ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN TUẤN PHƯƠNG

DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số:60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học: PGS.TS Đỗ Văn Lưu

Thái Nguyên: 08/2012

1Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

MỤC LỤC

Mục lục

Mở đầu 2

Chương 1. DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG 4

1.1. Dưới vi phân suy rộng và các dưới vi phân 4

1.2.Dưới vi phân suy rộng chính quy và dưới vi phân suy rộng tối thiểu 9

1.3.Quy tắc tính dưới vi phân suy rộng 15

1.4.Định lý giá trị trung bình 20

1.5.Vi phân suy rộng và dưới vi phân 27

Chương 2. DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG VÀ ỨNG DỤNG TRONG TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU 31

2.1.Một số kết quả của Dutta-Chandra về dưới vi phân suy rộng 31

2.2.Dưới vi phân suy rộng và tính lồi suy rộng 40

2.3.Ứng dụng dưới vi phân suy rộng trong tối đa mục tiêu 47

Kết luận 53

Tài liệu tham khảo 54

2Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

MỞ ĐẦU

Lý thuyết các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu là một bộ phận quan trọng của tối ưu hóa. Với các bài toán tối ưu không trơn, công cụ để tiếp cận nghiên cứu hiệu quả là giải tích lồi và giải tích không trơn. Với các bài toán gồm các hàm mục tiêu và ràng buộc Lipschitz địa phương, người ta sử dụng dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Michel - Penot, dưới vi phân Mordukhovich (xem [3], [10], [11]). Bài toán với dữ liệu nửa liên tục trên hoặc dưới được xử lí bằng công cụ hiệu quả là dưới vi phân Clarke - Rockafellar.

Khái niệm dưới vi phân suy rộng (convexificator) lồi compăc lần đầu tiên được nghiên cứu bởi V.F.Demyano ([5], 1994). Đây là một tổng quát hóa các khái niệm xấp xỉ lồi trên và lõm dưới. Jeyakumar - Luc ([9], 1999) đã đưa vào khái niệm dưới vi phân suy rộng đóng không lồi cho hàm giá trị thực mở rộng và nghiên cứu các quy tắc tính, định lý giá trị trung bình, dưới vi phân suy rộng tối thiểu, và tính chất của hàm tựa lồi dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng. Dutta - Chandra [7] đã phát triển một số quy tắc tính dưới vi phân suy rộng cho hàm hợp, tính chất của hàm giả lồi dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng và các điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của một vài lớp bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Luận văn trình bày lý thuyết dưới vi phân suy rộng của Jeyakumar - Luc [9] và Dutta - Chandra [7] cùng với một số kết quả trong [9 ; 7] về các tính chất của các hàm tựa lồi, giả lồi dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng và các điều kiện cần cho cực tiểu yếu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu không ràng buộc và có ràng buộc bất đẳng thức.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các

3Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các kết quả nghiên cứu về dưới vi phân suy rộng không lồi của Jeyakumar - Luc [9] bao gồm các dưới vi phân suy rộng trên và dưới, các dưới vi phân suy rộng chính quy và tối thiểu. Chương 1 cũng trình bày các quy tắc tính dưới vi phân suy rộng, định lý giá trị trung bình, các điều kiện đủ để dưới vi phân suy rộng là tối thiểu và các tính chất đặc trưng của hàm tựa lồi dưới ngôn ngữ tựa đơn điệu của ánh xạ dưới vi phân suy rộng.

Chương 2 trình bày hai quy tắc tính dưới vi phân suy rộng cho hàm hợp của Dutta - Chandra [7] cùng với các tính chất của hàm giả lồi dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng và các điều kiện cần tối ưu cho cực tiểu yếu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu không có ràng buộc và có ràng buộc bất đẳng thức.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa toán, phòng đào tạo sau đại học trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K4 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2012

Trần Tuấn Phương

4Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Chương 1

DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG

Chương 1 trình bày các nghiên cứu về dưới vi phân suy rộng không lồi của V.Jeyakumar và D.T.Luc [9] bao gồm các khái niệm dưới vi phân suy rộng trên và dưới, các dưới vi phân suy rộng chính quy và tối thiểu. Khái niệm dưới vi phân suy rộng không lồi của Jeyakumar - Luc là một tổng quát hóa của một số khái niệm dưới vi phân đã biết của F.H.Clarke và R.T.Rockafellar, F.H.Clarke, P.Michel và J.P.Penot,... Các quy tắc tính dưới vi phân suy rộng, định lý giá trị trung bình, các điều kiện đảm bảo dưới vi phân suy rộng là tối thiểu và các điều kiện đặc trưng cho tính tựa lồi của một hàm liên tục dưới ngôn ngữ tựa đơn điệu của dưới vi phân suy rộng cũng được trình bày trong chương này.

1.1 Dưới vi phân suy rộng và các dưới vi phân

Giả sử X là không gian Banach $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm giá trị thực mở rộng, trong đó $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .Không gian đối ngẫu của X được kí hiệu là X^* với tôpô yếu*. Bao lồi và bao lồi đóng của tập A trong X^* được kí hiệu là co(A) và $\overline{\text{co}}$(A). Giả sử tại điểm $x \in X$, f là hữu hạn. Đạo hàm theo phương Dini dưới và trên của f tại x theo phương v được định nghĩa tương ứng bởi

$$f_d^-(x, v) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

$$f_d^+(x, v) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

5Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Định nghĩa 1.1.1

Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng trên (upper convexificator) $\partial^* f(x)$ tại x nếu $\partial^* f(x) \subset X^*$ là đóng yếu và với mỗi $v \in X$,*

$$f_d^-(x, v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Định nghĩa 1.1.2

Hàm $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng dưới (lower convexificator) $\partial_* f(x)$ tại x nếu $\partial_* f(x) \subset X^*$ là đóng yếu và với mỗi $v \in X$,*

$$f_d^+(x, v) \geq \inf_{x^* \in \partial_* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Định nghĩa 1.1.3

Hàm $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(x)$ tại x nếu nó đồng thời là dưới vi phân suy rộng dưới và trên của f tại x.

Điều này có nghĩa là với mỗi $v \in X$,

$$f_d^-(x, v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle ,$$

$$f_d^+(x, v) \geq \inf_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Điều này cũng tương đương với điều kiện với mỗi $v \in X$,

$$\max \left\{ f_d^-(x, v), -f_d^+(x, -v) \right\} \leq s\left(v | \partial^* f(x)\right),$$

trong đó

$$s\left(v | C\right) := \sup_{x^* \in C} \langle x^*, v \rangle$$

là hàm tựa của tập đóng yếu* $C \subset X^*$.

Chú ý rằng dưới vi phân suy rộng không nhất thiết lồi, compăc yếu*. Điều

6Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

này cho phép ta áp dụng được cho một lớp rộng hàm không trơn liên tục. Chẳng hạn, hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ , \ x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}\ , \ x < 0, \end{cases}$$

nhận dưới vi phân suy rộng không compăc tại 0 là $[\alpha, \infty)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hàm$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = -\left|x\right|$$

có dưới vi phân suy rộng không lồi: $\partial_* f(0) = \{1, -1\}$ tại 0.

Ta sẽ thấy rằng nhiều loại dưới vi phân suy rộng trong giải tích không trơn là dưới vi phân suy rộng.

Giả sử $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ là hữu hạn tại điểm $x \in X$. Nếu f nửa liên tục dưới tại x thì dưới đạo hàm trên Clarke-Rockafellar (the Clarke-Rockafellar upper subderivative) của f tại x theo v được định nghĩa bởi công thức

$$f^{\uparrow}(x, v) = \limsup_{\substack{x' \to_f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{v' \to v} \frac{f(x' + tv') - f(x')}{t},$$

trong đó $x' \to_f x$ có nghĩa là $x' \to x$ và $f(x') \to f(x)$. Nếu f là nửa liên tục trên tại x thì dưới đạo hàm dưới Clarke-Rockafellar (the Clarke-Rockafellar lower subderivative) của f tại x theo v được xác định bởi công thức

$$f^{\downarrow}(x, v) = \liminf_{\substack{x' \to_f x \\ t \downarrow 0}} \sup_{v' \to v} \frac{f(x' + tv') - f(x')}{t}.$$

Nếu f liên tục tại x thì $x' \to_f x$ trong định nghĩa của đạo hàm trên và dưới có thể viết đơn giản là $x' \to x$. Các dưới vi phân suy rộng trên và dưới của f tại x được cho bởi công thức

$$\partial^{\uparrow} f(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\uparrow}(x, v), \forall v \in X\right\},$$

7Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

$$\partial^{\downarrow} f(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \geq f^{\downarrow}(x, v), \forall v \in X\right\}.$$

Nếu $f^{\uparrow}(x, 0) > -\infty$ thì $\partial^{\uparrow} f(x)$ khác $\emptyset$, lồi , đóng yếu* trong X^* và với mọi $v \in X$ ta có công thức

$$f^{\uparrow}(x, v) = \sup_{x* \in \partial^{\uparrow} f(x)} \langle x, v\rangle.$$

Tương tự, nếu $f^{\downarrow}(x, 0) < +\infty$ thì $\partial^{\downarrow} f(x)$ khác $\emptyset$, lồi , đóng yếu* trong X^* và với mọi $v \in X$ ta có công thức

$$f^{\downarrow}(x, v) = \inf_{x* \in \partial^{\downarrow} f(x)} \langle x_*, v\rangle.$$

Nếu f Lipschitz địa phương tại x thì ta có công thức

$$f^{\uparrow}(x, v) = f^{\circ}\langle x, v\rangle,$$

$$f^{\downarrow}(x, v) = f_{\circ}\langle x, v\rangle,$$

trong đó

$$f^{\circ}(x, v) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t},$$

$$f_{\circ}(x, v) = \liminf_{\substack{x' \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t}.$$

Đây là các đạo hàm theo phương suy rộng Clarke trên và dưới của f tại x theo v. Dưới vi phân suy rộng Clarke được xác định bởi

$$\partial^{\circ} f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\circ}(x, v), \forall v \in X\}.$$

Hơn nữa,

$$f^{\circ}(x, v) = \max_{x_* \in \partial^0 f(x)} \langle x_*, v\rangle,$$

$$f_{\circ}(x, v) = \min_{x_* \in \partial^0 f(x)} \langle x_*, v\rangle.$$

Vì vậy, nếu f là Lipschitz địa phương tại x thì $\partial^* f^{\circ}(x)$ là một dưới vi phân suy rộng của f tại x bởi vì với mọi $v \in X$

$$f_d^{-}(x, v) \leq f^{\circ}(x, v),$$

8Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

và

$$f_d^+(x,v) \geq f_\circ(x,v).$$

Tương tự nếu f là Lipschitz địa phương tại x thì các đạo hàm theo phương Michel-Penot trên và dưới của f tại x được xác định bởi

$$f^\diamondsuit(x,v) = \sup_{z\in X} \limsup_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}[f(x+\lambda z+\lambda v) - f(x+\lambda z)],$$

$$f_\diamondsuit(x,v) = \inf_{z\in X} \liminf_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}[f(x+\lambda z+\lambda v) - f(x+\lambda z)].$$

