

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HOÀNG XA

NGHIỆM MẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HOÀNG XA

NGHIỆM MẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. HÀ TIỀN NGOẠN

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

MỞ ĐẦU	1
1 KHÔNG GIAN SOBOLEV	3
1.1 Không gian $W^{k,p}(\Omega); W_0^{k,p}(\Omega)$	5
1.1.1 Không gian $W^{k,p}(\Omega)$:	5
1.1.2 Ví dụ	8
1.1.3 Không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$	9
1.2 Định lý nhúng	13
1.3 Đánh giá thể vị và các định lý nhúng	17
2 NGHIỆM MẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC	24
2.1 Khái niệm nghiệm mạnh	24
2.1.1 Thế vị Newton	24
2.1.2 Khái niệm nghiệm mạnh	25
2.2 Độ trơn L^p của nghiệm mạnh bên trong miền	27
2.2.1 Độ trơn L^2 bên trong miền	27
2.2.2 Độ trơn $L^p(\Omega)$ bên trong miền	31
2.2.3 Độ trơn của nghiệm phương trình elliptic phi tuyến	32
Kết luận	35
Tài liệu tham khảo	37

MỞ ĐẦU

Đối với phương trình elliptic tuyến tính cấp 2 thì người ta đưa vào xét một số loại nghiệm. Nghiệm cổ điển là những hàm số khả vi hai lần liên tục và thỏa mãn phương trình khắp nơi. Nhưng nghiệm mạnh chỉ là những hàm số có đạo hàm đến cấp 2, bình phương khả tích và thỏa mãn phương trình hầu khắp nơi.

Dựa vào các tài liệu [1], [2], [3] luận văn đã trình bày khái niệm nghiệm mạnh của phương trình elliptic tuyến tính cấp 2 và nghiên cứu tính chất trơn của nghiệm mạnh.

Luận văn được chia làm 2 chương:

Chương 1 trình bày các không gian Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ và các định lý nhúng được dựa trên tài liệu [1], [2]

Chương 2 đưa vào khái niệm nghiệm mạnh và nghiên cứu độ trơn của nghiệm mạnh bên trong miền được dựa trên tài liệu [3].

Luận văn đã chỉ ra rằng khi độ trơn của hệ số và của vế phải tăng lên thì độ trơn của nghiệm mạnh cũng tăng lên theo và nó trở thành nghiệm cổ điển của phương trình.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn PGS-TS Hà Tiến Ngoan đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Cơ bản trường Cao đẳng Cộng đồng Hải Phòng và tập thể bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012.

Người thực hiện

Nguyễn Thị Hoàng Xa

Chương 1

KHÔNG GIAN SOBOLEV

Một trong những bài toán quan trọng của phương trình đạo hàm riêng là phương trình Poisson:

$$\Delta u = f. \quad (1.1)$$

Nghiệm yếu $u(x)$ của phương trình (1.1) thỏa mãn đồng nhất thức tích phân:

$$\int_{\Omega} Du D\varphi dx = - \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

trong đó: $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ là ẩn hàm, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm số được cho trước, $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in C_0^1(\Omega)$ là

không gian các hàm số khả vi liên tục và có giá compact,

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), Du D\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Đặt:

$$(u, \varphi) = \int_{\Omega} Du D\varphi dx. \quad (1.2)$$

Để nghiên cứu nghiệm của phương trình Poisson ta xem xét một cách tiếp cận khác đối với phương trình này.

Dạng song tuyến tính $(u, \varphi) = \int_{\Omega} Du D\varphi dx$ là một tích trong của không gian $C_0^1(\Omega)$ và bao đóng của $C_0^1(\Omega)$ theo metric cảm sinh bởi (1.2) là

không gian Hilbert mà người ta kí hiệu là $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Hơn nữa, phiếm hàm tuyến tính F được định nghĩa bởi:

$$F(\varphi) = - \int_{\Omega} f \varphi dx$$

có thể được mở rộng đến một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên không gian $W_0^{1,2}(\Omega)$. Theo định lý Riesz tồn tại một phần tử $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ thỏa mãn $(u, \varphi) = F(\varphi), \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Định lý Riesz: Với mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn F trong không gian Hilbert H luôn tồn tại một phần tử xác định duy nhất $f \in H$ sao cho $F(x) = (x, f)$ với mỗi $x \in H$ và $\|F\| = \|f\|$.

