

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG KIM CHI

**KHÔNG GIAN SOBOLEV
NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG
TRÌNH ELLIPTIC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG KIM CHI

KHÔNG GIAN SOBOLEV NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số : 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

LỜI CẢM ƠN	1
MỞ ĐẦU	3
1 KHÔNG GIAN SOBOLEV	4
1.1 Một số kiến thức chuẩn bị.	4
1.2 Không gian $W^{k,p}(\Omega)$; $W_0^{k,p}(\Omega)$	6
1.2.1 Không gian $W^{k,p}(\Omega)$	8
1.2.2 Ví dụ.	13
1.2.3 Không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$	14
1.3 Định lý nhúng	20
1.4 Đánh giá thể tích và các định lý nhúng	24
2 NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC	31
2.1 Khái niệm nghiệm yếu.	31
2.1.1 Công thức tích phân từng phần.	31
2.1.2 Định nghĩa.	31
2.1.3 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu.	33
2.2 Độ trơn của nghiệm yếu.	36
2.2.1 Độ trơn bên trong miền.	36
2.2.2 Độ trơn trên toàn miền.	40
2.2.3 Nghiệm yếu của phương trình elliptic tổng quát.	42
KẾT LUẬN	44

TÀI LIỆU THAM KHẢO**45**

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của PGS.TS Hà Tiến Ngoạn. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc đến thầy giáo.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy giáo, cô giáo trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2010-2012, những người đã đem hết tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho chúng tôi nhiều kiến thức cơ sở.

Tôi xin cảm ơn tập thể giáo viên trường Đại học Hàng Hải nơi tôi công tác đã giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt khóa học cũng như quá trình làm luận văn. Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè thân thiết những người luôn động viên chia sẻ, giúp tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2012.

Tác giả

Hoàng Kim Chi

Bảng kí hiệu.

$\mathbb{N}$: tập số tự nhiên.

$\mathbb{R}^n$: không gian n chiều.

$\mathcal{H}$: không gian Hilbert.

L : toán tử tuyến tính.

I : ánh xạ đồng nhất.

D^α : đạo hàm bậc α .

MỞ ĐẦU

Một số phương trình elliptic cấp hai thường được suy ra từ các định luật bảo toàn. Do đó, nghiệm của phương trình này có thể được mở rộng, không nhất thiết thuộc lớp C^2 , mà chỉ cần thuộc lớp $W^{1,2}$ và thỏa mãn một đẳng thức tích phân với mọi hàm thử v thuộc lớp $W_0^{1,2}$.

Dựa trên các tài liệu [1], [2], luận văn đã trình bày một cách hệ thống lý thuyết lớp nghiệm suy rộng cho phương trình elliptic tuyến tính cấp hai dạng bảo toàn.

Luận văn gồm hai chương I và II. Trong chương I, luận văn trình bày các không gian Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ và $W_0^{k,p}(\Omega)$ cùng các định lý nhúng.

Chương II là nội dung chính của luận văn, trong đó trình bày khái niệm nghiệm yếu của phương trình, nghiệm yếu của bài toán Dirichlet và định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu. Luận văn cũng trình bày độ trơn của nghiệm yếu trong đó khẳng định: khi các hệ số vế phải của phương trình cho trước trên biên thuộc lớp $C^\infty(\partial\Omega)$ thì nghiệm yếu $u(x)$ sẽ khả vi vô hạn trong $\overline{\Omega}$.

Chương 1

KHÔNG GIAN SOBOLEV

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị.

Trong phần này ta sẽ liệt kê một số định lý và định nghĩa cần thiết:

Định lý 1.1. (Định lý Riesz) Với mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn F trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ luôn tồn tại một phần tử xác định duy nhất $f \in \mathcal{H}$ sao cho $F(x) = (x, f)$ với mỗi $x \in \mathcal{H}$ và $\|F\| = \|f\|$ và đồng thời ta cũng có:

$$\begin{aligned}(x, f) &= \frac{F(x)}{F(f)} \|f\|^2 \\ \|F\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\|x\|} \\ \|f\|^2 &= (f, f) = F(f).\end{aligned}$$

Định lý 1.2. Giả sử T là ánh xạ tuyến tính compact của không gian tuyến tính định chuẩn V vào chính nó. Khi đó hoặc:

i) phương trình thuần nhất $x - Tx = 0$ có nghiệm không tầm thường $x \in V$ hoặc:

ii) với mọi $y \in V$ phương trình $x - Tx = y$ có nghiệm được xác định duy nhất $x \in V$.

Hơn nữa, trong trường hợp ii) toán tử $(I - T)^{-1}$ mà sự tồn tại của nó đã được khẳng định là bị chặn.

Định lý 1.3. (Định lý Lax-Milgram) Giả sử B là dạng song tuyến tính

bức, bị chặn trên không gian Hilbert, tức là

$$i) \exists M > 0 : |B(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|, \forall x, y \in \mathcal{H}$$

$$ii) \exists \lambda > 0 : B(x, x) \geq \lambda x^2, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Khi đó, với mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn $F \in \mathcal{H}^*$, tồn tại duy nhất một phần tử $f \in \mathcal{H}$ sao cho:

$$B(x, f) = F(x) \text{ với mọi } x \in \mathcal{H}.$$

Định lý 1.4. Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert và T là ánh xạ compact từ $\mathcal{H}$ vào chính nó. Khi đó, tồn tại một tập đếm được $\Lambda \subset \mathbb{R}$ không có điểm giới hạn trừ ra có thể $\lambda = 0$ sao cho: nếu $\lambda \neq 0, \lambda \notin \Lambda$ phương trình

$$\lambda x - Tx = y, \quad \lambda x - T^*x = y \quad (1.1)$$

có nghiệm xác định duy nhất $x \in \mathcal{H}$ với mọi $y \in \mathcal{H}$ và các ánh xạ ngược $(\lambda I - T)^{-1}, (\lambda I - T^*)^{-1}$ bị chặn. Nếu $\lambda \in \Lambda$, các không gian con không của ánh xạ $\lambda I - T, \lambda I - T^*$ có số chiều dương và hữu hạn, còn phương trình (1.1) giải được nếu và chỉ nếu y trực giao với không gian con không của $\lambda I - T^*$ trong trường hợp thứ nhất và của $\lambda I - T$ trong trường hợp còn lại.

Định lý 1.5. Một dãy bị chặn trong không gian Hilbert chứa một dãy con hội tụ yếu.

Định nghĩa 1.1. Toán tử vi phân đạo hàm riêng cấp hai dạng không bảo toàn có dạng:

$$Lu = a^{ij}(x) D_{ij}u + b^i(x) D_i u + c(x) u; \quad a^{ij} = a^{ji}$$

trong đó $x = (x_1, \dots, x_n)$ nằm trong miền Ω của $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

L là elliptic tại điểm $x \in \Omega$ nếu thỏa mãn ma trận $[a^{ij}(x)]$ là xác định dương. Vậy nếu $\lambda(x), \Delta(x)$ lần lượt là giá trị cực tiểu và cực đại của các giá trị riêng của $[a^{ij}(x)]$ khi đó:

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Delta(x) |\xi|^2$$

với mọi $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Nếu $\lambda > 0$ trong Ω , khi đó L là elliptic trong Ω và elliptic ngặt nếu $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ với hằng số $\lambda_0 > 0$.

Định lý 1.6. Cho L là elliptic ngặt trong miền Ω bị chặn, với $c \leq 0$, f và các hệ số của L thuộc vào $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Giả sử rằng Ω là một miền của $C^{2,\alpha}$ và $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Khi đó, bài toán Dirichlet

$$Lu = f \text{ trong } \Omega, \quad u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega$$

có duy nhất nghiệm nằm trong $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Định lý 1.7. Cho Ω là một miền $C^{k+2,\alpha}$ ($k \geq 0$) và $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Giả sử u là một hàm thuộc $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ thỏa mãn $Lu = f$ trong Ω , $u = \varphi$ trên $\partial\Omega$, trong đó f và các hệ số của toán tử elliptic ngặt thuộc $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Khi đó $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

1.2 Không gian $W^{k,p}(\Omega); W_0^{k,p}(\Omega)$.

Một trong những bài toán quan trọng của phương trình đạo hàm riêng là phương trình Poisson:

$$\Delta u = f \tag{1.2}$$

Nghiệm của phương trình (1.2) thỏa mãn đồng nhất thức tích phân:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

trong đó

$u = u(x_1, \dots, x_n)$ là ẩn hàm,

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm số được cho trước,

$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in C_0^1(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi liên tục và có giá compact,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

$$DuD\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Đặt

$$(u, \varphi) = \int_{\Omega} DuD\varphi dx. \quad (1.3)$$

Để nghiên cứu nghiệm của phương trình Poisson ta xem xét một cách tiếp cận khác đối với phương trình này.

Dạng song tuyến tính $(u, \varphi) = \int_{\Omega} DuD\varphi dx$ là một tích trong của không gian $C_0^1(\Omega)$ và bao đóng của $C_0^1(\Omega)$ theo metric cảm sinh bởi (1.3) là không gian Hilbert mà người ta kí hiệu là $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Hơn nữa, phiếm hàm tuyến tính F được định nghĩa bởi:

$$F(\varphi) = - \int_{\Omega} f\varphi dx$$

có thể được mở rộng đến một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên không gian $W_0^{1,2}(\Omega)$. Theo Định lý Riesz tồn tại một phần tử $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ thỏa mãn $(u, \varphi) = F(\varphi)$, $\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Do đó sự tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases}$$

thực sự được thiết lập.