Dưới vi phân Michel-Penot được định nghĩa như sau

$$\partial^\diamondsuit f(x) = \left\{x^* \in X^* : f^\diamondsuit(x,v) \geq \langle x^*, v\rangle, \forall v \in X\right\}.$$

Ta biết rằng các đạo hàm theo phương Michel-Penot trên và dưới được kí hiệu $f^\diamondsuit(x,.)$,$f_\diamondsuit(x,.)$ là hữu hạn, dưới tuyến tính và $\partial^\diamondsuit f(x)$ là lồi,compăc, yếu* , và

$$f^\diamondsuit(x,v) = \max_{x^*\in\partial^\diamondsuit f(x)} \langle x^*, v\rangle,$$

$$f_\diamondsuit(x,v) = \min_{x^*\in\partial^\diamondsuit f(x)} \langle x^*, v\rangle.$$

Vì vậy, $\partial^\diamondsuit f(x)$ cũng là một dưới vi phân suy rộng của f tại x bởi vì với $\forall v \in X$,

$$f_d^-(x,v) \leq f^\diamondsuit(x,v)\langle x^*, v\rangle,$$

và

$$f_d^+(x,v) \geq f_\diamondsuit(x,v)\langle x^*, v\rangle.$$

Hơn nữa, nếu $X = \mathbb{R}^n$ ta có

$$\partial^\circ f(x) = co\left\{v \in \mathbb{R}^n : \exists\{x_k\} : x_k \to x, x_k \in K, f'(x_k) \to v\right\}.$$

Như vậy, tập compắc

$$\left\{v \in \mathbb{R}^n : \exists\{x_k\} : x_k \to x, x_k \in K, f'(x_k) \to v\right\},$$

9Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

là một dưới vi phân suy rộng của f tại x . Ở đây K là tập các điểm của $\mathbb{R}^n$ mà tại đó f khả vi với đạo hàm $f'(x)$ tại x. Ví dụ sau đây minh họa: bao lồi của dưới vi phân suy rộng của một hàm Lipschitz địa phương có thể là chứa thực sự trong các dưới vi phân Michel-Penot và Clarke.

Ví dụ 1.1.1

Cho hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ theo công thức $f(x, y) = |x| - |y|$. Khi đó

$$\partial^* f(0) = \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

là một dưới vi phân suy rộng của f tại 0;

$$\partial^\diamondsuit f(0) = \partial^0 f(0) = co\{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}.$$

Chú ý rằng

$$co(\partial^* f(0)) \subset \partial^\diamondsuit f(0) = \partial^\circ f(0).$$

1.2 Dưới vi phân suy rộng chính quy và dưới vi phân suy rộng tối thiểu

Từ định nghĩa các dưới vi phân suy rộng trên và dưới, ta thấy rằng nói chung là chúng không duy nhất. Trong phần này ta sẽ tìm các điều kiện cho các dưới vi phân suy rộng dưới và trên là duy nhất và tối thiểu. Trước hết ta đưa vào khái niệm dưới vi phân suy rộng chính quy trên và dưới.

Hàm $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng chính quy trên (upper regular convexificator) $\partial^* f(x) \subset X^*$ tại x, nếu $\partial^* f(x)$ là đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f_d^+(x, v) = \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle.$$

10Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Tương tự hàm $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng chính quy dưới (lower regular convexificator) $\partial_* f(x) \subset X^*$ nếu $\partial_* f(x)$ là đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f_d^-(x, v) = \inf_{x^* \in \partial_* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Rõ ràng là mọi dưới vi phân suy rộng chính quy trên(dưới) của f tại x là dưới vi phân suy rộng của f tại x.

Theo [4], hàm f là khả dưới vi phân (khả trên vi phân) tại x nếu nó khả vi theo phương và tồn tại tập compăc yếu* lồi $\partial^* f(x)$ sao cho với mỗi $v \in X$,

$$f'(x, v) = \max_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Do đó mọi hàm khả dưới vi phân (khả trên vi phân) có dưới vi phân suy rộng compăc yếu*, chính quy trên(dưới). Các hàm khả dưới vi phân cho ta một lớp rộng các hàm không trơn, mà nó kín với phép lấy tổng và "max" từng điểm. Trong mệnh đề sau đây, ta sẽ thấy mối liên hệ giữa tính khả vi và tính chính quy.

Mệnh đề 1.2.1

Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi Gâteaux tại x_0 nếu và chỉ nếu f khả vi theo phương tại x_0 và f có một dưới vi phân suy rộng chính quy trên và dưới tại x_0.

Chứng minh

Nếu f là khả vi Gâtaeux tại x_0 thì rõ ràng hàm khả vi theo phương và đạo hàm Gâtaeux $\{f'(x_0)\}$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên và dưới của f tại x_0.

Ngược lại, nếu f khả vi theo phương tại x_0 và $\partial^* f(x_0)$ là một dưới vi phân

11Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

suy rộng chính quy trên và dưới thì với mỗi $v \in X$ ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0, v) = f_d^-(x_0, v) &= \inf_{x^* \in \partial^* f(x_0)} (x^*, v) \\ = f_d^+(x_0, v) &= \sup_{x^* \in \partial^* f(x_0)} (x^*, v) \end{aligned}.$$

Do đó, $\partial^* f(x_0)$ là tập một điểm và f khả vi Gâtaeux tại x_0. □

Ta nói rằng $\partial^* f(x)$ là dưới vi phân suy rộng tối thiểu trên (dưới) của f tại x nếu không tồn tại tập đóng yếu* $C(x)$ trong X^* sao cho

$$C(x) \subset \partial^* f(x), C(x) \neq \partial^* f(x)$$

và $C(x)$ là một dưới vi phân suy rộng trên(dưới) của f tại x.

Kí hiệu tập các điểm cực biên của dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(x)$ của f tại x là

$$Ext(\partial^* f(x)).$$

Mệnh đề 1.2.2

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có dưới vi phân suy rộng compăc chính quy trên(dưới) $\partial^* f(x)$ tại x. Khi đó, $\overline{Ext(co\, \partial^* f(x))}$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên(dưới) tối thiểu duy nhất của f tại x.

Chứng minh

Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên bất kì của f tại x. Khi đó, với mỗi $v \in X$

$$f_d^+(x, v) = \max_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, v \rangle.$$

Vi thế A là tập con đóng bị chặn của $\mathbb{R}^n$ với

$$co(\partial^* f(x)) = co(A).$$

12Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Khi đó,

$$Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right) = Ext\left(co\left(A\right)\right).$$

Ta sẽ chỉ ra

$$Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right) \subset A.$$

Thật vậy, ta có

$$Ext\left(co\left(A\right)\right) \subset Ext\left(A\right).$$

Do đó

$$Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right) = Ext\left(co\left(A\right)\right) \subset Ext\left(A\right) \subset A.$$

Bởi vì A là đóng,

$$\overline{Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right)} \subset A.$$

Mặt khác, bởi vì $\partial^* f\left(x\right)$ là dưới vi phân suy rộng compăc chính quy trên, $\overline{Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right)}$ cũng là dưới vi phân suy rộng chính quy trên của f tại x. Vì vậy, $\overline{Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right)}$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên tối thiểu duy nhất của f tại x.Chứng minh tương tự cho trường hợp dưới vi phân suy rộng chính quy dưới. □

Mệnh đề 1.2.3

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là khả vi theo phương tại x và có dưới vi phân suy rộng compăc chính quy trên (dưới) $\partial^* f\left(x\right)$ tại x thì

$$\overline{Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right)}$$

là dưới vi phân suy rộng trên tối thiểu của f tại x.

Chứng minh

Giả sử $A \subset \overline{Ext\left(co\left(\partial^* f\left(x\right)\right)\right)}$ là dưới vi phân suy rộng trên bất kì của f tại x. Khi đó, $A \subset \partial^* f\left(x\right)$ là tập compắc và với mỗi $v \in X$,

$$f_d^-\left(x, v\right) \leq \sup_{x^* \in A} \left\langle x^*, v\right\rangle.$$

13Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Bởi vì f là khả vi theo phương, với mỗi $v \in X$,

$$f_d^+(x,v) = f_d^-(x,v),$$

và vì vậy,

$$f_d^+(x,v) = \max_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle \leq \sup_{x^* \in A} \langle x^*, v \rangle.$$

Như vậy,

$$co(\partial^* f(x)) \subset co(A) \subset co(\partial^* f(x)).$$

Do đó,

$$co(\partial^* f(x)) = co(A).$$

Ta có

$$Ext(co(\partial^* f(x))) = Ext(co(A)) \subset Ext(A).$$

Do đó,

$$Ext(co(\partial^* f(x))) \subset Ext(A) \subset A,$$

và như vậy,

$$\overline{Ext(co(\partial^* f(x)))} \subset A.$$

Do đó,$\overline{Ext(co(\partial^* f(x)))}$ là dưới vi phân suy rộng trên tối thiểu của f tại x.Trường hợp dưới vi phân suy rộng dưới làm tương tự. □

Giả sử hàm f, hữu hạn và liên tục tại x. Ta nói f là chính quy trên tại x nếu với mỗi $v \in X$,

$$f_d^+(x,v) = f^{\uparrow}(x,v).$$

Tương tự, hàm f là chính quy dưới nếu với mỗi $v \in X$,

$$f_d^-(x,v) = f^{\downarrow}(x,v).$$

14Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Chú ý rằng, nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz địa phương trên $\mathbb{R}^n$, và với mỗi $v \in X$, $f_d^+(\cdot, v)\left[f_d^-(\cdot, v)\right]$ nửa liên tục trên (dưới), thì với mỗi $x \in X$ và $v \in X$,

$$f_d^+(x, v) = f^\circ(x, v) = f^\uparrow(x, v)\left[f_d^-(x, v) = f_\circ(x, v) = f^\downarrow(x, v)\right].$$

Như vậy f là chính quy trên(dưới) tại x.

Nếu $f^\uparrow(x, 0) > -\infty$ và nếu f là chính quy trên tại x thì $\partial^\uparrow f(x)$ là khác rỗng, lồi, đóng yếu*, và với mỗi $v \in X$,

$$f_d^+(x, v) = f^\uparrow(x, v) = \sup_{x^* \in \partial^\uparrow f(x)} \langle x^*, v\rangle.$$

Như vậy $\partial^\uparrow f(x)$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên của f tại x.

Tương tự nếu $f^\downarrow(x, 0) < \infty$ và nếu f là chính quy dưới tại x, thì $\partial^\downarrow f(x)$ khác rỗng, lồi, đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f_d^-(x, v) = f^\downarrow(x, v) = \inf_{x^* \in \partial^\downarrow f(x)} \langle x^*, v\rangle.$$

Và như vậy, $\partial^\downarrow f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng chính quy dưới của f tại x.

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz địa phương trên $\mathbb{R}^n$ và chính quy trên tại x thì với mỗi $v \in X$,

$$f_d^+(x, v) = f^\uparrow(x, v) = f^\circ(x, v) = \max_{x^* \in \partial^\circ f(x)} \langle x^*, v\rangle.$$

Như vậy, $\overline{Ext\left(\partial^\circ f(x)\right)}$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên tối thiểu duy nhất f tại x. Nếu f lồi, thì $\overline{Ext\left(\partial f(x)\right)}$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên tối thiểu duy nhất của f tại x, trong đó

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* | f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \forall y \in X\}$$

là dưới vi phân lồi của f tại x.

15Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

1.3 Quy tắc tính dưới vi phân suy rộng

Trong phần này, ta sẽ trình bày một số quy tắc tính toán cho dưới vi phân suy rộng.

Mệnh đề 1.3.1

Giả sử hàm $f : X \to \mathbb{R}$ có một dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(x)$ tại $x \in X$. Nếu f đạt cực tri tại x thì

$$0 \in \overline{co}\left(\partial^* f(x)\right).$$

Chứng minh

Giả sử rằng f đạt cực tiểu tại x. Khi đó, với mỗi $v \in X$,

$$f_d^-(x, v) \geq 0.$$

Như vậy,

$$\sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle \geq 0$$

bởi vì $\partial^* f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng dưới của f tại x. Ta định nghĩa hàm $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ như sau:

$$\phi(v) = \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle.$$

Khi đó, ϕ là một hàm dưới tuyến tính, nửa liên tục dưới. Do đó, (xem [8]) là, với mỗi $v \in X$, $\phi(v) \geq 0$ nếu và chỉ nếu $0 \in \partial\phi(v)$, trong đó

$$\partial\phi(0) = \overline{co}\left(\partial^* f(x)\right).$$

Mặt khác, nếu f đạt cực đại tại x thì với mỗi $v \in X$,

$$\inf_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle \leq f_d^+(x, v) \leq 0.$$

16Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Do đó, với mỗi $v \in X$,

$$\sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle \geq 0.$$

Do đó ta suy ra kết luận của mệnh đề. □

Bây giờ ta trình bày một số quy tắc tính dưới vi phân suy rộng.

Quy tắc 1.3.1

Giả sử $\partial^* f(x)$ và $\partial_* f(x)$, tương ứng là các dưới vi phân suy rộng trên và dưới của f tại x.

Nếu $\lambda > 0$ thì $\lambda \partial^* f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng trên của λf tại x.

Nếu $\lambda < 0$ thì $\lambda \partial_* f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng trên của λf tại x.

Chứng minh

Điều này suy ra từ Định nghĩa. □

Nhận xét 1.3.1

Chú ý rằng Quy tắc 1.3.1 cũng đúng cho các dưới vi phân suy rộng chính quy trên và dưới.

Quy tắc 1.3.2

Giả thiết rằng các hàm $f, g : X \to \mathbb{R}$ nhận $\partial^* f(x)$ và $\partial^* g(x)$ là các dưới vi phân suy rộng trên tại x và một trong các dưới vi phân là chính quy trên tại x. Khi đó $\partial^* f(x) + \partial^* g(x)$ là một dưới vi phân suy rộng trên của $f + g$ tại x.

Chứng minh

Giả sử rằng $\partial^* g(x)$, là một dưới vi phân suy rộng chính quy trên của g tại

17Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

x. Khi đó, với mỗi $v \in X$,

$$\begin{aligned}(f+g)_d^-(x,v) &\leq f_d^-(x,v) + g_d^+(x,v) \\ &\leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v\rangle + \sup_{y^* \in \partial^* g(x)} \langle y^*, v\rangle \end{aligned}.$$

Do đó, với mỗi $v \in X$,

$$(f+g)_d^-(x,v) \leq \sup_{z^* \in \partial^* f(x) + \partial^* g(x)} \langle z^*, v\rangle .$$

Vì vậy ta có kết luận cần chứng minh. □

Nhận xét 1.3.2

Chú ý rằng $\partial^* f(x) + \partial^* g(x)$ không nhất thiết là một dưới vi phân suy rộng chính quy trên của $f+g$ tại x, ngay cả khi cả hai dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(x)$ và $\partial^* g(x)$ là chính quy trên. Để thấy được điều này, ta hãy xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.3.1

Hàm f trên $\mathbb{R}$ được xác định như sau $f(x) = 0$ nếu $x \geq 1$, $f(x) = x$ nếu $x \leq 0$, trên $[0,1]$ f là tuyến tính từng khúc với các điểm gẫy $x_n = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, ...$, ở đây

$$f\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = 0,$$

và

$$f\left(\frac{1}{2^{2n+1}}\right) = \frac{1}{2^{2n+1}},$$

với $n = 1, 2, \ldots$ Bây giờ ta xác định hàm g trên $\mathbb{R}$ bởi

$$g(x) = \begin{cases} -f(x), x \geq 0, \\ 0 \qquad , x < 0. \end{cases}$$

18Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Khi đó, $\partial^* f(0) = \{1\}$ và $\partial^* g(0) = \{0\}$ là các dưới vi phân suy rộng chính quy trên của f và g tại 0. Tuy nhiên,

$$\partial^* f(0) + \partial^* g(0) = \{1\},$$

không phải là một dưới vi phân suy rộng chính quy trên của $f + g$ tại 0, bởi vì

$$(f+g)_d^+(0,1) = 0 < \sup_{\alpha \in \partial^* f(0) + \partial^* g(0)} \langle \alpha, 1 \rangle = 1.$$

Quy tắc tiếp theo cho ta một kết quả mạnh hơn trong quy tắc trước nhưng với một điều kiện khả vi.

Quy tắc 1.3.3

Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ có một dưới vi phân chính quy trên $\partial^* f(x)$ tại x và $g : X \to \mathbb{R}$ khả vi Gâteaux tại x với đạo hàm $g'(x)$, thì $\partial^* f(x) + \{g'(x)\}$ là một dưới vi phân chính quy trên của $f + g$ tại x

Chứng minh

Điều này suy ra từ các đẳng thức sau đây:

$$\begin{aligned}(f+g)_d^+(x,v) &= f_d^+(x,v) + \langle g'(x), v \rangle \\ &= \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle + \langle g'(x), v \rangle\end{aligned}.$$

Do đó, với mỗi $v \in X$,

$$(f+g)_d^+(x,v) = \sup_{z^* \in \partial^* f(x) + \{g'(x)\}} \langle z^*, v \rangle.$$

□

19Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Cho $I = \{1, 2\}$. Giả sử $x_0 \in X$, và với mỗi $i \in I$ $f_i : X \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Hàm $h : X \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$h(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}.$$

Đặt

$$I(x_0) = \{i \in I : h(x_0) = f_i(x_0)\}.$$

Quy tắc 1.3.4

Với mọi $i \in I$, nếu f_i có một dưới vi phân suy rộng chính quy trên $\partial^* f_i(x_0)$ tại x_0 thì

$$\partial^* h(x_0) := \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial^* f_i(x_0)$$

là một dưới vi phân suy rộng trên của h tại x_0

Chứng minh

Nếu $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ thì $I(x_0) = \{1\}$ và $h(x) = f_1(x)$ với mỗi x trong một lân cận của x_0. Do đó,

$$h_d^-(x_0, v) = f_d^-(x_0, v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f_1(x)} \langle x^*, v \rangle.$$

và như vậy,

$$\partial^* h(x_0) = \partial^* f_1(x_0)$$

là một dưới vi phân suy rộng trên của h tại x_0.

Tương tự, nếu $f_2(x_0) > f_1(x_0)$ thì $\partial^* h(x_0) = \partial^* f_2(x_0)$ là một dươi vi phân suy rộng trên của h tại x_0.

Bây giờ, giả thiết rằng $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, khi đó

$$h(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

20Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

và với mỗi $v \in X$,

$$h_d^-(x_0, v) = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{\max\{f_1(x_0 + tv), f_2(x_0 + tv)\} - h(x_0)}{t}$$

$$= \liminf_{t \downarrow 0} \max\left\{\frac{f_1(x_0 + tv) - f_1(x_0)}{t}, \frac{f_2(x_0 + tv) - f_2(x_0)}{t}\right\}$$

$$= \max\left\{\liminf_{t \downarrow 0} \frac{f_1(x_0 + tv) - f_1(x_0)}{t}, \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f_2(x_0 + tv) - f_2(x_0)}{t}\right\}$$

$$\leq \sup_{x^* \in (\partial^* f_1(x_0) \cup \partial^* f_2(x_0))} \langle x^*, v \rangle .$$

Do đó,

$\partial^* f_1(x_0) \cup \partial^* f_2(x_0)$ là một dưới vi phân suy rộng trên của h tại x_0. □

Nhận xét 1.3.3

Chú ý rằng kết quả tương tự quy tắc trên cho dưới vi phân suy rộng dưới được chứng minh tương tự như trên.

1.4 Định lý giá trị trung bình

Trong phần này,ta sẽ trình bày quy tắc hàm hợp và định lý giá trị trung bình. Trước hết ta trình bày định lý giá trị trung bình (tiệm cận) cho các hàm liên tục.

Định lý 1.4.1

Giả sử $a, b \in X$, và $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm sao cho thu hẹp $f|_{[a,b]}$ là hữu hạn và liên tục. Giả thiết rằng với mỗi $x \in (a, b)$, $\partial^* f(x)$ và $\partial_* f(x)$ là các dưới vi phân suy rộng trên và dưới tương ứng của f. Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$

21Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

và một dãy

$$\{x_k^*\} \subset co\left(\partial^* f\left(c\right)\right) \cup co\left(\partial_* f\left(c\right)\right),$$

sao cho

$$f\left(b\right) - f\left(a\right) = \lim_{k\to\infty} \left\langle x_k^*, b-a\right\rangle.$$

Chứng minh

Xét hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$g\left(t\right) := f\left(a + t\left(b-a\right) - f\left(a\right) + t\left(f\left(a\right) - f\left(b\right)\right)\right).$$

khi đó ,g liên tục trên $[0,1]$ và

$$g\left(0\right) = g\left(1\right) = 0.$$

Như vậy, tồn tại $\gamma \in (0,1)$ sao cho g đạt cực trị tại γ. Đặt

$$c = \gamma b + \left(1-\gamma\right)a.$$

Giả sử g đạt cực tiểu tại γ. Khi đó,điều kiện cần để γ là cực tiểu là với mỗi $v \in \mathbb{R}$,

$$g_d^-\left(\gamma, v\right) \geq 0.$$

Bởi vì $g_d^-\left(\gamma, v\right) = f_d^-\left(c, v\left(b-a\right)\right) + v\left(f\left(a\right) - f\left(b\right)\right)$, với mọi $v \in \mathbb{R}$, ta có

$$f_d^-\left(c, v\left(b-a\right)\right) \geq v\left(f\left(b\right) - f\left(a\right)\right).$$

Khi đó, bằng cách đặt $v = 1$ và $v = -1$ ta nhận được các bất đẳng thức sau:

$$-f_d^-\left(c, a-b\right) \leq f\left(b\right) - f\left(a\right) \leq f_d^-\left(c, b-a\right).$$

22Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Bởi vì $\partial^* f(c)$ là một dưới vi phân suy rộng trên của f tại c, ta có

$$\inf_{z^* \in \partial^* f(c)} \langle z^*, b-a \rangle \leq f(b) - f(a) \leq \sup_{z^* \in \partial^* f(c)} \langle z^*, b-a \rangle . \tag{1.1}$$