Với

$$(x, f) = \frac{F(x)}{F(f)} \|f\|^2$$

$$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\|x\|}$$

$$\|f\|^2 = (f, f) = F(f)$$

Do đó sự tồn tại nghiệm suy rộng của bài toán Diriclet:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases}$$

thực sự được thiết lập.

Vấn đề về sự tồn tại nghiệm cổ điển được chuyển đổi tương ứng thành các vấn đề về tính chính quy của nghiệm suy rộng theo điều kiện biên thích hợp. Định lý Lax-Milgram sẽ được áp dụng đối với phương trình elliptic tuyến tính theo dạng Div. Tương tự như việc áp dụng định lý Riesz ở trên bằng các lí luận khác nhau dựa trên đồng nhất thức tích phân, kết quả chính quy sẽ được thiết lập.

Tuy nhiên trước khi thực hiện một cách cụ thể, ta đi khảo sát lớp các không gian Sobolev, đó là $W^{k,p}(\Omega)$ và $W_0^{k,p}(\Omega)$ mà $W_0^{1,2}(\Omega)$ là một trường

hợp riêng.

1.1 Không gian $W^{k,p}(\Omega); W_0^{k,p}(\Omega)$

1.1.1 Không gian $W^{k,p}(\Omega)$:

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn.

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \Omega$$

a. Không gian $L^p(\Omega); (1 \leq p < +\infty)$

$L^p(\Omega)$ là không gian Banach cổ điển gồm các hàm đo được trên Ω và p -khả tích. Tức là

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Chuẩn của phần tử trong $L^p(\Omega)$ được định nghĩa bởi:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p},$$

trong đó: $|u(x)|$ là trị tuyệt đối của $u(x)$.

Khi $p = +\infty$; $L^\infty(\Omega)$ là không gian Banach các hàm bị chặn trên Ω với chuẩn:

$$\|u\|_{\infty, \Omega} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u|. \quad (1.3)$$

Khi không có sự nhập nhằng, chúng ta sẽ dùng $\|u\|_p$ thay cho $\|u\|_{L^p(\Omega)}$:

Bất đẳng thức Young:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \quad (1.4)$$

trong đó $p, q \in \mathbb{R}; p > 0, q > 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Khi $p=q=2$; (1.4) chính là bất đẳng thức Cauchy. Thay thế a bởi $\varepsilon^{1/p}a$, b

bởi $\varepsilon^{-1/p}b$, với $\varepsilon > 0$ khi đó (1.4) trở thành bất đẳng thức nội suy:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon |a|^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p} |b|^q}{q} \leq \varepsilon |a|^p + \varepsilon^{-q/p} |b|^q. \quad (1.5)$$

Bất đẳng thức Holder:

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad (1.6)$$

với $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

(1.6) là hệ quả của bất đẳng thức Young, khi $p = q = 2$, bất đẳng thức Holder trở thành bất đẳng thức Schwarz.

Bất đẳng thức Holder sử dụng trong trường hợp tổng quát đối với m hàm $u_1, u_2, \dots, u_m$ nằm trong không gian $L^{p_1}, L^{p_2}, \dots, L^{p_m}$ như sau:

$$\int_{\Omega} |u_1 u_2 \dots u_m| dx \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \dots \|u_m\|_{p_m} \quad (1.7)$$

với $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$.

Bất đẳng thức Holder cũng được sử dụng để nghiên cứu chuẩn trong L^p khi coi đó là các hàm của p :

$$\phi_p(u) = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.8)$$

Với $p > 0$, $\phi_p(u)$ là hàm không giảm theo p , với u cố định.

Không gian $L^p(\Omega)$ là khả li khi $p < \infty$, $C^0(\overline{\Omega})$ là không gian con trù mật trong $L^p(\Omega)$.

Không gian đối ngẫu của $L^p(\Omega)$ khi $1 < p < \infty$ đẳng cấu với $L^q(\Omega)$, trong đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vì thế $L^q(\Omega)$ khi $1 < p < +\infty$ được coi là liên hợp của $L^p(\Omega)$. Do đó, $L^p(\Omega)$ là phản xạ khi $1 < p < \infty$

Khi $p = 2$, $L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

$$(u, u) = \|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Định lý 1.1: (định lý nhúng $L^p(\Omega)$) Giả sử Ω là miền bị chặn và $1 \leq p_1 < p_2$. Khi đó, $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$ và ánh xạ nhúng

$$j : L^{p_2}(\Omega) \mapsto L^{p_1}(\Omega)$$

là liên tục.

