

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ BÍCH NGỌC

ĐA THỨC CÓ TRỌNG
VÀ LÝ THUYẾT ĐA THỂ VỊ CÓ TRỌNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ BÍCH NGỌC

ĐA THỨC CÓ TRỌNG VÀ LÝ THUYẾT ĐA THỂ VỊ CÓ TRỌNG

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS,TSKH NGUYỄN VĂN KHUÊ

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu	1
1 HÀM CỰC TRỊ TRONG $\mathbb{C}^N$	3
1.1 Hàm đa điều hòa dưới	3
1.1.1 Hàm nửa liên tục	3
1.1.2 Hàm điều hòa dưới	4
1.1.3 Hàm đa điều hòa dưới	5
1.2 Một vài họ các hàm đa điều hòa dưới trong $\mathbb{C}^N$	6
1.3 Hàm L -cực trị	8
1.3.1 Định nghĩa	8
1.3.2 Các tính chất	9
1.4 Tập L -cực	13
1.5 Độ đo Monge-Ampère	18
2 ĐA THỨC CÓ TRỌNG VÀ LÝ THUYẾT ĐA THỂ VỊ CÓ TRỌNG	20
2.1 Kiến thức chuẩn bị bổ sung	20
2.2 Sự liên hệ giữa độ đo cân bằng có trọng và không trọng . .	23
2.3 Bất đẳng thức Bernstein-Markov	28
2.4 L^2 lý thuyết đa thức có trọng	32
2.5 Tập hợp tròn tổng quát	34
Kết luận	35
TÀI LIỆU THAM KHẢO	36

Mở đầu

1. Lý do chọn Luận văn

Lý thuyết đa thế vị (không trọng), đặc biệt là hàm cực trị đa phức đã được nghiên cứu từ cuối những năm 70. Các kết quả cơ bản và sự ứng dụng của lý thuyết này có thể tìm trong hai công trình của Siciak và Bloom và sách chuyên khảo của Klimek.

Đặc biệt trong công trình của Siciak, Siciak là người đầu tiên đưa ra những nghiên cứu sơ bộ hàm cực trị có trọng. Gần đây Bloom và Levenberg đã giải một số bài toán mở quan trọng trong lý thuyết đa thế vị bởi sự nghiên cứu lý thuyết này trong trường hợp có trọng. Đó là lý do tôi chọn "Đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng" làm đề tài nghiên cứu của Luận văn.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của Luận văn

Mục đích của Luận văn này là trình bày công trình gần đây của Thomas Bloom về đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng.

4. Nội dung của Luận văn

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Trình bày một phần công trình của Siciak về cực trị hàm đa điều hòa dưới, đặc biệt các kết quả ban đầu về hàm cực trị.

Chương 2. Trình bày công trình của Bloom về đa thức có trọng và lý thuyết đa thế vị có trọng. Các kết quả đáng chú ý là ba Định lý 2.2.10, 2.3.4, 2.4.1.

Luận văn đã được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của GS.TSKH Nguyễn Văn Khuê, Đại học sư phạm Hà Nội. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán-trường Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K18B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm Luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012

Tác giả

Lê Bích Ngọc

Chương 1

HÀM CỰC TRỊ TRONG $\mathbb{C}^N$

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức liên quan tới việc chứng minh các kết quả của chương 2 như: Hàm đa điều hòa dưới, hàm L -cực trị, tập L -cực.

1.1 Hàm đa điều hòa dưới

1.1.1 Hàm nửa liên tục

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử X là không gian metric*

a) *Hàm $u : X \rightarrow [-\infty; +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên nếu tập hợp*

$$\{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$

b) *Hàm $u : X \rightarrow (-\infty; +\infty]$ gọi là nửa liên tục dưới nếu tập hợp*

$$\{x \in X : u(x) > \alpha\}$$

là mở với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$

Nhận xét. Từ định nghĩa trên ta có

a) *Hiển nhiên nếu u là nửa liên tục trên nếu và chỉ nếu $-u$ là nửa liên tục dưới.*

b) *Hàm $u : X \rightarrow [-\infty; +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên nếu và chỉ nếu*

$$\limsup_{x \rightarrow a} u(x) = u(a),$$

xảy ra với mọi $a \in X$,

ở đây

$$\limsup_{x \rightarrow a} u(x) = \inf_{\varepsilon > 0} (\sup\{u(y) : y \in \overline{\mathbb{B}}(a, \varepsilon)\})$$

Thật vậy, giả sử u là nửa liên tục trên trên X . Ta cần chứng minh $\limsup_{x \rightarrow a} u(x) = u(a)$ xảy ra với mọi $a \in X$.

Cho $a \in X$, có thể coi $u(a) \neq -\infty$. Do u là nửa liên tục trên nên u nửa liên tục trên tại a . Suy ra với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại lân cận $U_a \subset X$ của a sao cho với mọi $x \in U_a$ ta có $u(x) < u(a) + \varepsilon$ nên $\sup\{u(x) : x \in U_a\} \leq u(a) + \varepsilon$. Từ đó, $\inf_{U_a} \sup\{u(x) : x \in U_a\} \leq u(a) + \varepsilon$. Vì ε nhỏ tùy ý nên suy ra $\limsup_{x \rightarrow a} u(x) = \inf_{U_a} \sup\{u(x) : x \in U_a\} \leq u(a)$.

Mặt khác hiển nhiên ta có:

$$u(a) \leq \limsup_{x \rightarrow a} u(x), \quad \text{với mọi } a \in X$$

Vậy

$$\limsup_{x \rightarrow a} u(x) = u(a), \quad \text{xảy ra với mọi } a \in X.$$

1.1.2 Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ được gọi là hàm điều hòa dưới trên Ω nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

- (i) u là hàm nửa liên tục trên trên Ω .
- (ii) Với mọi $w \in \Omega$, tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\mathbb{B}(w, \rho) \subset \Omega$, ta có:

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 \leq r < \rho.$$

Ta đã biết rằng (ii) tương đương với (ii)': Với mọi $\omega \in \Omega$ và $\rho > 0$ sao cho $\overline{B}(\omega, \rho) \subset \Omega$, ta có

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega + re^{i\theta}) d\theta.$$

Tập tất cả các hàm điều hòa dưới trên Ω được ký hiệu bởi $SH(\Omega)$.

Định lý 1.1.3. Giả sử u, v là hai hàm điều hòa dưới trên $\Omega \in \mathbb{C}$. Khi đó:

- (i) $h(z) = \max(u(z), v(z))$ là hàm điều hòa dưới trên Ω .
- (ii) Với mọi số thực $\alpha, \beta > 0$, ta có:

$$h(z) = \alpha u(z) + \beta v(z), \text{ là hàm điều hòa dưới trên } \Omega.$$

Chứng minh. Hiển nhiên $h(z) = \max\{u(z), v(z)\}$ là nửa liên tục trên trên Ω .

Mặt khác, lấy $z_0 \in \Omega$, tồn tại $\mathbb{B}(z_0, \rho) \subset \Omega$ sao cho

$$\begin{aligned} u(z_0) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, 0 \leq r < \rho, \\ v(z_0) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, 0 \leq r < \rho. \end{aligned}$$

Do đó

$$h(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, 0 \leq r < \rho.$$

Vậy $h(z)$ là hàm điều hòa dưới trên Ω .

- (ii) Chứng minh tương tự (i). □

1.1.3 Hàm đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.4. Giả sử Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^N$ và $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ là một hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất $-\infty$ trên bất kỳ thành phần liên thông nào của Ω .

Hàm u được gọi là đa điều hòa dưới trên Ω nếu với mỗi $a \in \Omega$ và $b \in \mathbb{C}^N$ hàm $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ là hàm điều hòa dưới hoặc đồng nhất $-\infty$ trên mỗi thành phần liên thông của tập $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$.

Tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên Ω được ký hiệu bởi $PSH(\Omega)$.

Định lý 1.1.5. Giả sử $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên và không đồng nhất $-\infty$ trên mỗi thành phần liên thông của $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Khi đó $u \in PSH(\Omega)$ nếu và chỉ nếu với mỗi $a \in \Omega$ và $b \in \mathbb{C}^N$ sao cho $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$, ta có:

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} b) d\theta.$$

Hơn nữa, tính đa điều hòa dưới có tính địa phương.

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử $u \in PSH(\Omega)$ cần chứng minh với $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^N$ sao cho $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$, ta có:

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b) d\theta.$$

Thật vậy, do $u \in PSH(\Omega)$ nên:

$$\begin{aligned} u : D \subset \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto u(a + \lambda b) \end{aligned}$$

là hàm điều hòa dưới trong đó

$$D = \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega, b \in \mathbb{C}^N\}.$$

Do $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$, nên $\overline{\mathbb{B}}(0, 1) \subset D$. Khi đó theo định nghĩa của hàm điều hòa dưới, ta có:

$$v(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(0 + 1e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b) d\theta$$

với $v(\lambda) = u(a + \lambda b)$. Vậy

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b) d\theta.$$

Điều kiện đủ. Hiển nhiên nếu $u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b) d\theta$ với $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^N$ mà $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ thì $u \in PSH(\Omega)$. Định lý được chứng minh. $\square$

1.2 Một vài họ các hàm đa điều hòa dưới trong $\mathbb{C}^N$

Cho tập con mở G của $\mathbb{C}^N$, ta ký hiệu $PSH(G)$ là tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên G .

Chúng ta sẽ chú ý đặc biệt đến họ các hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^N$ sau đây:

$$L = \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : u(x) \leq \beta + \log(1 + |x|) \text{ trong } \mathbb{C}^N\},$$

$$L^+ = \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : \alpha + \log(1 + |x|) \leq u(x) \leq \beta + \log(1 + |x|) \text{ trong } \mathbb{C}^N\},$$

trong đó α và β là các hằng số thực phụ thuộc vào u , và $|x| = \max_{1 \leq j \leq N} |x_j|$ với mọi $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$.

Tập L được gọi là lớp Lelong trong $\mathbb{C}^N$.

Hiển nhiên rằng $L^+ \subset L$ và cả hai họ trên đều là các tập con lồi của $PSH(\mathbb{C}^N)$. Các phần tử của L được gọi là hàm đa điều hòa dưới với cấp tăng cực tiểu loại 1

Để ý rằng nếu f là đa thức khác 0 của N biến phức với bậc $\leq n$, thì $(\frac{1}{n}) \log |f| \in L$. Thật vậy, đặt $M = \sup\{|f(x)| : |x| \leq 1\}$; theo bất đẳng thức Cauchy:

$$|f(x)| \leq M(1 + |x| + \dots + |x|^n) \leq M_1(1 + |x|^n), \quad M_1 = \text{const} > 0,$$

kéo theo kết quả trên.