Khi đó, từ bất đẳng thức (1.1), tồn tại một dãy

$$\{x_k^*\} \subset co\left(\partial^* f(c)\right)$$

thỏa mãn

$$f(b) - f(a) = \lim_{k \to \infty} \langle x_k^*, b-a \rangle .$$

Mặt khác, nếu g đạt cực đại tại γ, thì cũng sử dụng lí luận tương tự như trên ta suy ra kết luận của định lí. □

Nhận xét 1.4.1

Chú ý rằng kết luận trên kéo theo sự tồn tại một điểm $c \in (a,b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) \in \overline{co} \left\langle \partial_* f(c) \cup \partial^* f(c), b-a \right\rangle .$$

Hệ quả 1.4.1

Giả sử $a, b \in X$, và $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm sao cho thu hẹp $f|_{[a,b]}$ là hữu hạn và liên tục. Giả thiết rằng với mỗi $x \in (a,b)$, $\partial^* f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng của f. Khi đó, tồn tại $c \in (a,b)$ và một dãy

$$\{x_k^*\} \subset co\left(\partial^* f(c)\right)$$

sao cho

$$f(b) - f(a) = \lim_{k \to \infty} \langle x_k^*, b-a \rangle .$$

Chứng minh

23Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Kết luận được suy ra từ Định lý 1.4.1, với lưu ý rằng trong trường hợp này, với mỗi $x \in X$, $\partial^* f(x) = \partial_* f(x)$. $\square$

Nhận xét 1.4.2

Trong chứng minh của Định lý 1.4.1, cần phải lưu ý rằng, nếu $\partial^* f(c)$ và $\partial_* f(c)$ là compắc yếu*, thì cận trên đúng và cận dưới đúng đạt được trong (1). Kết quả là ta có đẳng thức

$$f(b) - f(a) = \langle \xi, b - a \rangle,$$

với ξ nào đó $\in co(\partial_* f(c) \cup \partial^* f(c))$.

Vì vậy ta nhận được các tính chất trung bình không có tiệm cân khi hàm f có dưới vi phân suy rộng compắc yếu* tại mỗi điểm.

Tuy nhiên, tập hợp

$$co(\partial^* f(c)) \cup co(\partial_* f(c))$$

không nhất thiết phải compắc yếu*, ngay cả khi nếu $\partial^* f(c)$ và $\partial_* f(c)$ là compắc yếu*.

Bây giờ ta xét tính chất Lipschitz địa phương của một hàm liên tục có thể đặc trưng dưới ngôn ngữ bị chặn địa phương, của ánh xạ $\partial^* f : x \to \partial^* f(x)$. Nhắc lại rằng, ánh xạ $\partial^* f$ là bị chặn địa phương tại x nếu tồn tại một lân cận U của x trong X và $\alpha > 0$, sao cho $\|v\|_* \leq \alpha$, với mỗi $v \in \partial^* f(y)$ và $y \in U$, trong đó $\|\cdot\|_*$ là chuẩn trong X^*.

Hệ quả 1.4.2

Giả sử $f : X \to \mathbb{R}$ là liên tục. Khi đó f có ánh xạ dưới vi phân suy rộng bị chặn địa phương $\partial^* f$ tại x nếu và chỉ nếu f là Lipschitz địa phương tại x.

Chứng minh

Giả sử rằng $\partial^* f(y)$ là dưới vi phân suy rộng của f với y thuộc vào lân cận

24Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

U của x và $\partial^* f$ là bị chặn trên U. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng U là lồi. Khi đó, tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $\|v\|_* \leq \alpha$, với mỗi $v \in \partial^* f(U)$. Giả sử $x, y \in U$. Khi đó $[x, y] \subset U$, và theo định lý giá trị trung bình, tồn tại $c \in (x, y)$, sao cho

$$f(x) - f(y) \in \overline{co}\langle \partial^* f(c), x - y\rangle \subset \overline{co}\langle \partial^* f(U), x - y\rangle.$$

Vì vậy,

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\| \max\{\|v\|_* : v \in \partial^* f(U)\}.$$

Do đó,

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha \|x - y\|.$$

Như vậy,f là Lipschitz địa phương tại x. Ngược lại nếu f là Lipschitz địa phương tại x thì dưới vi phân suy rộng Clarke bị chăn địa phương tại x, và có thể được chọn làm một dưới vi phân suy rộng của f tại x. □

Bằng cách sử dụng định lý giá trị trung bình, bây giờ ta thiết lập quy tắc tính dưới vi phân suy rộng cho hàm hợp. Nhắc lại: ánh xạ đa trị $F : X \to Y$ là nửa liên tục trên tại x, nếu với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại một $\delta > 0$, sao cho với mỗi $x' \in B_\delta^X(x)$,

$$F(x') \subset F(x) + \epsilon B^Y,$$

trong đó

$$B_\delta^X(x) = \{x' \in X | \|x' - x\| < \delta\}$$

Y là một không gian Banach và B^Y là một hình cầu đơn vị trong Y.

Mệnh đề 1.4.1

Cho $f = (f_1, ..., f_n)$ là một hàm liên tục từ X vào $\mathbb{R}^n$, và giả sử g là một

25Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

hàm liên tục từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$. Giả thiết rằng với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, f_i có một dưới vi phân suy rộng bị chặn $\partial^* f_i(x_0)$ tại x_0, và g có một dưới vi phân suy rộng bị chặn $\partial^* g(f(x_0))$ tại $f(x_0)$. Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, nếu $\partial^* f_i$ là nửa liên tục trên tại x_0 và $\partial^* g$ là nửa liên tục trên tại $f(x_0)$ thì tập hợp

$$\partial^*(g \circ f)(x_0) := \partial^* g(f(x_0))(\partial^* f_1(x_0), ..., \partial^* f_n(x_0))$$

là một dưới vi phân suy rộng của $g \circ f$ tại x_0.

Chứng minh

Giả sử $x \in X$ là tùy ý .Khi đó,

$$(f \circ g)_d^-(x_0, u) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{g(f(x_0 + tu)) - g(f(x_0))}{t}.$$

Theo định lý giá trị trung bình, ta có

$$g(f(x_0 + tu)) - g(f(x_0)) \in \overline{co}\left\langle \partial^* g\left(c^t\right), f(x_0 + tu) - f(x_0)\right\rangle,$$

với c^t nào đó $\in [f(x_0), f(x_0 + tu)]$. Với mỗi i

$$f_i(x_0 + tu) - f_i(x_0) \in \overline{co}\left\langle \partial^* f_i\left(x_i^t\right), tu\right\rangle$$

với x_i^t nào đó $\in (x_0, x_0 + tu)$. Bây giờ, từ giả thiết nửa liên tục trên ta suy ra, với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $t_0 > 0$ sao cho

$$\partial^* g\left(c^t\right) \subset \partial^* g(f(x_0)) + \epsilon B^n$$

và

$$\partial^* f_i\left(x_i^t\right) \subset \partial^* f_i(x_0) + \epsilon B^{X^*},$$

với mỗi i và $t \in [0, t_0]$, trong đó B^n là hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$. Như vậy, ta nhận được, với mỗi $t \leq t_0$,

$$\frac{g(f(x_0 + tu)) - g(f(x_0))}{t} \in \overline{co}\langle A, u\rangle,$$

26Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

mà

$$A := \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \varepsilon b_i)(\xi_i + \varepsilon \eta_i) \,|\alpha \in \partial^* g(f(x_0)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b \in B^n, \xi_i \in \partial^* f_i(x_0), \eta_i \in B^{X^*} \end{array} \right\}.$$

Bởi vì dưới vi phân suy rộng là bị chặn, ta suy ra tồn tại $M > 0$, không phụ thuộc vào ϵ sao cho với mỗi

$$\alpha \in \partial^* g(f(x_0)), b \in B^n, \xi_i \in B^{X^*}, i = 1, 2, ..., n,$$

$\|\varepsilon_i \eta_i + b_i \xi_i\| \leq M$ và $\|b_i \eta_i\| \leq M$. Vì vậy,

$$(g \circ f)_d^- (x_0, u)$$

$$\leq \sup \{\langle x^*, u\rangle \,|x^* \in \partial^* g(f(x_0)) (\partial^* f_i(x_0), ..., \partial^* f_n(x_0))\}$$

$$+ \left(\epsilon + \epsilon^2\right) M.$$

Vì ϵ là tùy ý, ta suy ra

$$(g \circ f)_d^- (x_0, u)$$

$$\leq \sup \{\langle x^*, u\rangle \,|x^* \in \partial^* g(f(x_0)) (\partial^* f_i(x_0), ..., \partial^* f_n(x_0))\}.$$

Do đó, tập hợp

$$\partial^* g(f(x_0)) (\partial^* f_i(x_0), ..., \partial^* f_n(x_0)),$$

là một dưới vi phân suy rộng trên của $g \circ f$ tại x_0. Cũng lý luận tương tự như trên, tập hơp

$$\partial^* g(f(x_0)) (\partial^* f_i(x_0), ..., \partial^* f_n(x_0)),$$

là một dưới vi phân suy rộng dưới của $g \circ f$ tại x_0. Vì vậy, ta có kết luận phải chứng minh. □

27Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

1.5 Tính tựa đơn điệu và tính tựa lồi

Ta nói rằng một ánh xạ đa trị $H : X \to X^*$ là tựa đơn điệu nếu với mỗi $x, y \in X$ và với mỗi $x^* \in H(x)$, $y^* \in H(y)$,

$$\min\{\langle y - x, x^*\rangle, \langle x - y, y^*\rangle\} \leq 0.$$

Xác định ánh xạ đa trị $coH : X \to X^*$ bởi

$$(coH)(x) = co(H(x)), x \in X.$$

Bổ đề 1.5.1

Ánh xạ đa trị H là tựa đơn điệu nếu và chỉ nếu coH là tựa đơn điệu.

Chứng minh

Rõ ràng là với mỗi $x \in X$,

$$H(x) \subset co(H(x)),$$

tính tựa đơn điệu của coH kéo theo tính tựa đơn điệu của H. Để thấy suy luận ngược lại, giả sử

$$x^* \in co(H(x)), y^* \in co(H(y)).$$

Khi đó x^* và y^* có thể viết

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^*$$

và

$$y^* = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j^*$$

với

$$\lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1, x_i^* \in H(x), y_j^* \in H(y).$$

28Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Giả sử rằng

$$\min\left\{\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^*, y-x\right\rangle, \left\langle\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j^*, x-y\right\rangle\right\} > 0.$$

Khi đó,

$$\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^*, y-x\right\rangle > 0$$

và

$$\left\langle\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j^*, x-y\right\rangle > 0.$$

Vì vậy, có ít nhất i_0 nào đó $\in \{1, 2, ..., n\}$ và j_0 nào đó $\in \{1, 2, ..., m\}$ sao cho

$$\left\langle x_{i_0}^*, y-x\right\rangle > 0$$

và

$$\left\langle y_{j_0}^*, x-y\right\rangle > 0.$$

Do đó,

$$\min\left\{\left\langle x_{i_0}^*, y-x\right\rangle, \left\langle y_{j_0}^*, x-y\right\rangle\right\} > 0.$$

Điều này mâu thuẫn với tính tựa đơn điệu của H.Vì thế, nếu H là tựa đơn điệu, thì coH cũng là tựa đơn điệu. □

Định lý 1.5.1

Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là liên tục. Giả sử rằng với mỗi $x \in X$,$\partial^* f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng của f tại x. Nếu $\partial^* f$ là tựa đơn điệu thì f là tựa lồi.