Chứng minh: Giả sử $u \in L^{p_2}(\Omega)$ ta cần chứng minh $u \in L^{p_1}(\Omega)$ hay $\int_{\Omega} |u|^{p_1} dx < +\infty$.

Áp dụng bất đẳng thức Holder với $p = \frac{p_2}{p_1}, q = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$, ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p_1} dx &= \int_{\Omega} |u|^{p_1} \cdot 1 dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{p_1 p} dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\Omega} 1^q dx \right)^{1/q} \\ &= (\text{mes}\Omega)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Vì Ω bị chặn và $u \in L^{p_2}(\Omega)$ nên

$$(\text{mes}\Omega)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Vậy $u \in L^{p_1}(\Omega)$.

Từ (1.9) ta suy ra:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p_1} &\leq (\text{mes}\Omega)^{1/q p_1} \cdot \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p p_1} \\ &= (\text{mes}\Omega)^{1/q p_1} \left(\int_{\Omega} |u|^{p_2} dx \right)^{1/p_2} \\ &\Leftrightarrow \|u\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq (\text{mes}\Omega)^{1/q p_1} \cdot \|u\|_{L^{p_2}(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

(1.10) chứng tỏ ánh xạ $j : L^{p_2}(\Omega) \mapsto L^{p_1}(\Omega)$ là liên tục và $\|j\| \leq (\text{mes}\Omega)^{1/q p_1} = (\text{mes}\Omega)^{1/p_1 - 1/p_2}$.

b. Không gian $W^{k,p}(\Omega)$

Không gian $W^{k,p}(\Omega)$ được định nghĩa:

Với $k \in \mathbb{N}; 1 \leq p < +\infty$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u(x); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}. \quad (1.11)$$

Trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \alpha_j \in \mathbb{N}; |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

$$D^\alpha u = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} u; D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Khi đó

$$\|u\|_{k,p;\Omega} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.12)$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (1.13)$$

Nhận xét: Nếu $k_1 < k_2$ thì $W^{k_2,p} \subset W^{k_1,p}$.

1.1.2 Ví dụ

Ví dụ 1: Cho $k=0$. Khi đó, ta có:

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Ví dụ 2: Cho $k=1$. Khi đó, ta có:

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u(x); u(x) \in L^p(\Omega); D_{x_j} u \in L^p(\Omega) \forall j\}$$

và

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j=1}^n \|D_{x_j} u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Ví dụ 3: Cho $k=2$. Khi đó, ta có:

$$W^{2,p}(\Omega) = \{u(x); u(x), D_{x_j} u, D_{x_j x_k} u \in L^p(\Omega)\}$$

và

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p = \|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j=1}^n \|D_{x_j} u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j,k=1}^n \|D_{x_j x_k} u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

1.1.3 Không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$

Không gian Banach $W_0^{k,p}(\Omega)$ phát sinh do việc lấy bao đóng của $C_0^k(\Omega)$ trong $W^{k,p}(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ không trùng nhau đối với miền Ω bị chặn. Đặc biệt, $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$, $W_0^{k,2}(\Omega)$ (đôi khi kí hiệu là $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$) là các không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D_u^\alpha D_v^\alpha dx \quad (1.14)$$

Các tính chất giải tích hàm của $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}$ được suy ra khi xem xét phép nhúng tự nhiên các không gian này vào trong tích của N_k bản sao của $L^p(\Omega)$, trong đó, N_k là số các chỉ số α thỏa mãn $|\alpha| \leq k$. Dùng sự kiện tích hữu hạn và các không gian con đóng của không gian Banach tách được (phản xạ) lại là các không gian Banach tách được (phản xạ) ta suy ra không gian $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ là tách được với $1 \leq p < \infty$ (phản xạ nếu $1 < p < \infty$).

a. Không gian $C_0^\infty(\Omega)$.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u(x) \in C^\infty(\Omega), u(x) = 0 \text{ trong lân cận của biên } \partial\Omega\} \quad (1.15)$$

b. Không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$.

$W_0^{k,p}(\Omega)$ là không gian sinh bởi bao đóng của $C_0^k(\Omega)$ trong $W^{k,p}(\Omega)$.