Đặt $\omega(x) = C_N \exp(-\frac{1}{1-|x|^2})$ với $|x| \leq 1$ và $\omega(x) = 0$ với $|x| \geq 1$ với hằng số dương C_N được chọn sao cho $\int \omega(x) dx = 1$, phép lấy tích phân được lấy với độ đo Lebesgue $2N$ -chiều trong $\mathbb{C}^N$. Cho $\lambda > 0$ bất kỳ, đặt $\omega_\lambda(x) = \lambda^{-2N} \omega(\lambda^{-1}x)$. Từ đó $\int \omega_\lambda(x) dx = 1$ và $\omega_\lambda(x) = 0$ với $|x| \geq \lambda$

Mệnh đề 1.2.1. Nếu $u \in L$ ($u \in L^+$), thì $u_\lambda = u * \omega_\lambda$ được cho bởi:

$$(u * \omega_\lambda)(x) = \int u(x+y) \omega_\lambda(y) dy, \quad x \in \mathbb{C}^N,$$

là một $\mathcal{C}^\infty$ -hàm trong $\mathbb{C}^N$ thuộc L (L^+). Hơn nữa,

$$u_\lambda \downarrow u \quad \text{khi } \lambda \downarrow 0$$

Chứng minh. Ta đã biết rằng u_λ là $\mathcal{C}^\infty$ -hàm, $u_\lambda \in PSH(\mathbb{C}^N)$ và $u_\lambda \downarrow u$ khi $\lambda \downarrow 0$ trong $\mathbb{C}^N$. Từ định nghĩa của u_λ ta suy ra rằng $u_\lambda \in L$ (tương ứng $u_\lambda \in L^+$) $\square$

Mệnh đề 1.2.2. Cho hàm $u \in L^+$, đặt $\delta = e^{-u}$ và

$$\delta_\lambda(x) = \inf_{y \in \mathbb{C}^N} [\delta(y) + (\frac{1}{\lambda})|y - x|], x \in \mathbb{C}^N, \lambda > 0$$

Khi đó

- (i) $|\delta_\lambda(x) - \delta_\lambda(y)| \leq (\frac{1}{\lambda})|x - y|, x, y \in \mathbb{C}^N$;
- (ii) $u_\lambda = -\log \delta_\lambda \in L^+$ nếu $0 < \lambda < e^\beta$;
- (iii) $u_\lambda \downarrow u$ trong $\mathbb{C}^N$ khi $\lambda \downarrow 0$

Chứng minh. (i) được suy ra từ các phép biến đổi sơ cấp.

(ii) Hàm u_λ là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^N$ (Bổ đề 2, p.48 của [5]).
Dễ kiểm tra rằng:

$$u(x) \leq u_\lambda(x) \leq \beta + \lg(1 + |x|), \quad 0 < \lambda < e^\beta.$$

(iii) Điều kiện đủ phải chỉ ra rằng $\delta_\lambda \uparrow \delta$ khi $\lambda \downarrow 0$. Hiển nhiên $\delta_{\lambda'} \leq \delta_{\lambda''} \leq \delta$ với $0 < \lambda' \leq \lambda''$. Cố định $x \in \mathbb{C}^N$ và $\varepsilon > 0$. Lấy λ_0 đủ nhỏ sao cho

$$\delta_\lambda(x) = \inf_{y \in \mathbb{C}^N} [\delta(y) + (\frac{1}{\lambda})|x - y|], \quad 0 < \lambda < \lambda_0.$$

Do tính nửa liên tục dưới của δ nên tồn tại một lân cận U của x sao cho:

$$\delta(y) \geq \delta(x) - \varepsilon, \quad y \in U.$$

Ta có thể chọn λ_0 đủ nhỏ sao cho hình cầu $B = B(x, \lambda M)$, ở đây $M = \sup_{x \in \mathbb{C}^N} \delta(x)$ chứa trong U với $0 < \lambda < \lambda_0$. Khi đó

$$\delta_\lambda(x) = \inf_{y \in B} [\delta(y) + (\frac{1}{\lambda})|x - y|] \geq \delta(x) - \varepsilon, \quad 0 < \lambda < \lambda_0$$

□

Mệnh đề 1.2.3. Nếu $u \in L^+$ và $\delta = e^{-u}$ là Lipschitz (với hằng số Lipschitz bằng 1), thì tồn tại một dãy các số dương $\{c_n\}$ và một số nguyên dương k thỏa mãn với mỗi n tồn tại một họ F_n các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}^N$ sao cho

$$(e^u)^n \leq \sup_{f \in F_n} |f| \leq c_n (e^u)^{n+k} \quad \text{trên } \mathbb{C}^N$$

và $\lim \sqrt[n]{c_n} = 1$.

Mệnh đề sau là trường hợp riêng của Định lý 2, trang 82 trong [5].

Mệnh đề 1.2.4. Từ định lý Liouville kéo theo mỗi hàm $f \in F_n$ là một đa thức có bậc $\leq n + k$.

1.3 Hàm L -cực trị

1.3.1 Định nghĩa

Giả sử E là tập con bất kỳ của $\mathbb{C}^N$ và $b : \mathbb{C}^N \rightarrow [-\infty, +\infty)$ là một hàm thực trên $\mathbb{C}^N$. Hàm b có thể nhận giá trị $-\infty$, nhưng không nhận giá trị

$+\infty$.

Đặt

$$L(E, b) = \{u \in L : u \leq b \text{ trên } E\},$$

$$L^+(E, b) = \{u \in L^+ : u \leq b \text{ trên } E\}.$$

$L(E, -\infty)$ thay cho $L(E, b)$ với $b \equiv -\infty$ trên E . Để ý rằng $L(E, -\infty)$ có thể là rỗng, nếu E quá rộng, ví dụ nếu $\text{int}E \neq \emptyset$ hoặc tổng quát hơn nếu E không là tập cực.

Ta định nghĩa cho mỗi $x \in \mathbb{C}^N$

$$V(x) \equiv V(x, E, b) \equiv V_{E,b}(x) = \sup\{u(x) : u \in L(E, b)\},$$

$$V^+(x) \equiv V^+(x, E, b) \equiv V_{E,b}^+(x) = \sup\{u(x) : u \in L^+(E, b)\}.$$

Ta viết V_E hoặc V_E^+ nếu $b = 0$ trên E .

Định nghĩa 1.3.1. Hàm $V_{E,b}$ ($V_{E,b}^+$) được gọi là hàm L -cực trị (L^+ -cực trị) kết hợp với E và b .

1.3.2 Các tính chất

Các tính chất 1, 2, 3 sau được suy ra từ Định nghĩa 1.3.1

Tính chất 1 (Tính đơn điệu với quan hệ với b). $V_{E,b_1} \leq V_{E,b_2}$ trong $\mathbb{C}^N$ nếu $b_1 \leq b_2$ trên E .

Tính chất 2 (Tính đơn điệu với quan hệ với E). $V_{F,b} \leq V_{E,b}$ trong $\mathbb{C}^N$ nếu $E \subset F$.

Tính chất 3. $V_{E,b+c} = c + V_{E,b}$ trong $\mathbb{C}^N$ với mọi hằng số thực c .

Tính chất 4. Nếu $E = B(a, r) = \{x \in \mathbb{C}^N : \|x - a\| \leq r\}$ là hình cầu tâm a bán kính r với $\|\cdot\|$ là chuẩn bất kỳ trên $\mathbb{C}^N$, khi đó:

$$V_E(x) = \frac{\log^+ \|x - a\|}{r}.$$

Chứng minh. Thật vậy, hiển nhiên rằng $\frac{\log^+ \|x-a\|}{r} \leq V_E(x)$ trên $\mathbb{C}^N$.

Để đạt được bất đẳng thức đảo ta cố định $x \in \mathbb{C}^N$ với $\|x - a\| > r$ và chú ý rằng với mỗi $u \in L(E, 0)$ hàm:

$$w(x) = u(a + \lambda(x - a)) - \frac{\log^+ |\lambda| \cdot \|x - a\|}{r},$$

là bị chặn và điều hòa với $|\lambda| > \frac{r}{\|x-a\|}$, và $w(\lambda) \leq 0$ khi $|\lambda| = \frac{r}{\|x-a\|}$. Bằng cách đặt

$$w(\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w(\lambda),$$

hàm w trở thành điều hòa dưới tại ∞ .

Do đó theo nguyên lý cực đại ta thu được bất đẳng thức $w(\lambda) \leq 0$ với mọi $|\lambda| \geq \frac{r}{\|x-a\|}$. Đặc biệt ta có thể lấy $\lambda = 1$ và cũng thu được bất đẳng thức cần tìm. $\square$

Tính chất 5. Nếu tập E là bị chặn và hàm b là bị chặn dưới trên E thì:

$$V_{E,b} = V_{E,b}^+ \quad \text{trong } \mathbb{C}^N.$$

Đặc biệt, nếu E là bị chặn thì $V_E = V_E^+$.

Chứng minh. Thật vậy, đặt $m = \inf\{b(x) : x \in E\}$ và giả sử $E \subset B(0, r)$. Khi đó hàm $\max\{u(x), m + \frac{\log^+ \|x\|}{r}\}$ thuộc $L^+(E, b)$ với mỗi $u \in L(E, b)$. Do đó $V_{E,b} \leq V_{E,b}^+$. Bất đẳng thức đảo là hiển nhiên. $\square$

Các tính chất sau là hiển nhiên.

Tính chất 6. Nếu $b = \frac{1}{\alpha}[\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2]$, với α_1, α_2 là các số thực không âm thỏa mãn $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, khi đó:

$$\alpha_1 V_{E,b_1} + \alpha_2 V_{E,b_2} \leq \alpha V_{E,b}.$$

Tính chất 7. Nếu $a : \mathbb{C}^N \rightarrow [-\infty, +\infty)$ là một hàm thực thỏa mãn $V_{E,a}$ là hữu hạn tại mọi điểm của $\mathbb{C}^N$, thì:

$$\frac{1}{\lambda}[V_{E,a+\lambda b} - V_{E,a}] \leq \frac{1}{\lambda'}[V_{E,a+\lambda' b} - V_{E,a}] \quad \text{trong } \mathbb{C}^N \text{ với } 0 < \lambda < \lambda'.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ tính chất 6 bằng phép đặt $b_1 = a + \lambda b$, $b_2 = a$, $\alpha_1 = \frac{1}{\lambda}$, $\alpha_2 = \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}$.

Tính chất 8. Nếu $-\infty < m \leq b(x) \leq M < +\infty$ trên E thì:

$$m + V_E \leq V_{E,b} \leq M + V_E \quad \text{trong } \mathbb{C}^N.$$

Đặc biệt, nếu b bị chặn thì $V_{E,b}(x)$ là hữu hạn nếu và chỉ nếu $V_E(x)$ là hữu hạn.

Ta có bất đẳng thức quan trọng sau.

Tính chất 9 (Bất đẳng thức Bernstein-Walsh). Nếu f là một đa thức của N biến phức có bậc $\leq n$ sao cho $|f(x)| \leq M \exp[nb(x)]$ trên E thì:

$$|f(x)| \leq M \exp[nV_{E,b}(x)], \quad x \in \mathbb{C}^N.$$

Chứng minh. Thật vậy, nếu $f \neq 0$ thì $(\frac{1}{n})(\log |f| - \log M) \in L(E, b)$, vì vậy kết quả trên là hệ quả trực tiếp từ định nghĩa của $V_{E,b}$. $\square$

Mệnh đề 1.3.2. Nếu E là compact và $b|_E$ là nửa liên tục dưới thì $V_{E,b}$ là nửa liên tục dưới trên $\mathbb{C}^N$.