Vấn đề về sự tồn tại nghiệm cổ điển được chuyển đổi tương ứng thành các vấn đề về tính chính quy của nghiệm suy rộng theo điều kiện biên trơn thích hợp. Định lý Lax-Milgram sẽ được áp dụng đối với phương trình elliptic tuyến tính theo dạng bảo toàn. Tương tự như việc áp dụng Định lý Riesz ở trên bằng các lí luận khác nhau dựa trên đồng nhất thức tích phân, kết quả chính quy sẽ được thiết lập.

Tuy nhiên trước khi thực hiện một cách cụ thể, ta đi khảo sát lớp các không gian Sobolev, đó là $W^{k,p}(\Omega)$ và $W_0^{k,p}(\Omega)$ mà $W_0^{1,2}(\Omega)$ là một trường hợp riêng.

1.2.1 Không gian $W^{k,p}(\Omega)$.

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn,

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \Omega.$$

a. Không gian $L^p(\Omega); (1 \leq p < +\infty)$.

$L^p(\Omega)$ là không gian Banach cổ điển gồm các hàm đo được trên Ω và p -khả tích. Tức là:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Chuẩn của $L^p(\Omega)$ được định nghĩa bởi:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p},$$

trong đó $|u(x)|$ là giá trị tuyệt đối hoặc modun của $u(x)$.

Khi $p = +\infty$; $L^\infty(\Omega)$ là không gian Banach các hàm bị chặn trên Ω với chuẩn:

$$\|u\|_{\infty, \Omega} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u|. \quad (1.4)$$

Khi không có sự nhập nhằng, chúng ta sẽ dùng $\|u\|_p$ thay cho $\|u\|_{L^p(\Omega)}$:

Bất đẳng thức Young:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \quad (1.5)$$

trong đó $p, q \in \mathbb{R}; p > 0, q > 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Khi $p = q = 2$; (1.5) chính là bất đẳng thức Cauchy. Thay thế a bởi $\varepsilon^{1/p}a$,

b bởi $\varepsilon^{-1/p}b$, với $\varepsilon > 0$ khi đó (1.5) trở thành bất đẳng thức nội suy:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon|a|^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p}|b|^q}{q} \leq \varepsilon|a|^p + \varepsilon^{-q/p}|b|^q \quad (1.6)$$

Bất đẳng thức Holder:

$$\int_{\Omega} uv dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad (1.7)$$

với $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

(1.7) là hệ quả của bất đẳng thức Young, khi $p = q = 2$, bất đẳng thức Holder trở thành bất đẳng thức Schwarz.

Bất đẳng thức Holder sử dụng trong trường hợp tổng quát đối với m hàm $u_1, u_2, \dots, u_m$ nằm trong không gian $L^{p_1}, L^{p_2}, \dots, L^{p_m}$ như sau:

$$\int_{\Omega} |u_1 u_2 \dots u_m| dx \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \dots \|u_m\|_{p_m} \quad (1.8)$$

với $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$.

Bất đẳng thức Holder cũng được sử dụng để nghiên cứu chuẩn trong L^p khi coi đó là các hàm của p :

$$\phi_p(u) = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.9)$$

Với $p > 0$, $\phi_p(u)$ là hàm không giảm theo p , với u cố định.

Không gian $L^p(\Omega)$ là khả li khi $p < \infty$, $C^0(\overline{\Omega})$ là không gian con trù mật trong $L^p(\Omega)$.

Không gian đối ngẫu của $L^p(\Omega)$ khi $1 < p < \infty$ đẳng cấu với $L^q(\Omega)$, trong đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vì thế $L^q(\Omega)$ khi $1 < p < +\infty$ được coi là liên hợp của $L^p(\Omega)$. Do đó, $L^p(\Omega)$ là phản xạ khi $1 < p < \infty$

Khi $p = 2$, $L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

$$(u, u) = \|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Định lý 1.8. (định lý nhúng $L^p(\Omega)$) Giả sử Ω là miền bị chặn và $1 \leq p_1 < p_2$. Khi đó, $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$ và ánh xạ nhúng

$$j : L^{p_2}(\Omega) \mapsto L^{p_1}(\Omega)$$

là liên tục.

Chứng minh: Giả sử $u \in L^{p_2}(\Omega)$ ta cần chứng minh $u \in L^{p_1}(\Omega)$ hay $\int_{\Omega} |u|^{p_1} dx < +\infty$.

Áp dụng bất đẳng thức Holder với $p = \frac{p_2}{p_1}, q = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$, ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p_1} dx &= \int_{\Omega} |u|^{p_1} \cdot 1 dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{p_1 p} dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\Omega} 1^q dx \right)^{1/q} \\ &= (\text{mes} \Omega)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Vì Ω bị chặn và $u \in L^{p_2}(\Omega)$ nên

$$(\text{mes} \Omega)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p} < +\infty$$

Vậy $u \in L^{p_1}(\Omega)$.

Từ (1.10) ta suy ra:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p_1} &\leq (\text{mes} \Omega)^{1/q p_1} \cdot \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p p_1} \\ &= (\text{mes} \Omega)^{1/q p_1} \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p_2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\Leftrightarrow \|u\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq (\text{mes} \Omega)^{1/q p_1} \cdot \|u\|_{L^{p_2}(\Omega)}$$

(1.11) chứng tỏ ánh xạ $j : L^{p_2}(\Omega) \mapsto L^{p_1}(\Omega)$ là liên tục

và $\|j\| \leq (\text{mes} \Omega)^{1/q p_1} = (\text{mes} \Omega)^{1/p_1 - 1/p_2}$.

***Không gian $L_{loc}^p(\Omega)$.**

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, k là số nguyên không âm. Không gian Holder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($C^{k,\alpha}(\Omega)$) được định nghĩa như một không gian con của không gian $C^k(\overline{\Omega})$ ($C^k(\Omega)$) gồm có các hàm mà đạo hàm riêng bậc k liên tục Holder đều (liên tục Holder địa phương) với số mũ α trong Ω . Để đơn giản ta kí hiệu:

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega), \quad C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

được hiểu với $0 < \alpha < 1$ mỗi khi kí hiệu này được dùng nếu không nói ngược lại.

Hơn nữa, đặt

$$C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega), \quad C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega}).$$

Chúng ta có thể gộp không gian $C^k(\Omega)$ ($C^k(\overline{\Omega})$) vào họ các không gian $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ($C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$) với $0 \leq \alpha \leq 1$. Chúng ta cũng kí hiệu không gian $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ của hàm trên $C^{k,\alpha}(\Omega)$ là giá compact trong Ω .

Các không gian $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ở trên là không gian địa phương.

Cho ρ là một hàm không âm trong $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, triệt tiêu bên ngoài hình cầu $B_1(0)$ và thỏa mãn $\int \rho dx = 1$. Một hàm như vậy thường được gọi là một nhân trung bình hóa. Một ví dụ điển hình là hàm ρ được đưa ra bởi:

$$\rho(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{với } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{với } |x| \geq 1 \end{cases}$$

trong đó c được chọn để $\int \rho dx = 1$ và có đồ thị là hình quả chuông quen thuộc. Với $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ và $h > 0$, chuẩn của u biểu thị bởi u_h , sau đó được xác định bởi tích chập

$$u_h(x) = h^{-n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy$$

với điều kiện là $h < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Rõ ràng là u_h thuộc $C^\infty(\Omega')$ với mỗi $\Omega' \subset\subset \Omega$ với điều kiện là $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Hơn nữa, nếu u thuộc $L^1(\Omega)$,

Ω bị chặn thì u_h nằm trong $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ với $h > 0$ tùy ý. Khi h tiến đến 0 hàm $y \mapsto h^{-n}\rho(x - y/h)$ tiến đến hàm suy rộng delta Dirac tại điểm x .

Bổ đề 1.9. Cho $u \in C^0(\Omega)$. Khi đó, u_h hội tụ đến u trên bất kì miền $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Bổ đề 1.10. Cho $u \in L^p(\Omega)$, $p < \infty$. Khi đó u_h hội tụ đến u trong ý nghĩa của $L^p(\Omega)$.

*Đạo hàm yếu.

Cho u khả tích địa phương trong Ω và đa chỉ số α bất kì. Khi đó một hàm v khả tích địa phương gọi là đạo hàm yếu bậc α của u nếu thỏa mãn

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx \quad \text{với mọi } \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Ta kí hiệu $v = D^{\alpha}u$ và chú ý rằng $D^{\alpha}u$ là xác định duy nhất chính xác đến một tập có độ đo không. Những liên hệ theo từng điểm liên quan đến đạo hàm yếu sẽ được hiểu là thỏa mãn hầu khắp nơi. Chúng ta gọi một hàm là khả vi yếu nếu tất cả các đạo hàm yếu bậc nhất của nó tồn tại và với khả vi yếu bậc k , nếu tất cả các đạo hàm yếu bậc nhỏ hơn hoặc bằng k tồn tại. Ta kí hiệu không gian tuyến tính các hàm khả vi yếu bậc k là $W^k(\Omega)$. Rõ ràng $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$. Khái niệm đạo hàm yếu là một mở rộng của khái niệm cổ điển mà phép lấy tích phân từng phần vẫn còn đúng.