Kí hiệu: $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^k(\Omega)}$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{u(x); u(x) \in W^{k,p}(\Omega), D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, |\alpha| \leq k-1\}. \quad (1.16)$$

Trường hợp khi $p = +\infty$, không gian Sobolev và không gian Lipchitz có mối quan hệ với nhau, cụ thể là:

$$W_{loc}^{k,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\Omega) \quad \text{với } \Omega \text{ tùy ý}$$

$$W^{k,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\overline{\Omega}) \quad \text{với } \Omega \text{ đủ trơn}$$

Bất đẳng thức Poincare: Giả sử Ω là miền bị chặn và $p \geq 1$. Khi đó, tồn tại số $c > 0$ sao cho:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \cdot \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.17)$$

Chứng minh: Bởi vì:

$$L^p(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

nên chỉ cần chứng minh (1.15) cho $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Bao Ω bởi hình hộp chữ nhật D và xem $u(x) \equiv 0$ ngoài Ω .

Giả sử $D = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Vì $u(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) = 0$ nên theo công thức Newton - Leibniz cho ta:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{a_n}^{x_n} D_n u(x_1, \dots, t) dt$$

Đặt $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ suy ra:

$$\begin{aligned} |u(x', x_n)| &\leq \int_{a_n}^{x_n} 1 \cdot |D_n u(x', t)| dt \\ \Rightarrow |u(x', x_n)|^p &\leq \left[\int_{a_n}^{x_n} 1 \cdot |D_n u(x', t)| dt \right]^p \\ &\leq \left[\left(\int_{a_n}^{x_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{a_n}^{x_n} 1^q dt \right)^{1/q} \right]^p \\ &= |x_n - a_n|^{p/q} \int_{a_n}^{x_n} |D_n u(x', t)|^p dt \\ &\leq (b_n - a_n)^{p/q} \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt \end{aligned} \quad (1.18)$$

Tích phân hai vế (1.17) trên D ta có:

$$\begin{aligned}
\int_D |u(x', x_n)|^p dx &\leq \int_D \left[(b_n - a_n)^{p/q} \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right] dx \\
&= \int_{D'} \left[\int_{a_n}^{b_n} (b_n - a_n)^{p/q} \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right] dx' \\
&= (b_n - a_n)^{p/q+1} \int_{D'} \left[\int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x', t)|^p dt \right] dx' \\
&= (b_n - a_n)^{p/q+1} \int_D |D_n u(x', t)|^p dx \\
&= (b_n - a_n)^{p/q+1} \int_D |D_n u(x)|^p dx \\
\Rightarrow \|u\|_{L^p(D)} &\leq (b_n - a_n) \|D_n u\|_{L^p(D)} \\
&\leq (b_n - a_n) \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(D)} \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Với mọi hàm $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ta có $|u|_{L^p(D)} = |u|_{L^p(\Omega)}$ nên từ (1.19) ta suy ra (1.17).

Hai chuẩn tương đương trong $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \tag{1.20}$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.21}$$

Hai chuẩn trên là tương đương tức là $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$c_1 \|u\| \leq \|u\| \leq c_2 \|u\| \tag{1.22}$$

Chứng minh: Đặt $N = \text{card} \{\alpha : |\alpha| \leq k\}$, $a_\alpha = \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \geq 0$, ta sẽ chứng minh rằng (1.22) được thỏa mãn với $c_1 = 1, c_2 = N^{(p-1)/p}$.

Thực vậy, trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \right)^p \quad (1.23)$$

(1.23) rõ ràng đúng nếu $a_\alpha = 0 \forall \alpha$. Nếu trái lại thì vế phải (1.23) dương và (1.23) tương đương với:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p \leq 1$$

Rõ ràng $0 \leq \frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \leq 1 \forall \alpha$.

Suy ra hàm $\left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p$ không tăng theo p , $\forall \alpha$.

Suy ra hàm $f(p) = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p$ là không tăng theo p .

Ta có với $p = 1$ thì $f(1) = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right) = 1$.

Vậy với $p > 1$ ta có: $f(p) \leq 1$, vậy:

$$f(p) = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{a_\alpha}{\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha} \right)^p \leq 1 \quad (\forall p > 1)$$

và (1.23) được chứng minh. Như vậy, bất đẳng thức bên trái của (1.22) đúng với mọi $p \geq 1$ và $c_1 = 1$.

Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \leq (N)^{(p-1)/q} \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p} \quad (1.24)$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \cdot 1 \leq (N)^{1/q} \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p}$$

trong đó $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Vậy (1.24) được chứng minh.

Như vậy (1.22) đúng với $c_1 = 1, c_2 = N^{(p-1)/p}$. Nói cách khác:

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p} = \|u\| \leq |||u||| = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \leq N^{(p-1)/p} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^p \right)^{1/p}$$

Do đó các chuẩn $\|\cdot\|$ và $|||\cdot|||$ trên $W^{k,p}(\Omega)$ là tương đương.

Hệ quả: Hai chuẩn sau là tương đương trên $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \\ |||u||| &= \sum_{j=1}^n |||D_j u|||_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

trong đó $D_j u = D_{x_j} u$.

Chứng minh: Gọi c là hằng số trong bất đẳng thức Poincare ta có:

$$|||u||| \leq \|u\| \leq (c+1) |||u|||$$

Suy ra điều phải chứng minh.

1.2 Định lý nhúng

Định lý 1.2:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega) & \text{với } p < n \\ C^0(\overline{\Omega}) & \text{với } p > n \end{cases}$$

Hơn nữa, tồn tại một hằng số $c = c(n, p)$ sao cho với mọi $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ thì:

$$\begin{aligned} \|u\|_{np/(n-p)} &\leq c \|Du\|_p \leq c \|Du\|_p \text{ với } p < n \\ \sup |u| &\leq c |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_p \text{ với } p > n \end{aligned} \quad (1.25)$$

Chứng minh: Chúng ta thiết lập đánh giá (1.25) cho các hàm $C_0^1(\Omega)$

Trường hợp : $p = 1$

Rõ ràng với u bất kì thuộc $C_0^1(\Omega)$ và i bất kì: $1 \leq i \leq n$ thì

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |D_i u| dx_i.$$

Do đó:

$$|u(x)|^{n/n-1} \leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u| dx_i \right)^{1/n-1}. \quad (1.26)$$

Bất đẳng thức (1.26) bây giờ được lấy tích phân liên tục với mỗi biến $x_i; i = 1, \dots, n$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức Holder tổng quát: Cho $m = p_1 = \dots = p_m = n - 1$.

Cho mỗi tích phân, ta có:

$$\begin{aligned} \|u\|_{n/n-1} &\leq \left(\prod_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u| dx \right)^{1/n} \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u| dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|D_i u\|_1 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Do đó, bất đẳng thức (1.25) được thiết lập cho trường hợp $p = 1$

Các trường hợp còn lại có thể nhận được bằng cách thay thế u bằng lũy thừa của $|u|$. Theo cách này chúng ta nhận được :

Với $\gamma > 1$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{n/n-1} &\leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int_{\Omega} |u|^{\gamma-1} \cdot |Du| dx \\ &\leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left\| |u|^{\gamma-1} \right\|_p \cdot \|Du\|_p \end{aligned}$$

do bất đẳng thức Holder.

Bây giờ với $p < n$, ta có thể chọn γ thỏa mãn:

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1} \text{ tức là } \gamma = \frac{(n-1)p}{n-p}$$

Và do vậy, ta được:

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \|Du\|_p$$

như cần tìm.

Trường hợp: $p > n$

Với $p > n$ ta viết:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{n}|u|}{\|Du\|_p}$$

và với $|\Omega| = 1$. Ta có:

$$\|\tilde{u}^\gamma\|_{n'} \leq \gamma \|\tilde{u}^{\gamma-1}\|_{p'}, n' = \frac{n}{n-1}, p' = \frac{p}{p-1},$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{\gamma n'} &\leq \gamma^{1/\gamma} \|\tilde{u}\|_{p'(\gamma-1)}^{1-1/\gamma} \\ &\leq \gamma^{1/\gamma} \|\tilde{u}\|_{\gamma p'}^{1-1/\gamma} \quad \text{vì } |\Omega| = 1 \end{aligned}$$

Cho phép thay thế γ bằng trị số δ^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ mà $\delta = \frac{n'}{p'} > 1$

Do đó chúng ta có được:

$$\|\tilde{u}\|_{n'\delta^\nu} \leq \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \|\tilde{u}\|_{n'\delta^{\nu-1}}^{1-\delta^{-\nu}}, \nu = 1, 2, \dots$$