Chứng minh. Cố định $u \in L(E, b)$ và $\varepsilon > 0$. Do tính compact của E và nửa liên tục dưới của b ta có thể tìm được $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$u_\lambda = u * \omega_\lambda \leq b + \varepsilon \quad \text{trên } E.$$

Từ đó $u_\lambda - \varepsilon \in L(E, b)$ và vì vậy $u_\lambda - \varepsilon \leq V_{E,b}$ trong $\mathbb{C}^N$. Điều đó kéo theo $V_{E,b}$ là bao trên của hàm liên tục $u * \omega_\lambda - \varepsilon$, với $u \in L(E, b)$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = \lambda(\varepsilon, u) > 0$. Do đó $V_{E,b}$ là nửa liên tục dưới. $\square$

Mệnh đề 1.3.3. Nếu E là compact và hàm cực trị $V = V_{E,b}$ liên tục tại mọi điểm của E , thì nó liên tục trên $\mathbb{C}^N$. Đặc biệt $V_{E,b} \in L(E, b)$

Chứng minh. Từ

$$V^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} V(y) = V(x) \quad \text{với } x \in E,$$

ta có thể tìm được hình cầu $B = B(a, r)$ với $a \in E$ sao cho $V \leq V^* \leq M = \text{const}$ trên B . Do đó, từ tính chất 4:

$$V \leq M + \log^+ \frac{|x - a|}{r} \quad \text{trong } \mathbb{C}^N.$$

Từ đó $V^* \in L$. Từ $V_\lambda = V^* * \omega_\lambda \in \mathcal{C}^\infty \cap L$ và $V_\lambda \downarrow V^*$ trong $\mathbb{C}^N$, đặc biệt $V_\lambda \downarrow V$ trên E khi $\lambda \downarrow 0$, từ định lý Dini kéo theo:

$$V_\lambda \leq V + \varepsilon \quad \text{trên } E \text{ khi } 0 < \lambda < \lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon).$$

Do đó V là một giới hạn đều của hàm $V_\lambda(\lambda \downarrow 0)$ trong $\mathcal{C}^\infty$ $\square$

Mệnh đề 1.3.4. Nếu E là compact và b là liên tục, thì:

$$V_{E^r,b} \uparrow V_{E,b} \quad \text{trong } \mathbb{C}^N \text{ khi } r \downarrow 0,$$

với

$$E^r = \bigcup_{a \in E} B(a, r) = \{x \in \mathbb{C}^N : \text{dist}(x, E) \leq r\},$$

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{C}^N : |x - a| \leq r\}.$$

Chứng minh. Lấy bất kỳ $u \in L(E, b)$. Với $\varepsilon > 0$ ta có thể tìm $\lambda > 0$ sao cho $u_\lambda = u * \omega_\lambda \leq b + \varepsilon$ trên E . Do u_λ và b liên tục nên ta có thể tìm $r_0 > 0$ sao cho:

$$u_\lambda < b + 2\varepsilon \quad \text{trên } E^r, \quad 0 < r < r_0 = r_0(u).$$

Từ đó $u \leq u_\lambda \leq 2\varepsilon + V_{E^r, b}$ trong $\mathbb{C}^N$, $0 < r < r_0$, và cuối cùng

$$V_{E, b} \leq 2\varepsilon + \lim_{r \rightarrow 0} V_{E^r, b}.$$

Từ $V_{E^r, b} \leq V_{E, b}$, ta được kết quả cần tìm. □

Định nghĩa 1.3.5. Ta nói rằng tập con E của $\mathbb{C}^N$ là:

- (i) L -chính quy địa phương tại điểm $a \in \overline{E}$ nếu với mỗi $r > 0$ hàm cực trị $V_{E \cap B(a, r)}$ là liên tục tại a
- (ii) L -chính quy địa phương nếu nó L -chính quy địa phương tại mọi điểm $a \in \overline{E}$

Mệnh đề 1.3.6. Nếu E là tập compact L -chính quy địa phương, thì với mỗi hàm thực b hàm cực trị $V = V_{E, b}$ là liên tục trên $\mathbb{C}^N$.

Chứng minh. Trước hết ta thấy rằng $V^* \leq b$ trên E .

Thật vậy, cho $a \in E$ và $\varepsilon > 0$, ta có:

$$V(x) \leq V_{E \cap B(a, r), b(a) + \varepsilon} = b(a) + \varepsilon + V_{E \cap B(a, r)} \quad \text{trong } \mathbb{C}^N,$$

với $r > 0$ đủ nhỏ sao cho $b(x) \leq b(a) + \varepsilon$ trong $B(a, r)$. Từ đó $V^*(a) \leq b(a) + \varepsilon$, và do $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có $V^*(a) \leq b(a)$. Bây giờ

$$V^* \leq V_\lambda = V^* * \omega_\lambda \leq b + \varepsilon \quad \text{trên } E \text{ với } 0 < \lambda < \lambda_\varepsilon,$$

Trong đó $V_\lambda - \varepsilon \in L(E, b)$ và

$$V_\lambda - \varepsilon \leq V \leq V^* \leq V_\lambda \quad \text{trong } \mathbb{C}^N, \quad 0 < \lambda < \lambda_\varepsilon.$$

Do đó V là giới hạn đều của hàm V_λ khi $\lambda \downarrow 0$ của $\mathcal{C}^\infty$ □

Hệ quả 1.3.7. Nếu E là compact và b là một hàm thực liên tục sao cho $V_{E,b}^* \leq b$ trên E , thì $V_{E,b}$ là liên tục trong $\mathbb{C}^N$

Mệnh đề 1.3.8. Nếu f là đa thức khác 0 có bậc $\leq k$ và $b = \frac{1}{k} \log |f|$, thì với mỗi tập con E của $\mathbb{C}^N$, $V_{E,b} = b$ trên E .

Đặc biệt nếu $E = \partial D$, D là miền bị chặn sao cho $f(x) \neq 0$ với $x \in \overline{D}$, thì:

$$V_{E,b}(x) = \frac{1}{k} \log |f(x)|, \quad x \in \overline{D}.$$

Chứng minh. Từ (1.2), $(\frac{1}{k}) \log |f| \in L(E, b)$. Do đó,

$$b(x) = (\frac{1}{k}) \log |f(x)| \leq V_{E,b}(x) \quad \text{trong } \mathbb{C}^N.$$

Mặt khác, $V_{E,b} \leq b = (\frac{1}{k}) \log |f|$ trên E . Theo nguyên lý cực đại, bất đẳng thức cuối cùng đúng trên $\overline{D}$. $\square$

1.4 Tập L -cực

Định nghĩa 1.4.1. Ta nói rằng tập con E của $\mathbb{C}^N$ là:

(i) $\mathbb{C}^N$ -cực địa phương nếu với mỗi điểm $a \in E$ tồn tại một hàm đa điều hòa dưới W trong một lân cận mở U_a của a sao cho $W = -\infty$ trên $E \cap U_a$;

(ii) $\mathbb{C}^N$ -cực toàn cục nếu tồn tại một hàm đa điều hòa dưới W trên $\mathbb{C}^N$ sao cho $W = -\infty$ trong E ;

(iii) L -cực nếu tồn tại một hàm $W \in L$ sao cho $W = -\infty$ trên E (tức là nếu $L(E, -\infty) \neq 0$).

Định nghĩa 1.4.2. Cho một tập con E của $\mathbb{C}^N$ và một tập mở $G \subset \mathbb{C}^N$, với mỗi $x \in G$ ta đặt:

$$\begin{aligned} h(x, E, G) &\equiv h_{EG}(x) \\ &= \sup\{u(x) : u \in PSH(G), u \leq 0 \text{ trên } E \cap G, u \leq 1 \text{ trên } G\}. \end{aligned}$$

Hàm h_{EG}^* là hàm đa điều hòa dưới trên G . Nếu $h_{EG}^*(a) < 1$ tại điểm $a \in G$ thì $h_{EG}^*(x) < 1$ với mọi x thuộc tập liên thông của G chứa điểm a .

Mệnh đề 1.4.3. $E \subset \mathbb{C}^N$ là $\mathbb{C}^N$ -cực địa phương nếu và chỉ nếu với mỗi $a \in E$ tồn tại một miền $D \ni a$ sao cho:

$$h_{ED}^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} h_{ED}(y) = 1 \quad \text{với mọi } x \in D.$$

Chứng minh. Nếu E là $\mathbb{C}^N$ -cực địa phương thì với mỗi $a \in E$ có thể tìm được một lân cận U_a của a và một hàm đa điều hòa dưới W trên U_a sao cho $W = -\infty$ trong $E \cap U_a$. Giả sử D là một miền con compact tương đối của U_a chứa a . Ta có thể giả thiết $W \leq 0$ trên D . Khi đó:

$$\frac{1}{k}W + 1 \leq h_{ED} \quad \text{trên } D \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Do đó $h_{ED} = 1$ trong một tập con trù mật của D , tức là $h_{ED}^* \equiv 1$.

Giả sử D là một miền sao cho $h_{ED}^* = 1$ trên D . Do tập $\{x \in D : h_{ED}(x) < h_{ED}^*(x)\}$ có độ đo Lebesgue bằng không, nên tồn tại một điểm $\xi \in D$ sao cho với mỗi $k \in \mathbb{N}$ tìm được $u_k \in PSH(D)$ với $u_k = 0$ trên $E \cap D$, $u_k \leq 1$ trong D và $u_k(\xi) \geq 1 - 2^{-k}$. Ta cần chứng minh hàm:

$$W(x) = \sum_{k \geq 1} [u_k(x) - 1], \quad x \in D,$$

là hàm đa điều hòa dưới trên D và $W = -\infty$ trên $E \cap D$. Thật vậy, dãy tổng riêng của chuỗi trên là giảm và $W(\xi) \geq -1$. Từ đó, $W \in PSH(D)$. Hiển nhiên $W = -\infty$ trên $E \cap D$. $\square$

Bổ đề 1.4.4. Cho $(u_i)_{i \in I}$ là họ các hàm thuộc L . Đặt:

$$u = \sup\{u_i : i \in I\} \quad \text{trong } \mathbb{C}^N$$

Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

(1) Tồn tại số thực $R > 0$ và $M > 0$ sao cho $u \leq M$ trong hình cầu $B = B(0, R)$;

(2) Tồn tại số thực $R > 0$ và $M > 0$ sao cho:

$$u(x) \leq M + \log^+ \frac{|x|}{R} \quad \text{trong } \mathbb{C}^N;$$

(3) Tồn tại một tập con mở $D \neq \emptyset$ của $\mathbb{C}^N$ và hằng số thực $M > 0$ sao cho $u \leq M$ trong D ;

(4) u là bị chặn trên tập con compact bất kỳ của $\mathbb{C}^N$;

(5) $u^* \in L$.

Hơn nữa, nếu u_i là liên tục với mọi $i \in I$ thì mỗi điều kiện (1)-(5) là tương đương với điều kiện sau:

(6) $u(x) < +\infty$ với mỗi $x \in D$, D là tập con mở khác $\emptyset$ của $\mathbb{C}^N$.

Chứng minh. Sự kéo theo (1) $\Rightarrow$ (2) và (4) $\Rightarrow$ (5) có được từ 1.3.2 (tính chất 4)

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), (5) $\Rightarrow$ (1) và (2) $\Rightarrow$ (6) là hiển nhiên.