Bổ đề 1.11. Cho $u \in L^1(\Omega)$, α là một đa chỉ số, và giả sử rằng tồn tại $D^{\alpha}u$. Khi đó nếu $d(x, \partial\Omega) > h$, ta có

$$D^{\alpha}u_h(x) = (D^{\alpha}u)_h(x).$$

Định lý 1.12. Cho u và v khả tích địa phương trong Ω . Khi đó $v = D^{\alpha}u$ nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy hàm $\{u_m\}$ của $C^\infty(\Omega)$ hội tụ đến u trong $L^1(\Omega)$ mà đạo hàm $D^{\alpha}u_m$ hội tụ đến v trong $L^1(\Omega)$.

b. Không gian $W^{k,p}(\Omega)$.

Không gian $W^{k,p}(\Omega)$ được định nghĩa:

Với $k \in \mathbb{N}$; $1 \leq p < +\infty$, đặt

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u(x) \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}. \quad (1.12)$$

Trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$;

$$\alpha_j \in \mathbb{N}; |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$D^\alpha u = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}; D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Khi đó chuẩn của $u \in W^{k,p}(\Omega)$ được định nghĩa bởi

$$\|u\|_{k,p;\Omega} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.13)$$

Một chuẩn tương đương là:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (1.14)$$

Nhận xét: Nếu $k_1 < k_2$ thì $W^{k_2,p} \subset W^{k_1,p}$.

1.2.2 Ví dụ.

Ví dụ 1:

Cho $k=0$. Khi đó, ta có:

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Ví dụ 2:

Cho $k=1$. Khi đó, ta có:

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u(x); u(x) \in L^p(\Omega); D_{x_j} u \in L^p(\Omega) \forall j\}$$

và

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j=1}^n \|D_{x_j} u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Ví dụ 3:

Cho $k=2$. Khi đó, ta có:

$$W^{2,p}(\Omega) = \{u(x); u(x), D_{x_j}u, D_{x_j x_k}u \in L^p(\Omega)\}$$

và

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p = \|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j=1}^n \|D_{x_j}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j,k=1}^n \|D_{x_j x_k}u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

1.2.3 Không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Không gian Banach $W_0^{k,p}(\Omega)$ phát sinh do việc lấy bao đóng của $C_0^k(\Omega)$ trong $W^{k,p}(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ không trùng nhau đối với miền Ω bị chặn.

Đặc biệt, $p=2$, $W^{k,2}(\Omega)$, $W_0^{k,2}(\Omega)$ (đôi khi kí hiệu là $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$) là các không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D_u^\alpha D_v^\alpha dx \quad (1.15)$$

Các tính chất giải tích hàm của $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}$ được suy ra khi xem xét phép nhúng tự nhiên các không gian này vào trong tích của N_k bản sao của $L^p(\Omega)$, trong đó, N_k là số các chỉ số α thỏa mãn $|\alpha| \leq k$. Dùng sự kiện tích hữu hạn và các không gian con đóng của không gian Banach tách được (phản xạ) là các không gian Banach tách được (phản xạ) ta suy ra không gian $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ là tách được với $1 \leq p < \infty$ (phản xạ nếu $1 < p < \infty$).

a. Không gian $C_0^\infty(\Omega)$.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u(x) \in C^\infty(\Omega), u(x) = 0 \text{ trong lân cận của biên } \partial\Omega\}. \quad (1.16)$$

b. Không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$.

$W_0^{k,p}(\Omega)$ là không gian sinh bởi bao đóng của $C_0^k(\Omega)$ trong $W^{k,p}(\Omega)$.

Kí hiệu: $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^k(\Omega)}$.

Khi đó

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{u(x); u(x) \in W^{k,p}(\Omega), D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, |\alpha| \leq k-1\}. \quad (1.17)$$

Trường hợp khi $p = +\infty$, không gian Sobolev và Lipchitz có mối quan hệ với nhau, cụ thể là:

$$W_{loc}^{k,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\Omega) \quad \text{với } \Omega \text{ tùy ý}$$

$$W^{k,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\overline{\Omega}) \quad \text{với } \Omega \text{ đủ trơn}$$

Bất đẳng thức Poincare: Giả sử Ω là miền bị chặn và $p \geq 1$. Khi đó, tồn tại số $c > 0$ sao cho:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \cdot \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.18)$$

Chứng minh: Bởi vì:

$$L^p(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

nên chỉ cần chứng minh (1.16) cho $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Bao Ω bởi hình hộp chữ nhật D và xem $u(x) \equiv 0$ ngoài Ω .

Giả sử $D = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Vì $u(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) = 0$ nên theo công thức Newton - Leibniz cho ta:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{a_n}^{x_n} D_n u(x_1, \dots, t) dt$$

Đặt $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ suy ra:

$$\begin{aligned}
 |u(x', x_n)| &\leq \int_{a_n}^{x_n} 1 \cdot |D_n u(x', t)| dt \\
 \Rightarrow |u(x', x_n)|^p &\leq \left[\int_{a_n}^{x_n} 1 \cdot |D_n u(x', t)| dt \right]^p \\
 &\leq \left[\left(\int_{a_n}^{x_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{a_n}^{x_n} 1^q dt \right)^{1/q} \right]^p \quad (1.19) \\
 &= |x_n - a_n|^{p/q} \int_{a_n}^{x_n} |D_n u(x', t)|^p dt \\
 &\leq (b_n - a_n)^{p/q} \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt
 \end{aligned}$$

Tích phân hai vế (1.18) trên D ta có:

$$\begin{aligned}
\int_D |u(x', x_n)|^p dx &\leq \int_D \left[(b_n - a_n)^{p/q} \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right] dx \\
&= \int_{D'} \left[\int_{a_n}^{b_n} (b_n - a_n)^{p/q} \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right] dx' \\
&= (b_n - a_n)^{p/q+1} \int_{D'} \left[\int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right] dx' \\
&= (b_n - a_n)^{p/q+1} \int_D |D_n u(x', t)|^p dx \\
&= (b_n - a_n)^{p/q+1} \int_D |D_n u(x)|^p dx \\
\Rightarrow \|u\|_{L^p(D)} &\leq (b_n - a_n) \|D_n u\|_{L^p(D)} \\
&\leq (b_n - a_n) \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(D)}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Với mọi hàm $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ta có $|u|_{L^1(D)} = |u|_{L^p(\Omega)}$ nên từ (1.20) ta suy ra (1.18).

Hai chuẩn tương đương trong $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \tag{1.21}$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.22}$$

Hai chuẩn trên là tương đương tức là $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$c_1 \|u\| \leq \|u\| \leq c_2 \|u\| \tag{1.23}$$

Chứng minh: Đặt $N = \text{card} \{ \alpha : |\alpha| \leq k \}$, $a_\alpha = \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \geq 0$, ta sẽ chứng minh rằng (1.23) được thỏa mãn với $c_1 = 1, c_2 = N^{(p-1)/p}$.

Thực vậy, trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \right)^p \quad (1.24)$$

(1.24) rõ ràng đúng nếu $a_\alpha = 0 \forall \alpha$. Nếu trái lại thì vế phải (1.24) dương và (1.24) tương đương với:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p \leq 1.$$

Rõ ràng $0 \leq \frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \leq 1 \forall \alpha$.

Suy ra hàm $\left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p$ không tăng theo $p \forall \alpha$.

Suy ra hàm $f(p) = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p$ là không tăng theo p .

Ta có với $p = 1$ thì $f(1) = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right) = 1$.

Vậy với $p > 1$ ta có: $f(p) \leq 1$, vậy:

$$f(p) = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p \leq 1 \quad (\forall p > 1)$$

và (1.24) được chứng minh. Như vậy, bất đẳng thức bên trái của (1.23) đúng với mọi $p \geq 1$ và $c_1 = 1$.

Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \leq N^{(p-1)/p} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p} \quad (1.25)$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \cdot 1 \leq (N)^{1/q} \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p}$$

trong đó $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Vậy (1.25) được chứng minh.

Như vậy (1.23) đúng với $c_1 = 1, c_2 = N^{(p-1)/p}$. Nói cách khác:

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p} = \|u\| \leq |||u||| = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \leq N^{(p-1)/p} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p}$$

Do đó các chuẩn $\|\cdot\|$ và $|||\cdot|||$ trên $W^{k,p}(\Omega)$ là tương đương.

Từ đó ta có hệ quả: *Hai chuẩn sau là tương đương trên $W_0^{1,p}(\Omega)$:*

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \\ |||u||| &= \sum_{j=1}^n |||D_j u|||_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

trong đó $D_j u = D_{x_j} u$

Chứng minh: Gọi c là hằng số trong bất đẳng thức Poicare ta có:

$$|||u||| \leq \|u\| \leq (c+1) |||u|||$$

Suy ra điều phải chứng minh.

1.3 Định lý nhúng

Định lý 1.13.