Lặp lại $\nu = 1$ và dùng (1.27) ta nhận được ν bất kì:

$$\|\tilde{u}\|_{\delta^\nu} \leq \delta^{\sum \nu \delta^{-\nu}} \equiv \chi.$$

Do vậy, nếu $\nu \rightarrow \infty$ ta được:

$$\sup_{\Omega} \tilde{u} \leq \chi$$

và do đó

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\chi}{\sqrt{n}} \|Du\|_p.$$

Để bỏ hạn chế $|\Omega| = 1$, ta xét phép biến đổi $y_i = |\Omega|^{1/n} x_i$.

Ta có:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \frac{\chi}{\sqrt{n}} |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_p$$

như cần tìm.

Để mở rộng đánh giá (1.25) cho u tùy ý thuộc $W_0^{1,p}(\Omega)$, ta giả sử $\{u_m\}$ là một dãy các hàm của $C_0^1(\Omega)$ tiến đến u trong $W^{1,p}(\Omega)$. Áp dụng đánh giá (1.14) cho hiệu $u_{m_1} - u_{m_2}$, ta thấy rằng dãy $\{u_m\}$ sẽ là dãy Cauchy trong $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ với $p < n$ và trong $C^0(\overline{\Omega})$ với $p > n$. Do vậy, hàm giới hạn u sẽ nằm trong không gian muốn có và thỏa mãn (1.25).

Chú ý: Hằng số tốt nhất thỏa mãn (1.25) cho trường hợp $p < n$ là:

$$C = -\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left(\frac{n!\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n/p)\Gamma(n+1-n/p)} \right)^{1/n} \gamma^{1-1/p}, \gamma = \frac{n(p-1)}{n-p}.$$

Khi $p=1$, hằng số trên trở thành hằng số đẳng chu nổi tiếng $n^{-1}(\omega_n)^{-1/n}$. Một không gian Banach B_1 được gọi là nhúng liên tục trong không gian Banach B_2 (kí hiệu: $B_1 \rightarrow B_2$) nếu tồn tại một ánh xạ bị chặn liên tục $1 \div 1 : B_1 \rightarrow B_2$. Định lý 1.2 có thể được biểu diễn là $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{np/(n-p)}(\Omega)$ nếu $p < n$, $\rightarrow C^0(\overline{\Omega})$ nếu $p > n$. Bằng cách lặp lại kết quả của Định lý 1.2 k lần chúng ta đạt được mở rộng của không gian $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Hệ quả 1.3:

$$W_0^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \hookrightarrow L^{np/(n-kp)}(\Omega) \text{ với } kp < n \\ \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}) \text{ với } 0 \leq m < k - \frac{n}{p} \end{cases}$$

Trường hợp thứ hai là hệ quả của trường hợp thứ nhất cùng với trường hợp $p > n$ trong Định lý 1.2.

Các đánh giá (1.25) và mở rộng của chúng đối với không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$ chỉ ra rằng một chuẩn trên $W_0^{k,p}(\Omega)$ tương đương với (1.10) có thể được xác

định bởi:

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{1/p} \quad (1.28)$$

Nói chung, $W_0^{k,p}(\Omega)$ không thể thay thế bởi $W^{k,p}(\Omega)$ trong Hệ quả 1.3. Tuy nhiên, thay thế này có thể thực hiện cho một lớp lớn các miền Ω bao gồm, chẳng hạn các miền với biên liên tục Lipchitz.

Tổng quát hơn, nếu Ω thỏa mãn điều kiện phần trong hình nón đều (có nghĩa là tồn tại một hình nón cố định K_{Ω} sao cho $\forall x \in \Omega$ là đỉnh của hình nón $K_{\Omega}(x) \subset \bar{\Omega}$ và giống như K_{Ω}), và có một phép nhúng:

$$W^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \hookrightarrow L^{np/(n-kp)}(\Omega) & \text{với } kp < n \\ \hookrightarrow C_B^m(\Omega) & \text{với } 0 \leq m < k - \frac{n}{p} \end{cases} \quad (1.29)$$

trong đó: $C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) \mid D^{\alpha}u \in L^{\infty}(\Omega) \mid |\alpha| \leq m\}$.

