

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ VIỆT HƯNG

VỀ ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU CẤP 2
CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU CÓ CÁC RÀNG BUỘC
ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

THÁI NGUYÊN - 2010

Công trình được hoàn thành tại
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

Phản biện 1:.....
.....

Phản biện 2:.....
.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Ngày tháng năm 2010

Có thể tìm hiểu tại
THƯ VIỆN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC THÁI NGUYÊN
TRUNG TÂM HỌC LIỆU ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Mục lục

Mục lục	1
Mở đầu	2
Chương 1. Điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán có ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức	4
1.1. Phát biểu bài toán và các kết quả bổ trợ	4
1.1.1. Bài toán (P_1) và điều kiện chính quy	4
1.1.2. Mở rộng kết quả của Hestenes	9
1.1.3. Mở rộng bổ đề của Yuan	12
1.2. Điều kiện cần tối ưu cấp 2	13
1.3. Các điều kiện chính quy (MMF) và (GSCS) và điều kiện tối ưu cấp 2 .	19
Chương 2. Điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán có các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập	25
2.1. Các khái niệm và các kết quả có liên quan	25
2.2. Nguyên lý cực trị	29
2.3. Bài toán có ràng buộc $F(x) \in C$	39
Kết luận	43
Tài liệu tham khảo	44

Mở đầu

Lý thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu hóa. Người ta thường quan tâm nghiên cứu các điều kiện tối ưu cấp 1, cấp 2 và cấp cao. Các điều kiện tối ưu cấp 2 tỏ ra rất hiệu quả trong việc tìm ra nghiệm tối ưu trong tập các điểm dừng.

A. Baccari và A. Trad [4] đã dẫn các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán tối ưu với ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức trong các không gian hữu hạn chiều với giả thiết tập các nhân tử Lagrange là một đoạn thẳng bị chặn cùng với các điều kiện đủ đảm bảo giả thiết này đúng. Một điều kiện cần tối ưu cấp 2 với điều kiện cần chính quy Mangasarian-Fromovitz tăng cường (MMF) và điều kiện bù chặt suy rộng (GSCS) cũng được thiết lập.

A. Arutyunov và F. L. Pereira [3] đã nghiên cứu các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn của bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập trong các không gian véc tơ, và áp dụng cho bài toán tối ưu với ràng buộc bao hàm thức $F(x) \in C$.

Luận văn này trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức với giả thiết tập các nhân tử Lagrange là một đoạn thẳng bị chặn và các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn của bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập trong các không gian véc tơ và bài toán tối ưu với ràng buộc bao hàm thức $F(x) \in C$.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 của Baccari - Trad [4] cho bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức với giả thiết tập các nhân

tử Lagrange là một đoạn thẳng bị chặn. Kết quả chỉ ra rằng điều kiện chính quy Mangasarian - Fromovitz và điều kiện số ràng buộc tích cực nhiều nhất là 2 là một điều kiện đủ để tập các nhân tử Lagrange là một đoạn thẳng bị chặn. Điều kiện cần tối ưu cấp 2 với điều kiện chính quy (MMF) và điều kiện bù chặt suy rộng (GSCS) cũng được trình bày trong chương 1.

Chương 2 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 của Arutyunov - Pereira [3] cho cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn của bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc trong các không gian véc tơ. Nguyên lý cực trị cấp 2 đó được áp dụng để dẫn nguyên lý cực trị cấp 2 cho bài toán tối ưu với ràng buộc bao hàm thức $F(x) \in C$.

Nhân dịp này, em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS. TS Đỗ Văn Lưu - Viện Toán học đã giao đề tài và tận tình hướng dẫn em trong suốt quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn này. Cũng nhân dịp này em xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học, Khoa Công nghệ Thông tin - Đại học Thái Nguyên, các thầy giáo công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin đã tận tình tham gia giảng dạy Lớp Cao học Toán K2 - Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, giúp em hoàn thành chương trình học tập tại trường.

Đồng thời, tôi xin cảm ơn tới tất các bạn học viên của Lớp Cao học Toán K2 đã nhiệt tình động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập. Tôi xin cảm ơn lãnh đạo Trường THPT Chu Văn An - TP Móng Cái, lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Ninh đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành khóa học này.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 9 năm 2010

Tác giả

Chương 1

Điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán có ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức

Chương 1 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho điểm cực tiểu địa phương x^* của bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức với giả thiết tập các nhân tử Lagrange $\Lambda(x^*)$ là một đoạn thẳng bị chặn cùng với các điều kiện đủ để $\Lambda(x^*)$ là một đoạn thẳng bị chặn. Điều kiện cần tối ưu cấp 2 với điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz tăng cường (MMF) và điều kiện bù chặt suy rộng (GSCS) cũng được trình bày trong chương này. Các kết quả trình bày trong chương này là của Baccari - Trad [4].

1.1. Phát biểu bài toán và các kết quả bổ trợ

1.1.1. Bài toán (P_1) và điều kiện chính quy

Xét bài toán tối ưu không lồi:

$$(P_1) \quad \min\{f(x) \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}.$$

trong đó

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p; h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$$

hai lần khả vi liên tục. Bài toán (P_1) có thể không có các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức. Sau đây ta nhắc lại các ký hiệu, định nghĩa và các kết quả sẽ được dùng trong chương này.

Hàm Lagrange tổng quát của bài toán (P_1) xác định trên $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ được

định nghĩa bởi

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x)$$

Hàm Lagrange của bài toán (P_1) xác định trên $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q$ được định nghĩa bởi

$$L(x, \lambda, \mu) = \mathcal{L}(x, 1, \lambda, \mu)$$

Gradient và ma trận Hessian của $\mathcal{L}$ theo x , được ký hiệu là $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ và $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$. Gradient của f theo x là vectơ cột $\nabla f(x)$, và $\nabla f(x)^t$ là véc tơ chuyển vị của nó. Tập chấp nhận được là

$$F = \{x \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}.$$

Với $x \in F$, tập chỉ số tích cực $I(x)$, nón tối hạn $C(x)$, tập các nhân tử Lagrange tổng quát $\Lambda_0(x)$ và tập các nhân tử Lagrange $\Lambda(x)$ được định nghĩa tương ứng như sau:

$$I(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\},$$

$$C(x) = \{d \mid \nabla f(x)^t d \leq 0, \nabla g_i(x)^t d \leq 0, i \in I(x), \nabla h_j(x)^t d = 0, j = 1, 2, \dots, q\},$$

$$\Lambda_0(x) = \{(\lambda_0, \lambda, \mu) \neq 0 \mid \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = 0, (\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}_+^{p+1}, \lambda_i g_i(x) = 0, \forall i\},$$

$$\Lambda(x) = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda_0 = 1, (\lambda_0, \lambda, \mu) \in \Lambda_0(x)\}.$$

Dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa bởi $Q(x) = B(x, x)$, ở đây B là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.1. Cho Q là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$, S là một tập con của $\mathbb{R}^n$. Q được gọi là bán xác định dương trên S nếu

$$Q(s) \geq 0, \forall s \in S.$$

Ký hiệu là $Q \succeq 0$ trên S .

Định nghĩa 1.2. Một tập con khác rỗng $L \subset \mathbb{R}^m$ là một đoạn thẳng nếu tồn tại $X \in \mathbb{R}^m, Y \in \mathbb{R}^m$ và một khoảng $J \subset \mathbb{R}$ sao cho

$$L = X + J.Y = \{l = X + \theta Y \mid \theta \in J\}.$$

Nhận xét 1.1. Nếu $Y \neq 0$ và L là đóng và bị chặn, thì J là đóng và bị chặn. Khi đó ta có thể viết $L = X + [a, b]Y$ với các số thực $a \leq b$. Hơn nữa, nếu L không là tập một điểm thì L có đúng 2 điểm cực biên là $X + aY$ và $X + bY$.

Định nghĩa 1.3. Nón cấp một K là nón có dạng $K = E + \mathbb{R}_+ d^0$, ở đây E là không gian con véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ và $d^0 \in \mathbb{R}^n$.

Chú ý rằng, mọi không gian con véc tơ $E \subset \mathbb{R}^n$ đều là nón cấp một. Sau đây, ta nhắc lại các điều kiện chính quy cổ điển mà ta sẽ sử dụng.

Định nghĩa 1.4. Điểm chấp nhận được $x^* \in F$ được gọi là thỏa mãn điều kiện bù chặt (SCS) nếu $\Lambda(x^*)$ khác rỗng và với mọi $i \in I(x^*)$, tồn tại $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$ sao cho $\lambda_i > 0$.

Nhận xét 1.2. Nếu $x^* \in F$, điều kiện (SCS) đúng và p^* là số các ràng buộc bất đẳng thức tích cực, thì các khẳng định sau là đúng:

(i) Với mọi $i \in I(x^*)$, tồn tại $(\lambda^i, \mu^i) \in \Lambda(x^*)$ sao cho $\lambda_i^i > 0$,

$$(\lambda^*, \mu^*) = \frac{1}{p^*} \sum_{i \in I(x^*)} (\lambda^i, \mu^i) \in \Lambda(x^*)$$

và thỏa mãn $\lambda_i^* > 0$ với mọi $i \in I(x^*)$.

(ii) Nón tối hạn $C(x^*)$ là một không gian véc tơ. Để thấy điều này, cho $d \in C(x^*)$ và $J = \{1, 2, \dots, q\}$; Khi đó,

$$(a) \quad \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \implies \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^t d = 0,$$

$$(b) \quad \nabla g_i(x^*)^t d \leq 0, \lambda_i^* > 0, \forall i \in I(x^*), \nabla h_j(x^*)^t d = 0, \forall j \in J,$$

$$(c) \quad \nabla f(x^*)^t d \leq 0 \implies \nabla g_i(x^*)^t d = 0, \forall i \in I(x^*).$$

Vì vậy,

$$C(x^*) = \{d \mid \nabla g_i(x^*)^t d = 0, i \in I(x^*), \nabla h_j(x^*)^t d = 0, j \in J\}.$$

Định nghĩa 1.5. Điểm chấp nhận được $x^* \in F$ được gọi là thỏa mãn điều kiện chính quy độc lập tuyến tính (LICQ) nếu các véc tơ

$$\nabla g_i(x^*), \forall i \in I(x^*), \nabla h_j(x^*), j = 1, 2, \dots, q,$$

là độc lập tuyến tính.

Điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.6. Ta nói rằng điều kiện chính quy (MFCQ) đúng tại điểm chấp nhận được $x^* \in F$, nếu hai điều kiện sau đây đúng:

- (i) q véc tơ $\nabla h_j(x^*)$ là độc lập tuyến tính, và
- (ii) tồn tại một véc tơ d^* sao cho

$$\nabla g_i(x^*)^t d^* < 0, \forall i \in I(x^*); \nabla h_j(x^*)^t d^* = 0, j = 1, 2, \dots, q.$$

Bổ đề 1.1 ([8]). *Điều kiện (MFCQ) đúng nếu và chỉ nếu không tồn tại $(\lambda, \mu) \neq 0$ sao cho*

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \in I(x^*), \quad (1.1)$$

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0. \quad (1.2)$$

Nhận xét 1.3. Cho $x^* \in F$ và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- (a) Không có các ràng buộc bất đẳng thức tích cực.
- (b) Chỉ có một ràng buộc bất đẳng thức tích cực.

Khi đó, sử dụng (1.2), từ điều kiện (MFCQ) kéo theo điều kiện (LICQ).

Định nghĩa 1.7. Một điểm chấp nhận được $x^* \in F$ thỏa mãn các điều kiện đủ tối ưu cấp 2 (SC2) nếu $\Lambda(x^*)$ khác rỗng và

$$\sup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)} (d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda, \mu) d > 0, \forall d \in C(x^*), d \neq 0. \quad (1.3)$$

Kết quả sau đây được biết đến như các điều kiện cần tối ưu Karush-Kuhn-Tucker: Giả thiết x^* là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1) và thỏa mãn điều kiện (LICQ). Khi đó, $\Lambda(x^*)$ là tập một điểm (tức là, $\Lambda(x^*) = \{(\lambda, \mu)\}$) và thỏa mãn các điều kiện cần tối ưu cấp hai cổ điển:

$$(CN2) \quad (d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda, \mu) d \geq 0, \quad \forall d \in C(x^*).$$

(CN2) có tính chất quan trọng là nhân tử Lagrange (λ, μ) như nhau cho mọi véc tơ $d \in C(x^*)$. Nếu điều kiện (LICQ) không đúng, thì $\Lambda(x^*)$ sẽ không là tập một điểm và điều kiện (CN2) không thỏa mãn (xem [1]). Tuy nhiên, điều kiện (CN2) sẽ đúng nếu một trong các điều kiện sau đây thỏa mãn (xem [5]):

- (i) Các hàm ràng buộc g và h là affine.
- (ii) Các hàm f và g lồi, h là affine và x^* thỏa mãn điều kiện Slater.
- (iii) Tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q$ sao cho (x^*, λ, μ) là điểm yên ngựa của hàm Lagrange của bài toán (P_1) .

Không có điều kiện chính quy mà nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1) thỏa mãn các điều kiện cần tối ưu cấp 1 và cấp 2 Fritz John sau (xem [5]):

$$\Lambda_0(x^*) \neq \emptyset, \quad (1.4)$$

$$\forall d \in C(x^*) \quad \exists (\lambda_0, \lambda, \mu) \in \Lambda_0(x^*) : (d)^t \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) d \geq 0. \quad (1.5)$$

Điều kiện cần tối ưu cấp 2 (1.5) có hai mặt hạn chế: Thành phần thứ nhất λ_0 của λ , trong (1.5), có thể triệt tiêu và nhân tử $(\lambda_0, \lambda, \mu)$ trong (1.5) là không nhất thiết như nhau cho tất cả các véc tơ tới hạn.