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega) & \text{với } p < n \\ C^0(\overline{\Omega}) & \text{với } p > n \end{cases}$$

Hơn nữa, tồn tại một hằng số $c = c(n, p)$ sao cho với mọi $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ thì:

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leq c \|Du\|_p \text{ với } p < n \quad (1.26)$$

$$\sup |u| \leq c |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_p \text{ với } p > n$$

Chứng minh: Chúng ta thiết lập đánh giá (1.26) cho các hàm $C_0^1(\Omega)$

Trường hợp : $p = 1$

Rõ ràng với u bất kì thuộc $C_0^1(\Omega)$ và i bất kì: $1 \leq i \leq n$ thì

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |D_i u| dx_i.$$

Do đó:

$$|u(x)|^{n/n-1} \leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| dx_i \right)^{1/n-1}. \quad (1.27)$$

Bất đẳng thức (1.27) bây giờ được lấy tích phân liên tục với mỗi biến $x_i; i = 1, \dots, n$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức Holder tổng quát: Cho $m = p_1 = \dots = p_m = n - 1$. Cho mỗi tích phân, ta có:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{n/n-1} &\leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u| dx \right)^{1/n} \\
&\leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u| dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|Du\|_1
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Do đó, bất đẳng thức (1.26) được thiết lập cho trường hợp $p = 1$

Các trường hợp còn lại có thể nhận được bằng cách thay thế u bằng lũy thừa của $|u|$. Theo cách này chúng ta nhận được :

Với $\gamma > 1$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{n/n-1} &\leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int_{\Omega} |u|^{\gamma-1} \cdot |Du| dx \\
&\leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \| |u|^{\gamma-1} \|_p \cdot \|Du\|_p
\end{aligned}$$

do bất đẳng thức Holder.

Bây giờ với $p < n$, ta có thể chọn γ thỏa mãn:

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1} \text{ tức là } \gamma = \frac{(n-1)p}{n-p}.$$

Và do vậy, ta được:

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|Du\|_p$$

như cần tìm.

Trường hợp: $p > n$

Với $p > n$ ta viết:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{n} |u|}{\|Du\|_p}$$

và với $|\Omega| = 1$. Ta có:

$$\|\tilde{u}^\gamma\|_{n'} \leq \gamma \|\tilde{u}^{\gamma-1}\|_{p'}, n' = \frac{n}{n-1}, p' = \frac{p}{p-1},$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{\gamma n'} &\leq \gamma^{1/\gamma} \|\tilde{u}\|_{p'(\gamma-1)}^{1-1/\gamma} \\ &\leq \gamma^{1/\gamma} \|\tilde{u}\|_{\gamma p'}^{1-1/\gamma} \quad \text{vì } |\Omega| = 1 \end{aligned}$$

Cho phép thay thế γ bằng trị số $\delta^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ mà $\delta = \frac{n'}{p'} > 1$

Do đó chúng ta có được:

$$\|\tilde{u}\|_{n'\delta^\nu} \leq \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \|\tilde{u}\|_{n'\delta^{\nu-1}}^{1-\delta^{-\nu}}, \nu = 1, 2, \dots$$

Lặp lại $\nu = 1$ và dùng (1.28) ta nhận được ν bất kì:

$$\|\tilde{u}\|_{\delta^\nu} \leq \delta^{\sum \nu \delta^{-\nu}} \equiv \chi.$$

Do vậy, nếu $\nu \rightarrow \infty$ ta được:

$$\sup_{\Omega} \tilde{u} \leq \chi$$

và do đó

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\chi}{\sqrt{n}} \|Du\|_p.$$

Để bỏ hạn chế $|\Omega| = 1$, ta xét phép biến đổi $y_i = |\Omega|^{1/n} x_i$.

Ta có:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\chi}{\sqrt{n}} |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_p$$

như cần tìm.

Để mở rộng đánh giá (1.26) cho u tùy ý thuộc $W_0^{1,p}(\Omega)$, ta giả sử $\{u_m\}$ là một dãy các hàm của $C_0^1(\Omega)$ tiến đến u trong $W^{1,p}(\Omega)$. Áp dụng đánh giá (1.15) cho hiệu $u_{m_1} - u_{m_2}$, ta thấy rằng dãy $\{u_m\}$ sẽ là dãy Cauchy trong $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ với $p < n$ và trong $C^0(\overline{\Omega})$ với $p > n$. Do vậy, hàm giới hạn

u sẽ nằm trong không gian muốn có và thỏa mãn (1.26).

Chú ý: Hằng số tốt nhất thỏa mãn (1.26) cho trường hợp $p < n$ là:

$$C = -\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left(\frac{n! \Gamma(n/2)}{2\Gamma(n/p) \Gamma(n+1-n/p)} \right)^{1/n} \gamma^{1-1/p}, \gamma = \frac{n(p-1)}{n-p}.$$

Khi $p=1$, hằng số trên trở thành hằng số đẳng chu nổi tiếng $n^{-1}(\omega_n)^{-1/n}$.

Một không gian Banach B_1 được gọi là nhúng liên tục trong không gian Banach B_2 (kí hiệu: $B_1 \rightarrow B_2$) nếu tồn tại một ánh xạ bị chặn liên tục $1 \div 1 : B_1 \rightarrow B_2$. Định lý 1.13 có thể được biểu diễn là $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{np/(n-p)}(\Omega)$ nếu $p < n$, $\rightarrow C^0(\bar{\Omega})$ nếu $p > n$. Bằng cách lặp lại kết quả của Định lý 1.13 k lần chúng ta đạt được mở rộng của không gian $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Hệ quả 1.14.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \hookrightarrow L^{np/(n-kp)}(\Omega) & \text{với } kp < n \\ \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega}) & \text{với } 0 \leq m < k - \frac{n}{p} \end{cases}$$

Trường hợp thứ hai là hệ quả của trường hợp thứ nhất cùng với trường hợp $p > n$ trong Định lý 1.13.

Các đánh giá (1.26) và mở rộng của chúng đối với không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$ chỉ ra rằng một chuẩn trên $W_0^{k,p}(\Omega)$ tương đương với (1.11) có thể được xác định bởi:

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{1/p} \quad (1.29)$$

Nói chung, $W_0^{k,p}(\Omega)$ không thể thay thế bởi $W^{k,p}(\Omega)$ trong Hệ quả 1.14. Tuy nhiên, thay thế này có thể thực hiện cho một lớp lớn các miền Ω bao gồm, chẳng hạn các miền với biên liên tục Lipchitz.

Tổng quát hơn, nếu Ω thỏa mãn điều kiện phần trong hình nón đều (có nghĩa là tồn tại một hình nón cố định K_{Ω} sao cho $\forall x \in \Omega$ là đỉnh của hình nón $K_{\Omega}(x) \subset \bar{\Omega}$ và giống như K_{Ω}), và có một phép nhúng:

$$W^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \hookrightarrow L^{np/(n-kp)}(\Omega) & \text{với } kp < n \\ \hookrightarrow C_B^m(\Omega) & \text{với } 0 \leq m < k - \frac{n}{p} \end{cases} \quad (1.30)$$

trong đó: $C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \text{ với } |\alpha| \leq m\}$.

1.4 Đánh giá thế vị và các định lý nhúng

Các kết quả nhúng của phần trước có thể thu được bằng cách khác và hoàn thiện thông qua việc sử dụng đánh giá thế vị nào đó. Cho $\mu \in (0; 1]$ và định nghĩa toán tử V_μ trên $L^1(\Omega)$ bằng thế vị Riesz.

$$(V_\mu f)(x) = \int_{\Omega} |x - y|^{n(\mu-1)} f(y) dy. \quad (1.31)$$

Toán tử V_μ được xác định tốt và ánh xạ $L^1(\Omega)$ vào chính nó sẽ xuất hiện như một hệ quả phụ của bổ đề tiếp theo. Đầu tiên, ta nhận thấy bằng cách đặt $f \equiv 1$ trong (1.31),

$$V_\mu 1 \leq \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^\mu. \quad (1.32)$$

Chọn $R > 0$ để $|\Omega| = |B_R(x)| = \omega_n R^n$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - y|^{n(\mu-1)} dy &\leq \int_{B_R(x)} |x - y|^{n(\mu-1)} dy \\ &= \mu^{-1} \omega_n R^{n\mu} \\ &= \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^\mu. \end{aligned}$$

Bổ đề 1.15. Toán tử V_μ , ánh xạ liên tục $L^p(\Omega)$ vào $L^q(\Omega)$ với q bất kì, $1 \leq q \leq \infty$ thỏa mãn:

$$0 \leq \delta = \delta(p, q) = p^{-1} - q^{-1} < \mu. \quad (1.33)$$

Hơn nữa, với mọi $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|V_\mu f\|_q \leq \left(\frac{1 - \delta}{\mu - \delta} \right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p. \quad (1.34)$$

Chứng minh: Chọn $r \geq 1$ sao cho:

$$r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1} = 1 - \delta.$$

Khi đó $h(x-y) = |x-y|^{n(\mu-1)} \in L^p(\Omega)$, và từ (1.32) ta thu được

$$\|h\|_r \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta}.$$

Đánh giá (1.34) có thể thu được bằng cách phỏng theo chứng minh thông thường của bất đẳng thức Young với phép nhân chập trong $\mathbb{R}^n$. Viết:

$$h|f| = h^{r/q} h^{r(1-1/p)} |f|^{p/q} |f|^{p\delta}.$$

Ta có thể đánh giá bằng bất đẳng thức Holder

$$|V_\mu f(x)| \leq \left\{ \int_\Omega h^r(x-y) |f(y)|^p dy \right\}^{1/q} \left\{ \int_\Omega h^r(x-y) dy \right\}^{1-1/p} \left\{ \int_\Omega |f(y)|^p dy \right\}^\delta,$$

do đó

$$\begin{aligned} \|V_\mu f\|_q &\leq \sup_\Omega \left\{ \int h^r(x-y) dy \right\}^{1/r} \|f\|_p \\ &\leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p \end{aligned}$$

Bổ đề 1.16. Cho $f \in L^p(\Omega)$ và $g = V_{1/p}f$. Khi đó tồn tại các hằng số c_1 và c_2 chỉ phụ thuộc vào n và p sao cho:

$$\int_\Omega \exp \left[\frac{g}{c_1 \|f\|_p} \right]^{p'} dx \leq c_2 |\Omega|, p' = p/(p-1). \quad (1.35)$$

Chứng minh: Từ Bổ đề 1.15, ta nhận được với mọi $q \geq p$

$$\|g\|_q \leq q^{1-1/p+1/q} \omega_n^{1-1/p} |\Omega|^{1/q} \|f\|_p,$$

do đó

$$\int_\Omega |g|^q dx \leq q^{1+q/p'} \omega_n^{q/p'} |\Omega| \|f\|_p^q$$

và hơn nữa với $q \geq p-1$

$$\int_\Omega |g|^{p'q} dx \leq p'q \left(\omega_n p'q \|f\|_p^{p'} \right)^q |\Omega|.$$

Do đó

$$\int_{\Omega} \sum_{N_0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{|g|}{c_1 \|f\|_p} \right)^{p'k} dx \leq p' |\Omega| \sum \left(\frac{p' \omega_n}{c_1^{p'}} \right)^k \frac{k^k}{(k-1)!}, N_0 = [p]$$

Chuỗi ở vế phải hội tụ với điều kiện $c_1^{p'} > e \omega_n p'$, từ Định lý hội tụ đơn điệu ta có đánh giá (1.35).