Nếu u_i , $i \in I$, là liên tục và (6) được thỏa mãn, thì u là nửa liên tục dưới, khi đó tồn tại hình cầu $B = B(a, R) \subset D$ và hằng số dương M sao cho $u \leq M$ trên B . Như vậy (3) được thỏa mãn. $\square$

Định lý 1.4.5. Cho họ bất kỳ $(u_i)_{i \in I} \subset L$, đặt $u = \sup_i u_i$ và $A_u = \{x \in \mathbb{C}^N : u(x) < +\infty\}$. Khi đó $u^* \in L$ nếu và chỉ nếu A_u không là L -cực.

Chứng minh. 1) Nếu $u^* \in L$, thì $A_u = \mathbb{C}^N$ và A_u không là L -cực.

2) Giả sử $u^* \notin L$, khi đó theo Bổ đề 1.4.4:

$$\sup\{u(x) : x \in B_1 = B(0, 1)\} = +\infty.$$

Do đó với mỗi n tồn tại $i_n \in I$ sao cho $\sup_{B_1} u_{i_n} \geq n$. Đặt $v_n = u_{i_n}$,

và $M_n = \sup_{B_1} v_n$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$ và $v_n - M_n \leq \log^+ |x|$ trong $\mathbb{C}^N$.

Ta cần chỉ ra tồn tại $\varepsilon > 0$ và $\xi \in \mathbb{C}^N$ sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \exp[v_n(\xi) - M_n] \geq \varepsilon. \quad (1.1)$$

Mặt khác $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \exp[v_n(x) - M_n] \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{C}^N$. Theo Bổ đề

Hartogs ta có:

$$\exp[v_n(x) - M_n] \leq \varepsilon, \quad x \in B_1, \varepsilon > 0, n \geq n_\varepsilon.$$

Nếu $0 < \varepsilon < 1$, điều này mâu thuẫn với định nghĩa của M_n . Ta cố định $\varepsilon > 0$ và $\xi \in \mathbb{C}^N$ thỏa mãn (1.1) và lấy một dãy số nguyên $n_k < n_{k+1}$, $k \geq 1$ sao cho:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \exp[v_{n_k}(\xi) - M_{n_k}] \geq \varepsilon \quad \text{và} \quad M_{n_k} \geq 2^k \quad (k \geq 1).$$

Ta cần chỉ ra hàm $W \in L(A_v, -\infty)$ trong đó:

$$W(x) = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} [v_{n_k}(x) - M_{n_k}], \quad x \in \mathbb{C}^N, \quad v = \sup_{n \geq 1} v_n$$

và $A_v = \{x \in \mathbb{C}^N : v(x) < +\infty\}$.

Thật vậy, cho bất kỳ $R > 1$ ta có $2^{-k} [v_{n_k}(x) - M_{n_k}] - 2^{-k} \log^+ R \leq 0$, $k \geq 1$ trên $B(0, R)$. Do đó W là nửa liên tục trên trong $B(0, R)$. Từ đó nó là nửa liên tục trên trên $\mathbb{C}^N$.

Nếu $x \in A_v$ thì $2^{-k} [v_{n_k}(x) - M_{n_k}] \leq 2^{-k} v_{n_k}(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$, $k \geq k_0$. Do đó $W = -\infty$ trong A_v . Nếu $x = \xi$ thì $W(\xi) > -\infty$. Và cuối cùng $W(x) \leq \log^+ |x|$ trong $\mathbb{C}^N$. Do đó $W \in L(A_v, -\infty)$ và đặc biệt $W \in L(A_u, -\infty)$ vì $A_u \subset A_v$. $\square$

Định lý 1.4.6.

Nếu $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ và $L(E_n, -\infty) \neq \emptyset$ ($n \geq 1$) thì $L(E, -\infty) \neq \emptyset$. Mặt

khác A là hợp đếm được các tập L -cực là một tập L -cực.

Chứng minh. Lấy $E_1 \cup \dots \cup E_n$, ta giả thiết rằng $E_n \subset E_{n+1}$. Với mỗi n , lấy $u_n \in L(E_n, -\infty)$, đặt $M_n = \sup_{B_1} u_n$ và thấy rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ và $\xi \in \mathbb{C}^N$

sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \exp[u_n(\xi) - M_n] \geq \varepsilon.$$

Đặt $W(x) = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} [u_{n_k}(x) - M_{n_k}]$. Khi đó $W \in L(E, -\infty)$. $\square$

Hệ quả 1.4.7. Nếu $E \subset \mathbb{C}^N$ không là L -cực thì tồn tại điểm $a \in \mathbb{C}^N$ sao cho $E \cap B(a, r)$ không là L -cực với mỗi $r > 0$.

Định nghĩa 1.4.8. Cho tập con E bất kỳ của $\mathbb{C}^N$, số:

$$c(E) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf |x| \exp(-V_E(x))$$

được gọi là L -dung lượng của E .

Nếu E là tập compact trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ thì $c(E)$ là dung lượng logarit (đường kính siêu hạn) của E .

Áp dụng Bổ đề 1.4.4 và Định lý 1.4.5 cho họ $\{u \in L : u \leq 0 \text{ trên } E\}$, ta có kết quả sau:

Hệ quả 1.4.9. Nếu E là tập con bất kỳ của $\mathbb{C}^N$ thì các điều kiện sau là tương đương:

- (i) $c(E) = 0$;
- (ii) $V_E^* \notin L$;
- (iii) $V_E^* \equiv +\infty$;
- (iv) E là L -cực.

Nếu $c(E) > 0$ thì tồn tại $a \in \mathbb{C}^N$ sao cho $c(E \cap B(a, r)) > 0$ với mọi $r > 0$.

Định lý 1.4.10. Với mỗi tập con E của $\mathbb{C}^N$, các điều kiện sau là tương đương:

- (a) E là $\mathbb{C}^N$ -cực địa phương;
- (b) E là $\mathbb{C}^N$ -cực toàn cục;
- (c) E là L -cực.
- (d) Với mỗi miền bị chặn $D \subset \mathbb{C}^N$, $h_{ED}^* = 1$ trên D .

Chứng minh. Phần khó nhất của định lý là sự kéo theo (a) $\Rightarrow$ (b) gần đây đã được chứng minh bởi Josefson [6]

(b) $\Rightarrow$ (c). Từ Định lý 1.4.6 ta giả thiết rằng E là bị chặn. Lấy W là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^N$ sao cho $W = -\infty$ trên E

Giả sử E không là L -cực. Khi đó, từ Hệ quả 1.4.9, $V_E^* \in L$. Hơn nữa, $V_E^* \in L^+$. Vì vậy cho bất kỳ $\varrho > M$, ta tìm được $R > 0$ đủ lớn sao cho $E \subset B = B(0, R)$ và

$$V_E^*(x) \geq M + \varrho \quad \text{trên } \partial B, \text{ trong đó } M = \sup_{x \in E} V_E^*(x).$$

Ta có thể giả thiết $W \leq 0$ trong B . Cho số nguyên dương k , đặt

$$v_k(x) = \frac{V_E^*(x)}{M + \varrho} \quad \text{với } |x| \geq R$$

và

$$v_k(x) = \max \left\{ \left(\frac{1}{k} \right) W(x) + 1, \frac{V_E^*(x)}{M + \varrho} \right\} \quad \text{với } |x| \leq R.$$

Khi đó $(M + \varrho)v_k \leq M$ trên E và $(M + \varrho)v_k \in L$. Do đó $(M + \varrho)v_k \leq M + V_E$ trong $\mathbb{C}^N$

Đặc biệt, $(M + \varrho)\left(\frac{1}{k}W + 1\right) \leq M + V_E$ trong B với $k \geq 1$. Từ đó $M + \varrho \leq M + V_E$ trong B , đặc biệt ta có $\varrho \leq M$ với $x \in E$. Sự mâu thuẫn này kéo theo E là L -cực.

Sự kéo theo $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$ có được từ Mệnh đề 1.4.3. $\square$

Mệnh đề 1.4.11. Nếu F là L -cực thì với mỗi tập bị chặn E và mỗi hàm $b : \mathbb{C}^N \rightarrow [-\infty, +\infty)$, ta có:

$$V_{E \cup F, b}^* = V_{E, b}^* \quad \text{trong } \mathbb{C}^N.$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chỉ ra rằng $V_{E, b}^* \leq V_{E \cup F, b}^*$. Lấy bất kỳ $u \in L(E, b)$ và $W \in L(F, -\infty)$. Ta giả thiết rằng $W \leq 0$ trên E . Do đó $\frac{1}{k}W + u \in L(E \cup F, b)$ và

$$\frac{1}{k}W + u \leq V_{E \cup F, b} \quad \text{trong } \mathbb{C}^N \text{ với } k \geq 1.$$

Từ đó

$$u \leq V_{E \cup F, b} \quad \text{trong } \mathbb{C}^N \setminus W^{-1}(\{-\infty\})$$

và cuối cùng:

$$V_{E, b}^* \leq V_{E \cup F, b}^*.$$

$\square$

1.5 Độ đo Monge-Ampère

Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^N$, ký hiệu ∂ và $\bar{\partial}$ là các toán tử vi phân trong $\mathbb{C}^N$ cho bởi:

$$\begin{aligned} \partial u &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j, \\ \bar{\partial} u &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \end{aligned}$$

với u là $\mathbb{C}^\infty$ -hàm trên Ω .

Đặt $d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = i(\partial - \bar{\partial})$. Dễ thấy rằng với u là $\mathbb{C}^\infty$ -hàm trên Ω ta có:

$$(dd^c u)^N = 4^N \cdot N! \det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right] dV,$$

với $dV = \left(\frac{i}{2}\right)^N dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge dz_N \wedge d\bar{z}_N$.

Vậy $(dd^c u)^N$ là một độ đo trên Ω .

Trong [Kl], Belford-Taylor đã chứng minh kết quả quan trọng sau.

Định lý 1.5.1. *Giả sử u là hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương trên Ω . Khi đó tồn tại dãy $\mathbb{C}^\infty$ -hàm đa điều hòa dưới $\{u_j\}$ trên Ω giảm tới u sao cho độ đo $(dd^c u_j)^N$ hội tụ yếu tới độ đo $(dd^c u)^N$ trên Ω :*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi (dd^c u_j)^N = \int \varphi (dd^c u)^N$$

với mọi φ là $\mathbb{C}^\infty$ -hàm có giá compact trong Ω .

Ngoài ra giới hạn đó không phụ thuộc vào $u_j \rightarrow u$, $(dd^c u)^N$ gọi là độ đo Monge-Ampère xác định bởi u .

Chương 2

ĐA THỨC CÓ TRỌNG VÀ LÝ THUYẾT ĐA THỂ VỊ CÓ TRỌNG

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu đa thức có trọng qua việc nghiên cứu hàm cực trị có trọng đặc biệt.