Giả thiết nghiệm tối ưu địa phương x^* của bài toán (P_1) thỏa mãn điều kiện (MFCQ). Khi đó, theo [6] $\Lambda(x^*)$ khác rỗng và bị chặn, lồi và compact. Mọi $(\lambda_0, \lambda, \mu) \in \Lambda_0(x^*)$ thỏa mãn $\lambda_0 > 0$. Điều kiện (1.5) có thể được viết

$$(GN2) \quad \max_{(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)} (d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda, \mu) d \geq 0 \quad \forall d \in C(x^*),$$

và điều kiện (GN2) khắc phục được mặt hạn chế thứ nhất. Mặt hạn chế thứ hai, ví dụ được đưa ra trong [1], chỉ ra rằng điều kiện (MFCQ) không kéo theo điều kiện (CN2). Tuy nhiên, trong mỗi trường hợp sau, điều kiện (MFCQ) kéo theo điều kiện (CN2):

- (i) $n \leq 2$.
- (ii) Có nhiều nhất hai ràng buộc bất đẳng thức tích cực.

1.1.2. Mở rộng kết quả của Hestenes

Cho P và Q là hai dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$, K là một nón đóng trong $\mathbb{R}^n$. Xét các phát biểu sau đây:

$$d \in K, \quad P(d) \leq 0, \quad Q(d) \leq 0 \implies d = 0; \quad (1.6)$$

$$P \succeq 0 \quad \text{hoặc} \quad Q \succeq 0 \quad \text{trên} \quad K; \quad (1.7)$$

$$\exists (d^1, d^2) \in K \times K : P(d^1) < 0, \quad Q(d^2) < 0; \quad (1.8)$$

$$\exists \theta > 0 : P(d) + \theta Q(d) > 0, \quad \forall d \in K, d \neq 0. \quad (1.9)$$

Hestenes [8] đã chỉ ra rằng nếu K là một không gian véc tơ thì

(i) (1.6) và (1.7) kéo theo (1.9), và

(ii) (1.6) và (1.8) kéo theo (1.9).

Có thể thấy rằng, phát biểu (1.7) hoặc (1.8) luôn đúng. Vì vậy, với một không gian véc tơ K , (1.6) kéo theo (1.9). Baccari -Trad[4] mở rộng các kết quả của Hestenes như sau:

Bổ đề 1.2.

(a) Với mọi nón K đóng trong $\mathbb{R}^n$, (1.6) và (1.7) kéo theo (1.9)

(b) Nếu K là một nón cấp một thì (1.6) kéo theo (1.9).

Chứng minh. Ta chứng minh (a): Giả sử $Q \succeq 0$ trên K . Ta chứng minh bằng phản chứng rằng tồn tại số thực $c > 0$ sao cho với mọi $\theta > c$, (1.9) đúng. Giả sử rằng với mọi $c = n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $\theta_n > n$ và $d_n \in K \setminus \{0\}$ sao cho $P(d_n) + \theta_n Q(d_n) \leq 0$. Từ đó suy ra $P(d_n) \leq 0, y_n = d_n / \|d_n\| \in K$, $(y_n)_n$ có một dãy con $(y_{n_k})_k$ hội tụ đến $d \in K, \|d\| = 1, P(d) \leq 0, \theta_{n_k} \longrightarrow +\infty$, và

$$P(d_{n_k}) + \theta_{n_k} Q(d_{n_k}) \leq 0 \implies Q(d) \leq 0.$$

Từ $Q(d) \leq 0$ và $P(d) \leq 0$, ta nhận được $d = 0$ và điều này mâu thuẫn với $\|d\| = 1$. Vậy, c tồn tại và bất kỳ $\theta > c$ đều thỏa mãn (1.9). Lập luận tương tự cho trường hợp $P \succeq 0$ trên K .

Ta chứng minh (b): Từ (a) ta chỉ cần chứng minh (b) trong trường hợp (1.7) không đúng, tức là (1.8) đúng. Giả sử E là một không gian véc tơ và $d^0 \in \mathbb{R}^n$ sao cho $K = E + \mathbb{R}_+ d^0$. Khi đó, không gian con véc tơ $E + \mathbb{R}d^0$ thỏa mãn (1.6). Để thấy điều này, giả sử $d = d_0 - rd^0$, với $r > 0$ và $d_0 \in E$, thỏa mãn $P(d) \leq 0$ và $Q(d) \leq 0$. Từ đó suy ra

$$P(-d) \leq 0, Q(-d) \leq 0, -d \in K \text{ và } -d = 0.$$

Vì vậy, ta có thể giả sử $K = E + \mathbb{R}d^0$.

Với $d, x, y \in \mathbb{R}^n$ và $\mu \in \mathbb{R}$, đặt

$$J(d, \mu) = P(d) + \mu Q(d),$$

$$I(x, y, \mu) = (1/2)(J(x + y, \mu) - J(x, \mu) - J(y, \mu)),$$

$$BQ(x, y, \mu) = (1/2)(Q(x + y, \mu) - Q(x, \mu) - Q(y, \mu))$$

$$S = \{d \in K \mid Q(d) \leq 0\}.$$

Ta áp dụng phần (a) cho cặp dạng toàn phương (P, Q) trên nón đóng S , và tồn tại một số thực $\theta > 0$ sao cho

$$J(d, \theta) = P(d) + \theta Q(d) > 0, \quad \forall d \in S, d \neq 0.$$

Đặt

$$b = \sup\{\theta > 0 \mid J(d, \theta) > 0, \quad \forall d \in S, d \neq 0\}.$$

Ta có $Q(d^2) < 0$ và $d^2 \in S$. Vậy, b là hữu hạn, và

$$J(d, b) \geq 0, \quad \forall d \in S.$$

Theo định nghĩa của b suy ra, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $d_n \in S, d_n \neq 0$, sao cho $J(d_n, b + \frac{1}{n}) \leq 0$ và $(d_n/\|d\|)_n$ có một dãy con hội tụ đến $d^* \in S$ sao cho $\|d^*\| = 1$ và $J(d^*, b) \leq 0$. Vậy, $J(d^*, b) = 0$. Nếu $Q(d^*) = 0$ hoặc $b = 0$ thì $P(d^*) = 0$. Sử dụng (1.6) ta suy ra $d^* = 0$. Điều này không thể xảy ra. Do đó, ta nhận được $b > 0, Q(d^*) < 0$ và $P(d^*) > 0$.

Ta khẳng định rằng

$$J(d, b) \geq 0, \quad \forall d \in K; \quad I(d^*, d, b) = 0, \quad \forall d \in K.$$

Thật vậy, ta lấy $d \in K$. Với $t \in \mathbb{R}$ và $|t|$ đủ nhỏ, $Q(d^* + td) < 0$, $d^* + td \in S$ và $J(d^* + td, b) \geq 0$. Hàm f được định nghĩa bởi

$$f(t) = J(d^* + td, b) = J(d^*, b) + 2tI(d^*, d, b) + t^2J(d, b)$$

có cực tiểu địa phương tại $t = 0$. Vì vậy, $f'(0) = 0 = 2I(d^*, d, b)$ và $f''(0) = 2J(d, b) \geq 0$.

Từ đó ta kết luận rằng tồn tại $b > 0$ và $d^* \in K$ sao cho

- (1) $\|d^*\| = 1$, $J(d^*, b) = P(d^*) + bQ(d^*) = 0$, $P(d^*) > 0$ và $Q(d^*) < 0$.
- (2) $J(d, b) \geq 0$ với mọi $d \in K$ và $I(d^*, d, b) = 0$ với mọi $d \in K$.

Bằng cách tương tự, thay Q bởi P trong S , ta tìm $c > 0$ và $d^{**} \in K$ sao cho

- (i) $\|d^{**}\| = 1$, $cP(d^{**}) + Q(d^{**}) = 0$, $P(d^{**}) < 0$ và $Q(d^{**}) > 0$.
- (ii) $cP(d) + Q(d) \geq 0$, $\forall d \in K$ và $I(d^{**}, d, 1/c) = 0$, $\forall d \in K$.

Lấy $a = 1/c$; Khi đó, a và d^{**} thỏa mãn

- (3) $\|d^{**}\| = 1$, $J(d^{**}, a) = P(d^{**}) + aQ(d^{**}) = 0$, $P(d^{**}) < 0$ và $Q(d^{**}) > 0$,
- (4) $J(d, a) \geq 0$, $\forall d \in K$ và $I(d^{**}, d, a) = 0$, $\forall d \in K$.

Bởi vì $Q(d^*) < 0$ và $Q(d^{**}) > 0$, phương trình ẩn t

$$Q(td^* + d^{**}) = t^2Q(d^*) + 2tBQ(d^*, d^{**}) + Q(d^{**}) = 0$$

có nghiệm thực t_0 . Vì vậy, $d_0 = t_0d^* + d^{**} \in K \setminus \{0\}$ thỏa mãn $Q(d_0) = 0$ và $J(d_0, b) = P(d_0) > 0$. Từ đó suy ra

- (iii) $J(d_0, b) = t_0^2J(d^*, b) + 2t_0I(d^*, d^{**}, b) + J(d^{**}, b) = J(d^{**}, b)$.
- (iv) $0 < P(d_0) = J(d_0, b) = P(d^{**}) + bQ(d^{**})$.

Do $J(d^{**}, a) = 0 = P(d^{**}) + aQ(d^{**})$ và (iv), ta nhận được

$$(b - a)Q(d^{**}) > 0 \text{ và } a < b.$$

Lấy $\theta \in]a, b[$ và $d \in K$. Khi đó,

$$J(d, \theta) = J(d, a) + (\theta - a)Q(d) \geq (\theta - a)Q(d)$$

và

$$J(d, \theta) = J(d, b) + (\theta - b)Q(d) \geq -(b - \theta)Q(d).$$

Điều này kéo theo $J(d, \theta) \geq 0$. Nếu $J(d, \theta) = 0$ thì $Q(d) = 0, P(d) = 0$ và $d = 0$. Vì vậy,

$$J(d, \theta) > 0, \quad \forall d \in K, d \neq 0. \quad \square$$

1.1.3. Mở rộng bổ đề của Yuan

Cho K là một nón đóng trong $\mathbb{R}^n$, cho P và Q là hai dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$. Xét các phát biểu sau:

$$\max(P(d), Q(d)) \geq 0, \quad \forall d \in K; \quad (1.10)$$

$$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2, t_1 + t_2 = 1 \text{ sao cho } t_1 P(d) + t_2 Q(d) \geq 0, \forall d \in K; \quad (1.11)$$

$$\max(P(d), Q(d)) > 0, \quad \forall d \in K, d \neq 0; \quad (1.12)$$

$$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2, t_1 + t_2 = 1 \text{ sao cho } t_1 P(d) + t_2 Q(d) > 0, \forall d \in K, d \neq 0. \quad (1.13)$$

Y. Yuan [12] đã chỉ ra rằng, với $K = \mathbb{R}^n$, (1.10) kéo theo (1.11). Thực ra, với $K = \mathbb{R}^n$ hai phát biểu này là tương đương. Một kết quả trong [9] đã chỉ ra rằng, với $n \geq 3$ và $K = \mathbb{R}^n$, (1.12) và (1.13) là tương đương. Trong mục này, ta trình bày kết quả trong [4] chứng minh (1.12) và (1.13) là tương đương, trong trường hợp nón cấp một K .

Định lí 1.1. Với K là một nón cấp một, (1.12) và (1.13) là tương đương.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh (1.12) kéo theo (1.13). Bất đẳng thức (1.12) là tương đương với điều kiện (1.6) và, từ phần (b) của Bổ đề 1.2, (1.9) đúng. Vì vậy, (1.13) thỏa mãn với $t_1 = 1/(1 + \theta)$ và $t_2 = \theta/(1 + \theta)$. $\square$

Hệ quả 1.1.1. Với K là một nón cấp một, (1.10) và (1.11) là tương đương.

Chứng minh. Để chứng minh (1.10) kéo theo (1.11), ta lấy $n \in \mathbb{N}^*$. Các dạng toàn phương $P_n(d) = P(d) + (1/n)\|d\|^2$ và $Q_n(d) = Q(d) + (1/n)\|d\|^2$ thỏa mãn (1.12). Theo Định lí 1.1, tồn tại $t_1^n \geq 0$ và $t_2^n \geq 0$ sao cho $t_1^n + t_2^n = 1$ và

$$t_1^n P_n(d) + t_2^n Q_n(d) = t_1^n P(d) + t_2^n Q(d) + (1/n)\|d\|^2 > 0, \quad \forall d \in K, d \neq 0.$$

$(t_1^n, t_2^n)_n$ có một dãy con $(t_1^{n_k}, t_2^{n_k})_k$ hội tụ đến (t_1, t_2) , $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 = 1$ và với mọi d cố định thuộc $K, d \neq 0$, ta có

$$t_1^n P(d) + t_2^n Q(d) + (1/n)\|d\|^2 > 0 \implies t_1 P(d) + t_2 Q(d) \geq 0. \quad \square$$

1.2. Điều kiện cần tối ưu cấp 2

Định lí 1.1 và Hệ quả của nó được sử dụng để chứng minh kết quả sau:

Định lí 1.2. *Giả sử x^* là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1) , sao cho $\Lambda(x^*)$ là một đoạn thẳng bị chặn. Khi đó, với mọi nón cấp một K bao hàm trong nón tới hạn $C(x^*)$, tồn tại $(\lambda^K, \mu^K) \in \Lambda(x^*)$ sao cho*

$$(d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^K, \mu^K) d \geq 0, \quad \forall d \in K. \quad (1.14)$$

Hơn nữa, nếu x^* thỏa mãn điều kiện đủ (SC2) thì có thể chọn (λ^K, μ^K) sao cho

$$(d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^K, \mu^K) d > 0, \quad \forall d \in K, d \neq 0. \quad (1.15)$$

Chứng minh. Ta bắt đầu chứng minh (1.14): x^* là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1) và thỏa mãn điều kiện (MFCQ) và điều kiện (GN2) đúng. Nếu $\Lambda(x^*)$ là tập một điểm thì điều kiện (GN2) kéo theo (1.14). Giả sử đoạn thẳng đóng và bị chặn $\Lambda(x^*)$ không là tập một điểm thì $\Lambda(x^*)$ có đúng hai điểm cực biên $(\lambda^1, \mu^1) \in \Lambda(x^*)$ và $(\lambda^2, \mu^2) \in \Lambda(x^*)$. Đặt

$$P(d) = (d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^1, \mu^1) d; Q(d) = (d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^2, \mu^2) d.$$

$(d)^t \nabla^2 L(x^*, \lambda, \mu) d$ là tuyến tính theo (λ, μ) và "max" trong điều kiện (GN2) đạt được tại một điểm cực biên. Như vậy, ta có

$$0 \leq \max_{(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)} (d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda, \mu) d = \max(P(d), Q(d)), \quad \forall d \in K,$$

và (1.10) đúng. Từ Hệ quả 1.1.1, (1.10) kéo theo (1.11), tức là tồn tại $t_1 \geq 0$ và $t_2 \geq 0$ sao cho $t_1 + t_2 = 1$,

$$t_1 P(d) + t_2 Q(d) \geq 0, \quad \forall d \in K,$$

$$(\lambda^K, \mu^K) = t_1(\lambda^1, \mu^1) + t_2(\lambda^2, \mu^2) \in \Lambda(x^*),$$

$$t_1 P(d) + t_2 Q(d) = (d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^K, \mu^K) d \geq 0, \quad \forall d \in K.$$

Để chứng minh (1.15), ta sử dụng Định lý 1.1 và các lập luận tương tự như trên. $\square$

Điều kiện cần tối ưu cấp 2 cổ điển (CN2), khi không giả thiết điều kiện (LICQ), các giả thiết lỗi hay điều kiện (SCS), là không dễ dàng nhận được. Trước hết ta xét các bài toán tối ưu mà trong đó nón tối hạn là nón cấp một và tập các nhân tử Lagrange là một đoạn thẳng bị chặn.