Các bổ đề tiếp theo nhằm làm rõ mối liên hệ giữa đạo hàm yếu và các thế vị ở trên.

Bổ đề 1.17. Cho $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Khi đó:

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\Omega} \frac{(x_i - y_i) D_i u(y)}{|x - y|^n} dy \quad (1.36)$$

Chứng minh: Giả sử rằng $u \in C_0^1(\Omega)$ và mở rộng u bằng cách cho $u = 0$ bên ngoài Ω . Khi đó với vectơ ω bất kì có $|\omega| = 1$,

$$u(x) = - \int_0^{\infty} D_r u(x + r\omega) dr.$$

Tích phân đối với ω , ta có được:

$$\begin{aligned} u(x) &= - \frac{1}{n\omega_n} \int_0^{\infty} \int_{|\omega|=1} D_r u(x + r\omega) dr d\omega \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\Omega} \frac{(x_i - y_i) D_i u(y)}{|x - y|^n} dy \end{aligned}$$

và (1.36) có được từ Bổ đề 1.15 và sự kiện rằng $C_0^1(\Omega)$ là trù mật trong $W_0^{1,1}(\Omega)$. Ngoài ra, ta còn có được với $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$

$$|u| \leq \frac{1}{n\omega_n} V_{1/n} |Du|. \quad (1.37)$$

Kết hợp Bổ đề 1.15 và bất đẳng thức (1.37) chúng ta có ngay phép nhúng $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ với $p^{-1} - q^{-1} < n^{-1}$, điều này gần như đã là kết luận

của Định lý 1.13. Trên thực tế, phiên bản yếu hơn sẽ phù hợp cho mục đích của phần này. Khi kết hợp Bổ đề 1.16 với (1.37) ta có được một kết quả chính xác hơn của trường hợp $p = n$ được thể hiện trong định lý sau đây:

Định lý 1.18. *Cho $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Khi đó tồn tại các hằng số c_1, c_2 chỉ phụ thuộc vào n , sao cho:*

$$\int_{\Omega} \exp \left(\frac{|u|}{c_1 \|Du\|_n} \right)^{n/(n-1)} dx \leq c_2 |\Omega| \quad (1.38)$$

Chú ý: Đánh giá (1.37) dễ dàng tổng quát cho các đạo hàm yếu bậc cao hơn. Ta có: cho $u \in W_0^{k,1}(\Omega)$,

$$|u| \leq \frac{1}{(k-1)!n\omega_n} V_{k/n} |D^k u|, \quad (1.39)$$

và dùng Bổ đề 1.16 ta có được một mở rộng của Định lý 1.18. Cụ thể là, tồn tại các hằng số c_1, c_2 chỉ phụ thuộc vào n và k , sao cho nếu $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ với $n = kp$, thì

$$\int_{\Omega} \exp \left(\frac{|u|}{c_1 \|D^k u\|_n} \right)^{p/(p-1)} dx \leq c_2 |\Omega|. \quad (1.40)$$

Trường hợp $p > n$ của Định lý nhúng Sobolev có thể được chính xác hóa thông qua bổ đề sau:

Bổ đề 1.19. *Cho Ω lồi và $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Khi đó:*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |Du(y)| dy, \quad (1.41)$$

hầu khắp nơi trên Ω ,

trong đó:

$$u_S = \frac{1}{|S|} \int_S u dx, d = \text{diam} \Omega \text{ là đường kính của miền } \Omega$$

và S là tập con đo được bất kì của Ω .

Chứng minh: Cho $u \in C^1(\Omega)$, $x, y \in \Omega$:

$$u(x) - u(y) = - \int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr, \omega = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

Tích phân theo y trên S , ta được:

$$|S| (u(x) - u_S) = - \int_S dy \int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr.$$

Kí hiệu

$$V(x) = \begin{cases} |D_r u(x)|, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|} \int_{|x-y|<d} dy \int_0^\infty V(x + r\omega) dr \\ &= \frac{1}{|S|} \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \int_0^d V(x + r\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega dr \\ &= \frac{d^n}{n|S|} \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} V(x + r\omega) d\omega dr \\ &= \frac{d^n}{n|S|} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |D_r u(y)| dy. \end{aligned}$$

Ta có thể chứng minh Định lý nhúng của Morrey.

Định lý 1.20. Cho $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, khi đó $u \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, trong đó $\gamma = 1 - n/p$. Hơn nữa, với hình cầu bất kì $B = B_R$ - hình cầu bán kính R ,

$$\operatorname{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leq CR^\gamma \|Du\|_p, \quad (1.42)$$

trong đó $C = C(n, p)$, $\operatorname{osc}_\omega u = \sup_{x, y \in \omega} |u(x) - u(y)|$.

Chứng minh: Kết hợp đánh giá (1.41) và (1.34), cho $S = \Omega = B$, $q = \infty$ và $\mu = n^{-1}$, ta có:

$$|u(x) - u_B| \leq C(n, p) R^\gamma \|Du\|_p \quad (\text{hầu khắp nơi } (\Omega \cap B)).$$

Từ đó suy ra kết quả vì:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_B| + |u(y) - u_B| \\ &\leq 2C(n, p) R^\gamma \|Du\|_p \quad (\text{hầu khắp nơi } (\Omega \cap B)). \end{aligned}$$

Kết hợp Định lý 1.13 và Định lý 1.20, với $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và $p > n$ ta có đánh giá:

$$|u|_{0,\gamma} \leq C[1 + (\operatorname{diam}\Omega)^\gamma] \|Du\|_p. \quad (1.43)$$

Hơn nữa, kết quả của các Định lý 1.13, 1.18, 1.20 có thể tóm lược theo sơ đồ sau đây:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & L^{np/(n-p)}(\Omega), \quad p < n \\ W_0^{1,p}(\Omega) & \rightarrow & L^\varphi(\Omega), \Omega = \exp\left(|t|^{n/(n-1)}\right) - 1, p = n \\ & \searrow & C^\lambda(\Omega), \lambda = 1 - \frac{n}{p}, \quad p > n \end{array}$$

trong đó $L^\varphi(\Omega)$ là kí hiệu của không gian Orlicz với hàm φ xác định.

Từ Bổ đề 1.15 và 1.17 ta có : Với $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

$$\|u\|_p \leq \left(\frac{1}{\omega_n} |\Omega|\right)^{1/n} \|Du\|_p; \quad (1.44)$$

Trong khi mà từ Bổ đề 1.15 và 1.19 ta có: với $u \in W^{1,p}(\Omega)$ và Ω lồi:

$$\|u - u_S\|_p \leq \left(\frac{\omega_n}{|S|}\right)^{1-1/n} d^n \|Du\|_p, \quad (1.45)$$

$d = \operatorname{diam}\Omega$ là đường kính của miền Ω .

Định lý 1.21. Các không gian $W_0^{1,p}(\Omega)$ được nhúng compact

i) vào trong các không gian $L^q(\Omega)$ với mọi $q < np/(n-p)$ nếu $p < n$ và

ii) vào trong $C^0(\overline{\Omega})$ nếu $p > n$.

Bổ đề 1.22. Giả sử $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Khi đó $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ với mọi $\Omega' \subset\subset \Omega$ thỏa mãn $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ và ta có:

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Bổ đề 1.23. Cho $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ và giả sử tồn tại hằng số K sao cho $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ và $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$ với mọi $h > 0$ và $\Omega' \subset\subset \Omega$ thỏa mãn $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Khi đó đạo hàm yếu $D_i u$ tồn tại và thỏa mãn $\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$.

Chương 2

NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

2.1 Khái niệm nghiệm yếu.

2.1.1 Công thức tích phân từng phần.

a. Hàm một biến.

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx \quad (2.1)$$

b. Hàm nhiều biến.

Cho $x \in \partial\Omega$; $\nu_x = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ là vectơ pháp tuyến ngoài đơn vị. Khi đó:

$$\int_{\Omega} D_{x_j} f(x) g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_j(x) dS - \int_{\Omega} f(x) D_{x_j} g(x) dx \quad (2.2)$$

2.1.2 Định nghĩa.