2.1 Kiến thức chuẩn bị bổ sung

Ngoài các kiến thức chuẩn bị trong chương 1, ta bổ sung thêm một số kiến thức sau:

Cho E là một tập con bị chặn của $\mathbb{C}^N$. Hàm Green đa cực của E được cho bởi

$$V_E(z) = \sup\{u(z) \mid u \in \mathcal{L}, u \leq 0 \text{ trên } E\} \quad (2.1)$$

Trong đó như đã biết

$$\mathcal{L} = \{u \mid u \text{ là đa điều hòa dưới trong } \mathbb{C}^N, u(z) \leq \log^+ |z| + C\}, \quad (2.2)$$

ở đây khác với chương 1, ta sử dụng:

$$|z| = \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{với } z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Một tập $E \subset \mathbb{C}^N$ được gọi là đa cực nếu với mỗi điểm $a \in E$ có một lân cận U của a và một hàm v là đa điều hòa dưới trong U sao cho

$E \cap U \subset \{z \in U | v(z) = -\infty\}$. Một tính chất của tập E gọi là quasi-khấp nơi nếu có một tập đa cực $P \subset E$ sao cho tính chất này có tại mọi điểm của $E \setminus P$

Cho G là một tập con mở của $\mathbb{C}^N$ và f là một hàm biến thực trên G , ta đặt f^* biểu thị sự chính quy hóa nửa liên tục trên, được định nghĩa bởi:

$$f^*(z) = \overline{\lim_{\xi \rightarrow z}} f(\xi) \quad \text{với } z \in G.$$

Trong chương 1, ta đã có $V_E^* \in \mathcal{L}$ nếu và chỉ nếu E là không đa cực. Cho E không đa cực, độ đo cân bằng của E được định nghĩa bởi:

$$d\mu_{eq} = d\mu_{eq}(E) = (dd^c V_E^*)^N,$$

trong đó $(dd^c)^N$ là toán tử phức Monge-Ampère. Người ta chứng minh được rằng $d\mu_{eq}$ là độ đo Borel dương với khối lượng toàn phần $(2\pi)^N$ và $\text{supp } p(d\mu_{eq}) \subset \overline{E}$ ([Kl]).

Trong trường hợp E là tập compact, kết quả của định lý Siciak và Zaharyuta cho ta:

$$V_E(z) = \log \phi_E(z),$$

trong đó

$$\phi_E(z) = \sup\{|p(z)|^{\frac{1}{\deg(p)}} | p \text{ là đa thức chỉnh hình, } \deg(p) \geq 1 \text{ và } \|p\|_E \leq 1\}.$$

Từ đó kéo theo $V_E(z) = V_{\hat{E}}(z)$ với $\hat{E}$ là bao lồi đa thức của E : ($\hat{E} = \{z \in \mathbb{C}^N : |p(z)| \leq \sup_E |p| \text{ với mọi } p \text{ là đa thức trên } \mathbb{C}^N\}$)

Chúng ta sẽ sử dụng lớp $\mathcal{H}$ của hàm đa điều hòa dưới thuần nhất thuộc tính loga trong $\mathbb{C}^N$ được định nghĩa bởi:

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{L} | u(tz) = u(z) + \log |t| \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}^N, t \in \mathbb{C}\}.$$

Cho E là tập bị chặn trong $\mathbb{C}^N$, ta định nghĩa:

$$H_E(z) = \sup\{u(z) | u \in \mathcal{H}, u \leq 0 \text{ trên } E\}.$$

Với E compact ta có:

$$H_E(z) = \log \psi_E(z),$$

trong đó:

$$\psi_E(z) = \sup\{|p(z)|^{\frac{1}{\deg(p)}} | p \text{ là đa thức thuần nhất chỉnh hình, } \deg p \geq 1 \text{ và } \|p\|_E \leq 1\}.$$

Với E là tập compact trong $\mathbb{C}^N$, một hàm có trọng chấp nhận được đối với E là một hàm thực trong E thỏa mãn:

- i) $w \geq 0$.
- ii) w là hàm nửa liên tục trên.
- iii) $\{z \in E | w(z) > 0\}$ là không đa cực

Đặc biệt nếu E là hàm có trọng chấp nhận được thì E là không đa cực và ω là trọng chấp nhận được như trên, ta xác định hàm:

$$Q = -\log w$$

Khi đó Q là nửa liên tục dưới (l.s.c.) trên E . Hàm Green đa phức có trọng của E với trọng lượng w được định nghĩa bởi:

$$V_{E,Q} = \sup\{u(z) | u \in \mathcal{L}, u \leq Q \text{ trên } E\}.$$

Độ đo cân bằng có trọng của E được định nghĩa bởi:

$$d\mu_{eq}(E, w) = (dd^c V_{E,Q}^*)^N.$$

Nó là độ đo Borel dương với $\text{supp}(d\mu_{eq}(E, w)) \subset E$ có khối lượng toàn phần $(2\pi)^N$.

Một đa thức có trọng trong E được định nghĩa là một hàm dạng $w^d p$ với d là một số nguyên ≥ 0 và p là đa thức chỉnh hình có bậc $\leq d$. Chú ý rằng nếu $\|w^d p\|_E \leq 1$ thì $\frac{1}{d} \log |p(z)| \leq Q(z)$ trên E và do $\frac{1}{d} \log |p(z)| \in \mathcal{L}$ ta có $\frac{1}{d} \log |p(z)| \leq V_{E,Q}(z)$ với mọi $z \in \mathbb{C}^N$.

Ta biết rằng ([Si1] và [SaTo])

$$V_{E,Q}(z) = \log \phi_{E,Q}(z)$$

trong đó:

$$\phi_{E,Q}(z) = \sup\{|p(z)|^{\frac{1}{d}} | \|w^d p\|_E \leq 1, \deg p \geq 1 \text{ và } w^d p \text{ là một đa thức có trọng}\}.$$

Cho E là compact và chỉnh quy địa phương và w là một hàm có trọng liên tục trên E thì $V_{E,Q}$ là liên tục.

Cho $u \in \mathcal{L}$, ta định nghĩa hàm Robin ρ_u bởi:

$$\rho_u(z) = \overline{\lim_{\substack{|s| \rightarrow +\infty \\ s \in \mathbb{C}}} u(sz) - \log |s|}.$$

Khi đó $\rho(z) \in \mathcal{H}$.

2.2 Sự liên hệ giữa độ đo cân bằng có trọng và không trọng

Trong mục này ta đưa ra kết quả chính của luận văn. Đó là mối liên hệ giữa độ đo cân bằng có trọng và không có trọng.

Cho E là tập compact trong $\mathbb{C}^N$ và w là hàm có trọng chấp nhận được trên E . Tập $Z = Z(E, w) \subset \mathbb{C}^{N+1}$ được định nghĩa như sau:

$$Z = \{(t, \lambda_1 t, \dots, \lambda_N t) \in \mathbb{C}^{N+1} | (\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N) \in E, t \in \mathbb{C} \text{ và } |t| = w(\lambda)\}.$$

Ta tìm mối quan hệ giữa lý thuyết thế vị có trọng trên E với trọng lượng w và lý thuyết thế vị trên Z . Ta sử dụng ký hiệu (t, z) cho một điểm trong $\mathbb{C}^{N+1}$ với $t \in \mathbb{C}$ và $z \in \mathbb{C}^N$. Ta biểu thị C_λ là đường thẳng phức trong $\mathbb{C}^{N+1}$ được cho bởi:

$$C_\lambda = \{(t, z) \in \mathbb{C}^{N+1} | z_j = \lambda_j t \text{ với } j = 1, \dots, N; (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N \text{ và } t \in \mathbb{C}\}$$

Rõ ràng Z là một tập hợp tròn, tức là, nếu $(t, z) \in Z$ thì $(e^{i\theta}t, e^{i\theta}z) \in Z$ với mọi $\theta \in [0, 2\pi)$. $\overline{Z}$ (bao đóng của Z) là compact và tròn.

Z là không đa cực do E là không đa cực. Chú ý rằng $w \equiv 1$ (trường hợp không trọng) thì $Z = \{|t| = 1\} \times E$.

Do $Z \subset \bigcup_{\lambda \in E} C_\lambda$ và E compact nên $\overline{Z} \subset \bigcup_{\lambda \in E} C_\lambda$ và vì vậy $\overline{Z} \cap \{(t, z) \in \mathbb{C}^{N+1} | t = 0\} \subset \{0\}$.

Mệnh đề 2.2.1. $H_Z = H_{\overline{Z}}$ và $V_Z = V_{\overline{Z}}$

Chứng minh. Để chứng minh mệnh đề đầu, ta chỉ cần chỉ ra nếu $u \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$, $u \leq 0$ trên Z thì $u \leq 0$ trên $\overline{Z}$. Do w là nửa liên tục trên ta có, với $\lambda \in E$:

$$\overline{Z} \cap C_\lambda \subset \{(t, z) \in C_\lambda | |t| \leq w(\lambda)\}.$$

Ứng dụng nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa dưới $t \rightarrow u(t, \lambda_1 t, \dots, \lambda_N t)$ ta có $u \leq 0$ trên $\overline{Z}$.

Mệnh đề thứ hai chứng minh tương tự. □

Mệnh đề 2.2.2. $V_Z = \text{Max}(0, H_Z)$ và $\rho_{V_Z} = H_Z^*$.

Mệnh đề đầu có được từ Mệnh đề 5.6 [Si1], mệnh đề 2 có được từ tính thuần nhất (Bổ đề 5.1 [BLM])

Mệnh đề 2.2.3. $d\mu_{eq}(Z)$ có giá compact trong $\mathbb{C}^{N+1} - \{t = 0\}$.

Chứng minh. Do $H_Z^* \in \mathcal{H}$ và $H_Z^*(0) = -\infty$ suy ra $H_Z^* < 0$ trong một lân cận của gốc.

Như vậy, gốc là một điểm trong của $\hat{\bar{Z}}$. Nhưng $d\mu_{eq}(Z)$ không có khối lượng thuộc phần trong của $\hat{\bar{Z}}$ nên ta có mệnh đề. $\square$

Xét ánh xạ $L : \mathbb{C}^{N+1} - \{t = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^N$ cho bởi:

$$L(t, z) = \frac{z}{t} = \lambda \in \mathbb{C}^N.$$

Nếu ta xét $\mathbb{P}^N$ (không gian xạ ảnh N -chiều) như không gian các đường thẳng phức qua gốc trong $\mathbb{C}^{N+1}$, khi đó L cho một bản đồ của $\mathbb{P}^N$. Chú ý rằng $L(C_\lambda) = \lambda$.

Ta nhắc lại " H -nguyên lý" của Siciak. Tồn tại tương ứng 1 - 1 giữa $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{N+1})$ và $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ như sau: Mỗi $\tilde{u}(t, z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$ kết hợp với

$$u(z) = \tilde{u}(1, z). \quad (2.3)$$

Khi đó $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$. Ngược lại, cho $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ ta đặt:

$$\tilde{u}(t, z) = u\left(\frac{z}{t}\right) + \log |t| = L^*u(\lambda) + \log |t| \text{ với } t \neq 0 \quad (2.4)$$

và

$$\tilde{u}(0, z) = \overline{\lim_{\substack{|s| \rightarrow +\infty \\ s \in \mathbb{C}}} u(sz)} - \log(s) = \rho_u(z).$$

Khi đó $\tilde{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$.

Hơn nữa, giả sử $P_d(t, z)$ là một đa thức thuần nhất bậc d trên $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$. Khi đó $\frac{1}{d} \log |P_d(t, z)| \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$ và phần tử kết hợp của $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ bởi (2.3) là: $\frac{1}{d} \log |P_d(1, z)|$. $P_d(1, z)$ là đa thức của z bậc $\leq d$.