Định lý 1.3. *Giả sử x^* là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1) và thỏa mãn các điều kiện sau:*

- (i) *Tập các nhân tử Lagrange $\Lambda(x^*)$ là một đoạn thẳng bị chặn.*
- (ii) *Tồn tại nhiều nhất chỉ một chỉ số $i_0 \in I(x^*)$ sao cho*

$$(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*) \implies \lambda_{i_0} = 0. \quad (1.16)$$

Khi đó, tồn tại một nhân tử Lagrange $(\lambda^, \mu^*) \in \Lambda(x^*)$ sao cho*

$$(d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0, \quad \forall d \in C(x^*).$$

Hơn nữa, nếu x^ thỏa mãn điều kiện đủ tối ưu cấp hai (SC2) thì (λ^*, μ^*) có thể được chọn sao cho*

$$(d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0, \quad \forall d \in C(x^*), d \neq 0.$$

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh $C(x^*)$ là một nón cấp một. Ta có hai trường hợp sau:

- (1) Không có chỉ số $i_0 \in I(x^*)$ sao cho (1.16) đúng. Điều này nghĩa là x^* thỏa mãn điều kiện (SCS) và $C(x^*)$ là một không gian con véc tơ (Nhận xét 1.2 (ii)).

(2) Tồn tại chỉ một chỉ số $i_0 \in I(x^*)$ sao cho (1.16) đúng. Từ đó suy ra $d \in C(x^*)$ nếu và chỉ nếu

$$\nabla g_i(x^*)^t d = 0, \quad \forall i \in I(x^*) \setminus \{i_0\}, \nabla g_{i_0}(x^*)^t d \leq 0,$$

$$\nabla h_j(d)^t d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Nếu $C(x^*)$ không là không gian con thì tồn tại $d^0 \in C(x^*)$ sao cho $\nabla g_{i_0}(x^*)^t d^0 < 0$ và với mọi d khác thuộc $C(x^*)$, tồn tại $r \geq 0$ sao cho

$$\nabla g_{i_0}(x^*)^t d = r \nabla g_{i_0}(x^*)^t d^0, \nabla g_{i_0}(x^*)^t (d - r d^0) = 0,$$

$$\nabla g_i(x^*)^t (d - r d^0) = 0, \quad \forall i \in I(x^*) \setminus \{i_0\};$$

$$\nabla h_j(x^*)^t (d - r d^0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

và $w = d - r d^0$ nằm trong không gian véc tơ

$$E = \{w \mid \nabla g_i(x^*)^t w = 0, i \in I(x^*); \nabla h_j(x^*)^t w = 0, j = 1, 2, \dots, q\} \subset C(x^*).$$

Vậy, $C(x^*) = E + R_+ d^0$.

Từ đó ta đi đến kết luận (ii) kéo theo $C(x^*)$ là nón cấp một và từ Định lí 1.2, ta suy ra kết quả mong muốn. $\square$

Nhận xét 1.4.

- (i) Định lí 1.3 có thể chứng minh trực tiếp với các kết quả của Hestenes, nhưng sử dụng bổ đề Yuan mở rộng (Định lí 1.1 và Định lí 1.2) làm cho việc chứng minh rõ ràng hơn.
- (ii) Nếu (1.16) đúng với nhiều chỉ số tích cực $i \in I(x^*)$ thì nón tối hạn $C(x^*)$ không là nón cấp một và Định lí 1.2 không thể sử dụng được để chứng minh Định lí 1.3. Để thấy được điều này, ta giả thiết chẳng hạn $1 \in I(x^*)$ và $2 \in I(x^*)$ là các chỉ số tích cực thỏa mãn (1.5), và giả sử tồn tại $d^1 \in C(x^*)$ và $d^2 \in C(x^*)$ sao cho

$$\nabla g_1(x^*)^t d^1 < 0, \nabla g_2(x^*)^t d^1 = 0,$$

$$\nabla g_2(x^*)^t d^2 < 0, \nabla g_1(x^*)^t d^2 = 0.$$

Với bất kỳ $d \in C(x^*)$, ta có $r_1 \geq 0$ và $r_2 \geq 0$ sao cho

$$\nabla g_1(x^*)^t (d - r_1 d^1 - r_2 d^2) = \nabla g_1(x^*)^t (d - r_1 d^1) = \nabla g_1(x^*)^t (d) - r_1 \nabla g_1(x^*)^t (d^1) = 0,$$

$$\nabla g_2(x^*)^t(d - r_1d^1 - r_2d^2) = \nabla g_2(x^*)^t(d - r_2d^2) = \nabla g_2(x^*)^t(d) - r_2\nabla g_2(x^*)^t(d^2) = 0.$$

Điều này có nghĩa là $w = d - r_1d^1 - r_2d^2$ nằm trong không gian véc tơ

$$E = \{w \mid \nabla g_i(x^*)^tw = 0, i \in I(x^*); \nabla h_j(x^*)^tw = 0, j = 1, 2, \dots, q\} \subset C(x^*),$$

$$C(x^*) = E + \mathbb{R}_+d^1 + \mathbb{R}_+d^2,$$

và $C(x^*)$ không là nón cấp một.

Ví dụ 1.1. Xét bài toán tối ưu không lồi trong $\mathbb{R}^4$:

$$\min\{-x_1 \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\},$$

trong đó,

$$g_1(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + x_1, g_2(x) = -x_2^2 + x_1 - 2x_4,$$

$$g_3(x) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1 + x_4.$$

Với điểm chấp nhận được x ,

$$g_1(x) + g_2(x) + 2g_3(x) = 4x_1 \leq 0.$$

Điểm $x^* = (0, 0, 0, 0)$ là nghiệm tối ưu toàn cục,

$$\Lambda(x^*) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \geq 0 \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1; 2\lambda_2 = \lambda_3\}$$

là một đoạn thẳng bị chặn, x^* thỏa mãn điều kiện (SCS), và $C(x^*) = \{d = (d_1, d_2, d_3, d_4)^t \mid d_1 = d_4 = 0\}$. $\lambda = (1/4, 1/4, 1/2)$ là nhân tử duy nhất thỏa mãn điều kiện (CN2).

Một điều kiện đơn giản để $\Lambda(x^*)$ là một đoạn thẳng bị chặn được cho trong bổ đề sau.

Bổ đề 1.3. Giả sử x^* là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán (P_1) , thỏa mãn điều kiện (MFCQ) và số các ràng buộc bất đẳng thức tích cực nhiều nhất là 2. Khi đó, $\Lambda(x^*)$ là một đoạn thẳng bị chặn.

Chứng minh. Giả sử p_{x^*} là số các ràng buộc bất đẳng thức tích cực. Nếu $p_{x^*} \leq 1$ thì điều kiện (LICQ) đúng và $\Lambda(x^*)$ là tập một điểm. Nếu $p_{x^*} = 2$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $I(x^*) = \{1, 2\}$.

Giả thiết một trong các điều kiện sau đúng:

- (i) Tồn tại $(\lambda^0, \mu^0) \in \Lambda(x^*)$ sao cho $\lambda_1^0 = 0 = \lambda_2^0$.
- (ii) Tất cả $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$ thỏa mãn $\lambda_i > 0, i = 1, 2$.
- (iii) Tất cả $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$ thỏa mãn $\lambda_1 = 0$.
- (iv) Tất cả $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$ thỏa mãn $\lambda_2 = 0$.

Ta khẳng định được rằng $\Lambda(x^*)$ là tập một điểm: Giả sử (i) đúng; Khi đó,

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^0 \nabla h_j(x^*) = 0,$$

và với bất kỳ $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$ ta có

$$\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0.$$

Sự khác nhau giữa hai đẳng thức này và Bổ đề 1.1 cho ta

$$\lambda_1 = 0 = \lambda_2, \mu = \mu^0.$$

Lập luận tương tự cho các trường hợp còn lại.

Vậy, nếu $\Lambda(x^*)$ không là tập một điểm thì tồn tại $(\lambda^1, \mu^1) \in \Lambda(x^*)$ và $(\lambda^2, \mu^2) \in \Lambda(x^*)$ sao cho

$$\lambda_1^1 > 0, \lambda_2^1 = 0; \quad \lambda_1^2 = 0, \lambda_2^2 > 0,$$

$$\nabla f(x^*) + \lambda_1^1 \nabla g_1(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^1 \nabla h_j(x^*) = 0, \quad (1.17)$$

$$\nabla f(x^*) + \lambda_2^2 \nabla g_2(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^2 \nabla h_j(x^*) = 0. \quad (1.18)$$

Ta có x^* thỏa mãn điều kiện (MFCQ), các véc tơ của hệ

$$\{\nabla g_1(x^*), \nabla h_j(x^*), j = 1, 2, \dots, q\}$$

là độc lập tuyến tính và (λ^1, μ^1) là duy nhất. (λ^2, μ^2) cũng là duy nhất. Cho $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$. Khi đó,

$$\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0. \quad (1.19)$$

Nếu $\lambda_1 = 0$ hoặc $\lambda_2 = 0$ thì $(\lambda, \mu) = (\lambda^1, \mu^1)$ hoặc $(\lambda, \mu) = (\lambda^2, \mu^2)$. Giả sử $\lambda_1 > 0$ và $\lambda_2 > 0$. Với $t = \lambda_1/\lambda_1^1$, lấy (1.19) trừ đẳng thức (1.17) sau khi nhân với t ta được

$$(1-t)\nabla f(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) + \sum_{j=1}^q (\mu_j - t\mu_j^1) \nabla h_j(x^*) = 0. \quad (1.20)$$

Nếu $t = 1$ thì

$$\lambda_2 \nabla g_2(x^*) + \sum_{j=1}^q (\mu_j - \mu_j^1) \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$\lambda_2 = 0$, điều này không thể xảy ra. Nếu $t > 1$, chia hai vế của (1.20) cho $1-t$ ta được

$$\nabla f(x^*) + (\lambda_2/(1-t)) \nabla g_2(x^*) + \sum_{j=1}^q [(\mu_j - t\mu_j^1)/(1-t)] \nabla h_j(x^*) = 0. \quad (1.21)$$

$\lambda_2^2 = \lambda_2/(1-t) < 0$, điều này cũng không thể xảy ra. Vậy $0 < t < 1$, $\lambda_2^2 = \lambda_2/(1-t)$, $\mu_j^2 = (\mu_j - t\mu_j^1)/(1-t)$, $(\lambda^2, \mu^2) = [(\lambda, \mu) - t(\lambda^1, \mu^1)]/(1-t)$ và

$$(\lambda, \mu) = t(\lambda^1, \mu^1) + (1-t)(\lambda^2, \mu^2).$$

Điều này có nghĩa là mỗi $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$ là một tổ hợp lồi của (λ^1, μ^1) và (λ^2, μ^2) và $\Lambda(x^*)$ là một đoạn thẳng bị chặn. $\square$

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng điều kiện (i) của Định lý 1.3 không thể thay bởi điều kiện (MFCQ)

Ví dụ 1.2. Xét bài toán tối ưu trong $\mathbb{R}^3$:

$$\min\{x_3 \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\},$$

trong đó

$$g_1(x) = 2\sqrt{3}x_1x_2 - 2x_2^2 - x_3, g_2(x) = x_2^2 - 3x_1^2 - x_3,$$

$$g_3(x) = -2\sqrt{3}x_1x_2 - 2x_2^2 - x_3.$$

Ta có $x^* = (0, 0, 0)$ là nghiệm tối ưu toàn cục và thỏa mãn điều kiện (MFCQ). Tập hợp các nhân tử Lagrange

$$\Lambda(x^*) = \{\lambda \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

không là một đoạn thẳng. Nó tới hạn

$$C(x^*) = \{d = (d_1, d_2, d_3)^t \mid d_3 = 0\}$$

là một không gian véc tơ. Với các véc tơ tới hạn $d^1 = (1, 0, 0)^t$ và $d^2 = (0, 1, 0)^t$, không tồn tại $\lambda \in \Lambda(x^*)$ sao cho

$$(d^1)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda) d^1 \geq 0 \quad \text{và} \quad (d^2)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda) d^2 \geq 0.$$

1.3. Các điều kiện chính quy (MMF) và (GSCS) và điều kiện tối ưu cấp 2

Giả sử x^* là một điểm chấp nhận được. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng tồn tại số nguyên $p^* \leq p$ sao cho

$$g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, p^* \quad \text{và} \quad g_i(x^*) < 0, i = p^* + 1 \dots p.$$

Định nghĩa 1.8. Ta nói rằng một điểm chấp nhận được x^* thỏa mãn điều kiện hạng (RC) nếu các véc tơ của hệ

$$\{\nabla g_i(x^*), i = 1, 2, \dots, p^*; \nabla h_j(x^*), j = 1, 2, \dots, q\}$$

có $p^* + q - 1$ véc tơ độc lập tuyến tính.