Chương này ta xem xét các toán tử tuyến tính elliptic có phần chính dạng bảo toàn, các hệ số với giả thiết trơn, yếu tương đối. Xét toán tử L dạng:

$$Lu = D_i (a^{ij}(x) D_j u + b^i(x) u) + c^i(x) D_i u + d(x) u \quad (2.3)$$

trong đó: a^{ij}, b^i, c^i, d ($i, j = 1, \dots, n$) là các hàm đo được trên một miền $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Giả sử, hàm u là khả vi yếu, các hàm $a^{ij}D_j u + b^i u, c^i D_i u, i = 1, \dots, n$ là khả tích địa phương, khi đó với nghĩa yếu hoặc suy rộng hàm u được gọi là thỏa mãn $Lu = 0$ trong miền Ω nếu đẳng thức tích phân sau được thỏa mãn:

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_{\Omega} \{ (a^{ij}D_j u + b^i u) D_i v - (c^i D_i u + du) v \} dx = 0 \quad (2.4)$$

với mọi hàm $v \in C_0^1(\Omega)$.

a. Nghiệm yếu của phương trình.

Cho $f^i, g, i = 1, \dots, n$ là các hàm khả tích địa phương trong Ω . Hàm $u \in W^{1,2}(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu hay nghiệm suy rộng của phương trình không thuần nhất

$$Lu = g + D_i f^i \quad (2.5)$$

trong Ω nếu đẳng thức tích phân sau được thỏa mãn:

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_{\Omega} (f^i D_i v - gv) dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \quad (2.6)$$

Nghiệm cổ điển của (2.5) cũng là nghiệm suy rộng và một nghiệm suy rộng $C^2(\Omega)$ cũng là một nghiệm cổ điển khi hệ số của L là đủ trơn.

b. Nghiệm yếu của bài toán.

Xét bài toán Dirichlet cho phương trình (2.5), giả sử L là elliptic ngặt trong Ω , tức là tồn tại một số dương λ sao cho:

$$a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Ta cũng giả sử L có hệ số giới nội, tức là: đối với các hằng số $\Lambda, \nu \geq 0$ nào đó, $\forall x \in \Omega$ thì:

$$\sum |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \sum (|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \lambda^{-1} |d(x)| \leq \nu^2 \quad (2.8)$$

Một hàm u thuộc vào không gian Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ được gọi là nghiệm suy rộng của bài toán Dirichlet : $Lu = g + D_i f^i, u = \varphi$ trên $\partial\Omega$, nếu u là

nghiệm suy rộng của phương trình (2.5), $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$ và $u - \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Các hàm $v \in C^1_0(\Omega)$ xuất hiện trong công thức (2.4) và (2.6) được gọi là hàm thử.

Chú ý bằng điều kiện (2.8) ta có:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(u, v)| &\leq \int_{\Omega} \{ |a^{ij} D_j u D_i v| + |b^i u D_i v| + |c^i v D_i u| + |d u v| \} dx \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

do bất đẳng thức Schwarz.

Do đó, với u cố định thuộc $W^{1,2}(\Omega)$, ánh xạ: $v \rightarrow \mathcal{L}(u, v)$ là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên $W^{1,2}_0(\Omega)$. Do đó tính đúng đắn của các hệ thức (2.4) với $v \in C^1_0(\Omega)$ kéo theo tính đúng đắn của chúng với $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$.

2.1.3 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu.

Giả sử:

$$\int_{\Omega} [d v^2 + (c^i - b^i) v D_i v] dx \leq 0, \quad \forall v \in C^1_0(\Omega) \quad (2.10)$$

trong đó: b^i, c^i, d là giới nội. Bất đẳng thức (2.10) vẫn còn đúng với mọi hàm $v \in W^{1,1}_0(\Omega)$.

Định lý 2.1. Cho toán tử L thỏa mãn điều kiện (2.7), (2.8) và (2.10). Với $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$ và $g, f^i \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n$, bài toán Dirichlet, $Lu = g + D_i f^i$ trong Ω , $u = \varphi$ trên $\partial\Omega$ có lời giải duy nhất.

Chứng minh: Trước hết, ta quy về bài toán Dirichlet với trường hợp giá trị biên bằng 0. Đặt $w = u - \varphi$, từ (2.5) ta có:

$$\begin{aligned} Lw &= Lu - L\varphi \\ &= g - c^i D_i \varphi - d\varphi + D_i (f^i - a^{ij} D_j \varphi - b^i \varphi) \\ &= \hat{g} + D_i \hat{f}^i \end{aligned}$$

Từ các điều kiện trên L và φ , rõ ràng: $\hat{g}, \hat{f}^i \in L^2(\Omega)$; $i = 1, \dots, n$ và $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Bởi vậy chỉ cần chứng minh định lý trên đúng với trường hợp $\varphi \equiv 0$.

Đặt $\mathcal{H} = W_0^{1,2}(\Omega)$, $g = (g, f^1, f^2, \dots, f^n)$ và $F(v) = - \int_{\Omega} (gv - f^i D_i v) dx$ với $v \in \mathcal{H}$. Vì:

$$|F(v)| \leq \|g\|_2 \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

ta có $F \in \mathcal{H}^*$. Nếu dạng song tuyến tính L được định nghĩa bởi (2.4) là cường bức trên $\mathcal{H}$ cũng như giới nội, ta có thể kết luận ngay khả năng giải được duy nhất của bài toán Dirichlet với L từ Định lý 1.3.

Liên quan đến tính cường bức của L ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề 2.2. *Cho L thỏa mãn điều kiện (2.7) và (2.8), khi đó $\exists \nu > 0$ sao cho:*

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 dx - \lambda \nu^2 \int_{\Omega} u^2 dx, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (2.11)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} L(u, u) &= \int_{\Omega} (a^{ij} D_i u D_j u + (b^i - c^i) u D_i u - du^2) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left(\lambda |Du|^2 - \frac{\lambda}{2} |Du|^2 - \lambda \nu^2 u^2 \right) dx \quad (\text{bất đẳng thức Schawarz}) \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 dx - \lambda \nu^2 \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

Với $\sigma \in \mathbb{R}$ chúng ta định nghĩa toán tử L_{σ} bởi $L_{\sigma} u = Lu - \sigma u$. Theo Bổ đề 2.2 ta thấy dạng liên hợp $\mathcal{L}_{\sigma}$ bị cường bức nếu σ là đủ lớn hoặc $|\Omega|$ là đủ nhỏ. Tiếp theo, ta có thể định nghĩa phép nhúng $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ bởi:

$$Iu(v) = \int_{\Omega} uv dx, \quad v \in \mathcal{H}. \quad (2.12)$$

Khi đó ta có:

Bổ đề 2.3. *Ánh xạ I là compact.*

Chứng minh: Đặt : $I = I_1 I_2$ trong đó: $I_2 : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega)$ là phép nhúng tự nhiên và $I_1 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^*$ cho bởi (2.12). Theo Định lý 1.21 I_2 là compact (nếu $p = n = 2$), vì I_1 rõ ràng liên tục ta có được I là compact.

Tiếp theo, ta chọn σ_0 để dạng $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ là giới nội và cường bức trên không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Phương trình $Lu = F$ với $u \in \mathcal{H}, F \in \mathcal{H}^*$ là tương đương với phương trình:

$$L_{\sigma_0} u + \sigma_0 I u = F$$

Bằng Định lý 1.3, $L_{\sigma_0}^{-1}$ là liên tục, ánh xạ 1:1 của $\mathcal{H}^*$ lên $\mathcal{H}$ và áp dụng $L_{\sigma_0}^{-1}$ cho phương trình ở trên, ta có được phương trình tương đương:

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I u = L_{\sigma_0}^{-1} F \quad (2.13)$$

Ánh xạ $T = -\sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1}$ là compact bởi Bổ đề 2.3 và do đó theo Định lý 1.2, sự tồn tại một hàm $u \in \mathcal{H}$ thỏa mãn phương trình (2.13) là một hệ quả của tính duy nhất trong $\mathcal{H}$ của nghiệm tầm thường của phương trình $Lu = 0$.

Một mô tả của dáng điệu phổ của toán tử L suy ra từ Định lý 1.4, chúng ta định nghĩa dạng liên hợp hình thức L^* của L bởi:

$$L^* u = D_i (a^{ij} D_j u - c^i u) - b^i D_i u + du. \quad (2.14)$$

Vì $\mathcal{L}^*(u, v) = \mathcal{L}(v, u)$ với $u, v \in \mathcal{H} = W_0^{1,2}(\Omega)$, L^* cũng là liên hợp của L trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Bằng cách thay thế L bởi L_σ trong lý luận ở trên, ta thấy rằng phương trình $L_\sigma u = F$ sẽ tương đương với phương trình $u + (\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1} I u = L_{\sigma_0}^{-1} F$ và liên hợp T_σ^* của ánh xạ compact $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1} I$ được cho bởi $T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma) (L_{\sigma_0}^*)^{-1} I$. Chúng ta có thể áp dụng Định lý 1.4 để có được kết quả sau đây.

