \subset M_2$.

b) $P_1P_2 = P_1$ hoặc $P_2P_1 = P_1$.

c) $P_1 \leq P_2$ tức là $P_2 - P_1$ là một toán tử dương.

d) $P_2 - P_1$ là một toán tử chiếu.

Đồng thời, $P_2 - P_1$ là toán tử chiếu lên $M_1 \oplus M_2$ là phần bù trực giao của M_1 trong M_2 .

Chứng minh. $a \Rightarrow b$: Giả sử $M_1 \subset M_2$. Kí hiệu $M = M_1 \oplus M_2$. Gọi P là toán tử chiếu lên M . Do $M \perp M_1, M_2 = M \oplus M_1$ nên theo định lý 1.5, ta có:

$$P_1P = 0, P_2 = P + P_1.$$

suy ra
$$P_1P_2 = P_1(P + P_1) = P_1P + P_1^2 = P_1.$$

Do đó
$$P_1 = P_1^* = (P_1P_2)^* = P_2P_1.$$

$b \Rightarrow c$: Giả sử $P_1P_2 = P_1$. Khi đó, với mọi $x \in X$,

$$\begin{aligned} \langle P_1x, x \rangle &= \langle P_1^2x, P_1x \rangle = \langle P_1x, P_1x \rangle = \|P_1x\|^2 \\ &= \|P_1P_2x\|^2 \leq \|P_1\|^2 \cdot \|P_2x\|^2 \\ &= \|P_2x\|^2 = \langle P_2x, x \rangle. \\ &\Rightarrow P_1 \leq P_2. \end{aligned}$$

$c \Rightarrow a$: Giả sử $\Rightarrow P_1 \leq P_2$. Lấy $x \in M_1$, ta có $P_1x = x$, và

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|P_1x\|^2 \leq \|P_2x\|^2 \leq \|x\|^2. \\ \Rightarrow \|x\|^2 &= \|P_2x\|^2. \end{aligned}$$

vậy $Q_2x = 0$, trong đó $Q_2 = I - P_2$ là toán tử chiếu lên $M_2^\perp$.

suy ra $x \in M_2 \Rightarrow M_1 \subset M_2$.

$a \Rightarrow c$: Ta có $P = P_2 - P_1$ là toán tử chiếu lên $M = M_2 \oplus M_1$.

$c \Rightarrow b$: Giả sử $P = P_2 - P_1$ là toán tử chiếu do $P_1 + P = P_2$ là toán tử chiếu ta có: $P_1 P = 0$. Vì vậy,

$$P_1 P_2 = P_1 (P_1 + P) = P_1^2 + P_1 P = P_1.$$

1.3 Một số ánh xạ cơ bản

Một công cụ cơ bản để giải (0.1) là khái niệm của hình chiếu. Cho H là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Giả sử K là tập con lồi đóng khác rỗng của H .

Định nghĩa 1.15. Cho $x \in H$. Hình chiếu của x trên tập K được xác định là điểm kí hiệu $P_K x$, nghĩa là gần x từ K nói cách khác $P_K x$ là điểm duy nhất trong K thỏa mãn tính chất:

$$\|x - P_K x\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in K.$$

Sau đây là 1 đặc trưng của hình chiếu sử dụng trong suốt phần còn lại của luận văn.

Mệnh đề 1.9. Cho $x \in H$ và $y \in K$. Ta có $P_K x = y$ nếu và chỉ nếu:

$$\langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K.$$

Một hệ quả của Mệnh đề 1.9 là tính chất đơn điệu của hình chiếu.

Mệnh đề 1.10. Với mọi $x, y \in H$ ta có

$$\langle x - y, P_K x - P_K y \rangle \geq \|P_K x - P_K y\|^2.$$

(tính chất này được gọi là thác triển ổn định của P_K .)

Liên quan tới hình chiếu là ánh xạ thác triển và ánh xạ trung bình.

Định nghĩa 1.16. Cho $T : H \rightarrow H$ là 1 ánh xạ.

(i) T là thác triển nếu $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ với $\forall x, y \in H$.

(ii) T là thác triển ổn định nếu $\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \|Tx - Ty\|^2$ với $\forall x, y \in H$.