Bổ đề 1.4. *Giả sử x^* là một điểm chấp nhận được sao cho*

- (i) $\Lambda(x^*)$ khác rỗng, và
- (ii) x^* thỏa mãn điều kiện (RC).

Khi đó, $\Lambda(x^)$ là một đoạn thẳng đóng.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh bổ đề trong trường hợp $\Lambda(x^*)$ không là tập một điểm và $p = p^*$. Lấy $(\lambda^*, \mu^*) \in \Lambda(x^*)$. Khi đó,

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0. \quad (1.22)$$

Với bất kỳ (λ, μ) khác thuộc $\Lambda(x^*)$, ta có

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0; \quad (1.23)$$

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \lambda_i^*) \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^q (\mu_j - \mu_j^*) \nabla h_j(x) = 0. \quad (1.24)$$

Đẳng thức (1.24) có nghĩa là ma trận Jacobi, $Dc(x^*)$, của các ràng buộc tích cực

$$c = (g_1, g_2, \dots, g_p, h_1, h_2, \dots, h_q)$$

thỏa mãn

$$Dc(x^*)^t((\lambda, \mu) - (\lambda^*, \mu^*)) = 0; (\lambda, \mu) - (\lambda^*, \mu^*) \in \text{Ker}(Dc(x^*)^t),$$

trong đó $Dc(x^*)^t$ là ma trận chuyển vị của $Dc(x^*)$. Ta đã biết rằng

$$\text{Ker}(Dc(x^*)^t) = (R(Dc(x^*)))^\perp,$$

ở đây $(R(Dc(x^*)))^\perp$ là không gian trực giao đối với miền giá trị của $Dc(x^*)$. Số chiều của $R(Dc(x^*))$ là $p^* + q - 1$, $(R(Dc(x^*)))^\perp$ là không gian một chiều, và tồn tại $z \in \mathbb{R}^{p+q}$, $z \neq 0$, sao cho

$$\text{Ker}(Dc(x^*)^t) = (R(Dc(x^*)))^\perp = \mathbb{R}z$$

và bất kỳ $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*)$ đều thỏa mãn $(\lambda, \mu) - (\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}z$. Vì vậy,

$$\Lambda(x^*) \subseteq (\lambda^*, \mu^*) + \mathbb{R}z.$$

Đặt $J = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid (\lambda^*, \mu^*) + \alpha z \in \Lambda(x^*)\}$. $\Lambda(x^*)$ là đóng và lồi, J cũng là đóng và lồi. Vì vậy, nó là một khoảng đóng và $\Lambda(x^*) = (\lambda^*, \mu^*) + Jz$ là một đoạn thẳng đóng. $\square$

Bổ đề 1.5. *Giả sử x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán (P_1) , sao cho*

- (i) $\Lambda(x^*)$ khác rỗng và bị chặn, và
- (ii) x^* thỏa mãn điều kiện (RC).

Khi đó, tồn tại $b \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^{p+q}$ và một điểm cực biên $(\lambda^, \mu^*) \in \Lambda(x^*)$ sao cho*

$$\Lambda(x^*) = (\lambda^*, \mu^*) + [0, b]z.$$

Chứng minh. $\Lambda(x^*)$ là lồi và compact và có ít nhất một điểm cực biên (λ^*, μ^*) . Từ Bổ đề 1.4 và Nhận xét 1.1, có thể thấy rằng $\Lambda(x^*) = (\lambda^*, \mu^*) + [a, b]z$ với véc tơ z nào đó thuộc $\mathbb{R}^{p+q}$ và các số thực $a \leq b$ nào đó. Giả sử $a < b$. Ta khẳng định rằng $0 \notin]a, b[$: Trong trường hợp ngược lại, với $\varepsilon \in]0, b[, \varepsilon < -a$, ta có

$$(\lambda^1, \mu^1) = (\lambda^*, \mu^*) + \varepsilon z \in \Lambda(x^*); (\lambda^2, \mu^2) = (\lambda^*, \mu^*) - \varepsilon z \in \Lambda(x^*),$$

và

$$(\lambda^*, \mu^*) = [(\lambda^1, \mu^1) + (\lambda^2, \mu^2)]/2.$$

Điều này mâu thuẫn với (λ^*, μ^*) là một điểm cực biên của $\Lambda(x^*)$. Từ đó suy ra $0 \notin]a, b[$. $(\lambda^*, \mu^*) \in \Lambda(x^*)$ và $a = 0$ hoặc $b = 0$. Thay z bởi $-z$ nếu cần, ta có thể giả thiết $a = 0$. $\square$

Định nghĩa 1.9. Ta nói rằng điểm chấp nhận được x^* thỏa mãn điều kiện bù chặt suy rộng (GSCS) nếu tồn tại nhiều nhất một chỉ số $i_0 \in I(x^*)$ sao cho

$$(\lambda, \mu) \in \Lambda(x^*) \implies \lambda_{i_0} = 0.$$

Định nghĩa 1.10. Ta nói rằng điểm chấp nhận được x^* thỏa mãn điều kiện chính quy (MMF) nếu x^* thỏa mãn các điều kiện (RC) và (MFCQ).

Nhận xét 1.5. Sẽ rất hữu ích nếu có một số dạng tương đương của điều kiện (MMF). Chú ý rằng các khẳng định sau đúng.

- (i) x^* thỏa mãn điều kiện (LICQ) nếu và chỉ nếu không tồn tại $(\lambda, \mu) \neq 0$ sao cho (1.2) đúng.
- (ii) x^* thỏa mãn điều kiện (MFCQ) nếu và chỉ nếu không tồn tại $(\lambda, \mu) \neq 0$ sao cho (1.1) và (1.2) đúng.
- (iii) Ta tìm một tiêu chuẩn giống như (1.1) hoặc (1.2), đặc trưng cho điều kiện (MMF).

Giả sử $x^* \in F$ và $\{i_1, i_2\} \subset I(x^*)$. Khi đó, x^* là điểm chấp nhận được của bài toán tối ưu sau:

$$(P_2) \quad \min\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0, i = i_1, i_2, g_i(x) = 0, i \in I(x), i \neq i_1, i_2, h(x) = 0\}.$$

Trong bài toán (P_2) , tất các bất đẳng thức tích cực của bài toán (P_1) , trừ i_1 và i_2 , được chuyển thành đẳng thức. Bổ đề sau đây chỉ ra rằng x^* thỏa mãn điều kiện (MMF) nếu và chỉ nếu tồn tại $\{i_1, i_2\} \subset I(x^*)$ sao cho x^* thỏa mãn điều kiện (MFCQ) đối với bài toán (P_2) .

Bổ đề 1.6. *Giả sử x^* là một điểm chấp nhận được với nhiều hơn một ràng buộc bất đẳng thức tích cực. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

(i) x^* thỏa mãn điều kiện (MMF).

(ii) Tồn tại i_1 và i_2 thuộc $I(x^*)$ sao cho không tồn tại $(\lambda, \mu) \neq 0$ thỏa mãn

$$\lambda_{i_1} \geq 0, \lambda_{i_2} \geq 0, \quad (1.25)$$

và

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0. \quad (1.26)$$

(iii) Tồn tại i_1 và i_2 thuộc $I(x^*)$ sao cho các véc tơ:

$$\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*) \setminus \{i_1, i_2\}, \quad \nabla h_j(x^*), \quad \forall j,$$

là độc lập tuyến tính và tồn tại véc tơ d^* sao cho

$$\nabla g_{i_1}(x^*)^t d^* < 0, \quad \nabla g_{i_2}(x^*)^t d^* < 0, \quad (1.27)$$

$$\nabla g_{i_1}(x^*)^t d^* = 0, i \in I(x^*) \setminus \{i_1, i_2\}, \quad \nabla h_j(x^*)^t d^* = 0, \quad \forall j. \quad (1.28)$$

Chứng minh. Ta bắt đầu chỉ ra (i) kéo theo (ii): Nếu các véc tơ của hệ

$$C = \{\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*), \quad \nabla h_j(x^*) \quad j = 1, 2, \dots, q\}$$

là độc lập tuyến tính, thì bất kỳ i_1 và i_2 thuộc $I(x^*)$ đều thỏa mãn (ii). Giả sử các véc tơ của C không độc lập tuyến tính. Khi đó, tồn tại $i_1 \in I(x^*)$ sao cho

$$\nabla g_{i_1}(x^*) = \sum_{i \in I(x^*) \setminus \{i_1\}} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*).$$

Nếu tất cả $i \in I(x^*) \setminus \{i_1\}$ thỏa mãn $\lambda_i^* \leq 0$, thì

$$\nabla g_{i_1}(x^*) - \sum_{i \in I(x^*) \setminus \{i_1\}} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0.$$

Do điều kiện (MFCQ) và Bổ đề 1.1, ta có

$$\lambda_i^* = 0, \quad \forall i \in I(x^*); \quad \mu_j^* = 0, j = 1, 2, \dots, q.$$

Điều này mâu thuẫn với $\lambda_{i_1}^* = 1$. Vì vậy, tồn tại $i_2 \in I(x^*) \setminus \{i_1\}$ sao cho $\lambda_{i_2}^* > 0$. Do điều kiện (RC), các véc tơ của hệ

$$B = \{\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*) \setminus \{i_1\}, \quad \nabla h_j(x^*), \quad j = 1, 2, \dots, q\}$$

là độc lập tuyến tính và các thành phần (λ^*, μ^*) của $\nabla g_i(x^*)$ trong B là duy nhất. Giả sử (λ, μ) thỏa mãn (1.25) và (1.26). Nếu $\lambda_{i_1}^* > 0$ thì $-\lambda_{i_2}/\lambda_{i_1} \leq 0$ và đẳng thức phải xảy ra với $\lambda_{i_2} > 0$. Điều này là không thể xảy ra. Vì vậy, $\lambda_{i_1} = 0$ và tất cả các thành phần khác của (λ, μ) triệt tiêu.

Ta chứng minh rằng (ii) kéo theo (iii): Theo Bổ đề 1.1, (ii) có nghĩa là với bài toán (P_2) , x^* thỏa mãn điều kiện (MFCQ), đây chính là (iii). Như vậy, (ii) và (iii) là tương đương.

Để chứng minh (ii) kéo theo (i) ta chú ý rằng theo Bổ đề 1.1, x^* thỏa mãn điều kiện (MFCQ) cho bài toán (P_1) . Từ (1.26) ta suy ra các véc tơ của hệ

$$B = \{\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*) \setminus \{i_1\}, \quad \nabla h_j(x^*) \quad j = 1, 2, \dots, q\}$$

là độc lập tuyến tính và điều kiện (RC) đúng. □

Do đó, kết quả chính (Định lý 1.3) của chương này có thể phát biểu với điều kiện (MMF) và điều kiện (GSCS) như sau:

Định lý 1.4. *Giả sử x^* là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1) sao cho*

- (i) x^* thỏa mãn điều kiện (MMF),
- (ii) x^* thỏa mãn điều kiện (GSCS).

Khi đó, tồn tại $(\lambda^*, \mu^*) \in \Lambda(x^*)$ sao cho

$$(d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0, \quad \forall d \in C(x^*).$$

Hơn nữa, nếu x^* thỏa mãn điều kiện đủ (SC2) thì (λ^*, μ^*) có thể được chọn sao cho

$$(d)^t \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0, \quad \forall d \in C(x^*), d \neq 0.$$

Chương 2

Điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán có các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập

Chương 2 trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn của bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập, và bài toán tối ưu với ràng buộc dạng bao hàm thức $F(x) \in C$. Các kết quả được trình bày trong chương này là của Arutyunov - Pereira [3].

2.1. Các khái niệm và các kết quả có liên quan

Giả sử X là một không gian véc tơ, tập $C \subseteq X$, các ánh xạ $F_1 : X \rightarrow \mathbb{R}^{k_1}$, $F_2 : X \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$ và hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Xét bài toán tối ưu sau:

$$(P_3) \quad \min\{f(x) \mid x \in C, \quad F_1(x) \leq 0, F_2(x) = 0\} \quad (2.1)$$

Mục tiêu chính của chúng ta là dẫn các điều kiện cần cực trị cấp 1 và 2 cho bài toán này với một số giả thiết về tính trơn và các tính chất của tập C . Sau đây là một số ký hiệu và các giả thiết được dùng về sau.

Cho $k = k_1 + k_2$ và $F = (F_1, F_2) : X \rightarrow Y = \mathbb{R}^k$. Ta xét tôpô hữu hạn trong không gian véc tơ X . Ký hiệu $\mathcal{M}$ là tập hợp tất cả các không gian con tuyến tính hữu hạn chiều $M \subseteq X$. Một tập là mở theo tôpô hữu hạn nếu và chỉ nếu giao của nó với bất kỳ $M \in \mathcal{M}$ là mở theo tôpô véc tơ Hausdorff duy nhất của M .¹ Ta ký hiệu tôpô hữu hạn là τ . Nếu không gian véc tơ X là vô hạn chiều thì khi trang bị nó tôpô hữu hạn τ , nói chung, không biến nó thành một không gian véc tơ tôpô bởi vì phép cộng không liên tục (xem [1]). Mặt khác, tôpô hữu hạn là tôpô mạnh hơn tất cả các tôpô mà biến

¹Chú ý rằng bất kỳ một không gian véc tơ hữu hạn chiều đều được trang bị một tôpô véc tơ Hausdorff duy nhất.