Chứng minh

Giả sử $\partial^* f$ là tựa đơn điệu, nhưng f không phải là tựa lồi. Khi đó, tồn tại $x, y \in X$ và $c \in (x, y)$, sao cho

$$f(c) > f(x)$$

29Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

và

$$f(c) > f(y).$$

Theo định lý giá trị trung bình, ta có thể tìm được

$$a \in (x, c), b \in (c, y), \{a_k^*\} \subset co(\partial^* f(a)), \{b_k^*\} \subset co(\partial^* f(b))$$

sao cho

$$f(c) - f(x) = \lim_{k\to\infty} \langle a_k^*, c - x\rangle,$$

và

$$f(c) - f(y) = \lim_{k\to\infty} \langle b_k^*, c - y\rangle.$$

Do đó, với số N đủ lớn,

$$\langle a_N^*, b - a\rangle = \left\langle a_N^*, (c - x)\frac{\|b - a\|}{\|c - x\|}\right\rangle > 0$$

và

$$\langle b_N^*, a - b\rangle = \left\langle b_N^*, (c - y)\frac{\|a - b\|}{\|c - y\|}\right\rangle > 0.$$

Điều nay mâu thuẫn với tính tựa đơn điệu của $co\partial^* f$. Vì vậy f là tựa lồi. □

Định lý 1.5.2

Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là liên tục. Giả sử rằng với mỗi $x \in X$, $\partial^* f(x)$ là dưới vi phân suy rộng của f tại x. Giả thiết rằng tồn tại một tập con trù mật K của X sao cho với mỗi $x \in K$, $\partial^* f(x)$ chính quy trên, và với mỗi $x \notin K$,

$$\partial^* f(x) \subset \left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n | \xi_n \in \partial^* f(x_n), x_n \in K, x_n \to x\right\}.$$

Khi đó, $\partial^* f$ là tựa đơn điệu nếu và chỉ nếu f là tựa lồi.

Chứng minh

Kết luận được suy ra từ định lý trước, nếu ta chỉ ra rằng tính tựa lồi của f kéo theo tính tựa đơn điệu của f. Giả sử rằng f là tựa lồi. Giả sử tồn tại

$$x, y \in X, x^* \in \partial^* f(x), y^* \in \partial^* f(y)$$

30Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

sao cho

$$\langle x^*, y - x\rangle > 0$$

và

$$\langle y^*, x - y\rangle > 0.$$

Nếu $x, y \in K$, thì theo điều kiện chính quy,

$$f_d^+ (x, y - x) > 0$$

và

$$f_d^+ (y, x - y) > 0.$$

Điều đó mâu thuẫn với tính tựa lồi của f.

Bây giờ nếu $x, y \notin K$, thì ta có thể chọn $\overline{x}, \overline{y} \in K$, đủ gần x và y tương ứng,

$$\overline{x}^* \in \partial^* f (\overline{x}), \overline{y}^* \in \partial^* f (\overline{y}).$$

sao cho

$$\langle \overline{x}^*, \overline{y} - \overline{x}\rangle > 0$$

và

$$\langle \overline{y}^*, \overline{x} - \overline{y}\rangle > 0.$$

Mặt khác, do tính chính quy, ta đi đến sự mâu thuẫn. Các kết luận cho trường hợp $x \notin K$ hoặc $y \notin K$ nhận được theo cách tương tự như trên. □

Chú ý rằng, cho một hàm Lipschitz địa phương $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\partial^\circ f$ là tựa đơn điệu nếu và chỉ nếu f là tựa lồi, bởi vì một ánh xạ dưới vi phân suy rộng $\partial^* f$, trong đó với mỗi $x \in X, \partial^* f (x) \subset \partial^\circ f (x)$ là tựa đơn điệu nếu và chỉ nếu f là tựa lồi.

31Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Chương 2

DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG VÀ ỨNG DỤNG TRONG TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU

Chương 2 trình bày một số quy tắc tính dưới vi phân suy rộng cho hàm hợp. Chương này cũng trình bày một số tính chất của các hàm giả lồi dưới ngôn ngữ giả đơn điệu của dưới vi phân suy rộng cùng với các điều kiện cần tối ưu cho cực tiểu yếu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu không ràng buộc và có ràng buộc bất đẳng thức dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng. Các kết quả được trình bày trong chương này là của J.Dutta và S.Chandra [7].

2.1 Một số kết quả của Dutta-Chandra về dưới vi phân suy rộng

Trước hết ta nhắc lại các định nghĩa về dưới vi phân suy rộng: Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và điểm $x \in \mathbb{R}^n$ mà $f(x)$ là hữu hạn. Ký hiệu $f_d^+(x, v)$ và $f_d^-(x, v)$ là đạo hàm theo phương Dini trên và dưới của f tại x theo phương v.

Định nghĩa 2.1.1

Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng trên $\partial^* f(x)$ tại $x \in \mathbb{R}^n$ nếu $\partial^* f(x) \subset \mathbb{R}^n$ là một tập đóng, và

$$f_d^-(x, v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle \ , v \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Định nghĩa 2.1.2

Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng dưới $\partial_* f(x)$ tại

32Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

$x \in \mathbb{R}^n$ nếu $\partial_* f(x) \subset \mathbb{R}^n$ là một tập đóng, và

$$f_d^+(x,v) \geq \inf_{x^* \in \partial_* f(x)} \langle x^*, v \rangle \ , \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Một tập đóng $\partial^* f(x) \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là dưới vi phân suy rộng của f tại x nếu nó đồng thời là dưới vi phân suy rộng trên và dưới của f tại x.

Định nghĩa 2.1.3

Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là vi phân suy rộng bán chính quy trên (upper semi - regular convexificator) $\partial^* f(x)$ tại $x \in \mathbb{R}^n$ nếu $\partial^* f(x) \subset \mathbb{R}^n$ là một tập đóng, và

$$f_d^+(x,v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Nếu trong công thức (2.1) có dấu "=" thì $\partial^* f(x)$ được gọi là dưới vi phân suy rộng chính quy trên. Khái niệm dưới vi phân suy rộng chính quy trên đã được đưa vào [9] . Ví dụ sau đây chỉ ra rằng dưới vi phân suy rộng trên không nhất thiết là dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên.

Ví dụ 2.1.1

Cho $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ. Ta xét hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x : x \in Q, \\ 0 : x \notin Q. \end{cases}$$

Chú ý rằng tại điểm $x = 0$ thì đạo hàm theo phương Dini trên và dưới là

$$f_d^+(0,v) = \max\{0, \mathrm{v}\},$$

$$f_d^-(0,v) = \min\{0, \mathrm{v}\}.$$

33Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Xét tập $\partial^* f(0) = \{-1, 0\}$. Chú ý rằng $\partial^* f(0)$ là dưới vi phân suy rộng trên của f tại $x = 0$. Chú ý rằng

$$\sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle = \begin{cases} 0 & , v \geq 0, \\ -v & , v < 0 \, . \end{cases}$$

Như vậy, nếu $v \geq 0$ thì

$$f_d^-(0, v) = 0 = \sup_{x^* \in \partial^* f(0)} \langle x^*, v \rangle \, ,$$

và nếu $v < 0$ thì

$$f_d^-(0, v) = v < -v = \sup_{x^* \in \partial^* f(0)} \langle x^*, v \rangle \, .$$

Nhưng $\partial^* f(0)$ trên không là dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên. Điều này dễ thấy bằng cách lấy $v = 1$. Trong trường hợp này,

$$f^+(0, 1) = 1,$$

nhưng

$$\sup_{x^* \in \partial^* f(0)} \langle x^*, 1 \rangle = 0 < f^+(0, 1) = 1.$$

Rõ ràng mọi hàm khả vi có dưới vi phân suy rộng chính quy trên:

$$\partial^* f(x) = \{\nabla f(x)\} \, .$$

Bởi vì một hàm Lipschitz địa phương là khả vi hầu khắp nơi, cho nên nó có dưới vi phân suy rộng chính quy trên một tập trù mật. Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là Lipschitz địa phương và chính quy theo nghĩa Clarke [3] thì dưới vi phân Clarke là một dưới vi phân suy rộng chính quy trên tại mỗi $x \in \mathbb{R}^n$. Ta sẽ chỉ ra rằng một hàm không Lipschitz địa phương cũng có thể có một dưới vi phân suy rộng chính quy trên.

34Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Ví dụ 2.1.2

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức:

$$f(x) = \begin{cases} |x| : x \in \mathbb{Q}, \text{ hoặc } x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{2}x : x \notin \mathbb{Q}, x \notin \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

trong đó

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Cũng chú ý rằng

$$f_d^+(0, v) = |v|.$$

Xét tập

$$\partial^* f(0) = \{-1, 1\}.$$

Chú ý rằng

$$\max_{x^* \in \partial^* f(0)} \langle x^*, v \rangle = \max\{v, -v\} = |v| = f_d^+(0, v).$$

Như vậy rõ ràng là $\partial^* f(0) = \{-1, 1\}$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên của f tại $x = 0$.

Chú ý rằng nếu f khả vi thì

$$\nabla f(x) \in \overline{co}\partial^* f(x),$$

và nếu $\partial^* f(x)$ là chính quy trên tại x thì

$$\partial^* f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Định lý 2.1.1

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ và $x \in \mathbb{R}^n$ là một điểm mà tại đó $f(x)$ hữu hạn. Hơn nữa giả sử rằng đạo hàm theo phương Dini dưới $f_d^-(x, v)$ bị chặn trên. Khi

35Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

đó tồn tại dưới vi phân suy rộng trên compăc của f tại x.Nếu đạo hàm Dini trên bị chặn dưới thì tồn tại dưới vi phân suy rộng dưới compăc của f tại x.

Ta sẽ phát biểu định lý giá trị trung bình quan trọng về vi phân suy rộng của Jeyakumar và Luc [9].

Định lý 2.1.2 ([9])

Cho $a, b \in \mathbb{R}^n$ và $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Giả sử với mỗi $x \in (a, b)$, $\partial^* f(x)$ và $\partial_* f(x)$ là các dưới vi phân suy rộng trên và dưới của f tại x. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ và dãy

$$\{x_k^*\} \subset co\left(\partial^* f(c)\right) \cup co\left(\partial_* f(c)\right)$$

sao cho

$$f(b) - f(a) = \lim_{k\to\infty} \langle x_k^*, b - a\rangle,$$

trong đó (a, b) kí hiệu khoảng mở nối hai điểm a và b.

Nhận xét 2.1.1

Định lí giá trị trung bình trên được gọi là định lí giá trị trung bình tiệm cận trong [9]. Nếu $\partial^* f(x)$ là dưới vi phân suy rộng bị chặn của f tại x trong $\mathbb{R}^n$ thì ta có dạng không tiệm cận của định lí giá trị trung bình tức là tồn tại $c \in (a, b)$ và $\xi \in \partial^* f(c)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = \langle \xi, b - a\rangle.$$

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng định lý giá trị trung bình, để trình bày hai quy tắc tính dưới vi phân suy rộng cho hàm hợp.