(iii) T là trung bình nếu tồn tại 1 ánh xạ thác triển $S : H \rightarrow H$ và 1 số thực $\gamma \in (0, 1)$ thỏa mãn:

$$T = (1 - \gamma)I + \gamma S, \quad (1.8)$$

ở đây I là ánh xạ đồng nhất. Trong trường hợp đó, T là γ -trung bình. Ta sử dụng kí hiệu $\text{Fix}(T)$ để ký hiệu tập các điểm cố định của T , $\text{Fix}(T) = \{x \in H : Tx = x\}$. T là trung bình, thì $\text{Fix}(T) = \text{Fix}(S)$ với S là ánh xạ trong (1.8).

Như vậy 1 ánh xạ thác triển ổn định là thác triển. Một hình chiếu $P_K x$ là thác triển ổn định và do đó thác triển.

Các khái niệm khác nhau về tính đơn điệu.

Định nghĩa 1.17. Cho $T : H \rightarrow H$ là 1 ánh xạ.

(i) T là đơn điệu nếu

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in H.$$

(ii) T là đơn điệu mạnh nếu tồn tại 1 số thực $\beta \succ 0$ thỏa mãn

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

(Trong trường hợp đó gọi T là β -đơn điệu mạnh.)

(iii) T là ngược đơn điệu mạnh (ism) nếu tồn tại 1 số thực $\nu \succ 0$ thỏa mãn

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \nu \|Tx - Ty\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

(Trong trường hợp đó gọi T là ν ngược đơn điệu mạnh, ν -ism (cho ngắn gọn))

Sau đây là mệnh đề về tính chất tập trung của thác triển trung bình và ánh xạ đơn điệu.

Mệnh đề 1.11. Cho toán tử $S, T, V : H \rightarrow H$.

- (i) T là thác triển nếu và chỉ nếu phần bù $I - T$ là $\frac{1}{2}$ - ism.
- (ii) T là thác triển ổn định nếu và chỉ nếu phần bù $I - T$ là thác triển ổn định.
- (iii) Hợp của ánh xạ trung bình là trung bình. Nếu T_1, T_2 là trung bình, thì hợp $T_1 T_2 := T_1 \circ T_2$ là trung bình. Nếu T_1 là α_1 - trung bình và T_2 là α_2 , ở đây $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, thì $T_1 T_2$ là α - trung bình, với $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2$.
- (iv) Nếu T_1 và T_2 là trung bình và có 1 điểm chung cố định, thì $\text{Fix}(T_1) \cap \text{Fix}(T_2) = \text{Fix}(T_1 T_2)$.
- (v) Nếu T là ν -ism, thì với $\gamma > 0$, γT là $\frac{\nu}{\gamma}$ - ism.
- (vi) T là trung bình nếu và chỉ nếu phần bù $I - T$ là ν - ism với $\nu > \frac{1}{2}$. Thực vậy, vì $\alpha \in (0, 1)$, T là α - trung bình nếu và chỉ nếu $I - T$ là $\frac{1}{2\alpha}$ -ism.

Định lý sau đây được sử dụng trong các chứng minh tiếp theo.

Định lý 1.7. Cho $T : H \rightarrow H$ là ánh xạ trung bình có $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Thế thì, với mỗi $x_0 \in H$, dãy $\{T^n x_0\}$ hội tụ tới 1 điểm cố định của T .

Sử dụng hàm lồi được xác định từ tập lồi đóng C và Q trong (0.1). Gọi 1 hàm $\varphi : H \rightarrow R$ là hàm lồi nếu

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

với mọi $\lambda \in [0, 1]$ và mọi $x, y \in H$.

Cho $x_0 \in H$, φ là khả vi dưới tại x_0 nếu tồn tại $\xi \in H$ sao cho

$$\varphi(y) \geq \varphi(x_0) + \langle \xi, y - x_0 \rangle \quad \forall y \in H. \quad (1.9)$$

Dưới vi phân của φ tại x_0 kí hiệu là $\partial\varphi(x_0)$ gồm tất cả các ξ thỏa mãn hệ thức (1.9). Thế thì, φ là khả vi dưới tại x_0 nếu và chỉ nếu $\partial\varphi(x_0) \neq \emptyset$. Chú ý đẳng thức (1.9) đã biết là đẳng thức dưới vi phân

Từ hàm lồi thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương liên tục tại 1 số điểm trong của miền xác định, từ đó giả thiết hàm lồi φ được xác định trong toàn bộ không gian H , ta có φ là Lipschitz địa phương liên tục với mọi điểm của H . Một hệ quả của nó là nếu $\{x_n\}$ là 1 dãy bị chặn trong H và nếu $\xi_n \in \partial\varphi(x_n)$ với mỗi n , thì dãy $\{\xi_n\}$ bị chặn.