X thành một không gian véc tơ tôpô. Do đó, một cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn là cực tiểu yếu nhất trong tất cả các loại cực tiểu được xét.

Cố định một điểm $x_0 \in X$. Ta giả thiết rằng các hàm f và F là hai lần khả vi liên tục trong một lân cận của x_0 theo tôpô hữu hạn τ . Điều này có nghĩa là với bất kỳ $M \in \mathcal{M}$ chứa x_0 , hạn chế của f và F trên M là hai lần khả vi liên tục trong một lân cận nào đó (phụ thuộc vào M) của x_0 . Do đó, tồn tại một phiếm hàm tuyến tính $a \in X^*$ (X^* là không gian đối ngẫu đại số của X), một toán tử tuyến tính $A : X \rightarrow Y$, một dạng song tuyến tính $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, một ánh xạ song tuyến tính $Q : X \times X \rightarrow Y$, và các ánh xạ $\alpha_0 : X \rightarrow \mathbb{R}, \alpha : X \rightarrow Y$ sao cho $\forall x \in X$,

$$f(x) = f(x_0) + \langle a, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}q[x - x_0]^2 + \alpha_0(x - x_0),$$

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + \frac{1}{2}Q[x - x_0]^2 + \alpha(x - x_0),$$

và với bất kỳ $M \in \mathcal{M}$, sao cho $x \in M$,

$$\frac{\alpha_0(x - x_0)}{\|x - x_0\|_M^2} \rightarrow 0 \quad \text{và} \quad \frac{|\alpha(x - x_0)|}{\|x - x_0\|_M^2} \rightarrow 0 \quad \text{khi} \quad x \rightarrow x_0,$$

ở đây $\|\cdot\|_M$ là một chuẩn hữu hạn chiều trong M .

Ký hiệu một ánh xạ song tuyến tính B bởi $B[x, x]$ hoặc $B[x]^2$. Các ánh xạ a và q được ký hiệu tương ứng là $(\partial f / \partial x)(x_0)$ và $(\partial^2 f / \partial x^2)(x_0)$, gọi là các đạo hàm cấp một và cấp hai của f .

Ta giả thiết tập C đóng theo tôpô hữu hạn.

Các điều kiện cần cấp 1 cho bài toán (P_3) được sử dụng dưới đây là dựa trên cơ sở nón pháp tuyến Mordukhovich của tập C tại $x_0 \in C$. Lấy bất kỳ không gian con tuyến tính $M \in \mathcal{M}$ sao cho $x_0 \in C \cap M$. Nón pháp tuyến Mordukhovich của tập $C \cap M$ tại x_0 được ký hiệu là $N^M(x_0, C)$. Với $x \in M$, ta đặt $W(x, M \cap C) = \{w \in M \cap C : \|x - w\|_M = \text{dist}_M(x, C)\}$, ở đây $\text{dist}_M(x, C) = \inf_{\xi \in C \cap M} \{\|\xi - x\|_M\}$ ký hiệu hàm khoảng cách.

Ta ký hiệu cone A và $\text{cl } A$ là bao nón và bao đóng của tập A . Xét bao nửa liên tục

trên của tập $\text{cone}(x - W(x, M \cap C)) = \bigcup_{r>0} \{r(x - W(x, M \cap C))\}$ khi $x \rightarrow x_0, x \in M$:

$$\begin{aligned} N^M(x_0, C) &= \bigcap_{\varepsilon>0} \text{cl} \left[\bigcup_{\substack{x \in M \\ \|x - x_0\|_M \leq \varepsilon}} \text{cone}(x - W(x, M \cap C)) \right] \\ &:= \limsup_{\substack{x \in M \\ x \rightarrow x_0}} \text{cone}(x - W(x, M \cap C)). \end{aligned}$$

Ta đặt

$$N(x_0, C) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} N^M(x_0, C).$$

Nón pháp tuyến Mordukhovich $\text{cone } N(x_0, C)$ là nhỏ nhất và tự nhiên nhất để dẫn đến các điều kiện cần tối ưu. Thật vậy, $N^M(x, C)$ là nửa liên tục trên trên $C \cap M$ và nếu x_0 là nghiệm của bài toán cực tiểu một hàm trơn f trên tập C , thì $(\partial f / \partial x)(x_0) \in -N(x_0, C)$ (xem [11]). Hơn nữa, $N(x_0, C)$ là đóng nhưng có thể không lồi. Đồng thời, bao đóng của bao lồi của nó trùng với nón pháp tuyến Clarke (xem [11]).

Ta xét các biến phân cấp 2 của tập C tại điểm $x \in C$ theo phương d :

$$T_{C \cap M}^2(x, d) = \{w \in X : \text{dist}_M(x + \varepsilon d + \frac{1}{2}\varepsilon^2 w, C) = o(\varepsilon^2), \varepsilon \geq 0\},$$

$$O_{C \cap M}^2(x, d) = \{x \in X : \exists \{\varepsilon_n\} \downarrow 0 \text{ sao cho } \text{dist}_M(x + \varepsilon_n d + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 w, C) = o(\varepsilon_n^2)\},$$

ở đây $M \in \mathcal{M}$ là một không gian con tuyến tính hữu hạn chiều bất kỳ chứa x và d .

Các tập $T_{C \cap M}^2(x, d)$ và $O_{C \cap M}^2(x, d)$ được gọi, tương ứng, là các tập tiếp tuyến cấp 2 trong và ngoài. Cả hai tập này đều là tập đóng, $T_{C \cap M}^2(x, d) \subseteq O_{C \cap M}^2(x, d)$, và $O_{C \cap M}^2(x, d) \neq \emptyset$ chỉ nếu $d \in T_{C \cap M}(x)$, trong đó

$$T_{C \cap M}(x) = \{d \in M : \exists \varepsilon_n \downarrow 0, \text{dist}_M(x + \varepsilon_n d, C \cap M) = o(\varepsilon_n)\}$$

là nón tiếp liên của tập $C \cap M$ tại điểm x . Hơn nữa, nếu tập C lồi thì tập tiếp tuyến trong $T_{C \cap M}^2(x, d)$ lồi, nhưng tập tiếp tuyến ngoài $O_{C \cap M}^2(x, d)$ có thể không lồi (xem [6]). Đặt

$$T_C^2(x, d) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} T_{C \cap M}^2(x, d), \quad O_C^2(x, d) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} O_{C \cap M}^2(x, d),$$

$$T_C(x) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} T_{C \cap M}(x).$$

Nếu tập C lồi thì tập tiếp tuyến trong $T_C^2(x, d)$ cũng lồi.

Định nghĩa 2.1. Một không gian con tuyến tính $\mathcal{I} \subseteq X$ thỏa mãn $x + \mathcal{I} \subseteq C, \forall x \in C$, được gọi là không gian con tuyến tính bất biến (ILS) đối với C .

Với C là một tập đóng, nói chung một không gian con bất biến không là duy nhất. Rõ ràng, bất kỳ không gian con tuyến tính của một không gian con bất biến cũng là một không gian con tuyến tính bất biến. Chẳng hạn, $\{0\}$ là không gian con bất biến đối với bất kỳ tập đóng C .

Với bất kỳ $x \in C$, đặt $\mathcal{I}_C(x) = \bigcap_{r \neq 0} r(C - x)$, ở đây giao lấy với tất cả số thực $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$.

Mệnh đề 2.1. Giả sử C là một tập lồi. Khi đó, với mỗi $x \in C$, $\mathcal{I}_C(x)$ là không gian con bất biến cực đại đối với C , tức là, $\mathcal{I}_C(x)$ là một không gian con bất biến, và mọi không gian con bất biến đều nằm trong $\mathcal{I}_C(x)$ (do đó, $\mathcal{I}_C(x)$ không phụ thuộc vào x).

Chứng minh. Lấy điểm $\bar{x} \in C$. Ta chứng minh rằng

$$\bar{x} + h \in C, \quad \forall h \in \mathcal{I}_C(x). \quad (2.2)$$

Thật vậy, với bất kỳ $\delta \in (0, 1), h \in \mathcal{I}_C(x)$, ta đặt $x(\delta) = \delta\bar{x} + (1 - \delta)(x + (1 - \delta)^{-1}h)$. Khi đó, $x(\delta) \in C, \forall \delta \in (0, 1)$, bởi vì $x + (1 - \delta)^{-1}h \in C$ và C lồi. Hơn nữa, ta có $x(\delta) \rightarrow \bar{x} + h$ khi $\delta \uparrow 1$, và do đó, $\bar{x} + h \in C$, bởi vì tập C đóng. Ta nhận được (2.2) và do đó, $\mathcal{I}_C(x)$ là một không gian con bất biến. Đồng thời, bất kỳ không gian con bất biến đối với C hiển nhiên nằm trong $\mathcal{I}_C(x)$. Mệnh đề đã được chứng minh. $\square$

Chú ý rằng, nếu C là một nón lồi thì $\mathcal{I} = C \cap (-C)$ là không gian con bất biến cực đại đối với C .

Xét nón $\mathcal{K} := \mathcal{K}(x_0)$ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{K}(x_0) = \left\{ h \in T_C(x_0) : \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_0), h \right\rangle \leq 0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0)h = 0 \text{ và } \frac{\partial F_{1,j}}{\partial x}(x_0)h \leq 0, \forall j \text{ sao cho } F_{1,j}(x_0) = 0 \right\}.$$

Ở đây, $F_{1,j}$ là các tọa độ của hàm véc tơ F_1 . Nón $\mathcal{K}$ hiển nhiên là khác rỗng (vì nó chứa phần tử 0) và lồi nếu C lồi. Nón $\mathcal{K}(x_0)$ được gọi là nón tới hạn của bài toán (P_3) tại điểm x_0

Cho $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ với $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, \lambda_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$ và xét hàm Lagrange tổng quát

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \langle \lambda_1, F_1(x) \rangle + \langle \lambda_2, F_2(x) \rangle.$$

Ta ký hiệu $\Lambda = \Lambda(x_0)$ là tập các nhân tử Lagrange tổng quát λ tương ứng với điểm x_0 theo quy tắc nhân tử Lagrange (xem [11])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda) \in -N(x_0, C) \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \langle \lambda_1, F_1(x_0) \rangle = 0, \quad \|\lambda\| = 1 \end{array} \right\}. \quad (2.3)$$

Để cho thuận tiện, ta giả thiết rằng $F_1(x_0) = 0$. Điều này luôn có thể làm được bằng cách bỏ đi các thành phần không tích cực của các ràng buộc bất đẳng thức.

Lấy không gian con tuyến tính bất kỳ $M \subseteq X$ và xét tập tất cả các nhân tử Lagrange $\lambda \in \Lambda$ mà tồn tại một không gian con tuyến tính $\Pi \subseteq X$ (phụ thuộc vào λ) sao cho

$$\text{codim}_M \Pi \leq k, \quad \Pi \subseteq \text{Ker} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0, \quad \forall x \in \Pi, \quad (2.4)$$

trong đó codim_M là số đối chiều của không gian con M . Ta ký hiệu tập các nhân tử Lagrange như vậy là $\Lambda(x_0, M)$. Mỗi tập $\Lambda(x_0, M)$ là compact (nhưng có thể rỗng).

Với $T \subseteq X$ là một tập hợp cho trước, ta ký hiệu $\sigma(\cdot, T)$ là hàm tựa của nó, tức là, $\sigma(x^*, T) = \sup_{x \in T} \langle x^*, x \rangle, x^* \in X^*$.

2.2. Nguyên lí cực trị

Định lí 2.1 (Nguyên lí cực trị). *Giả sử x_0 là điểm cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn τ của bài toán (P_3) .*

Khi đó, với mỗi không gian con bất biến $\mathcal{I}$ đối với C , tập $\Lambda(x_0, \mathcal{I})$ là khác rỗng. Hơn nữa, với mỗi $h \in \mathcal{K}(x_0)$ và bất kỳ tập lồi $\mathcal{T}(h) \subseteq O_C^2(x_0, h)$,

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] - \sigma \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), \mathcal{T}(h) \right) \right) \geq 0. \quad (2.5)$$

Ở đây, $\Lambda_a = \text{conv } \Lambda(x_0, \mathcal{I})$ và conv ký hiệu bao lồi của một tập hợp.

Nhận xét 2.1. Trường hợp $C = X$, Định lí 2.1 có trong [2].

Nhận xét 2.2. Cho h thuộc không gian con bất biến nào đó đối với C . Khi đó, $0 \in O_C^2(x_0, h)$, và do đó, bằng cách lấy $\mathcal{T}(h) = \{0\}$ và sử dụng (2.5), ta nhận được

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0. \quad (2.6)$$

Nhận xét 2.3. Cho C là tập lồi. Khi đó,

$$\sigma \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), \mathcal{T}(h) \right) \leq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (2.7)$$

Thật vậy, do $h \in \mathcal{K}(x_0)$, ta có $\langle (\partial \mathcal{L} / \partial x)(x_0, \lambda), h \rangle \leq 0$. Do tính chất lồi của tập C suy ra $-N(x, C) = (T_C(x))^*$, $\forall x \in C$, và do đó, theo (2.3), ta có

$$(\partial \mathcal{L} / \partial x)(x_0, \lambda) \in (T_C(x_0))^*.$$

Ở đây, K^* là ký hiệu nón đối ngẫu (liên hợp) dương của nón $K \subseteq X$

$$K^* = \{\xi \in X^* : \langle \xi, x \rangle \geq 0, \forall x \in K\}.$$

Với mỗi $w \in O_C^2(x_0, h)$, ta có $\varepsilon_n h + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 w + o(\varepsilon_n^2) \in C - x_0$. Do đó, bằng cách sử dụng bất đẳng thức nhận được ở trên và bao hàm thức $C - x_0 \subseteq T_C(x_0)$ ta có

$$\varepsilon_n^2 \langle (\partial \mathcal{L} / \partial x)(x_0, \lambda), w \rangle + o(\varepsilon_n^2) \geq 0.$$

Vì vậy, do tính tùy ý của w ta suy ra (2.7). Ta cũng chứng minh được, nếu tập C lồi thì điều kiện (2.6) trở nên mạnh hơn (2.5).