Định lý 2.1.3

Giả sử $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là hàm giá trị vectơ khả vi liên tục, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Giả sử tại mỗi $y \in \mathbb{R}^m$ hàm g có dưới vi phân suy rộng bị chặn

36Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

$\partial^* g(y)$. Hơn nữa, giả sử rằng $\partial^* g$ là một ánh xạ đa trị đóng. Khi đó, hàm $g \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên tại mỗi $x \in \mathbb{R}^n$ được cho bởi công thức

$$\partial^* (g \circ F)(x) = JF(x)^T \partial^* g(F(x)),$$

trong đó $JF(x)$ là ma trận Jacobian của hàm F tại điểm $x \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh

Bởi vì hàm g có dưới vi phân suy rộng bị chặn $\partial^* g(y)$ tại mỗi $y \in \mathbb{R}^m$, từ Hệ quả 1.4.2, g là Lipschitz địa phương trên $\mathbb{R}^n$. Bởi vì $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là khả vi liên tục, hàm $g \circ F$ là Lipschitz địa phương trên $\mathbb{R}^n$.

Như vậy ta có đạo hàm theo phương Dini trên $(g \circ F)_d^+(x, v)$ có đạo hàm hữu hạn với $\forall x \in R^n$ và với mọi phương $v \in \mathbb{R}^n$. Ta sẽ chỉ ra rằng:

$$(g \circ F)_d^+(x, v) \leq \sup \left\{ \langle \beta, v \rangle : \beta \in JF(x)^T \partial^* g(F(x)) \right\}.$$

Hơn nữa rõ ràng là tồn tại dãy $\lambda_i \to 0$ khi $i \to +\infty$ sao cho

$$(g \circ F)_d^+(x, v) = \lim_{i \to +\infty} \frac{(g \circ F)(x + \lambda_i v) - (g \circ F)(x)}{\lambda_i}. \tag{2.2}$$

Với bất kỳ i đủ lớn (hoặc λ_i đủ nhỏ) theo Nhận xét 2.1.1 tồn tại

$$c_i \in (F(x + \lambda_i v), F(x)),$$

và $\xi_i \in \partial^* g(c_i)$ sao cho

$$(g \circ F)_d^+(x, v) = \lim_{i \to +\infty} \frac{(g \circ F)(x + \lambda_i v) - (g \circ F)(x)}{\lambda_i}. \tag{2.3}$$

Khi $i \to +\infty$, ta có $\lambda_i \to 0$, $c_i \to F(x)$ và

$$\xi_i \in \partial^* g(c_i).$$

Bởi vì $\partial^* g(c_i)$ là bị chặn ta có thể trích ra một dãy ξ_i (ta không đánh số lại) hội tụ đến ξ nào đó. Bởi vì $\partial^* g(c_i)$ là ánh xạ đa trị đóng cho nên ta có

$$\xi \in \partial^* g(F(x)).$$

37Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Bởi vì

$$\left(F\left(x+\lambda_i v\right)-F\left(x\right)\right)/\lambda_i \to JF\left(x\right)v,$$

sử dụng (2.2) và (2.3) ta có

$$\left(g\circ F\right)_d^+\left(x,v\right)=\left\langle JF\left(x\right)^T\xi,v\right\rangle.$$

Như vậy ta suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 2.1.2

Bây giờ ta sẽ xét một trường hợp tương tự như trong định lý trên nhưng không giả thiết tính bị chặn của dưới vi phân suy rộng của g.

Định lý 2.1.4

Giả sử hàm $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ giá trị vecto khả vi liên tục. Giả sử g là một hàm liên tục và $\partial^* g$ là dưới vi phân suy rộng của g tại $x\in\mathbb{R}^m$. Hơn nữa, ta giả sử rằng $\partial^* g$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên. Khi đó, với bất kỳ $\varepsilon>0$, hàm

$$\left(g\circ F\right):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},$$

có dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên tại $x\in\mathbb{R}^n$ được cho bởi công thức

$$\partial^*\left(g\circ F\right)\left(x\right)=\overline{\left(JF\left(x\right)+\varepsilon B_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\right)^T co\partial^* g\left(F\left(x\right)\right)},$$

trong đó $B_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$ là hình cầu đơn vị trong $L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$.

Chứng minh

Để cho tiện thì ta sẽ đặt:

$$A_\varepsilon=\left(JF\left(x\right)+\varepsilon B_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\right)^T co\partial^* g\left(F\left(x\right)\right).$$

Ta phải chứng minh rằng

$$\left(g\circ F\right)_d^+\left(x,v\right)\le\sup\left\{\left\langle\beta,v\right\rangle:\beta\in\overline{A_\varepsilon}\right\}.$$

38Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Rõ ràng là tồn tại một dãy $\lambda_i \to 0$ khi $i \to +\infty$ và

$$(g \circ F)_d^+ (x, v) = \lim_{i \to +\infty} \frac{(g \circ F)(x + \lambda_i v) - (g \circ F)(x)}{\lambda_i}.$$

Bây giờ theo Định lý 2.1.2, với i bất kỳ, tồn tại

$$c_i \in (F(x), F(x + \lambda_i v)),$$

và dãy

$$\xi_i^k \in co\partial^* g(c_i)$$

sao cho

$$(g \circ F)(x + \lambda_i v) - (g \circ F)(x) = \lim_{k \to +\infty} \left\langle \xi_i^k, F(x + \lambda_i v) - F(x) \right\rangle.$$

Bởi vì F khả vi liên tục, theo định lý giá trị trung bình tồn tại $b_i \in (x + \lambda_i v, x)$ sao cho

$$\frac{(g \circ F)(x + \lambda_i v) - (g \circ F)(x)}{\lambda_i} = \lim_{k \to +\infty} \left\langle \xi_i^k, JF(b_i) v \right\rangle.$$

Bởi vì $\partial^* g$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, cho nên $co\partial^* g$ cũng nửa liên tục trên. Như vậy, với $\delta > 0$ bất kỳ có thể chọn i đủ lớn sao cho

$$co\partial^* g(c_i) \subset co\partial^* g(F(x)) + \varepsilon B_{\mathbb{R}^m},$$

trong đó $B_{\mathbb{R}^m}$ ký hiệu hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^m$. Như vậy với những i đó ta có với mọi k

$$\xi_i^k \in \partial^* g(F(x)) + \delta B_{\mathbb{R}^m}.$$

Bây giờ bởi vì F là khả vi liên tục cho nên với $\varepsilon > 0$ cho trước ta có thể chọn i đủ lớn sao cho

$$JF(b_i) \in JF(x) + \varepsilon B_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}.$$

39Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Như vậy với $\varepsilon > 0$ và $\delta > 0$ thì với bất kỳ k ta có

$$JF(b_i)^T \xi_i^k \in \left(JF(x) + \varepsilon B_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\right)^T \left(co\partial^* g(F(x)) + \delta B_{\mathbb{R}^m}\right),$$

trong đó T ký hiệu phép chuyển vị ma trận. Điều này chỉ ra rằng

$$JF(b_i)^T \xi_i^k \in \left(JF(x) + \varepsilon B_{L(R^n,R^m)}\right)^T co\partial^* g(F(x))$$

$$+ \left(JF(x) + \varepsilon B_{L(R^n,R^m)}\right)^T \delta B_{R^m}.$$

Điều này dẫn đến

$$JF(b_i)^T \xi_i^k \in A_\varepsilon + \left(JF(x) + \varepsilon B_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\right)^T \delta B_{\mathbb{R}^m}.$$

Bởi vì tập

$$\left(JF(x) + \varepsilon B_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\right)^T B_{\mathbb{R}^m}$$

bị chặn nên tồn tại số dương $M > 0$ sao cho

$$\sup\left\{\langle a, v\rangle : a \in \left(JF(x) + \varepsilon B_{L(R^n,R^m)}\right)^T B_{R^m}\right\} \leq M.$$

Như vậy với i đủ lớn thì với mỗi k ta có

$$\left\langle JF(b_i)^T \xi_i^k, v\right\rangle = \left\langle \xi_i^k, JF(b_i)^T v\right\rangle \leq \sup\{\langle \beta, v\rangle : \beta \in A_\varepsilon\} + \delta M.$$

Cho nên với mọi i đủ lớn ta có

$$\frac{(g \circ F)(x + \lambda_i v) - (g \circ F)(x)}{\lambda_i} \leq \sup\left\{\langle \beta, v\rangle : \beta \in \overline{A_\varepsilon}\right\} + \delta M.$$

Với $\varepsilon > 0$ cố định thì với bất kỳ $\delta > 0$ ta có

$$(g \circ F)_d^+(x, v) \leq \sup\left\{\langle \beta, v\rangle : \beta \in \overline{A_\varepsilon}\right\} + \delta M.$$

Bởi vì $\delta > 0$ là bất kỳ cho nên ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

40Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

2.2 Dưới vi phân suy rộng và tính lồi suy rộng

Các khái niệm dưới vi phân suy rộng và hàm lồi suy rộng liên quan chặt chẽ với nhau qua khái niệm đơn điệu suy rộng. Chương 1 đã trình bày mối quan hệ giữa hàm tựa lồi và tính tựa đơn điệu của dưới vi phân suy rộng. Trong phần này ta đưa vào khái niệm giả lồi khác của một hàm.

Định nghĩa 2.2.1

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(x)$ tại mỗi $x \in \mathbb{R}^n$. Khi đó f được gọi là ∂^*- giả lồi nếu với mỗi cặp $x, y \in \mathbb{R}^n$ phân biệt, ta có

$$f(y) < f(x) \Rightarrow \langle \xi, y - x \rangle < 0 \quad \forall \xi \in \partial^* f(x).$$

Nhận xét 2.2.1

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thì từ Định lý 2.4 [6] ta có mọi hàm ∂^*- giả lồi là tựa lồi. Vì vậy, thực ra ta đang nghiên cứu một lớp con của lớp các hàm tựa lồi liên tục.

Nếu f là Lipschitz địa phương và

$$\partial^* f(x) = \partial^c f(x),$$

trong đó $\partial^c f(x)$ là dưới vi phân Clarke của f tại x (xem [2]) thì các hàm ∂^*- giả lồi là ∂^c- giả lồi.

Định nghĩa 2.2.2

Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm giả lồi nếu với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ với $f(y) < f(x)$ thì tồn tại $\beta(x, y) > 0$ và $\delta(x, y) \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x) - f(x + \lambda(y - x)) \geq \lambda\beta(x, y), \forall \lambda \in (0, \delta(x, y)).$$

41Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Mệnh đề 2.2.1

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $\partial^* f(x)$ là dưới vi phân suy rộng cuả f tại x. Giả sử f là ∂^*- giả lồi. Cho $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ là cực tiểu địa phương của f, $\partial^* f(\overline{x})$ bị chặn. Khi đó $\overline{x}$ là cực tiểu toàn cục của f.