Xét bài toán tối ưu hóa sau đây

$$\min \{\varphi(x) : x \in K\} \quad (1.10)$$

ở đây K là tập con lồi đóng khác rỗng của H và

$\varphi : H \rightarrow R$ là lồi và là hàm mục tiêu khả vi liên tục.

Thuật toán hình chiếu grandient được sử dụng để giải (1.10). Thuật toán xuất phát từ dãy $\{x_n\}$ sau:

$$x_{n+1} = P_K(x_n - \gamma \nabla \varphi(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.11)$$

Với giá trị ban đầu $x_0 \in K$ được chọn tùy ý và $\gamma > 0$ là 1 tham số. Dưới đây là 1 kết quả về tính hội tụ bắt đầu bởi (1.11).

Định lý 1.8. *Giả sử bài toán cực tiểu (1.10) có nghiệm. Giả sử gradient của φ thỏa mãn điều kiện liên tục Lipschitz:*

$$\|\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in H,$$

ở đây $L \geq 0$ là hằng số. Thế thì nếu γ là tham số được chọn với $0 < \gamma < \frac{2}{L}$, dãy $\{x_n\}$ bắt đầu từ (1.11) hội tụ tới nghiệm của bài toán cực tiểu (1.10).

Chương 2

Thuật toán CQ và thuật toán CQ nổi lờng

2.1 Thuật toán CQ

Thuật toán CQ được giới thiệu bởi Byrne như sau. Bắt đầu với $x_0 \in C$, thuật toán bắt đầu từ dãy $\{x_n\}$ bằng cách lặp sau:

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \gamma A^T(I - P_Q)Ax_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

ở đây A^T là ma trận chuyển vị của A và $\gamma \in \left(0, \frac{2}{\varphi(A^T A)}\right)$ với $\varphi(A^T A) = \|A\|^2$ là bán kính phổ của ma trận $A^T A$, nghĩa là giá trị lớn nhất của $A^T A$.

Thuật toán CQ là thuật toán được sử dụng để giải bài toán (0.1). Thuật toán này lần đầu được giới thiệu trong [3] giả thiết tính nghịch đảo được của toán tử A và nâng lên lũy thừa với tính toán của A^{-1} và do vậy nó trở nên không thông dụng.

Bây giờ ta xét thuật toán CQ từ 2 hướng sau: Tối ưu hóa và điểm cố định.

Từ hướng Tối ưu hóa, chú ý x^* là nghiệm của (0.1) nếu và chỉ nếu $x^* \in C$ và

$$Ax^* - P_Q Ax^* = 0.$$

Ta xác định hàm f như sau:

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - P_Q Ax\|^2, \quad x \in H_1 := R^N.$$

Xét bài toán cực tiểu lồi sau đây:

$$f_{\min} := \min_{x \in C} f(x) = \min_{x \in C} \frac{1}{2} \|Ax - P_Q Ax\|^2. \quad (2.1)$$

Ở đây x^* là nghiệm của (0.1) nếu và chỉ nếu x^* là nghiệm của bài toán cực tiểu (2.1) và $f_{\min} := 0$.

Ứng dụng phương pháp hình chiếu gradient để giải (2.1). Đây là phương pháp được xuất phát bởi dãy $\{x_n\}$ qua công thức:

$$x_{n+1} = P_C(I - \gamma \nabla f)x_n, \quad n \geq 0,$$

trong đó $\gamma > 0$ là tham số được chọn và $x_0 \in H_1$ là giá trị ban đầu tùy ý. Từ gradient của f được cho bởi

$$\nabla f(x) = A^T(I - P_Q)Ax,$$

dưới đây ta phục hồi thuật toán CQ của Byrne [1,2] như sau:

$$x_{n+1} = P_C(I - \gamma A^T(I - P_Q)A)x_n, \quad n \geq 0. \quad (2.2)$$

Từ đó ta có thuật toán hình chiếu gradient từ bài toán cực tiểu (2.1), và tìm được kết quả về tính hội tụ từ thuật toán CQ như sau.