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng, nếu tập C không lồi thì số hạng $\sigma \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), \mathcal{T}(h) \right)$ có thể dương chặt.

Ví dụ 2.1. Đặt

$$C = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^l \geq x_2^m\}.$$

Ở đây, l và m là các số nguyên dương và $l \leq 2m$. Lấy $h = (1, 0)$. Dễ dàng thấy rằng tập tiếp tuyến ngoài cấp 2 $O_C^2(0, h)$ chứa một hình cầu δB , $B = \{w \in \mathbb{R}^2 : \|w\| \leq 1\}$, với $\delta > 0$. Rõ ràng, $\sigma(\zeta, \delta B) > 0$, $\forall \zeta \neq 0$.

Hiển nhiên, với tập C và véc tơ h xây dựng ở trên, điều kiện (2.5) là mạnh hơn điều kiện (2.6) nếu $(\partial \mathcal{L} / \partial x)(x_0, \lambda) \neq 0$.

Nhận xét 2.4. Cho C là một nón lồi. Giả thiết rằng ít nhất một trong các quan hệ sau đây đúng:

- $h \in C + \text{span}\{x_0\}$ (nói riêng nếu $x_0 = 0$).
- Nón C có một số diện hữu hạn.

Khi đó, bằng cách sử dụng Nhận xét 2.3, ta có

$$\sigma(x^*, T_C^2(x_0, h)) = 0, \forall x^* \in N_C(x_0).$$

Chúng minh Định lý 2.1 bằng cách bỏ đi các ràng buộc $F_1(x) \leq 0$ và $F_2(x) = 0$ bằng phương pháp hàm phạt. Vai trò trung tâm trong chứng minh là khẳng định sau đây cho phép ta chuyển qua giới hạn.

Định lý 2.2. *Giả sử X là một không gian Banach và $\{\Pi_n\}$ là một dãy các không gian con tuyến tính đóng của X sao cho $\text{codim } \Pi_n \leq k, \forall n$.*

Khi đó, tồn tại một không gian con tuyến tính đóng $\Pi \subseteq X$ sao cho

$$\text{codim } \Pi \leq k, \quad \Pi \subseteq \text{Ls}\{\Pi_n\}.$$

*Từ đây và về sau, ta ký hiệu Ls là giới hạn tôpô trên của một dãy các tập hợp.*²

Định lý 2.3. *Giả sử $A_n : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ là một dãy các toán tử tuyến tính liên tục, hội tụ theo chuẩn đến một toán tử tuyến tính A . Khi đó, tồn tại một không gian con tuyến tính đóng $\Pi \subseteq X$ sao cho*

$$\text{codim } \Pi \leq k, \quad \Pi \subseteq \text{Ls}\{\text{Ker } A_n\}, \quad \Pi \subseteq \text{Ker } A.$$

Định lý 2.3 chứng minh bằng cách đặt $\Pi_n = \text{Ker } A_n$ trong Định lý 2.2.

Chứng minh (Định lý 2.1).

Ta chia việc chứng minh Định lý 2.1 ra làm 4 bước. Trước hết, trong Bước 1, ta chứng minh rằng tập Λ_a khác rỗng trong trường hợp không gian X hữu hạn chiều.

²Chú ý rằng, giới hạn tôpô trên của một dãy các tập hợp $\{\Pi_n\}$ là tập hợp tất cả các điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$ sao cho $x_n \in \Pi_n, \forall n$.

Sau đó, bằng cách sử dụng các kết quả có được ở trên, ta chỉ ra rằng trong trường hợp X là không gian hữu hạn chiều, với mỗi $h \in \mathcal{K}(x_0)$ và $w \in O_C^2(x_0, h)$, $\exists \lambda \in \Lambda_a$ sao cho

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), w \right\rangle \geq 0. \quad (2.8)$$

Trong Bước 3, ta chứng minh (2.8) một cách tổng quát và đầy đủ, tức là, ta bỏ giả thiết $\dim X < \infty$. Cuối cùng, trong Bước 4, ta chứng minh (2.5)

Bước 1.

Ta giả thiết rằng X là không gian hữu hạn chiều. Ta định nghĩa tích vô hướng trong X và biến nó thành một không gian Euclide. Ta sẽ bỏ đi các ràng buộc $F_1(x) \leq 0$, $F_2(x) = 0$ trong bài toán đang xét bằng phương pháp hàm phạt. Với mỗi số nguyên dương i , ta đặt

$$f_i(x) = f(x) + i \left(\sum_{j=1}^{k_1} (F_{1,j}^+(x))^4 + |F_2(x)|^4 \right) + |x - x_0|^4,$$

trong đó, $a^+ = \max\{a, 0\}$. Xét họ các bài toán cực tiểu sau, gọi là các i -bài toán,

$$f_i(x) \rightarrow \min, \quad x \in C, \quad |x - x_0| \leq \delta.$$

Ở đây, $\delta > 0$ được chọn sao cho x_0 là một cực tiểu đối với bài toán ban đầu trong một δ -lân cận của điểm x_0 (nhắc lại rằng không gian X được giả thiết là không gian hữu hạn chiều ở bước này, và do đó, δ là tồn tại). Nghiệm của i -bài toán được ký hiệu là x_i .

Ta chứng minh rằng $x_i \rightarrow x_0$, khi $i \rightarrow \infty$. Thật vậy, bằng cách sử dụng X là không gian hữu hạn chiều và bằng cách trích ra một dãy con (nếu cần thiết), ta có được sự hội tụ của dãy $\{x_i\}$ đến $\bar{x}$ nào đó.

Bây giờ, ta chỉ ra rằng $\bar{x} = x_0$. Thật vậy, từ $f_i(x_i) \leq f_i(x_0) = f(x_0)$, $\forall i$, ta suy ra

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} F_{1,j}(x_i) \leq 0, \quad \forall j \quad \text{và} \quad F_2(x_i) \rightarrow 0, \quad \text{khi} \quad i \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Từ đây suy ra $F_1(\bar{x}) \leq 0$ và $F_2(\bar{x}) = 0$. Hơn nữa, bất đẳng thức đầu tiên trong (2.9) kéo theo

$$f(x_i) + |x_i - x_0|^4 \leq f(x_0), \quad \forall i.$$

Do đó,

$$f(\bar{x}) + |\bar{x} - x_0|^4 \leq f(x_0) \leq f(\bar{x}).$$

Như vậy, $\bar{x} = x_0$.

Ta có $|x_i - x_0| < \delta$, cho nên ràng buộc $|x - x_0| \leq \delta$ là ràng buộc không tích cực. Nói cách khác, i -bài toán là bài toán hữu hạn chiều địa phương với ràng buộc $x \in C$. Điều kiện cần cấp 1 (xem [10]) cho bài toán này có dạng

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(x_i) \in -N(x_i, C). \quad (2.10)$$

Ta sẽ chứng minh điều kiện cần cấp 2 cho bài toán này:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(x_i)[x, x] \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{I}. \quad (2.11)$$

Thật vậy, theo định nghĩa của không gian con bất biến, ta có

$$x_i + \varepsilon x \in C, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad \forall \varepsilon. \quad (2.12)$$

Định nghĩa hàm vô hướng ϕ như sau: $\phi(\varepsilon) = f_i(x_i + \varepsilon x)$. Hàm ϕ này là trơn và, do (2.12), nó đạt cực tiểu địa phương tại $\varepsilon = 0$. Vì vậy, $\phi''(0) \geq 0$. Tính đạo hàm cấp 2 của ϕ ta được

$$\phi''(0) = (\partial^2 f_i / \partial x^2)(x_i)[x, x] \geq 0.$$

Do đó, (2.11) được chứng minh.

Bây giờ, ta diễn giải các điều kiện (2.10), (2.11) dưới ngôn ngữ của dữ kiện bài toán. Cho $\bar{\lambda}_{1,i}^j = 4iF_{1,j}^+(x_i)|F_{1,j}^+(x_i)|^2$, $\bar{\lambda}_{1,i} = (\bar{\lambda}_{1,i}^1, \dots, \bar{\lambda}_{1,i}^{k_1})$, $\bar{\lambda}_{2,i} = 4iF_2(x_i)|F_2(x_i)|^2$, $\lambda_{0,i} = (1 + |\bar{\lambda}_{1,i}|^2 + |\bar{\lambda}_{2,i}|^2)^{-1/2}$, $\lambda_{1,i} = \lambda_{0,i}\bar{\lambda}_{1,i}$, $\lambda_{2,i} = \lambda_{0,i}\bar{\lambda}_{2,i}$, và $\lambda_i = (\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \lambda_{2,i})$.

Khi đó, các điều kiện (2.10) và (2.11) có dạng

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_i, \lambda_i) + 1(i) \in -N(x_i, C), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_i, \lambda_i)[x, x] + 12i\lambda_{0,i} \left(|F_1^+(x_i)|^2 \left| \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_i)x \right|^2 + |F_2(x_i)|^2 \left| \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_i)x \right|^2 \right) \\ + 1(i) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{I} \quad \text{với} \quad |x| \leq 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ở đây, $1(i)$ là dãy hội tụ về 0. Theo cách xây dựng,

$$|\lambda_i| = 1, \quad \lambda_{0,i} \geq 0, \quad \lambda_{1,i} \geq 0, \quad \forall i. \quad (2.15)$$

Bằng cách trích ra một dãy con, ta có được $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ sao cho $\lambda_i \rightarrow \lambda$, khi $i \rightarrow \infty$. Chuyển qua giới hạn trong (2.13) và (2.15) và sử dụng tính nửa liên tục trên trên tập C của ánh xạ đa trị $N(\cdot, C)$, ta rút ra $\lambda \in \Lambda$.

Ta sẽ chứng minh tồn tại một không gian con tuyến tính Π , thỏa mãn (2.4). Với mục đích đó, ta định nghĩa các toán tử tuyến tính $A_i : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^k$ bởi công thức $A_i x = F'(x_i)x$. Theo Định lý 2.3, tồn tại một không gian con tuyến tính $\Pi \subseteq \mathcal{I}$ sao cho

$$\Pi \subseteq \text{Ker } F'(x_0), \quad \Pi \subseteq \text{Ls}\{\text{Ker } A_i\}, \quad \text{codim}_{\mathcal{I}} \Pi \leq k.$$

Lấy bất kỳ một véc tơ $h \in \Pi$. Theo định nghĩa giới hạn tôpô trên, tồn tại dãy $\{h_i\}$, với $h_i \in \mathcal{I} \cap \text{Ker } F'(x_i)$, sao cho, bằng cách trích ra một dãy con, ta có được $h_i \rightarrow h$, khi $i \rightarrow \infty$. Thay $x = h_i$ vào (2.14) và qua giới hạn ta nhận được (2.4). Do đó, $\lambda \in \Lambda_a$. Vì vậy, $\Lambda_a \neq \emptyset$.

Bước 2.

Cũng như trong bước trước, ta xét X là không gian hữu hạn chiều. Để thuận tiện, ta giả thiết rằng $f(x_0) = 0$. Cố định một véc tơ tùy ý $h \in \mathcal{K}(x_0)$ với $|h| = 1$ và lấy bất kỳ $w \in O_C^2(x_0, h)$. Ta sẽ chứng minh (2.8).

Theo định nghĩa tồn tại dãy $\{\varepsilon_n\} \downarrow 0$ sao cho

$$x_n = x_0 + \varepsilon_n h + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 w + o(\varepsilon_n^2) \in C, \quad \forall \varepsilon_n. \quad (2.16)$$

Xét hàm được định nghĩa bởi

$$\gamma(\chi) = \begin{cases} 0, & \forall \chi \leq 1, \\ (\chi - 1)^4, & \forall \chi > 1. \end{cases}$$

Với mỗi số nguyên dương n , xét bài toán cực tiểu sau đây theo các biến $(x, \chi) \in X \times \mathbb{R}$:

$$\min f_n(x, \chi),$$

$$\text{với điều kiện: } (x, \chi) \in C \times \mathbb{R},$$

$$F_1(x) - \chi F_1(x_n) \leq 0, \quad (2.17)$$

$$F_2(x) - \chi F_2(x_n) = 0,$$

$$0 \leq \chi \quad \text{và} \quad |x - x_0|^2 \leq \delta^2.$$

Bài toán này được gọi là n -bài toán. Ở đây, $\delta > 0$ được định nghĩa như trên và

$$f_n(x, \chi) = \tilde{f}(x) - \chi \tilde{f}(x_n) + \gamma(\chi),$$

trong đó, $\tilde{f}(x) = f(x) + |x - x_0|^4$.

Với n đủ lớn, ta có $|\varepsilon_n h + (\varepsilon_n^2/2)w| < \delta$. Lấy bất kỳ một giá trị n như vậy. Tồn tại một nghiệm của n -bài toán, bởi vì điểm (x, χ) được xác định bởi $x = x_n$ và $\chi = 1$ thỏa mãn tất cả các ràng buộc của bài toán này, hình cầu $\{x : |x| \leq \delta\}$ là compact và

$$\gamma(\chi)\chi^{-1} \rightarrow \infty \quad \text{khi } \chi \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Ta chỉ ra rằng, trong số các nghiệm của n -bài toán, tồn tại ít nhất một nghiệm $(\hat{x}_n, \hat{\chi}_n)$ sao cho $\hat{\chi}_n > 0$. Thật vậy, cho $(\tilde{x}_n, \tilde{\chi}_n)$ là một nghiệm của n -bài toán. Nếu $\tilde{\chi}_n > 0$, thì ta đặt $\hat{x}_n = \tilde{x}_n, \hat{\chi}_n = \tilde{\chi}_n$. Giả sử $\tilde{\chi}_n = 0$. Khi đó, $\tilde{x}_n$ là điểm chấp nhận được của bài toán (P_3) . Nếu $\tilde{x}_n \neq x_0$, thì

$$f_n(\tilde{x}_n, 0) = f(\tilde{x}_n) + |\tilde{x}_n - x_0|^4 \geq f(x_0) + |\tilde{x}_n - x_0|^4 > f(x_0) = 0.$$

Mặt khác, ta có $f_n(\tilde{x}_n, 0) \leq f_n(\tilde{x}_n, 1) = 0 = f(x_0)$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ $\tilde{x}_n = x_0$.