Chứng minh

Bởi vì $\overline{x}$ là cực tiểu địa phương và từ Mệnh đề 1.3.1 và chú ý rằng có $\partial^* f(\overline{x})$ bị chặn, ta có

$$0 \in co\partial^* f(\overline{x}).$$

Giả sử rằng $\overline{x}$ không là cực tiểu toàn cục và như vậy tồn tại y sao cho

$$f(y) < f(\overline{x}).$$

Do tính ∂^*- giả lồi ta có

$$\langle \xi, y - \overline{x} \rangle < 0 \quad \forall \xi \in \partial^* f(\overline{x}).$$

Điều này chỉ ra rằng

$$\langle \xi, y - \overline{x} \rangle < 0 \quad \forall \xi \in co\partial^* f(\overline{x}).$$

Đây là một mâu thuẫn. □

Bây giờ ta sẽ đưa vào các ánh xạ đa trị vào tựa đơn điệu và giả đơn điệu

Định nghĩa 2.2.3

Ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là giả đơn điệu nếu với $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $x \neq y$,

$$\exists x^* \in F(x) : \langle x^*, y - x \rangle > 0 \Rightarrow \forall y^* \in F(y) : \langle y^*, y - x \rangle > 0.$$

42Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Định nghĩa 2.2.4

Ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là tựa đơn điệu nếu với $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $x \neq y$,

$$\exists x^* \in F(x) : \langle x^*, y - x \rangle > 0 \Rightarrow \forall y^* \in F(y) : \langle y^*, y - x \rangle \geq 0.$$

Với ánh xạ đa trị $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ta hiểu coS là ánh xạ đa trị cho bởi

$$coS(x) = co(S(x)).$$

Bổ đề 2.2.1 ([9])

Giả sử $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó S là giả đơn điệu nếu và chỉ nếu coS là giả đơn điệu.

Định lý 2.2.1

Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và $\partial^* f(x)$ là dưới vi phân suy rộng của f tại $x \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\partial^* f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là giả đơn điệu thì f là ∂^*- giả lồi.

Chứng minh

Giả sử f không ∂^*- giả lồi. Khi đó, tồn tại $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, sao cho

$$f(y) < f(x)$$

kéo theo

$$\langle \xi, y - x \rangle \geq 0$$

với ít nhất một $\xi \in \partial^* f(x)$. Ta có

$$f(y) - f(x) < 0.$$

Như vậy theo Định lý 2.1.2 sẽ tồn tại $c \in (y, x)$ và

$$c_k^* \in co\partial f(c)$$

43Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

sao cho

$$\lim_{k\to+\infty} \langle c_k^*, y-x\rangle < 0.$$

Điều này chỉ ra rằng với k đủ lớn ta có

$$\langle c_k^*, x-y\rangle > 0 \quad c_k^* \in co\partial^* f(c).$$

Bởi vì $c \in (y, x)$ cho nên

$$\langle c_k^*, x-c\rangle > 0 \quad c_k^* \in co\partial^* f(c).$$

Bởi vì $\partial^* f(x)$ là giả đơn điệu cho nên theo Bổ đề 2.2.1, ta có $co\partial^* f$ cũng giả đơn điệu. Do đó, $\forall x^* \in co\partial^* f(x)$, ta có

$$\langle x^*, x-c\rangle > 0.$$

Như vậy với $\forall x^* \in co\partial^* f(x)$ ta có

$$\langle x^*, x-y\rangle > 0.$$

Điều này dẫn đến

$$\langle x^*, y-x\rangle < 0 \quad \forall x^* \in co\partial^* f(x).$$

Như vậy dẫn đến một mâu thuẫn, nên ta suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 2.2.2

So sánh kết quả trên với Định lý 2.6 [6] trong đó tính bị chặn và tính bán chính quy trên của dưới vi phân suy rộng phải giả thiết để chỉ ra rằng tính giả đơn điệu của dưới vi phân suy rộng kéo theo tính giả lồi của hàm.

Thật là thú vị là liệu chiều ngược lại có đúng không. Nếu một điều kiện chính quy mạnh nào đó đúng thì câu trả lời là đúng.

Định lý 2.2.2

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và giả sử $\partial^* f(x)$ là dưới vi phân suy rộng của f tại

44Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

$x \in \mathbb{R}^n$. Giả thiết rằng $\partial^* f(x)$ là chính quy trên tại mỗi x. Khi đó $\partial^* f$ là giả đơn điệu nếu f là ∂^*- giả lồi

Chứng minh

Giả sử $x^* \in \partial^* f(x)$ thỏa mãn

$$\langle x^*, y - x \rangle > 0.$$

Điều đó chỉ ra rằng

$$\sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, y - x \rangle > 0.$$

Do $\partial^* f(x)$ là chính quy trên ta có

$$f_d^+(x, y - x) > 0.$$

Điều này chỉ ra rằng có thể tìm được một $\lambda > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$f(x + \lambda(y - x)) > f(x).$$

Do đó tính tựa lồi của f, ta có $f(y) > f(x)$. Từ tính ∂^*- giả lồi của f ta suy ra

$$\langle y^*, y - x \rangle > 0, \quad \forall y^* \in \partial^* f(y).$$

Vì vậy $\partial^* f$ là giả đơn điệu. □

Nhận xét 2.2.3

Sẽ là thú vị nếu giả thiết chính quy trên của dưới vi phân suy rộng trong định lý trên có thể giảm nhẹ.

Trong Định lý 2.4 [6] đã chỉ ra rằng nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liên tục và $\partial^* f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng của f tại x và với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(y) < f(x) \Rightarrow \langle \xi, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in \partial^* f(x),$$

thì f là tựa lồi. Câu hỏi được đặt ra là liệu quan hệ trên có đúng không nếu f là một hàm tựa lồi liên tục. Ta chỉ ra rằng một quan hệ như vậy sẽ đúng

45Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

với một số điều kiện chính quy nào đó.

Định lý 2.2.3

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm tựa lồi liên tục. Giả sử với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial^* f(x)$ là một dưới vi phân suy rộng của f tại x. Giả thiết rằng tồn tại một tập con trù mật K của $\mathbb{R}^n$ sao cho $\partial^* f(x)$ là chính quy trên với mọi $x \in K$. Với $x \notin K$ giả thiết rằng

$$\partial^* f(x) \subset \left\{ \lim_{n\to+\infty} \xi_n : \xi_n \in \partial^* f(x_n), x_n \in K, x_n \to x \right\}. \tag{2.4}$$

Khi đó với $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) < f(x) \Rightarrow \langle \xi, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in \partial^* f(x).$$

Chứng minh

Giả định $x, y \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$f(y) < f(x).$$

Do đó theo Định lý 2.1.2, tồn tại $c \in (y, x)$ và $c_k^* \in \partial^* f(c)$ sao cho

$$\lim_{k\to+\infty} \langle c_k^*, y - x \rangle < 0.$$

Do đó cho k đủ lớn ta có

$$\langle c_k^*, y - x \rangle > 0, \quad c_k^* \in \partial^* f(c).$$

Điều này dẫn đến

$$\langle c_k^*, x - c \rangle > 0, \quad c_k^* \in \partial^* f(c).$$

Bởi vì f là tựa lồi theo Định lý 1.5.2 ta có $\partial^* f$ là tựa đơn điệu. Điều này chỉ ra rằng với mọi $\xi \in \partial^* f(x)$, ta có

$$\langle \xi, x - c \rangle \geq 0.$$

46Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Điều này dẫn đến

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in \partial^* f(x).$$

Vì thế kết quả được chứng minh. □

Nhận xét 2.2.4

Các điều kiện của Định lý 2.1.3 tương tự như Định lý 1.5.2. Nhưng dưới vi phân Clarke của một hàm Lipschitz địa phương không thỏa mãn giả thiết về tính chính quy trên một tập con trù mật của $\mathbb{R}^n$, còn dưới vi phân Michel-Penot lại thỏa mãn. Định lý Rademacher nói rằng một hàm Lipschitz địa phương $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là khả vi trên một tập trù mật của $\mathbb{R}^n$. Dưới vi phân Michel-Penot chính là đạo hàm tại các điểm khả vi. Điều này chỉ ra rằng nếu f khả vi tại x thì ta có

$$f^\diamond(x, h) = \langle \nabla f(x), h \rangle = f'(x, h).$$

Điều này chỉ ra rằng dưới vi phân Michel-Penot của một hàm Lipschitz địa phương là một dưới vi phân suy rộng của hàm f chính quy trên trong một tập trù mật của $\mathbb{R}^n$. Hơn nữa, tại những điểm không khả vi ta có

$$\partial^\diamond f(x) \subseteq \partial^\circ f(x).$$

Vì vậy, ta có

$$\partial^\diamond f(x) \subset \left\{ \lim_{n \to +\infty} \xi_n : \xi_n \in \partial^\diamond f(x_n), x_n \in D, x_n \to x \right\},$$

trong đó D là tập các điểm khả vi của f và

$$\partial^\diamond f(x_n) = \{\nabla f(x_n)\}$$

và

$$\xi_n = \nabla f(x_n).$$

47Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Sử dụng các kĩ thuật của các Định lý 1.5.1 và Định lý 1.5.2 ta có thể thấy rằng một hàm Lipschitz địa phương là tựa lồi nếu và chỉ nếu dưới vi phân Michel-Penot là tựa đơn điệu. Điều này không đúng cho dưới vi phân Clarke vì rằng tính chính quy của Định lý 1.5.2 không đúng cho dưới vi phân Clarke.

2.3 Ứng dụng dưới vi phân suy rộng trong tối ưu đa mục tiêu

Trong phần này ta sẽ sử dụng các kết quả gần đây trong [12] để dẫn các điều kiện cần cho cực tiểu yếu trong tối ưu vec tơ dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên của các thành phần của hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc. Ta sẽ xét cả hai trường hợp không ràng buộc và có ràng buộc. Xét bài toán cực tiểu hóa (GVP):

$$\begin{cases} \min F(x) = (f_1(x), ..., f_k(x)), \\ x \in C, \end{cases}$$

trong đó C là một tập đóng. Một điểm $x_0 \in C$ được gọi là một điểm hữu hiệu yếu của (GVP) nếu không tồn tại $x \in C$ sao cho $f_j(x) < f_j(x_0)$ với mọi $j = 1, ..., k$.

Định lý 2.3.1

Xét bài toán (GVP), trong đó mỗi f_j là một hàm Lipschitz địa phương và C là một tập lồi đóng. Cho $x_0 \in C$ là một điểm hữu hiệu yếu của (GVP). Giả thiết với mỗi $j = 1, 2, ..., k$, hàm f_j có một dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên bị chặn $\partial^* f_j(x_0)$ tại x_0. Khi đó, tồn tại $\tau_j \geq 0$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$0 \in \sum_{i=1}^{k} \tau_i co \partial^* f_i(x_0) + N(C, x_0),$$

48Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

trong đó $N(C, x_0)$ là nón pháp tuyến của tập lồi C tại x_0.