Định lý 2.1. *Nếu $0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2}$, thì dãy $\{x_n\}$ được bắt đầu từ thuật toán CQ (2.2) hội tụ tới nghiệm của bài toán (0.1).*

Chứng minh. Xét bài toán cực tiểu (2.1). Từ

$$\nabla f(x) = A^T(I - P_Q)Ax,$$

thuật toán CQ (2.2) viết lại là 1 thuật toán hình chiếu gradient sau đây:

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \gamma \nabla f(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots$$

Từ $I - P_Q$ là thác triển ổn định, ta thấy ∇f thỏa mãn điều kiện liên tục Lipschitz:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|A^T\| \|A\| = \|A\|^2 = \rho(A^T A).$$

Kết thúc của định lý được suy ra từ Định lý 1.8.

Từ bài toán điểm bất động ta có công thức (0.1).

Ta thấy $Ax^* \in Q$ nếu và chỉ nếu:

$$(I - P_Q)Ax^* = 0.$$

Đây là một phương trình trong H_2 , thỏa mãn với mọi $\gamma > 0$,

$$\gamma A^T(I - P_Q)Ax^* = 0,$$

và phương trình trong H_1 , phương trình điểm bất động

$$(I - \gamma A^T(I - P_Q)A)x^* = x^*.$$

Phía trái không cần ở trong C . Sử dụng hình chiếu và xét phương trình điểm bất động ta có

$$P_C(I - \gamma A^T(I - P_Q)A)x^* = x^*. \quad (2.3)$$

Mệnh đề 2.1. x^* là nghiệm của (0.1) nếu và chỉ nếu x^* là nghiệm của phương trình điểm bất động (2.3).

Chứng minh. Nếu x^* là nghiệm của (0.1), thì nó là nghiệm của phương trình điểm bất động (2.3). Bây giờ ta giả sử x^* là nghiệm của phương trình điểm bất động (2.3). Theo tính chất của hình chiếu, ta có

$$\langle I - \gamma A^T(I - P_Q)A)x^* - x^*, z - x^* \rangle \leq 0, \quad z \in C.$$

Nói cách khác,

$$\langle A^T(I - P_Q)Ax^*, z - x^* \rangle \geq 0, \quad z \in C.$$

Từ đó,

$$\langle Ax^* - P_QAx^*, Ax^* - Az \rangle \leq 0, \quad z \in C.$$

Nói cách khác ta có,

$$\langle Ax^* - P_QAx^*, v - Ax^* \rangle \leq 0, \quad v \in Q.$$

Cộng 2 bất đẳng cuối cùng ta có

$$\langle Ax^* - P_QAx^*, v - Az \rangle \leq 0, \quad v \in Q, \quad z \in C.$$

Đặt $z = x^*$ và $v = P_QAx^*$ đảm bảo rằng $Ax^* = P_QAx^* \in Q$.

Loại trừ nhau, ta đưa đến phương trình điểm bất động (2.3)

$$P_C(I - \gamma A^T(I - P_Q)A)x^* = x^*.$$

Chú ý điều kiện tối ưu của bài toán cực tiểu

$$\min_{x \in C} \frac{1}{2} \|Ax - P_QAx\|^2.$$

$x^* \in C$ là nghiệm của bài toán cực tiểu nếu và chỉ nếu

$$\langle \gamma A^T(I - P_Q)Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad x \in C \quad \forall \gamma > 0.$$

Điều này tương đương với phương trình điểm bất động (2.3):

$$P_C(I - \gamma A^T(I - P_Q)A)x^* = x^*.$$

Từ đó nghiệm của (0.1) là tương đương với nghiệm của phương trình điểm bất động (2.3), như vậy ta có thể sử dụng thuật toán điểm bất động để giải (0.1).

Do đó Thuật toán CQ được phục hồi lại như sau.