Trong trường hợp này,

$$f_n(\tilde{x}_n, \tilde{\chi}_n) = \tilde{f}(x_0) = 0,$$

và do đó, giá trị cực tiểu của n -bài toán sẽ bằng 0. Vì vậy, điểm $(\hat{x}_n, \hat{\chi}_n) = (\tilde{x}_n, 1)$ cũng là một nghiệm của n -bài toán vì điểm này thỏa mãn tất cả các ràng buộc của n -bài toán và $f_n(\tilde{x}_n, 1) = 0$. Hơn nữa, tọa độ cuối cùng của điểm này là dương. Do đó, với n bất kỳ, tồn tại một nghiệm $(\hat{x}_n, \hat{\chi}_n)$ của n -bài toán sao cho $\hat{\chi}_n > 0$. Sau đây, ta chỉ xét những nghiệm như vậy.

Từ (2.18), ta kết luận rằng dãy $\{\hat{\chi}_n\}$ bị chặn. Điều này cùng với $f_n(\hat{x}_n, \hat{\chi}_n) \leq 0$, kéo theo $\tilde{f}(\hat{x}_n) \leq \text{const}|\tilde{f}(x_n)|$. Do $\tilde{f}(x_n) \rightarrow f(x_0) = 0$ khi $n \rightarrow \infty$, ta kết luận rằng với bất kỳ điểm giới hạn $\hat{x}$ của dãy $\{\hat{x}_n\}$, ta có $\tilde{f}(\hat{x}) \leq 0$, $\hat{x} \in C$, $F_1(\hat{x}) \leq 0$, $F_2(\hat{x}) = 0$. Tuy nhiên, do $f(\hat{x}) \geq 0$, ta có $\hat{x} = x_0$. Vì vậy, $\hat{x}_n \rightarrow x_0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Ta sẽ áp dụng các điều kiện cần đã nhận được trong Bước 1 đối với nghiệm của n -bài toán. Theo nhận xét ở trên, với n đủ lớn, ta chọn một nghiệm $(\hat{x}_n, \hat{\chi}_n)$ của n -bài toán sao cho tất cả các bất đẳng thức trong (2.17) là chặt. Do đó, do ta phải đề cập đến các điều kiện cần mang tính đặc trưng địa phương nên ta sẽ bỏ qua các ràng buộc trong (2.17). Vì vậy, ta có thể xây dựng hàm Lagrange cho n -bài toán như sau:

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(x, \chi, \lambda) = \lambda_0 f_n(x, \chi) + \langle \lambda_1, F_1(x) - \chi F_1(x_n) \rangle + \langle \lambda_2, F_2(x) - \chi F_2(x_n) \rangle.$$

Theo các kết quả đã nhận được ở Bước 1, tồn tại λ_n và một không gian con tuyến tính $\Pi_n \subseteq \mathcal{I}$ sao cho

$$|\lambda_n| = 1, \quad \lambda_{0,n} \geq 0, \quad \lambda_{1,n} \geq 0, \quad (2.19)$$

$$\lambda_{0,n} \tilde{f}(x_n) + \langle \lambda_{1,n}, F_1(x_n) \rangle + \langle \lambda_{2,n}, F_2(x_n) \rangle = \lambda_{0,n} \gamma'(\hat{\chi}_n), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_n}{\partial x}(\hat{x}_n, \hat{\chi}_n, \lambda_n) \in -N(\hat{x}_n, C), \quad (2.21)$$

$$\Pi_n \subseteq \text{Ker} \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}_n), \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{L}}_n}{\partial x^2}(\hat{x}_n, \hat{\chi}_n, \lambda_n)[\xi, \xi] \geq 0, \quad \forall \xi \in \Pi_n, \quad \text{codim}_{\mathcal{I}} \Pi_n \leq k. \quad (2.23)$$

Chú ý rằng, (2.20) tương đương với đẳng thức $\partial \tilde{\mathcal{L}}_n / \partial \chi = 0$. Hơn nữa, ta bỏ qua biến phân cấp 2 theo χ trong (2.23), vì ta không cần đến nó.

Bằng cách trích ra một dãy con, ta có được véc tơ đơn vị λ nào đó là giới hạn của dãy $\{\lambda_n\}$. Bằng cách lấy giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ trong (2.19) và (2.21), ta kết luận $\lambda \in \Lambda$ (lại sử dụng tính nửa liên tục trên của ánh xạ đa trị $N(\cdot, C)$).

Ta sẽ chứng minh rằng $\lambda \in \Lambda_a$. Theo Định lí 2.2, tồn tại một không gian con $\Pi \subseteq \mathcal{I}$ sao cho $\text{codim}_{\mathcal{I}} \Pi \leq k$, $\Pi \subseteq \text{Ls}\{\Pi_n\}$. Lấy $b \in \Pi$. Tồn tại một dãy $\{b_n\}$ sao cho, bằng cách trích ra một dãy con, ta nhận được

$$b_n \in \Pi_n, \quad \forall n, \quad \text{và} \quad b_n \rightarrow b \quad \text{khi} \quad n \rightarrow \infty.$$

Do (2.22), ta có $(\partial F / \partial x)(\hat{x}_n) b_n = 0, \forall n$. Như vậy, $(\partial F / \partial x)(x_0) b = 0$. Do đó, $\Pi \subseteq \text{Ker}(\partial F / \partial x)(x_0)$.

Tương tự, từ (2.23) ta có $(\partial^2 \mathcal{L} / \partial x^2)(x_0, \lambda)[b, b] \geq 0, \forall b \in \Pi$. Như vậy, $\lambda \in \Lambda_a$.

Trở lại bất đẳng thức (2.20), ta có $h \in \mathcal{K}$ kéo theo

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0)h \leq 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0)h = 0, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_0), h \right\rangle \leq 0.$$

Do đó, bằng cách khai triển ánh xạ F_2 tại điểm x_0 đến số hạng cấp 2 và sử dụng (2.16), ta nhận được

$$\begin{aligned} F_2(x_n) &= F_2(x_n) - F_2(x_0) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0)(x_n - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(x_0)[(x_n - x_0)]^2 + o(|x_n - x_0|^2) \\ &= \varepsilon_n \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0)h + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(x_0)w + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(x_0)[h, h] + o(\varepsilon_n^2). \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\langle \lambda_{2,n}, F_2(x_n) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 \left(\left\langle \lambda_{2,n}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(x_0)[h, h] \right\rangle + \left\langle \lambda_{2,n}, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0)w \right\rangle \right) + o(\varepsilon_n^2).$$

Khai triển tương tự với ánh xạ F_1 (sử dụng $\langle \lambda_{1,n}, (\partial F_1/\partial x)(x_0)h \rangle \leq 0$), ta nhận được

$$\langle \lambda_{1,n}, F_1(x_n) \rangle \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 \left(\left\langle \lambda_{1,n}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(x_0)[h, h] \right\rangle + \left\langle \lambda_{1,n}, \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0)w \right\rangle \right) + o(\varepsilon_n^2).$$

Tương tự, với hàm f (sử dụng $\langle (\partial f/\partial x)(x_0), h \rangle \leq 0$), ta nhận được

$$\langle \lambda_{0,n}, f(x_n) \rangle \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 \left(\left\langle \lambda_{0,n}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)[h, h] \right\rangle + \left\langle \lambda_{0,n}, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)w \right\rangle \right) + o(\varepsilon_n^2).$$

Thay ba quan hệ này vào vào bất đẳng thức (2.20), chia hai vế cho ε^2 , sau đó, chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$, ta nhận được (2.8). Vì vậy, với mỗi $w \in O_C^2(x_0, h)$, ta chứng minh được (2.8).

Bước 3.

Bây giờ ta chứng minh (2.8) trong trường hợp tổng quát (tức là, với $\dim X = \infty$). Cố định một véc tơ tùy ý $h \in \mathcal{K}(x_0)$ và lấy bất kỳ $w \in O_C^2(x_0, h)$. Ta ký hiệu $\widetilde{\mathcal{M}}$ là tập hợp tất cả các không gian con hữu hạn chiều $M \in \mathcal{M}$ sao cho $h \in M$, $F'(x_0)(M) = \text{Im } F'(x_0)$ và $w \in O_{C \cap M}^2(x_0, h)$. Ta lấy bất kỳ $M \in \widetilde{\mathcal{M}}$ và xét bài toán nhận được từ bài toán ban đầu bằng cách thay X bởi M . Với bài toán hữu hạn chiều này, theo chứng minh ở Bước 2, tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda_M = (\lambda_M^0, \lambda_{1,M}, \lambda_{2,M})$ sao cho

$$\begin{aligned} \lambda_M^0 &\geq 0, & \lambda_{1,M} &\geq 0, & |\lambda_M| &= 1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda_M) &\in -N^M(x_0, C), \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda_M)[h]^2 + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda_M), w \right\rangle &\geq 0, \end{aligned}$$

và chỉ số của dạng toàn phương $(\partial^2 \mathcal{L}/\partial x)(x_0, \lambda_M)$ trên không gian con $M \cap \text{Ker } F'(x_0)$ không lớn hơn $\text{codim}_{\mathcal{I}}(\text{Im } F'(x_0))$.

Tập hợp các véc tơ λ_M như vậy được ký hiệu là $\Lambda_a(M, h, w)$. Theo chứng minh trên, tập hợp này khác rỗng và đóng với mọi $M \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Hơn nữa, với bất kỳ $M_1, M_2, \dots, M_n \in \widetilde{\mathcal{M}}$, rõ ràng ta có

$$\bigcap_{i=1}^n \Lambda_a(M_i, h, w) \supseteq \Lambda_a(M_1 + \dots + M_n, h, w) \neq \emptyset.$$

Vì vậy, hệ các tập hợp $\Lambda_a(M, h, w)$, $M \in \widetilde{\mathcal{M}}$, là có tâm. Do đó, theo tính compact của mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^{k+1}$, tập hợp $\bigcap_{M \in \widetilde{\mathcal{M}}} \Lambda_a(M, h, w)$ khác rỗng.

Ta lấy tùy ý một véc tơ $\lambda \in \bigcap_{M \in \widetilde{\mathcal{M}}} \Lambda_a(M, h, w)$. Rõ ràng, các quan hệ

$$\lambda \in \Lambda \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h]^2 + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), w \right\rangle \geq 0$$

đúng với véc tơ này. Bây giờ, để chỉ ra rằng $\lambda \in \Lambda_a$, ta chỉ cần chứng minh sự tồn tại của không gian con Π thỏa mãn (2.4).

Thật vậy, số chiều cực đại của không gian con trong $\mathcal{I} \cap \text{Ker } F'(x_0)$, mà trên đó dạng toàn phương $(\partial^2 \mathcal{L} / \partial x^2)(x_0, \lambda)$ xác định âm, không vượt quá số $(k - \dim(\text{Im } F'(x_0)))$. Điều khẳng định này được suy ra bởi $\lambda \in \Lambda_a(M, h, w)$ với mọi không gian hữu hạn chiều $M \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Sự tồn tại của không gian con Π thỏa mãn (2.4) bây giờ được suy ra từ bổ đề sau (Bổ đề 3.1, Chương 1 trong [2]):

Bổ đề 2.1 ([2]). *Cho q là một dạng toàn phương hữu hạn được định nghĩa trên không gian véc tơ X . Khi đó, chỉ số của q bằng số đối chiều của không gian con có đối chiều nhỏ nhất mà trên đó dạng toàn phương này là xác định không âm.*

Vì vậy, (2.8) được chứng minh.

Bước 4.

Ta sẽ chứng minh (2.5). Cố định tùy ý một véc tơ $h \in \mathcal{K}(x_0)$, và lấy bất kỳ một tập lồi $\mathcal{T}(h) \subseteq O_C^2(x_0, h)$. Chú ý rằng, nếu $\mathcal{T}(h) = \emptyset$ thì $\sigma(\cdot, \mathcal{T}(h)) = -\infty$, và (2.5) đúng một cách tầm thường. Do đó, ta giả thiết rằng tập hợp $\mathcal{T}(h)$ khác rỗng. Do các kết quả nhận được ở Bước 3, nên (2.8) đúng với mỗi $w \in \mathcal{T}(h)$. Vì vậy, ta có bất đẳng thức sau:

$$\inf_{w \in \mathcal{T}(h)} \max_{\lambda \in \Lambda_a} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), w \right\rangle \right) \geq 0.$$

Vì $\mathcal{T}(h) \subseteq X$ lồi, $\Lambda_a \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ lồi và compact và hàm $(\partial^2 \mathcal{L} / \partial x^2)(x_0, \lambda)[h, h] + \langle (\partial \mathcal{L} / \partial x)(x_0, \lambda), w \rangle$ là song tuyến tính theo các biến $w \in X$ và $\lambda \in \mathbb{R}^{k+1}$, sử dụng Bổ đề 2.2 dưới đây ta kết luận được rằng, bất đẳng thức trên đúng khi vế trái của được thay bởi

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a} \inf_{w \in \mathcal{T}(h)} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), w \right\rangle \right).$$

Bổ đề 2.2 ([3]). Xét không gian Euclide hữu hạn chiều Z , tập compact lồi $\tilde{Z} \subset Z$, véc tơ $a \in Z$, tập lồi $\mathcal{T} \subseteq X$ và ánh xạ tuyến tính $A : X \rightarrow Z$. Giả sử

$$\inf_{w \in \mathcal{T}} \max_{z \in \tilde{Z}} \langle Aw + a, z \rangle \geq 0.$$

Khi đó,

$$\max_{z \in \tilde{Z}} \inf_{w \in \mathcal{T}} \langle Aw + a, z \rangle \geq 0.$$

Vì vậy,

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] + \inf_{w \in \mathcal{T}(h)} \left(\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda), w \right\rangle \right) \right) \geq 0.$$

Từ đó và do h tùy ý, ta suy ra (2.5). Định lí được chứng minh. $\square$

2.3. Bài toán có ràng buộc $F(x) \in C$

Xét bài toán cực tiểu

$$(Q) \quad f(x) \rightarrow \min, \quad F(x) \in C,$$

ở đây, C là một tập đóng cho trước trong $Y = \mathbb{R}^k$. Dưới đây, ta trình bày các điều kiện cần tối ưu cho bài toán này.