Định lý 2.4. *Cho toán tử L thỏa mãn điều kiện (2.7) và (2.8). Khi đó tồn tại một tập hợp rời rạc, đếm được $\Sigma \subset \mathbb{R}$ sao cho nếu $\sigma \notin \Sigma$, bài toán Dirichlet, $L_\sigma u, L_\sigma^* u = g + D_i f^i, u = \varphi$ trên $\partial\Omega$, là duy nhất nghiệm với g tùy ý, $f^i \in L^2(\Omega)$ và $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Nếu $\sigma \in \Sigma$, khi đó không gian con*

các nghiệm của bài toán thuần nhất, $L_\sigma u, L_\sigma^* u = 0, u = 0$ trên $\partial\Omega$ có số chiều là dương và hữu hạn và bài toán $L_\sigma^* u = g + D_i f^i, u = \varphi$ trên $\partial\Omega$ là giải được nếu và chỉ nếu:

$$\int_{\Omega} \{ (g - c^i D_i \varphi - d\varphi + \sigma\varphi) v - (f^i - a^{ij} D_j \varphi - b^i \varphi) D_i v \} dx = 0 \quad (2.15)$$

với mọi v thỏa mãn $L_\sigma^* v = 0, v = 0$ trên $\partial\Omega$. Hơn nữa, điều kiện (2.10) được thỏa mãn, $\Sigma \subset (-\infty, 0)$.

Toán tử $G_\sigma : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{H}$ cho bởi $G_\sigma = L_\sigma^{-1}$ với $\sigma \notin \Sigma$ gọi là toán tử Green của bài toán Dirichlet với L_σ . Theo Định lý 1.2, G_σ là một toán tử tuyến tính giới nội trên $\mathcal{H}^*$. Do đó, ta có đánh giá tiên nghiệm sau.

Hệ quả 2.5. Cho $u \in W^{1,2}(\Omega)$ thỏa mãn $L_\sigma u = g + D_i f^i, u = \varphi$ trên $\partial\Omega$ với $\sigma \notin \Sigma$. Khi đó chỉ tồn tại một hằng số C chỉ phụ thuộc L, σ và Ω :

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \left(\|g\|_2 + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right). \quad (2.16)$$

Từ Định lý 2.4 suy ra Định lý 2.1 còn hiệu lực nếu ta thay thế b^i bằng $-c^i$ trong điều kiện (2.10).

2.2 Độ trơn của nghiệm yếu.

2.2.1 Độ trơn bên trong miền.

Định lý 2.6. Cho $u \in W^{1,2}(\Omega)$ là nghiệm yếu của phương trình $Lu = f$ trong Ω , L là elliptic ngặt trong Ω , các hệ số $a^{ij}, b^i, i, j = 1, \dots, n$ là liên tục Lipchitz đều trong Ω , các hệ số $c^i, d, i = 1, \dots, n$ hầu bị chặn trong Ω và hàm $f \in L^2(\Omega)$. Khi đó, với miền con bất kì $\Omega' \subset\subset \Omega$, ta có $u \in W^{2,2}(\Omega')$ và

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C \left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (2.17)$$

với $C = C(n, \lambda, K, d')$, λ xác định bởi (2.7),

$$K = \max \left\{ \|a^{ij}, b^i\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}, \|c^i, d\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}, \text{ và } d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Hơn nữa, u thỏa mãn phương trình

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + (D_j a^{ji} + b^i + c^i) D_i u + (D_i b^i + d) u = f \quad (2.18)$$

hầu khắp nơi trong Ω .

Chúng minh: Từ đồng nhất thức tích phân (2.6), ta có:

$$\int_{\Omega} a^{ij} D_j u D_i v dx = \int_{\Omega} g v dx, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega), \quad (2.19)$$

trong đó $g \in L^2(\Omega)$ xác định bởi:

$$g = (b^i + c^i) D_i u + (D_i b^i + d) u - f. \quad (2.20)$$

Với $|2h| \leq \text{dist}(\text{sup } v, \partial\Omega)$, ta thay v bởi tỉ sai phân $\Delta^{-h} v = \Delta_k^{-h} v$ với k nào đó thỏa $1 \leq k \leq n$. Ta được:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^h (a^{ij} D_j u) D_i v dx &= - \int_{\Omega} a^{ij} D_j u D_i \Delta^{-h} v dx \\ &= - \int_{\Omega} g \Delta^{-h} v dx. \end{aligned}$$

Vì

$$\Delta^h (a^{ij} D_j u)(x) = a^{ij}(x + h e_k) \Delta^h D_j u(x) + \Delta^h a^{ij}(x) D_j u(x)$$

ta có:

$$\int_{\Omega} a^{ij}(x + h e_k) \Delta^h u D_i v dx = - \int_{\Omega} (\bar{g} \cdot Dv + g \Delta^{-h} v) dx$$

trong đó $\bar{g} = (\bar{g}^1, \dots, \bar{g}^n)$ và $\bar{g}^i = \Delta^h a^{ij} D_j u$. Dùng (2.20) và Bổ đề 1.22, chúng ta có đánh giá:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a^{ij}(x + h e_k) D_j \Delta^h u D_i v dx &\leq (\|\bar{g}\|_2 + \|g\|_2) \|Dv\|_2 \\ &\leq \left(C(n) K \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 \right) \|Dv\|_2. \end{aligned}$$

Tiếp theo lấy $\eta \in C_0^1(\Omega)$ thỏa mãn $0 \leq \eta \leq 1$ và đặt $v = \eta^2 \Delta^h u$. Dùng (2.7) và Bất đẳng thức Schawarz, ta có:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} |\eta D \Delta^h u|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \eta^2 a^{ij}(x + h e_k) \Delta^h D_i u \Delta^h D_j u dx \\ &= \int_{\Omega} a^{ij}(x + h e_k) D_j \Delta^h u (D_i v - 2 \Delta^h u \eta D_i \eta) dx \\ &\leq \left(C(n) K \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 \right) (\|\eta D \Delta^h u\|_2 + 2 \|\Delta^h u D \eta\|_2) \\ &\quad + C(n) K \|\eta D \Delta^h u\|_2 \|\Delta^h u D \eta\|_2. \end{aligned}$$

Với sự trợ giúp của Bất đẳng thức Young (1.6), ta có:

$$\begin{aligned} \|\eta \Delta^h D u\| &\leq C \left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 + \|\Delta^h u D \eta\|_2 \right) \\ &\leq C \left(1 + \sup_{\Omega} |D \eta| \right) \left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 \right) \end{aligned}$$

theo Bổ đề 1.22, với $C = C(n, \lambda, K)$. Hàm η có thể lựa chọn như một hàm chặt sao cho $\eta = 1$ trên $\Omega' \subset\subset \Omega$ và $|D \eta| \leq 2/d'$, trong đó $d' = \text{dist}(\partial \Omega, \Omega')$. Theo Bổ đề 1.23 chúng ta có $Du \in W^{1,2}(\Omega')$ với $\Omega' \subset\subset \Omega$ bất kì, do vậy $u \in W^2(\Omega)$ và có đánh giá (2.17). Cuối cùng, chúng ta có $Lu \in L_{loc}^2(\Omega)$ và đồng nhất thức tích phân (2.6) kéo theo $Lu = f$ hầu khắp nơi trong Ω . Chú ý rằng (xem bài toán (2.4)) trong đánh giá (2.17), số $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ được thay thế bằng $\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Kết quả tồn tại tổng quát sau cho bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic dạng:

$$Lu \equiv a^{ij}(x) D_{ij} u + b^i(x) D_i u + c(x) u = f \quad (2.21)$$

có thể rút ra kết từ Định lý 2.1 và 2.6.

Định lý 2.7. Cho toán tử L là elliptic ngặt trong Ω và có các hệ số $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$, $c \leq 0$. Khi đó với f tùy ý thuộc vào $L^2(\Omega)$ và $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, tồn tại duy nhất một hàm $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ thỏa

mãn $Lu = f$ trong Ω và $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Định lý 2.7 vẫn còn đúng với $\partial\Omega$ đủ trơn với $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ nếu ta chỉ giả thiết rằng hệ số chính a^{ij} nằm trong $C^0(\overline{\Omega})$. Tuy nhiên, kết quả duy nhất không còn đúng nếu giả thiết tiếp tục bị yếu đi để cho $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ không liên tục, như được thấy rõ trong phương trình:

$$\Delta u + b \frac{x_i x_j}{|x|^2} D_{ij} u = 0, \quad b = -1 + \frac{n-1}{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (2.22)$$

Nếu $n > 2(2-\lambda) > 2$ phương trình trên có hai nghiệm $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = |x|^\lambda \in W^{2,2}(B)$ và phù hợp trên ∂B , trong đó B là hình cầu đơn vị, $B_1(0)$.

Hơn nữa, tính khả vi của nghiệm yếu có thể dễ dàng suy ra từ chứng minh của Định lý 2.6. Giả sử rằng ta làm mạnh tính trơn trên các hệ số bằng cách giả sử $a^{ij}, b^i \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, $c^i, d \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ cùng với $f \in W^{1,2}(\Omega)$. Khi đó, thay thế v bởi $D_k v$ với $1 \leq k \leq n$, trong đồng nhất thức (2.19), ta có (sau khi tính tích phân từng phần):

$$\int_{\Omega} a^{ij} D_{jk} u D_i v dx = \int_{\Omega} D_k \hat{g} v dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega), \quad (2.23)$$

và vì $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$, ta có $D_k \hat{g} \in L_{loc}^2(\Omega)$. Hơn nữa, $D_k u \in W_{loc}^2(\Omega)$. Bằng phép quy nạp đơn giản, ta có thể kết luận mở rộng sau của Định lý 2.6.