Định lý 2.2. Nếu $0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2}$, thì dãy $\{x_n\}$ xuất phát bởi thuật toán CQ (2.2) hội tụ tới 1 nghiệm của (0.1).
Chứng minh. Đặt

$$T = P_C(I - \gamma A^T(I - P_Q)A).$$

Viết lại dãy $\{x_n\}$ xuất phát bởi thuật toán thuật toán CQ (2.2) như sau

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (n \geq 0)$$

hoặc

$$x_n = T^n x_0 \quad (n \geq 0).$$

Từ Định lý 1.7 ta chứng minh T - là trung bình. Đầu tiên ta phải chứng minh, $A^T(I - P_Q)A$ là $\frac{1}{\|A\|^2}$ - ngược đơn điệu mạnh.

Chú ý $I - P_Q$ thác triển ổn định và từ

$$\|A^T(I - P_Q)Ax - A^T(I - P_Q)Ay\| \leq \|A(I - P_Q)Ax - A(I - P_Q)Ay\|,$$

ta suy ra

$$\begin{aligned} & \langle A^T(I - P_Q)Ax - A^T(I - P_Q)Ay, x - y \rangle \\ &= \langle (I - P_Q)Ax - (I - P_Q)Ay, Ax - Ay \rangle \\ &\geq \|(I - P_Q)Ax - (I - P_Q)Ay\|^2 \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{\|A\|^2} \|(I - P_Q)Ax - (I - P_Q)Ay\|^2.$$

Trong đó $A^T(I - P_Q)A$ là $\frac{1}{\|A\|^2}$ - ngược đơn điệu mạnh.

Từ Mệnh đề 1.11 $\gamma A^T(I - P_Q)A$ là $\frac{1}{\gamma\|A\|^2}$ - ngược đơn điệu mạnh, ngoài ra vì chọn

$0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2}$, phần bù $I - \gamma A^T(I - P_Q)A$ là trung bình. Như vậy hợp của ánh xạ trung bình,

$$T = P_C(I - \gamma A^T(I - P_Q)A)$$

là trung bình.

2.2 Thuật toán CQ nổi lỏng

Xét trường hợp đặc biệt sau gọi $H_1 = R^N$ và $H_2 = R^M$:

$$C = \{x \in H_1 : c(x) \leq 0\}, \quad Q = \{y \in H_2 : q(y) \leq 0\},$$

ở đây c và q là hàm lồi từ H_1 và tương ứng H_2 của R . Hàm c và q là khả vi dưới, giả thiết dưới vi phân

$$\partial c(x) = \{z \in H_1 : c(u) \geq c(x) + \langle u - x, z \rangle, u \in H_1\} \neq \emptyset \quad \forall x \in C$$

và

$$\partial q(y) = \{\omega \in H_2 : q(v) \geq q(y) + \langle v - y, \omega \rangle, v \in H_2\} \neq \emptyset \quad \forall y \in Q.$$

Giả sử $0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2}$ và $x_0 \in H_1$. Định nghĩa 1 dãy $\{x_n\}$ bởi thuật toán lặp như sau

$$x_{n+1} = P_{C_n}(I - \gamma A^*(I - P_{Q_n})A)x_n, \quad n \geq 0 \quad (2.4)$$

ở đây C_n và Q_n là tập lồi đóng được xây dựng như sau:

$$C_n = \{x \in H_1 : c(x_n) + \langle \xi_n, x - x_n \rangle \leq 0\}$$

với $\xi_n \in \partial c(x_n)$,

và

$$Q_n = \{y \in H_2 : q(Ax_n) + \langle \eta_n, y - Ax_n \rangle \leq 0\}$$

với $\eta_n \in \partial q(Ax_n)$.

Trong đó $C \in C_n$ và $Q \in Q_n$ với $\forall n$. Chú ý C_n và Q_n là 1 nửa không gian, và hình chiếu P_{C_n} và P_{Q_n} có dạng đóng.

Định lý 2.3. *Giả sử điều kiện của bài toán (0.1) là thích hợp. Thế thì, nếu tham số γ được chọn với $0 < \gamma < \frac{2}{L}$, dãy $\{x_n\}$ được bắt đầu bởi thuật toán (2.4) hội tụ tới nghiệm của (0.1).*

Chứng minh. Nếu viết

$$T_n = P_{C_n}(I - \gamma A^T(I - P_{Q_n})A),$$

thì T_n là thác triển và $T_n x^* = x^*$ với $\forall x^* \in \Gamma$. (Gọi Γ là tập nghiệm của (0.1).) Sau đây, với mỗi $x^* \in \Gamma$,