Cố định điểm $x_0 \in X$. Ta giả thiết rằng các hàm f và F là hai lần khả vi liên tục trong một lân cận của x_0 theo tôpô hữu hạn.

Ký hiệu $\Lambda^Q = \Lambda^Q(x_0)$ là tập các nhân tử Lagrange λ của bài toán Q tương ứng với điểm x_0 theo quy tắc nhân tử Lagrange, tức là,

$$\frac{\partial \mathcal{L}^Q}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \quad \lambda_0 \geq 0, \quad \bar{\lambda} \in N(F(x_0), C), \quad |\lambda| = 1.$$

trong đó, $\lambda = (\lambda_0, \bar{\lambda})$ với $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\bar{\lambda} \in Y^*$, và $\mathcal{L}^Q(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \langle \bar{\lambda}, F(x) \rangle$.

Lấy một không gian con tuyến tính M bất kỳ nằm trong Y và xét tập tất cả các nhân tử Lagrange $\lambda \in \Lambda^Q$ mà với mỗi nhân tử đó, tồn tại một không gian con tuyến tính $\Pi \subseteq X$ (phụ thuộc vào λ) sao cho

$$\text{codim } \Pi \leq k, \quad \Pi \subseteq \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) \right)^{-1} (M), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}^Q}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0, \quad \forall x \in \Pi.$$

(ở đây, $\text{codim} = \text{codim}_X$). Ta ký hiệu tập các nhân tử Lagrange này là $\Lambda^Q(x_0, M)$.

Định lí 2.4 (Nguyên lí cực trị). *Giả sử x_0 là điểm cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn τ của bài toán (Q) .*

Khi đó, với mỗi không gian con bất biến $\mathcal{I}$ theo C , tập $\Lambda^Q(x_0, \mathcal{I})$ là khác rỗng. Hơn nữa, với mỗi

$$h \in \mathcal{K}^Q = \left\{ h : \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)h \in T_C(F(x_0)), \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_0), h \right\rangle \leq 0 \right\},$$

và với mỗi tập lồi $\mathcal{T}(h) \subseteq O_C^2(F(x_0), (\partial F/\partial x)(x_0)h)$, điều kiện sau đây đúng:

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a^Q} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}^Q}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] - \sigma(\bar{\lambda}, \mathcal{T}(h)) \right) \geq 0. \quad (2.24)$$

trong đó $\Lambda_a^Q = \text{conv } \Lambda^Q(x_0, \mathcal{I})$.

Chứng minh. Ta sẽ đưa bài toán (Q) về dạng bài toán (P_3) đã xét ở trên:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad F(x) - y = 0, \quad y \in C, \quad (2.25)$$

trong đó cực tiểu là theo các biến $(x, y) \in X \times Y$. Điểm $(x_0, F(x_0))$ là cực tiểu địa phương của (2.25).

Bây giờ ta sẽ áp dụng Định lí 2.1 cho bài toán này. Hàm Lagrange của bài toán (2.25) có dạng

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \langle \bar{\lambda}, F(x) - y \rangle,$$

và các điều kiện (2.3) có dạng

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x_0, F(x_0), \lambda) = -\bar{\lambda} \in -N(F(x_0), C).$$

Bằng cách sử dụng bao hàm thức trên đây, các công thức (2.3), (2.5) và định nghĩa của tập Λ^Q , ta nhận được kết quả mong muốn.

Ta chú ý rằng bao hàm thức $\Pi \subseteq ((\partial F/\partial x)(x_0))^{-1}(M)$ (đáng lẽ là $\Pi \subseteq \text{Ker}(\partial F/\partial x)(x_0)$ như trong phát biểu của Định lí 2.1) suy ra ngay từ việc phát biểu lại bài toán (Q) như trường hợp đặc biệt của bài toán (P_3) : Nếu ta đặt $\bar{F}(x, y) = F(x) - y$, thì $\forall h \in ((\partial F/\partial x)(x_0))^{-1}(M)$, $\exists \bar{h} \in M$ sao cho $(h, \bar{h}) \in \text{Ker}(\partial \bar{F}/\partial(x, y))(x_0, y_0)$.

Định lí đã được chứng minh. □

Nhận xét 2.5. Bài toán (Q) được nghiên cứu trong [6] với giả thiết tập C lồi và điều kiện chính quy Robinson đối với một không gian Banach Y bất kỳ. Với điều kiện chính quy Robinson, các tác giả đã nhận được điều kiện tối ưu sau:

$$\max_{\lambda \in \Lambda^Q} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}^Q}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] - \sigma(\bar{\lambda}, \mathcal{T}(h)) \right) \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{K}^Q. \quad (2.26)$$

Đồng thời, với điều kiện chính quy Robinson, trong Định lí 2.4 ta có $\lambda_0 > 0$, $\forall \lambda \in \Lambda^Q$.

Định lí 2.4 cũng chỉ ra rằng với Y hữu hạn chiều, thậm chí không có điều kiện chính quy Robinson và giả thiết lồi của tập C , kết quả của Bonnans and Shapiro [5] vẫn đúng cho trường hợp hàm Lagrange tổng quát. Trong trường hợp tổng quát, (2.24) mạnh hơn (2.26), bởi vì $\Lambda_a^Q \subseteq \text{conv } \Lambda^Q$. Chú ý rằng nếu C là nón lồi nhọn (tức là $C \cap [-C] = \{0\}$) và đóng, thì không gian con bất biến cực đại $\mathcal{I}_C$ bằng $\{0\}$ và bao hàm thức ở trên trở thành đẳng thức.

Nhận xét 2.6. Các điều kiện cần tối ưu (2.26) cho bài toán không giả thiết điều kiện chính quy Robinson và tập lồi C có phần trong khác rỗng đã nhận được trong [5].

Ví dụ 2.2 (Bài toán quy hoạch bán xác định). Cho $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathcal{S}^p \times \mathbb{R}^{k_2}$, $C = \mathcal{S}_-^p \times \{0\}$, ở đây $\mathcal{S}^p$ là không gian của các $p \times p$ -ma trận đối xứng, $\mathcal{S}_-^p$ là nón của các ma trận bán xác định âm, và n, p, k_2 là các số nguyên dương.

Xét các ánh xạ $F_1 : X \rightarrow \mathcal{S}^p$ và $F_2 : X \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$ được định nghĩa bởi

$$F_1(x) := \sum_{i,j} x_i x_j S_{i,j} + \psi_1(x) \quad \text{và} \quad F_2(x) := \frac{1}{2}Q(x) + \psi_2(x).$$

Ở đây, x_i là các tọa độ của véc tơ x , $S_{i,j}$ là các ma trận đối xứng, ψ_l , $l = 1, 2$ là các ánh xạ trơn, sao cho

$$\psi_l(0) = 0, \quad (\partial \psi_l / \partial x)(0) = 0, \quad (\partial^2 \psi_l / \partial x^2)(0) = 0, \quad l = 1, 2$$

$$\text{và} \quad Q(x) = (\langle Q_1 x, x \rangle, \dots, \langle Q_{k_2} x, x \rangle),$$

trong đó Q_i là các ma trận đối xứng. Trang bị cho không gian $\mathcal{S}^p$ tích vô hướng $A \cdot B = \text{trace}(AB)$. Khi đó, nón đối ngẫu của $\mathcal{S}_-^p$ là nón $\mathcal{S}_+^p$ gồm tất cả các ma trận bán xác định dương.

Xét bài toán cực tiểu

$$f(x) \rightarrow \min, \quad F_1(x) \in \mathcal{S}_-^p, \quad F_2(x) = 0,$$

trong đó f là một hàm trơn. Để cho đơn giản, ta sẽ giả thiết rằng $(\partial f / \partial x)(0) \neq 0$.

Cho $k := p(p+1)/2 + k_2$, và $F = (F_1, F_2)$.

Xét điểm $x = 0$. Vì $(\partial F / \partial x)(0) = 0$ nên điều kiện chính quy Robinson không thỏa mãn. Do đó, các điều kiện tối ưu của Bonnans and Shapiro [5], không thể áp dụng được.

Mặt khác, áp dụng Định lí 2.4, ta nhận được các điều kiện cần tối ưu sau: Nếu $x = 0$ là cực tiểu địa phương của bài toán đang xét, thì $\lambda_0 = 0$ (do $(\partial F / \partial x)(0) = 0$). Do đó, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\exists \lambda_1 \in \mathcal{S}_+^p$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, sao cho

$$\begin{aligned} \text{ind} \left(\sum_{i,j} h_i h_j S_{i,j} \cdot \lambda_1 + \langle Q(h), \lambda_2 \rangle \right) &\leq k, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0, \\ \sum_{i,j} h_i h_j S_{i,j} \cdot \lambda_1 + \langle Q(h), \lambda_2 \rangle &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

trong đó $\text{ind } q$ là ký hiệu chỉ số của dạng toàn phương q trên một không gian đã cho.³

(Ở đây, ta đã sử dụng sự kiện là nếu $h \notin \mathcal{K}^Q$, thì $-h \in \mathcal{K}^Q$ và $\sigma(\lambda_1, T_{\mathcal{S}_-^p}^2(0, 0)) = 0$ với mọi $\lambda_1 \in \mathcal{S}_+^p$.)

Do đó, ta kết luận rằng, nếu tồn tại $h \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\sum_{i,j} h_i h_j S_{i,j} \cdot \lambda_1 + \langle Q(h), \lambda_2 \rangle < 0$$

với bất kỳ (λ_1, λ_2) thỏa mãn (2.27) (đặc biệt, nếu $\text{ind} \left(\sum_{i,j} h_i h_j S_{i,j} \cdot \lambda_1 + \langle Q(h), \lambda_2 \rangle \right) > k$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$ sao cho $\lambda_1 \in \mathcal{S}_+^p$), thì $x = 0$ không thể là cực tiểu địa phương của bài toán đang xét.

³Chỉ số của dạng toàn phương q trên không gian V được định nghĩa là số chiều của của một không gian con của V có số chiều cực đại mà trên đó dạng toàn phương q là xác định âm

Kết luận

Luận văn đã trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho bài toán tối ưu với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức trong các không gian hữu hạn chiều với giả thiết tập các nhân tử Lagrange là một đoạn thẳng bị chặn. Kết quả chỉ ra rằng với điều kiện Mangasarian-Fromovitz và điều kiện số ràng buộc bất đẳng thức tích cực nhiều nhất là 2, ta có tập các nhân tử Lagrange là một đoạn thẳng bị chặn. Với điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz tăng cường (MMF) và điều kiện bù chặt suy rộng (GSCS) ta cũng nhận được một điều kiện tối ưu cấp 2. Luận văn cũng trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho cực tiểu địa phương theo tôpô hữu hạn của bài toán tối ưu có các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập trong các không gian véc tơ. Áp dụng nguyên lý cực trị cấp 2 đó ta cũng nhận được nguyên lý cực trị cấp 2 cho bài toán tối ưu với ràng buộc bao hàm thức $F(x) \in C$.

Điều kiện cần tối ưu cấp 2 cho các lớp bài toán tối ưu có ràng buộc khác nhau là đề tài được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

- [1] Anitescu, M. (2000) *Degenerate nonlinear programming with a quadratic growth condition*, SIAM J. Optim., vol 10, pp. 1116-1135.
- [2] Arutyunov, A. V. (2000), *Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands.
- [3] Arutyunov, A. V. and Pereira, F. L. (2006), *Second-order necessary optimality conditions for problems without a priori normal assumptions*, Math. Oper. Res., vol 31, pp. 1-12.
- [4] Baccari, A. and Trad, A. (2004), *On the classical necessary second-order optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints*, SIAM J. Optim., vol 15, pp. 394-408.
- [5] Bonnans, J. F., A. Shapiro. (2000), *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer-Verlag, New York.
- [6] Bonnans, J. F., R. Cominetti, A. Shapiro. (1999), *Second-order optimality conditions based on parabolic second-order tangent sets*, SIAM J. Optim. 9, pp. 466-492.
- [7] Gauvin, J. (1997) *A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming*, Math. Program., vol 12, pp. 136-138.
- [8] Hestenes, M. R. (1975) *Optimization Theory: The Finite Dimensional Case*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, NY.
- [9] Hiriart-Urruty, J.-B. and Torki, M. (2002) *Permanently going back and forth between the "quadratic world" and the "convexity world" in optimization*, Appl. Math. Optim., vol 45, pp. 169-184.

- [10] Mordukhovich, B. S. (1988), *Approximation Methods in Problems of Optimization and Control*, Nauka, Moscow, Russia.
- [11] Mordukhovich, B. S. (1993), *Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions*, Trans. Amer. Math. Soc. 340, pp. 1-36.
- [12] Yuan, Y. (1990), *On a subproblem of trust region algorithms for constrained optimization*, Math. Program., vol 47, pp. 53-63.