Định lý 2.8. Cho $u \in W^{1,2}(\Omega)$ là một nghiệm yếu của phương trình $Lu = f$ trong Ω mà L là elliptic ngặt trong Ω , các hệ số $a^{ij}, b^i \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$, các hệ số $c^i, d \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ và hàm $f \in W^{k,2}(\Omega)$, $k \geq 1$. Khi đó với miền con bất kì $\Omega' \subset\subset \Omega$, chúng ta có $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$ và

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C \left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \right) \quad (2.24)$$

với $C = C(n, \lambda, K, d', k)$, $K = \max \left\{ \|a^{ij}, b^i\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|c^i, d\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})} \right\}$.

Bằng Định lý nhúng Sobolev, Hệ quả 1.9, chúng ta có được Định lý 2.8.

Hệ quả 2.9. Cho $u \in W^{1,2}(\Omega)$ là một nghiệm yếu của phương trình elliptic ngặt $Lu = f \in \Omega$ và giả sử các hàm a^{ij}, b^i, c^i, d, f là trong $C^\infty(\Omega)$. Khi đó, $u \in C^\infty(\Omega)$.

2.2.2 Độ trơn trên toàn miền.

Dưới điều kiện tính trơn thích hợp ở trên biên $\partial\Omega$ kết quả tính đều ở phần trước đây có thể mở rộng ra cho tất cả Ω , đầu tiên chúng ta suy ra sự tương tự toàn cục của Định lý 2.6.

Định lý 2.10. Giả sử thêm vào giả thiết của Định lý 2.6 là $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 và tồn tại một hàm $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ sao cho $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Khi đó ta có $u \in W^{2,2}(\Omega)$ và

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)} \right) \quad (2.25)$$

trong đó $C = C(n, \lambda, K, \partial\Omega)$.

Chứng minh: Thế u bằng $u - \varphi$, ta thấy rằng không mất tính tổng quát có thể giả sử $\varphi \equiv 0$, và do đó $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ngoài ra, theo Bổ đề 2.2 ta có thể đánh giá:

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C (\|u\|_2 + \|f\|_2) \quad (2.26)$$

trong đó $C = C(n, \lambda, K)$. Khi $\partial\Omega \in C^2$, với mỗi điểm $x_0 \in \partial\Omega$ tồn tại một hình cầu $B = B(x_0)$ và ánh xạ 1:1 ψ từ B lên tập mở $D \subset \mathbb{R}^n$ sao cho $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n$ và $\psi \in C^2(B)$, $\psi^{-1} \in C^2(D)$. Cho $B_R(x_0) \subset\subset B$ và tập $B^+ = B_R(x_0) \cap \Omega$, $D' = \psi(B_R(x_0))$, $D^+ = \psi(B^+)$. Dưới ánh xạ ψ phương trình $Lu = f$ trong B^+ trở thành phương trình cùng dạng D^+ . Các hằng số λ, K với phương trình đã biến đổi có thể được đánh giá qua ánh xạ ψ và trị số cho phương trình gốc. Hơn nữa, vì $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, nghiệm biến đổi $v = u \circ \psi^{-1} \in W^{1,2}(D^+)$ và thỏa mãn $\eta v \in W_0^{1,2}(D^+)$ với mọi $\eta \in C_0^1(D')$. Tương ứng, ta giả sử

rằng $u \in W^{1,2}(D^+)$ thỏa mãn $Lu = f$ trong D^+ và $\eta u \in W_0^{1,2}(D^+)$ với η bất kì $\eta \in C_0^1(D')$. Khi đó, với $|h| < \text{dist}(\text{sup } p, \eta, \partial D')$ và $1 \leq k \leq n-1$, ta có $\eta^2 \Delta_k^h u \in W_0^{1,2}(D^+)$. Vì vậy áp dụng chứng minh của Định lý 2.5 sẽ được áp dụng và chúng ta có thể kết luận rằng $D_{ij}u \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega))$ với $\rho < R$ với điều kiện là i hoặc $j \neq n$. Đạo hàm cấp hai $D_{nn}u$ còn lại có thể được đánh giá trực tiếp từ phương trình (2.18). Do đó, quay lại miền Ω gốc với ánh xạ $\psi^{-1} \in C^2$ ta có $u \in W^{2,2}(B_\rho \cap \Omega)$. Khi x_o là một điểm tùy ý của $\partial\Omega$ và $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, bằng Định lý 2.5 chúng ta kết luận rằng $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Cuối cùng bằng cách chọn một số hữu hạn các điểm $x^{(i)} \in \partial\Omega$ sao cho các hình cầu $B_\rho(x^{(i)})$ phủ $\partial\Omega$, chúng ta có được đánh giá (2.25) từ (2.17) và (2.26).

Chú ý rằng các điều kiện, $u \in W^{2,2}(D^+)$, $\eta u \in W_0^{1,2}(D^+)$ với $\eta \in C_0^1(D')$ kéo theo $\eta D_k u \in W_0^{1,2}(D^+)$ nếu $1 \leq k \leq n-1$. Nói riêng, theo Bổ đề 1.22 chúng ta có $\eta \Delta_k^h u \in W_0^{1,2}(D^+)$ và

$$\|\eta D_k u\|_{W_0^{1,2}(D^+)} \leq \|\eta\|_{C^1(D^+)} \|u\|_{W^{2,2}(D^+)}$$

với h đủ nhỏ. Theo Định lý 1.5, suy ra rằng tồn tại một dãy $\{\eta \Delta_k^{hj} u\}$ hội tụ yếu trong không gian Hilbert $W_0^{1,2}(D^+)$. Giới hạn của dãy này rõ ràng là hàm $\eta D_k u$. Tính chính quy toàn cục của nghiệm của phương trình $Lu = f$ được suy ra theo cùng kiểu như Định lý 2.8 từ Định lý 2.6.

Định lý 2.11. *Giả sử chúng ta thêm vào giả thiết của Định lý 2.8 rằng $\partial\Omega \in C^{k+2}$ và tồn tại một hàm $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$ mà $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Khi đó có $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ và*

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \right) \quad (2.27)$$

trong đó $C = C(n, \lambda, K, k, \partial\Omega)$. Nếu các hàm a^{ij}, b^i, c^i, d, f và φ thuộc lớp $C^\infty(\overline{\Omega})$ và $\partial\Omega$ là một lớp của $C^\infty(\overline{\Omega})$. Khi đó, nghiệm u cũng thuộc $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Kết hợp Định lý 2.1 và 2.11 chúng ta có một định lý tồn tại cho bài toán

Dirichlet cổ điển với phương trình (2.21) đã có từ Định lý 1.6 và 1.7.

Định lý 2.12. Cho toán tử L (đưa bởi (2.21)) là elliptic ngặt trong Ω và có $C^\infty(\overline{\Omega})$ hệ số thỏa mãn $c \leq 0$ trong Ω . Khi đó, nếu $\partial\Omega \in C^\infty$ tồn tại một nghiệm duy nhất $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ của bài toán Dirichlet, $Lu = f, u = \varphi$ trên $\partial\Omega$ với f tùy ý, $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

2.2.3 Nghiệm yếu của phương trình elliptic tổng quát.

Định lý 2.13. Cho $\Omega \in \mathbb{R}^n$ là miền với biên của lớp C^∞ . Giả sử các hàm $a^{ij}(i, j = 1, \dots, n)$ và c là một lớp của C^∞ trong $\overline{\Omega}$ và thỏa mãn giả thiết

* tính đối xứng : $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ với mọi i, j và $x \in \overline{\Omega}$.

* tính không âm : $c(x) \geq 0$ với mọi $x \in \overline{\Omega}$.

và giả sử $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ đã cho. Khi đó bài toán Dirichlet:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} u(x) \right) - c(x) u(x) = f(x) \text{ trong } \Omega,$$

$$u(x) = g(x) \text{ trên } \partial\Omega,$$

có một nghiệm (duy nhất) thuộc lớp $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Bây giờ ta xét điều gì xảy ra nếu ta xem xét phương trình đạo hàm yếu:

$$\int_{\Omega} Du.Dv + \int_{\Omega} fv = 0 \quad (f \in L^2(\Omega)) \quad (2.28)$$

với mọi $v \in W^{1,2}(\Omega)$. Đặc biệt chúng ta có kết quả sau đây:

Định lý 2.14. Cho (2.28) thỏa mãn $\forall v \in W^{1,2}(\Omega)$, trên miền Ω thuộc lớp C^∞ , $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$ và hàm $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g \in C^\infty(\partial\Omega)$. Khi đó:

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Xét phương trình:

$$\int_{\Omega} Du.Dv + \mu \int_{\Omega} u.v = 0 \quad (\mu \in \mathbb{R}), \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega) \quad (2.29)$$

Hệ quả 2.15. Cho u là nghiệm của phương trình (2.29), với mọi $v \in W^{1,2}(\Omega)$. Nếu miền Ω thuộc lớp của C^∞ , $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $g \in C^\infty(\partial\Omega)$. Khi đó: $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

KẾT LUẬN

Trong luận văn đã trình bày các vấn đề sau:

- Khái niệm không gian Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ và $W_0^{k,p}(\Omega)$ và các định lý nhúng.
- Khái niệm nghiệm yếu của phương trình elliptic tuyến tính cấp hai dạng bảo toàn, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán Dirichlet đối với các phương trình này và định lý mô tả độ trơn của các nghiệm yếu.

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tiếng Anh

- [1] David Gibarg - Neil S.Trudinger (1998), *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer.
- [2] Jorgen Jost (2002), *Partial Differential Equations*, Springer.