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|T_n x_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|.$$

Từ đó, $\{\|x_n - x^*\|\}$ là dãy giảm, trường hợp đặc biệt tồn tại,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\|x_n - x^*\|\} \quad \forall x^* \in \Gamma. \quad (2.5)$$

Ta ước lượng chính xác trên $\|x_n - x^*\|$ như sau. Sử dụng thác triển của hình chiếu, ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|(I - \gamma A^T(I - P_{Q_n})A)x_n - x^*\|^2 \\ &= \|(x_n - x^*) - \gamma A^T(I - P_{Q_n})Ax_n\|^2 \\ &= \|x_n - x^*\|^2 + \gamma^2 \|A^T(I - P_{Q_n})Ax_n\|^2 \\ &\quad - 2\gamma \langle x_n - x^*, A^T(I - P_{Q_n})Ax_n \rangle \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 + \gamma^2 \|A\|^2 \|(I - P_{Q_n})Ax_n\|^2 \\ &\quad - 2\gamma \langle Ax_n - Ax^*, (I - P_{Q_n})Ax_n \rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Từ $Ax^* \in Q \subset Q_n$, ta có

$$\langle (I - P_{Q_n})Ax_n, Ax^* - P_{Q_n}Ax_n \rangle \leq 0.$$

Kéo theo

$$\langle (I - P_{Q_n})Ax_n, Ax_n - Ax^* \rangle = \langle (I - P_{Q_n})Ax_n, Ax_n - P_{Q_n}Ax_n \rangle$$

$$+ \langle (I - P_{Q_n})Ax_n, P_{Q_n}x_n - Ax^* \rangle$$

$$\geq \|(I - P_{Q_n})Ax_n\|^2. \quad (2.7)$$

Kết hợp (2.6) và (2.7) ta có

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2 - \gamma(2 - \gamma\|A\|^2)\|(I - P_{Q_n})Ax_n\|^2.$$

Trong trường hợp đặc biệt,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_{Q_n})Ax_n\| = 0.$$

Tập hợp

$$u_n = A^*(I - P_{Q_n})Ax_n \rightarrow 0.$$

Ta đi chứng minh:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Tiếp tục làm như sau ta được:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|(x_{n+1} - x_n) + (x_n - x^*)\|^2 \\ &= \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 + 2\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x^* \rangle \\ &= \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + 2\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n+1} \rangle + 2\langle x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x^* \rangle. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 = \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 + 2\langle x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x^* \rangle. \quad (2.9)$$

Từ $x_{n+1} = P_{C_n}(x_n - \gamma u_n)$,

$$\langle (x_n - \gamma u_n) - x_{n+1}, x - x_{n+1} \rangle \leq 0, \quad x \in C_n.$$

Do $x^* \in C_n$,

$$\langle x_n - x_{n+1}, x^* - x_{n+1} \rangle \leq \gamma \langle u_n, x^* - x_{n+1} \rangle \rightarrow 0.$$

Do đó từ (2.9) $\Rightarrow \|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$.

Vì $\{x_n\}$ bị chặn, kéo theo dãy $\{\xi_n\}$ bị chặn, tập hợp những điểm giới hạn của $\{x_n\}$ $\omega(x_n)$ là khác rỗng.

Điều kiện cần: $\omega(x_n) \subset \Gamma$.

Thực vậy, giả thiết $\hat{x} \in \omega(x_n)$ và $\{x_{n_j}\}$ là 1 dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ tới $\hat{x}$. Từ $x_{n_{j+1}} \in C_{n_j}$, ta thu được

$$c(x_{n_j}) + \langle \xi_{n_j}, x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \rangle \leq 0.$$

Suy ra

$$c(x_{n_j}) \leq -\langle \xi_{n_j}, x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \rangle \leq \xi \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\|$$

ở đây ξ thỏa mãn $\|\xi_n\| \leq \xi \quad \forall n$. Do tính liên tục của c , ta có (2.8).

$$c(\hat{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} c(x_{n_j}) \leq 0.$$

Trong đó, $\hat{x} \in C$.