Ngược lại, cho đa thức $G_d(z)$ của z có bậc $\leq d$, khi đó $\frac{1}{d} \log |G_d(z)| \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$. Hàm kết hợp với nó trong $\mathcal{H}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$ là $\frac{1}{d} \log |t^d G_d(\frac{z}{t})|$. Chú ý rằng $t^d G_d(\frac{z}{t})$ là đa thức thuần nhất trên $\mathbb{C}^{N+1}$ có bậc d trong (t, z) . Ta sử dụng ký hiệu:

$$P_d(t, z) = t^d G_d\left(\frac{z}{t}\right).$$

Cho một đa thức có trọng $w^d G_d(\lambda)$ trên E , ta có thể thấy mối quan hệ giữa chuẩn của nó trên E với chuẩn của đa thức kết hợp $P_d(t, z)$ trên Z (hoặc tương đương, $\bar{Z}$). Cụ thể là, ta có:

Bổ đề 2.2.4.

$$\|w^d G_d\|_E = \|P_d(t, z)\|_Z.$$

Chứng minh. Lấy $(t, z) \in Z \cap C_\lambda$ và $\lambda \in E$, khi đó:

$$P_d(t, z) = t^d P_d(1, \frac{z}{t}) = t^d G_d(\lambda).$$

vì vậy:

$$|P_d(t, z)| = |t|^d |P_d(1, \frac{z}{t})| = w(\lambda)^d |G_d(\lambda)|.$$

Từ đó ta có kết quả. □

Định lý 2.2.5 dưới đây cho ta mối quan hệ giữa hàm Green đa phức của E và hàm Green đa phức thuần nhất của Z .

Định lý 2.2.5. $H_Z(t, z) = L^*(V_{E,Q}) + \log |t|$ với $t \neq 0$.

Chứng minh. Lấy $\tilde{u}(t, z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N)$ và giả sử $\tilde{u} \leq 0$ trên Z . Do $\tilde{u}(t, \lambda_1 t, \dots, \lambda_N t) = \tilde{u}(1, \lambda) + \log |t|$ với $\lambda \in E$, ta có, $\log |t| + \tilde{u}(1, \lambda) \leq 0$ trên $C_\lambda \cap Z$. Vì vậy,

$$u(\lambda) \leq -\log |t| = Q(\lambda) \text{ trên } C_\lambda \cap Z.$$

Do đó $u \leq V_{E,Q}$ và vì vậy từ (2.4) ta có:

$$\tilde{u}(t, z) \leq L^*(V_{E,Q}) + \log |t| \text{ với } t \neq 0.$$

Lấy sup theo từng điểm trong (t, z) trên mọi $\tilde{u}$ ta có:

$$H_Z \leq L^*(V_{E,Q}) + \log |t| \text{ với } t \neq 0. \quad (2.5)$$

Phần còn lại là chứng minh bất đẳng thức ngược. Cho $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ với $u \leq Q$ trên E . Khi đó với $(t, z) \in C_\lambda \cap Z$, sử dụng (2.4), ta có $\tilde{u}(t, z) = \log |t| + u(\lambda) \leq \log |t| - \log w(\lambda) \leq 0$. Do đó $\tilde{u}(t, z) \leq 0$ trên Z và $\tilde{u}(t, z) \leq H_Z$ trên $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$. Ta có:

$$L^*(u) + \log |t| \leq H_Z \text{ với } t \neq 0.$$

Lấy sup theo từng điểm trên mọi u từ (2.5) cho ta bất đẳng thức ngược. □

Hệ quả 2.2.6. $H_Z^*(t, z) = \widetilde{V_{E,Q}^*}(t, z)$

Chứng minh. Xét điểm (t_0, z_0) với $t_0 \neq 0$. Đặt $\lambda_0 = \frac{z_0}{t_0}$.

Khi đó theo Định lý 2.2.5, có

$$\overline{\lim_{(t,z) \rightarrow (t_0,z_0)}} H_Z(t, z) = \overline{\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0}} V_{E,Q}(\lambda) + \log |\lambda_0|.$$

và vế phải là $\widetilde{V_{E,Q}^*}(t_0, z_0)$ do (2.4) Chứng minh kết quả này có $t \neq 0$ nhưng do hai vế (trong phát biểu của Hệ quả 2.2.6) là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^{N+1}$ và đúng với $t \neq 0$ nên chúng phải đúng trên $\mathbb{C}^{N+1}$. $\square$

Các Hệ quả 2.2.7, 2.2.8 và 2.2.8 dưới đây nói về sự hội tụ của dãy các hàm Green đa phức đối với dãy hội tụ của các trọng.

Hệ quả 2.2.7. Giả sử $E \subset \mathbb{C}^N$ là compact và $\{w_j\}_{j=1,2,\dots}$ là dãy trọng lượng chấp nhận được trên E và w cũng là trọng lượng chấp nhận được trên E . Giả sử $w_j \downarrow w$. Khi đó:

$$\lim_j V_{E,Q_j}^* = V_{E,Q}^*.$$

Chứng minh. Xét các tập tròn trong $\mathbb{C}^{N+1}$ sau: $Z_j = Z_j(E, w_j)$ và $Z = Z(E, w)$. Với $\{(t, z) \mid |t| \leq w_j\} \downarrow \{(t, z) \mid |t| \leq w\}$. Nên $\hat{Z}_j \downarrow \hat{Z}$ và kết quả được suy ra từ Định lý 2.2.5 và ([8], Hệ quả 5.1.2). $\square$

Hệ quả 2.2.8. Cho $E, \{w_j\}, w$ như trong Hệ quả 2.2.7, trừ ra $w_j \downarrow w$ quasi-khấp nơi. Khi đó:

$$\lim_j V_{E,Q_j}^* = V_{E,Q}^*.$$

Chứng minh. Rõ ràng $\bigcap_j \{(t, z) \mid |t| \leq w_j\}$ và $\{(t, z) \mid |t| \leq w\}$ khác biệt bởi một tập đa cực, do đó hệ quả suy ra từ ([8], Hệ quả 5.2.5). $\square$

Hệ quả 2.2.9. Cho $E, \{w_j\}, w$ như trong Hệ quả 2.2.7 trừ ra $w_j \uparrow w$ quasi-khấp nơi. Khi đó:

$$\lim_j V_{E,Q_j}^* = V_{E,Q}^*.$$

Chứng minh. Với bất kỳ tập đa cực F ta có $Z_j \cup F \downarrow Z \cup F$. Từ (Hệ quả [K], 5.2.5 và 5.2.6) ta có:

$$V_{Z_j}^* = V_{Z_j \cup F}^* \downarrow V_{Z \cup F}^* = V_Z^*.$$

Từ đó sử dụng tính thuần nhất, $H_Z^* \downarrow H_Z$ và từ Hệ quả 2.2.6,

$$V_{E,Q_j}^* \downarrow V_{E,Q}.$$

□

Từ Mệnh đề 2.2.3, ta có thể xét $L_*(d\mu_{eq}(Z))$ như là ảnh của độ đo $d\mu_{eq}(Z)$ qua ánh xạ L .

Từ $\text{supp}(d\mu_{eq}(Z)) \subset Z \subset \bigcup_{\lambda \in E} \mathbb{C}_\lambda$ ta có $\text{supp}(L_*(d\mu_{eq}(Z))) \subset E$. Ta nghiên cứu thêm về mối quan hệ này. Giả thiết rằng Z là chính quy. Độ đo cân bằng trên Z và độ đo cân bằng có trọng trong E liên hệ bởi định lý sau:

Định lý 2.2.10. $L_*\left(\frac{1}{2\pi}d\mu_{eq}(Z)\right) = d\mu_{eq}(E, w).$

Chứng minh. H_Z là liên tục do Mệnh đề 2.2.2 vì vậy, như hệ quả của Định lý 2.2.5 $V_{E,Q}$ liên tục. Khi đó:

$$dd^c H_Z = dd^c L^*(V_{E,Q}) = L^*(dd^c V_{E,Q}) \text{ với } t \neq 0.$$

và vì vậy:

$$(dd^c H_Z)^N = L^*(dd^c V_{E,Q})^N = L^*(d\mu_{eq}(E, w))^N \text{ với } t \neq 0.$$

Giả sử ϕ là hàm có giá compact trơn trên $\mathbb{C}^{N+1} - \{t = 0\}$. Khi đó:

$$\int_{\mathbb{C}^{N+1}} \phi d\mu_{eq}(Z) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} \phi (dd^c V_Z)^{N+1} = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} V_Z dd^c \phi \wedge (dd^c V_Z)^N. \quad (2.6)$$

Bây giờ, khi $\epsilon \downarrow 0$, $\text{Max}(H_Z, \epsilon) - \epsilon \uparrow V_Z$ đều trên C^N . Vì vậy:

$$\int_{\mathbb{C}^{N+1}} V_Z dd^c \phi \wedge (dd^c V_Z)^N = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}^{N+1}} (\text{Max}(H_Z, \epsilon) - \epsilon) dd^c \phi \wedge (dd^c V_Z)^N. \quad (2.7)$$

Chú ý rằng $\{z \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \text{Max}(H_Z, \epsilon) = \epsilon\}$ là lân cận của $\overline{Z}$ trong $\mathbb{C}^{N+1}$ và nếu $\text{Max}(H_Z(z), \epsilon) > 0$ thì $V_Z = H_Z$. Vì vậy, trong vế phải của biểu thức (2.7) ta có thể thay thế V_Z bởi H_Z để được:

$$\int_{\mathbb{C}^{N+1}} V_Z dd^c \phi \wedge (dd^c H_Z)^N = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} V_Z dd^c \phi \wedge L^*(dd^c V_{E,Q})^N. \quad (2.8)$$

Tất cả các hàm lấy tích phân trong (2.6), (2.7) và (2.8) đều có giá compact trong $\mathbb{C}^{N+1} - \{t = 0\}$. Do vậy, vế phải của (2.8) bằng:

$$\int_{\mathbb{C}^N} \left(\int_{C_\lambda} V_Z dd^c \phi \right) d\mu_{eq}(E, w) = \int_{\mathbb{C}^N} \left(\int_{C_\lambda} \phi dd^c V_Z \right) d\mu_{eq}(E, w). \quad (2.9)$$

Với $\lambda \in E$, ta đặt dm_λ là độ đo Lebesgue trên đường tròn $|t| = w(\lambda)$ trong C_λ đã được chuẩn hóa. Khi đó $\frac{1}{2\pi} dd^c V_{\frac{Z}{C_\lambda}} = dm_\lambda$. Vì vậy, vế phải của (2.9) bằng:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}^N} \left(\int_{C_\lambda} \phi dm_\lambda \right) d\mu_{eq}(E, w).$$

Định lý 2.2.10 được chứng minh. $\square$

Hệ quả tiếp theo chỉ ra rằng giả thiết $\overline{Z}$ là chính quy được bỏ đi từ giả thiết của Định lý 2.2.10.

Hệ quả 2.2.11. $L_* \left(\frac{1}{2\pi} d\mu_{eq}(Z) \right) = d\mu_{eq}(E, w).$

Chứng minh. Ta chỉ cần chỉ ra dãy các tập compact chính quy địa phương E_j , với các trọng chấp nhận được liên tục w_j trên E_j sao cho $E_j \downarrow E$ và $w_j \downarrow w$ trên E . Khi đó $Z(E_j, w_j) \downarrow Z(E, w)$. Áp dụng Định lý 2.2.10 cho mỗi $Z(E_j, w_j)$ và E_j và lấy giới hạn ta được Hệ quả 2.2.11.