Chứng minh

Vì rằng x_0 là một điểm hữu hiệu yếu của (GVP) và mỗi f_j Lipschitz địa phương cho nên

$$\left((f_1)_d^+(x_0, v), ..., (f_k)_d^+(x_0, v)\right) \notin \left(-\text{int}\mathbb{R}_+^k\right), \ \forall v \in T(C, x_0), \tag{2.5}$$

trong đó $T(C, x_0)$ là nón Bouligand của C tại x_0:

$$T(C, x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists v_n \to v, \exists t_n \to 0_+, \overline{x} + t_n v_n \in C \quad \forall n\},$$

Giả sử ngược lại (2.5) không đúng, và vì thế tồn tại một

$$0 \neq v \in T(C, x_0),$$

sao cho

$$\left((f_1)_d^+(x_0, v), ..., (f_k)_d^+(x_0, v)\right) \in \left(-\text{int}\mathbb{R}_+^k\right). \tag{2.6}$$

Vì rằng C là lồi,

$$T(C, x_0) = \overline{cone\,(C - x_0)},$$

trong đó nón $cone\,(C - x_0)$ sinh bởi tập hợp $C - x_0$. Như vậy tồn tại $\lambda_n > 0$ và $x_n \in C$ sao cho

$$v = \lim_{n \to +\infty} \lambda_n (x_n - x_0).$$

Từ (2.6) ta có

$$\left((f_1)_d^+\left(x_0, \lim_{n\to+\infty} \lambda_n (x_n - x_0)\right), ..., (f_k)_d^+\left(x_0, \lim_{n\to+\infty} \lambda_n (x_n - x_0)\right)\right)$$
$$\in \left(-\text{int}\ \mathbb{R}_+^k\right).$$

Bởi vì đạo hàm Dini dưới của một hàm Lipschitz địa phương là Lipschitz địa phương theo phương và thuần nhất dương, ta có với n đủ lớn

$$\left((f_1)_d^+(x_0, (x_n - x_0)), ..., (f_k)_d^+(x_0, (x_n - x_0))\right) \in \left(-\text{int}\ \mathbb{R}_+^k\right).$$

49Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Như vậy với n đủ lớn, do tính lồi của C ta có thể tìm được $\mu > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$x_0 + \mu (x_n - x_0) \in C,$$

và

$$f_j (x_0 + \mu (x_n - x_0)) < f_j (x_0), \quad \forall j = 1, ..., k.$$

Đây là một sự mâu thuẫn.

Vì rằng tại x_0 mỗi f_j có một dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên $\partial^* f_j (x_0)$, ta có

$$\left(\sup_{x^* \in \partial^* f_1(x_0)} \langle x^*, v \rangle, ..., \sup_{x^* \in \partial^* f_k(x_0)} \langle x^*, v \rangle \right)$$
$$- \left((f_1)_d^+ (x_0, v), ..., (f_k)_d^+ (x_0, v) \right) \in \mathbb{R}_+^k.$$

Điều này chỉ ra rằng

$$\left(\sup_{x^* \in \partial^* f_1(x_0)} \langle x^*, v \rangle, ..., \sup_{x^* \in \partial^* f_k(x_0)} \langle x^*, v \rangle \right)$$
$$\notin -\text{int}\mathbb{R}_+^k, \quad v \in T(C, x_0).$$

Như vậy bằng cách áp dụng định lí tách, ta suy ra tồn $\tau_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., k$, không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\sum_{j=1}^{k} \tau_j \sup_{x^* \in \partial^* f_1(x_0)} \langle x^*, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in T(C, x_0).$$

Bằng cách áp dụng phép tính hàm tựa ta được kết quả cần chứng minh. □

Nhận xét 2.3.1

Chú ý rằng các điều kiện cần tối ưu trên có thể cho các quy tắc nhân tử Lagrange tốt hơn trong trường hợp Lipschiz địa phương vì như đã chỉ ra trong Chương 1 dưới vi phân Clarke có thể là một tập con thực sự của dưới vi phân suy rộng.

50Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Định lý 2.3.2

Xét bài toán (GVP) trong đó mỗi f_i là một hàm Lipschiz địa phương và $C = \mathbb{R}^n$. Giả sử x_0 là một điểm hữu hiệu yếu của (GVP). Với một chỉ số cố định $m \in \{1, 2, ..., k\}$, hàm f_m có một dưới vi phân suy rộng trên bị chặn $\partial^* f_m(x_0)$ tại x_0, còn với mọi $j \in \{1, 2, ..., k\}$, với $j \neq m$, hàm f_j có một dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên bị chặn $\partial^* f_j(x_0)$ tại x_0. Khi đó, tồn tại $\tau_m \geq 0$ và $\tau_j \geq 0$, $j \neq m$, không đồng thời bằng 0, sao cho

$$0 \in \tau_m co\partial^* f_m(x_0) + \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \tau_j co\partial^* f_j(x_0).$$

Chứng minh

Do chỉ số m cố định thì theo Định lý 3.1 [12], hệ sau đây

$$(f_m)_d^-(x_0, v) < 0,$$

$$(f_j)_d^+(x_0, v) < 0, \quad \forall j = 1, ..., k : j \neq m$$

không có nghiệm trong $v \in \mathbb{R}^n$. Từ giả thiết hệ sau đây

$$\sup_{\xi \in \partial^* f_m(x_0)} \langle \xi, v \rangle < 0,$$

$$\sup_{\xi \in \partial^* f_j(x_0)} \langle \xi, v \rangle < 0, \quad \forall j = 1, ..., k; j \neq m$$

không có nghiệm trong $v \in \mathbb{R}^n$. Như vậy theo định lí tách tồn tại $\tau_j \geq 0$ sao cho

$$\tau_m \left(\sup_{\xi \in \partial^* f_m(x_0)} \langle \xi, v \rangle \right) + \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \tau_j \left(\sup_{\xi \in \partial^* f_j(x_0)} \langle \xi, v \rangle \right) \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Do đó, bằng phép tính hàm tựa ta có

$$0 \in \tau_m co\partial^* f_m(x_0) + \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \tau_j co\partial^* f_j(x_0).$$

51Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Vì thế kết luận được chứng minh □

Định lý 2.3.3

Xét bài toán (GVP), trong đó

$$C = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m\}$$

và mỗi f_j và g_j là Lipschiz địa phương. Giả sử x_0 là một điểm hữu hiệu yếu của (GVP). Giả thiết rằng mỗi g_j có một dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên bị chặn $\partial^* g_j(x_0)$ tại x_0. Hơn nữa, giả sử rằng tất cả các hàm f_j, $j \neq m$ ($m \in \{1, ..., k\}$ là một chỉ số cố định) có một dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên bị chặn $\partial^* f_j(x_0)$ $(j \neq m)$ tại x_0, còn f_m có một dưới vi phân suy rộng trên $\partial^* f_m(x_0)$ tại x_0.

Khi đó, tồn tại $\tau_m \geq 0$, $\tau_j \geq 0$, $j \neq m$ và $\lambda_i \geq 0$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$0 \in \tau_m co\partial^* f_m(x_0) + \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \tau_j co\partial^* f_j(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i co\partial^* g_i(x_0)$$

và

$$\lambda_i g_i(x_0) = 0.$$

Chứng minh

Vì rằng x_0 là một nghiệm hữu hiệu yếu của (VP2) từ Định lý 4.2 [12], hệ sau

$$(f_m)_d^-(x_0, v) < 0,$$

$$(f_j)_d^+(x_0, v) < 0, \forall j = 1, ..., k; j \neq m,$$

$$\mathrm{g_i}(x_0) + (\mathrm{g_i})_d^+(x_0, v) < 0, \forall i = 1, ..., m,$$

52Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

không có nghiệm $v \in \mathbb{R}^n$. Vì vậy, hệ sau:

$$\sup_{\xi \in \partial^* f_m(x_0)} \langle \xi, v \rangle < 0,$$

$$\sup_{\xi \in \partial^* f_j(x_0)} \langle \xi, v \rangle < 0, \quad \forall j = 1, ..., k; j \neq m,$$

$$g_i(x_0) + \sup_{x^* \in \partial^* g_i(x_0)} \langle x^*, v \rangle < 0, \quad \forall i = 1, ..., m,$$

không có nghiệm cho $v \in \mathbb{R}^n$. Theo định lí tách tồn tại $\tau_j \geq 0$ và $\lambda_i \geq 0$, không đồng thời bằng không, sao cho

$$\begin{aligned} &\tau_m \left(\sup_{\xi \in \partial^* f_m(x_0)} \langle \xi, v \rangle \right) + \sum_{j=1, j \neq m}^{k} \tau_j \left(\sup_{\xi \in \partial^* f_j(x_0)} \langle \xi, v \rangle \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sup_{x^* \in \partial^* g_i(x_0)} \langle x^*, v \rangle \right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j g_j(x_0) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \end{aligned}.$$

Đặt $v = 0$ trong biểu thức trên ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_0) \geq 0.$$

Điều này chỉ ra rằng

$$\lambda_i g_i(x_0) = 0,$$

với mọi $i = 1, ..., m$. Kết quả được suy ra do áp dụng phép toán của các hàm tựa. $\square$

53Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày lý thuyết dưới vi phân suy rộng của Jeyakumar - Luc [9] Dutta - Chandra [7] và ứng dụng bao gồm:

- Các dưới vi phân suy rộng trên và dưới và các ví dụ;
- Các dưới vi phân suy rộng chính quy, bán chính quy và tối thiểu;
- Các điều kiện đủ để dưới vi phân suy rộng là tối thiểu;
- Định lý giá trị trung bình tiệm cận dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng;
- Các quy tắc tính dưới vi phân suy rộng bao gồm quy tắc nhân với một số, quy tắc tổng, quy tắc lấy max hữu hạn và các quy tắc hàm hợp;
- Các tính chất của hàm tựa lồi và hàm giả lồi dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng;
- Các điều kiện cần cho cực tiểu yếu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu không có ràng buộc và có hữu hạn ràng buộc bất đẳng thức.

Dưới vi phân suy rộng và các ứng dụng của nó là đề tài đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu.

54Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tiếng Việt

[1] Đỗ Văn Lưu và Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

[2] Đỗ Văn Lưu (1999), *Giải tích Lipschitz*,Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

Tài liệu tiếng Anh

[3] F.H.Clarke (1983), *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York.

[4] V.F.Demyanov, and A.M.Rubinov (1995), *Constructive Nonsmooth Analysis*, Peter Lang Verlag, Frankfurt am Main, Germany.

[5] V.F.Demyanor (1994), *Convexification and concavification of a positively homogenous function by the same family of linear functions*, Repert 3, 208, 802, Universita di Pisa.

[6] J.Dutta and S.Chandra (2002), *Convexifactors, generalized convexity and optimality Conditions*, J. Optim. Theory Appl. 113, 41-65.

[7] J.Dutta and S.Chandra (2004), *Convexifactors, generalized convexity and vector optimization*, Optimization 53, 77- 94.

[8] J.B.Hiriart-Urruty and C.Lemarechal (1993), *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Vols.1-2,Springer Verlag, Berlin, Germany.

[9] V.Jeyakumar and D.T.Luc (1999), *Nonsmooth Calculus,Minimality, and Monotonicity of Convexificators*, J. Optim. Theory Appl. 101, 599 - 621.

[10] B.S.Morduchovich, and Y.Shao (1995), *On Nonconvex Subdifferential Calculus in Banach Spaces*, Journal of Convex Analysis, Vol.2, 211-228.

[11] P.Michel and J. P.Penot (1992), *A Generalized Derivative for Calm and Stable Functions*, Differential and Integral Equations, Vol.5, 433-454.

[12] M.Pappalardo and W.Stockhin (2001), *Necessary optimality conditions in nondifferetiable vector optimization*, Optimization 50, 233-251.

56Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*