Tiếp theo $A\hat{x} \in Q$. Tập $y_n = Ax_n - P_{Q_n}Ax_n \rightarrow 0$ giả sử η thỏa mãn $\|\eta_n\| \leq \eta \quad \forall n$. Thế thì, từ $Ax_{n_j} - y_{n_j} = P_{Q_{n_j}}Ax_{n_j} \in Q_{n_j}$, ta có

$$q(Ax_{n_j}) + \langle \eta_{n_j}, (Ax_{n_j} - y_{n_j}) - Ax_{n_j} \rangle \leq 0.$$

Do đó,

$$q(Ax_{n_j}) \leq \langle \eta_{n_j}, y_{n_j} \rangle \leq \eta \|y_{n_j}\| \rightarrow 0.$$

Do tính liên tục của q và do $Ax_{n_j} \rightarrow A\hat{x}$, nên ta đi đến kết luận

$$q(A\hat{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} q(Ax_{n_j}) \leq 0.$$

Nghĩa là, $A\hat{x} \in Q$.

Do $\hat{x} \in \Gamma$. Nên dãy $\{x_n\}$ hội tụ hoàn toàn, giả thiết $\tilde{x}$ là 1 điểm giới hạn khác của dãy $\{x_n\}$ và $\{x_{m_j}\}$ là 1 dãy con của $\{x_n\}$ cũng hội tụ tới

$\tilde{x}$, vậy suy ra $\tilde{x} \in \Gamma$.

Chú ý từ (2.5) ta tiếp tục như sau:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \hat{x}\|^2 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{m_j} - \tilde{x} + (\tilde{x} - \hat{x})\|^2 \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{m_j} - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{m_j} - \hat{x} + (\hat{x} - \tilde{x})\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{m_j} - \hat{x}\|^2 + 2\|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \hat{x}\|^2 + 2\|\tilde{x} - \hat{x}\|^2.
 \end{aligned}$$

Suy ra $\tilde{x} = \hat{x}$. Từ đó, $\{x_n\}$ có đúng 1 điểm giới hạn và nhiều điểm hội tụ.
Chú thích (2.4).

Thuật toán CQ nói lỏng (2.4) được giới thiệu trong [7] ở đây ta chứng minh bằng một cách. Có nhiều cách chứng minh đơn giản về tính hội tụ của nó bắt đầu từ Định lý 2.3.

KẾT LUẬN

Luận văn trình bày các khái niệm về tập lồi hàm lồi. Không gian Hilbert các ví dụ các tính chất của không gian Hilbert. Luận văn cũng đã trình bày các khái niệm về ánh xạ thác triển, ánh xạ trung bình là công cụ chủ yếu để chứng minh thuật toán CQ và thuật toán CQ nói lỏng để đưa thuật toán có nhiều ứng dụng thông dụng hơn.

Luận văn cũng đã trình bày cụ thể cách chứng minh về thuật toán CQ, thuật toán CQ nói lỏng và chứng minh tính hội tụ của thuật toán.

Do điều kiện thời gian và trình độ còn hạn chế, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Tôi kính mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn. Tôi hy vọng được tiếp tục nghiên cứu đề tài trên trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đỗ Văn Lưu - Giải tích hàm - Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà Nội -1999
- [2] C. Byrne, Iterative oblique projection onto convex subsets and the split feasibility problem, *Inverse problems*, 18 (2002), 441- 453.
- [3] C. Byrne A unified treatment of some Iterative algorithms in signal processing and image reconstruction, *Inverse problems*, 20 (2004), 103-120.
- [4] Y. Censor and T. Elfving, A multiprojection algorithms using Bregman projection in a product space, *Numer. Algorithms* 8 (1994), 221-239.
- [5] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, 1990 .
- [6] A. Ruszczyński (2006), *Nonlinear optimization*, Princeton University Press.
- [7] B. Qu and N. Xiu, A note on the CQ algorithms for the split feasibility problem, *Inverse problems* 21 (2005), 1655 - 1665.
- [8] Q. Yang, The relaxed CQ algorithms for solving the split feasibility problem, *Inverse problems* 20 (2004), 1261 -1266.
- [9] J. Zhao and Q. Yang, Several solution methods for the split feasibility problem, *Inverse problems* 21 (2005), 1791 -1799.
- [10] H. K. Xu, A variable Krasnosel'skii-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem, *Inverse problems* 22 (2006), 2021 -2034.
- [11] Trần Vũ Thiệu - Cơ sở Giải tích lồi (2011) .