Sự xây dựng dãy $\{E_j\}$ và $\{w_j\}$ xem trong [3], mục 7). $\square$

2.3 Bất đẳng thức Bernstein-Markov

Cho tập compact $E \subset \mathbb{C}^N$ và độ đo Borel hữu hạn dương μ trên E , ta nói rằng (E, μ) thỏa mãn bất đẳng thức Bernstein-Markov (B-M) nếu với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại hằng số $C = C(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi đa thức chỉnh hình p ta có:

$$\|p\|_E \leq C(1 + \epsilon)^{\deg(p)} \|p\|_{L^2(\mu)}. \quad (2.10)$$

Bất đẳng thức này được dùng liên quan tới tính chất L^2 của đa thức với lý thuyết thế vị bất biến của E .

Trong mục này chúng tôi giới thiệu một dạng "có trọng" của bất đẳng thức B-M.

Cho tập compact $E \subset \mathbb{C}^N$, một trọng lượng chấp nhận được w trên E và độ đo Borel hữu hạn dương μ trên E , ta nói rằng (E, w, μ) thỏa mãn bất đẳng thức B-M với trọng w nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại hằng số $C = C(\epsilon) > 0$ sao cho, với mọi đa thức có trọng $w^d p$ ta có:

$$\|w^d p\|_E \leq C(1 + \epsilon)^d \|w^d p\|_{L^2(\mu)}. \quad (2.11)$$

Tất nhiên, với $w \equiv 1$, (2.11) rút gọn thành (2.10).

Ta sẽ tìm mối liên hệ giữa bất đẳng thức B-M có trọng với (E, w, μ) và bất đẳng thức B-M trên $\overline{Z}$ đối với độ đo ν . ν được định nghĩa như sau:

$$d\nu = dm_\lambda \otimes d\mu \text{ với } \lambda \in E.$$

Hiển nhiên $\text{supp}(\nu) \subset \bigcup_{\lambda \in E} C_\lambda$, với ϕ liên tục có giá compact trong $\mathbb{C}^{N+1} - \{t = 0\}$, ta có:

$$\int_{\mathbb{C}^{N+1}} \phi d\nu = \int_E \left(\int_{C_\lambda} \phi dm_\lambda \right) d\mu(\lambda).$$

Định lý 2.3.1. (E, w, μ) thỏa mãn bất đẳng thức B-M có trọng nếu và chỉ nếu $(\overline{Z}, \nu)$ thỏa mãn bất đẳng thức B-M.

Chứng minh. Trước hết sử dụng Bổ đề 2.2.4 ta chứng minh

Bổ đề 2.3.2.

$$\|P_d\|_{L^2(\nu)} = \|w^d G_d\|_{L^2(\mu)}.$$

Chứng minh. P_d là một đa thức thuần nhất có bậc d trên $\mathbb{C}^{N+1}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^{N+1}} |P_d(t, z)|^2 d\nu &= \int_E \left(\int_{C_\lambda} |P_d(t, z)|^2 dm_\lambda \right) d\mu(\lambda) \\ &= \int_E |w^d G_d|^2 d\mu(\lambda), \text{ sử dụng (2.5)} \\ &= \|w^d G_d\|_{L^2(\mu)}^2. \end{aligned}$$

□

Bây giờ, giả sử $(\overline{Z}, \nu)$ thỏa mãn bất đẳng thức B-M. Áp dụng bất đẳng thức này với đa thức thuần nhất, sử dụng Bổ đề 2.2.4 và 2.3.2 ta thu được bất đẳng thức B-M có trọng cho (E, w, μ) .

Chiều ngược lại, giả sử (E, w, μ) thỏa mãn bất đẳng thức B-M có trọng.

Đầu tiên ta chú ý rằng nếu hai đơn thức khác bậc, chúng là trực giao trong $L^2(\nu)$ do đó sự hạn chế của chúng trong bất kỳ C_λ là trực giao trong $L^2(dm_\lambda)$. Do đó, với một đa thức p trên $\mathbb{C}^{N+1}$, được viết dưới dạng tổng của các đa thức thuần nhất

$$p = \sum_{i=0}^d p_i$$

thì:

$$\|p\|_{L^2(\nu)} = \sum_{i=0}^d \|p_i\|_{L^2(\nu)}. \quad (2.12)$$

Do đó, với bất kỳ $\epsilon > 0$ có $C > 0$ sao cho:

$$\|p\|_Z \leq \sum_{i=0}^d \|p_i\|_Z \leq C(1+\epsilon)^d \|p_i\|_{L^2(\nu)} \leq C(d+1)(1+\epsilon)^d \|p\|_{L^2(\nu)}. \quad (2.13)$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai có được từ Bổ đề 2.2.4, 2.3.2 và bất đẳng thức B-M có trọng cho (E, w, μ) . Bất đẳng thức thứ ba trong (2.13) có được từ (2.12). Bất đẳng thức B-M có được từ (2.13). $\square$

Hệ quả 2.3.3. *Giả sử $\overline{Z}$ là chính quy. Khi đó $(E, w, d\mu_{eq}(E, w))$ thỏa mãn bất đẳng thức B-M có trọng.*

Chứng minh. Đó là kết quả của Nguyen-Zeriahi [9] kết hợp với ([8], Hệ quả 5.6.7) cho ta $(\overline{Z}, d\mu_{eq}(\overline{Z}))$ thỏa mãn bất đẳng thức B-M. Tuy nhiên, từ Định lý 2.2.10 ta có: $\frac{1}{2\pi} d\mu_{eq}(\overline{Z}) = dm_\lambda \otimes d\mu_{eq}(E, w)$. $\square$

Ta sẽ đưa ra tình huống khác mà bất đẳng thức B-M có trọng thỏa mãn.

Định lý 2.3.4. *Cho E là một tập compact, chính quy địa phương $\subset \mathbb{R}^N$ và w liên tục trên E với $\inf_{z \in E} w(z) > 0$. Giả sử σ là độ đo Borel hữu hạn dương trên E và (E, σ) thỏa mãn bất đẳng thức B-M. Khi đó (E, w, σ) thỏa mãn bất đẳng thức B-M có trọng.*

Chứng minh. $\log w$ liên tục trên E và vì vậy theo Định lý Weierstrass, nó được xấp xỉ bởi đa thức. Đó là, cho $\epsilon > 0$ tồn tại $g_\epsilon = g_\epsilon(x_1, \dots, x_n)$ là

đa thức thực sao cho $\|\log w - g_\epsilon\|_E \leq \epsilon$. Mũ hóa, ta có:

$$e^{-\epsilon} \leq \frac{w}{\exp(g_\epsilon)} \leq e^\epsilon \quad \text{với } z \in E.$$

Ta xét g_ϵ như một đa thức chỉnh hình

$$g_\epsilon = g_\epsilon(z_1, \dots, z_N)$$

Lấy đủ nhiều các số hạng trong chuỗi lũy thừa của $\exp(g_\epsilon)$ ta được một đa thức chỉnh hình H thỏa mãn, với ϵ đủ nhỏ:

$$1 - 2\epsilon \leq \frac{w}{H} \leq 1 + 2\epsilon \quad \text{với } z \in E.$$

Bây giờ, xét đa thức có trọng $w^d G$ và đặt

$$J = GH^d.$$

Khi đó:

$$w^d |G| = |J| \left(\frac{w}{|H|} \right)^d.$$

Vì vậy:

$$|J|(1 - 2\epsilon)^d \leq w^d |G| \leq |J|(1 + 2\epsilon)^d \quad \text{với } z \in E. \quad (2.14)$$

Từ bất đẳng thức B-M cho (E, σ) ta có, với $\epsilon_1 > 0$ tồn tại $C_1 > 0$ sao cho:

$$\|J\|_E \leq C_1(1 + \epsilon_1)^{(h+1)d} \|J\|_{L^2(\sigma)}. \quad (2.15)$$

trong đó $h = \deg H$. Do đó:

$$\begin{aligned} \|w^d G\|_E &\leq \|J\|_E (1 + 2\epsilon)^d \quad \text{từ vế phải của bất đẳng thức (2.14)} \\ &\leq C_1(1 + \epsilon_1)^{(h+1)d} (1 + 2\epsilon)^d \|J\|_{L^2(\sigma)} \quad \text{do (2.15)} \\ &\leq C_1(1 + \epsilon_1)^{(h+1)d} \frac{(1 + 2\epsilon)^d}{(1 - 2\epsilon)^d} \|w^d G\|_{L^2(\sigma)} \quad \text{do vế trái của (2.14)}. \end{aligned}$$

Với $\epsilon > 0$ đã chọn và h cố định, ta chọn ϵ_1 sao cho $(1 + \epsilon_1)^{(h+1)} \leq 1 + \epsilon$ và do đó ta thu được:

$$\|w^d G\|_E \leq C_1 \frac{(1 + \epsilon)^d (1 + 2\epsilon)^d}{(1 - 2\epsilon)^d} \|w^d G\|_{L^2(\sigma)}.$$

Nhưng $\epsilon > 0$ là tùy ý nên bất đẳng thức B-M có trọng được thỏa mãn. $\square$

Ví dụ 2.3.5. Cho $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| \leq R\}$ là hình cầu bán kính R (tâm là gốc). Khi đó (B_R, dx) thỏa mãn bất đẳng thức B-M với dx biểu thị độ đo Lebesgue.

Lấy $w(x)$ là hàm liên tục dương bất kỳ trên B_R . Khi đó từ Định lý 2.3.4 (B_R, w, dx) thỏa mãn bất đẳng thức B-M có trọng.

2.4 L^2 lý thuyết đa thức có trọng

Cho E là tập con compact không đa cực của $\mathbb{C}^N$, w là trọng chấp nhận được trên E và μ là độ đo Borel hữu hạn dương với $\text{supp}(\mu) = E$. Với d là một số nguyên dương, tập các đơn thức độc lập tuyến tính trong $L^2(w^{2d}\mu)$ ([BL1]). Bằng việc sắp thứ tự chỉ số mũ của chúng và áp dụng phương pháp Gram-Schmidt ta thu được đúng các đa thức trực chuẩn $\{p_\alpha^d(z, \mu)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$:

$$\int_{\mathbb{C}^N} p_\alpha^d(z, \mu) p_\beta^d(z, \mu) w^{2d} d\mu = \delta_{\alpha\beta}.$$

với đa chỉ số α, β .

Ta có thể viết:

$$p_\alpha^d(z, \mu) = a_\alpha^d z^\alpha + (\text{các đơn thức có bậc thấp hơn}) \quad \text{với } a_\alpha^d > 0.$$

Ta chỉ xét những đa thức mà $|\alpha| = d$.

Trong trường hợp (E, w, μ) thỏa mãn bất đẳng thức B-M có trọng ta sẽ chỉ ra rằng số mũ cao nhất $\{a_\alpha^d\}$ có tiệm cận giới hạn theo phương. Trước hết ta đặt:

$$\Sigma_0 := \{\theta \in \mathbb{R}^N \mid \theta = (\theta_1, \dots, \theta_N), \sum_{j=1}^n \theta_j = 1, \theta_j > 0\}.$$

Ta xét dãy các đa chỉ số $\{\alpha(j)\}$ với mỗi $\theta \in \Sigma_0$ sao cho:

$$\lim_j |\alpha(j)| = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_j \frac{\alpha(j)}{|\alpha(j)|} = \theta. \quad (2.16)$$

Định lý 2.4.1. Giả sử (E, w, μ) thỏa mãn bất đẳng thức B-M có trọng và $\{\alpha(j)\}$ là dãy các đa chỉ số thỏa mãn (2.16). Khi đó:

$$\lim_j \left(a_{\alpha(j)}^d \right)^{\frac{1}{d}} = \frac{1}{\tau^w(E, \theta)}.$$

với $\tau^w(E, \theta)$ là hằng số Tchebyshev theo phương có trọng của E theo hướng θ .

Chứng minh. Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa hằng số Tchebyshev theo phương có trọng. Cho đa chỉ số α , ta đặt $P(\alpha) = \{q \mid q = z^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} c_\beta z^\beta\}$, trong đó $c_\beta \in \mathbb{C}$ và ký hiệu $\beta < \alpha$ được sử dụng để biểu thị đa chỉ số β đứng trước α trong thứ tự từ điển.

Cho đa chỉ số α với $|\alpha| = d$ và đặt t_α^d biểu thị đa thức cực tiểu hóa $\{\|w^d q\|_E \mid q \in \mathcal{P}(\alpha)\}$. Đó là $t_\alpha^d \in \mathcal{P}(\alpha)$ và:

$$\|w^d t_\alpha^d\|_E = \inf\{\|w^d q\|_E \mid q \in \mathcal{P}(\alpha)\}.$$

Khi đó (xem [BL2]) ta biết dãy các đa chỉ số $\{\alpha(j)\}_{j=1,2,\dots}$ thỏa mãn (2.16) tồn tại và giới hạn trong (2.16) được gọi là hằng số Tchebyshev có trọng theo phương $\theta \in \Sigma_0$:

$$\tau^w(E, \theta) := \lim_j \|w^d t_{\alpha(j)}^d\|_E^{\frac{1}{d}} \quad (2.17)$$

Bây giờ, từ định lý cơ bản của không gian Hilbert ta có:

$$a_\alpha^d = \frac{1}{\|w^d q_\alpha^d\|_{L^2(\mu)}}, \quad (2.18)$$

trong đó q_α^d là đa thức duy nhất trong $\mathcal{P}(\alpha)$ thỏa mãn:

$$\|w^d q_\alpha^d\|_{L^2(\mu)} = \inf\{\|w^d q\|_{L^2(\mu)} \mid q \in \mathcal{P}(\alpha)\}. \quad (2.19)$$

Bây giờ, với $\epsilon > 0$, có $C > 0$ sao cho:

$$\begin{aligned} \|w^d q_\alpha^d\|_E &\leq C(1 + \epsilon)^d \|w^d q_\alpha^d\|_{L^2(\mu)} \text{ do bất đẳng thức B-M có trọng} \\ &\leq C(1 + \epsilon)^d \|w^d t_\alpha^d\|_{L^2(\mu)} \quad \text{do (2.19)} \\ &\leq C_1(1 + \epsilon)^d \|w^d t_\alpha^d\|_E. \end{aligned}$$

Do đó, với mỗi $\epsilon > 0$ có một hằng số $C_1 > 0$ sao cho:

$$\|w^d t_\alpha^d\|_E \leq \|w^d q_\alpha^d\|_E \leq C_1(1 + \epsilon)^d \|w^d t_\alpha^d\|_E \quad (2.20)$$

Chọn dãy các đa chỉ số $\{\alpha(j)\}$ thỏa mãn (2.16), lấy lũy thừa $1/d$ của biểu thức trong (2.20), cho $j \rightarrow \infty$, sử dụng (2.17), (2.18) và do $\epsilon > 0$ tùy ý, ta được kết quả cần tìm. $\square$

2.5 Tập hợp tròn tổng quát

Các tập hợp tròn có dạng $\hat{\hat{Z}}(E, w)$ có các tính chất sau:

- i) Lồi đa thức,
- ii) tròn,
- iii) compact,
- iv) không đa cực.

Tuy nhiên, không phải mọi tập như vậy đều có dạng $\hat{\hat{Z}}(E, w)$. Ta sẽ chỉ ra, tuy nhiên hầu hết các tập với những tính chất trên là giới hạn của những tập dạng $\hat{\hat{Z}}(E, w)$

Cho $Z \subset \mathbb{C}^{N+1}$ là một tập với các tính chất i), ii), iii), iv) ở trên. Khi đó điểm gốc là điểm trong của Z . Ta liên kết Z với một hàm trong $\mathbb{C}^N$ được định nghĩa bởi:

$$w(\lambda) := \sup\{|t| \mid (t, z) \in Z \cap C_\lambda\}.$$

Khi đó $w(\lambda) > 0$ với mọi λ và w bị chặn trên. Ta đặt $Q(\lambda) := -\log w(\lambda)$.

Mệnh đề 2.5.1. w là nửa liên tục trên trên $\mathbb{C}^N$.

Chứng minh. Cố định $\lambda^0 \in \mathbb{C}^N$. Gọi $\{\lambda^s\}_{s=1,2,\dots}$ là một dãy trong $\mathbb{C}^N$ hội tụ về λ^0 . Ta có thể bằng cách xác định một dãy con, giả sử rằng $\lim_s(\lambda^s) := w^0$ tồn tại. Các điểm $(w(\lambda^s), \lambda_1^s w(\lambda^s), \dots, \lambda_N^s w(\lambda^s)) \in Z \cap C_{\lambda^s}$, vì vậy do Z là compact, điểm $(w^0, \lambda_1^0 w^0, \dots, \lambda_N^0 w^0) \in Z \cap C_{\lambda^0}$. Vì vậy, theo định nghĩa của w , $w(\lambda^0) \geq w^0 = \lim_s w(\lambda^s)$. $\square$

Mệnh đề 2.5.2. Q^* là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^N$.

Chứng minh. $Z = \{(t, z) \in \mathbb{C}^{N+1} \mid H_Z(t, z) \leq 0\}$. Ta có:

$$H_Z(t, z) = \log |t| + H_Z(1, \lambda)$$

vì vậy:

$$\log w(\lambda) = -H_Z(1, \lambda)$$

và

$$Q(\lambda) = H_Z(1, \lambda)$$

Nhưng $H_Z = H_Z^*$ ở bên ngoài tập tròn đa cực trong $\mathbb{C}^{N+1}$ từ [BL2, Bổ đề 6.1] $H_Z(1, \lambda) = H_Z^*(1, \lambda)$ quasi-khắp nơi trên $\mathbb{C}^N$.

Vì vậy $Q^* = H_Z^*(1, \lambda)$. □

Ví dụ 2.5.3. $Z = \{|t|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_N|^2 \leq 1\} \subset \mathbb{C}^{N+1}$. Khi đó $w(\lambda) = (1 + |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_N|^2)^{-\frac{1}{2}}$ và $Q(\lambda) = \frac{1}{2} \log(1 + |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_N|^2)$.

Đặt $Z_R := \{(t, z) \in Z \mid \frac{|z|}{|t|} \leq R\}$.

Mệnh đề 2.5.4. $\lim_{R \rightarrow \infty} d\mu_{eq}(Z_R) = d\mu_{eq}(Z)$ * yếu.

Tức là: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{eq}(Z_R) = \int \varphi d\mu_{eq}(Z)$ với mọi φ liên tục giá compact trong $\mathbb{C}^N$

Chứng minh. $Z_R \cup T \uparrow Z \cup T$ với T là tập hợp đa cực $\{(t, z) \in \mathbb{C}^{N+1} \mid t = 0\}$. Từ đó $V_{Z_R}^* \downarrow V_Z^*$ khi $R \rightarrow \infty$. Kết quả có được từ ([8], Hệ quả 5.2.5 và 5.2.6) và tính liên tục của toán tử Monge-Ampère giới hạn giảm dưới [8] □

Mệnh đề 2.5.5. $\lim_{R \rightarrow \infty} L_*(\frac{1}{2\pi} d\mu_{eq}(Z_R)) = (dd^c Q^*)^N$.

Chứng minh. Đặt $w_R = w/B(0, R)$, $Q_R = -\log w_R$. Khi đó họ các hàm điều hòa dưới $V_{B(0,R), Q_R}^*$ là giảm khi $R \rightarrow \infty$. Từ Q^* là đa điều hòa dưới, $V_{B(0,R), Q_R}^* = Q^*$ trong $B(0, R)$ vì vậy $V_{B(0,R), Q_R}^* \downarrow Q^*$. Kết quả có được từ việc áp dụng Định lý 2.2.10 □

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày các vấn đề sau đây:

1. Hàm L -cực trị.
2. Đa thức có trọng và lý thuyết đa thể vị có trọng.
3. Kết quả chính của luận văn là ba định lý sau:
 - (i) Định lý 2.2.10 về đẳng thức $L_*(\frac{1}{2\pi}d\mu_{eq}(Z)) = d\mu_{eq}(E, w)$.
 - (ii) Định lý 2.3.4 về bất đẳng thức Bernstein-Markov có trọng.
 - (iii) Định lý 2.4.1 về hằng số Tchebyshev có trọng.
4. Vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu là sự áp dụng các kết quả có trọng vào một số vấn đề mở của lý thuyết đa thể vị không trọng như đã làm bởi Bloom và Levenberg.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Quang Diệu - Lê Mậu Hải, *Cơ sở lý thuyết đa thế vị*, Nhà xuất bản Đại học sư phạm, 2009.
- [2] Thomas Bloom, *Weighted polynomials and weighted pluripotential theory*, Department of Mathematics University of Toronto, 2006, Canada.
- [3] T. Bloom - N. Levenberg, *Weighted pluripotential theory on $\mathbb{C}^N$* , Am. J. of Math. 125 (2003), 57-103.
- [4] T. Bloom - N. Levenberg - S. Ma'u, *Robin functions and extremal functions*, Ann. Pol. Math 80 (2003), 55 - 84.
- [5] J-P. Ferrier, *Spectral theory and complex analysis*, North Holland, 1973.
- [6] B. Josefson, *On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on $\mathbb{C}^N$* , Arkiv for Mat. 16 (1) (1978), p. 109 - 115.
- [7] M. Klimek, *Pluripotential theory*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991, Oxford Science Publications.
- [8] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, London Mathematical Society Monographs, New Series, Oxford University Press, 1991.
- [9] T.V. Nguyen - A. Zeriahi, *Familles de polynômes presque partout bornées*, Bull. Soc. Math. Fr. 107 (1983), 81-91.
- [10] Jozef Siciak, *Extremal plurisubharmonic functions in C^n* , Jagellonian University, Institute of Mathematics, Krakow, Poland, 1981.

- [11] J. Siciak, *Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^N$* , Ann. Pol. Math. 39 (1981). 175-211.
- [12] E.B. Saff - V.Totik, *Logarithmic Potentials with Extremal Fields*, Grundlehren Math. Wiss [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 316 (1997), Springer-Verlag, Berlin.