1.3 Đánh giá thể vị và các định lý nhúng

Các kết quả nhúng của phần trước có thể thu được bằng cách khác và hoàn thiện thông qua việc sử dụng đánh giá thể vị nào đó. Cho $\mu \in (0; 1]$ và định nghĩa toán tử V_{μ} trên $L^1(\Omega)$ bằng thể vị Riesz.

$$(V_{\mu}f)(x) = \int_{\Omega} |x - y|^{n(\mu-1)} f(y) dy. \quad (1.30)$$

Toán tử V_{μ} được xác định tốt và ánh xạ $L^1(\Omega)$ vào chính nó sẽ xuất hiện như một hệ quả phụ của bổ đề tiếp theo. Đầu tiên, ta nhận thấy bằng cách đặt $f \equiv 1$ trong (1.30),

$$V_{\mu}1 \leq \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu}. \quad (1.31)$$

Chọn $R > 0$ để $|\Omega| = |B_R(x)| = \omega_n R^n$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - y|^{n(\mu-1)} dy &\leq \int_{B_R(x)} |x - y|^{n(\mu-1)} dy \\ &= \mu^{-1} \omega_n R^{n\mu} \\ &= \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu}. \end{aligned}$$

Bổ đề 1.4: Toán tử V_{μ} , ánh xạ liên tục $L^p(\Omega)$ vào $L^q(\Omega)$ với q bất kì, $1 \leq q \leq \infty$ thỏa mãn:

$$0 \leq \delta = \delta(p, q) = p^{-1} - q^{-1} < \mu. \quad (1.32)$$

Hơn nữa, với mọi $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|V_{\mu}f\|_q \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p. \quad (1.33)$$

Chứng minh: Chọn $r \geq 1$ sao cho:

$$r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1} = 1 - \delta.$$

Khi đó $h(x-y) = |x-y|^{n(\mu-1)} \in L^p(\Omega)$, và từ (1.31) ta thu được:

$$\|h\|_r \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta}.$$

Đánh giá (1.33) có thể thu được bằng cách phỏng theo chứng minh thông thường của bất đẳng thức Young với phép nhân chập trong $\mathbb{R}^n$. Viết:

$$h|f| = h^{r/q} h^{r(1-1/p)} |f|^{p/q} |f|^{p\delta},$$

Ta có thể đánh giá bằng bất đẳng thức Holder

$$|V_{\mu}f(x)| \leq \left\{ \int_{\Omega} h^r(x-y) |f(y)|^p dy \right\}^{1/q} \left\{ \int_{\Omega} h^r(x-y) dy \right\}^{1-1/p} \left\{ \int_{\Omega} |f(y)|^p dy \right\}^{\delta},$$

do đó

$$\begin{aligned} \|V_{\mu}f\|_q &\leq \sup_{\Omega} \left\{ \int h^r(x-y) dy \right\}^{1/r} \|f\|_p \\ &\leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p \end{aligned}$$

Bổ đề 1.5: Cho $f \in L^p(\Omega)$ và $g = V_{1/p}f$. Khi đó tồn tại các hằng số c_1 và c_2 chỉ phụ thuộc vào n và p sao cho:

$$\int_{\Omega} \exp \left[\frac{g}{c_1 \|f\|_p} \right]^{p'} dx \leq c_2 |\Omega|, p' = p/(p-1). \quad (1.34)$$

Chứng minh: Từ Bổ đề 1.4, ta nhận được với mọi $q \geq p$

$$\|g\|_q \leq q^{1-1/p+1/q} \omega_n^{1-1/p} |\Omega|^{1/q} \|f\|_p,$$

do đó

$$\int_{\Omega} |g|^q dx \leq q^{1+q/p'} \omega_n^{q/p'} |\Omega| \|f\|_p^q$$

và hơn nữa với $q \geq p-1$

$$\int_{\Omega} |g|^{p'q} dx \leq p'q \left(\omega_n p'q \|f\|_p^{p'} \right)^q |\Omega|.$$

Do đó

$$\int_{\Omega} \sum_{N_0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{|g|}{c_1 \|f\|_p} \right)^{p'k} dx \leq p' |\Omega| \sum \left(\frac{p' \omega_n}{c_1^{p'}} \right)^k \frac{k^k}{(k-1)!}, N_0 = [p]$$

Chuỗi ở vế phải hội tụ với điều kiện $c_1^{p'} > e \omega_n p'$, từ Định lý hội tụ đơn điệu ta có đánh giá (1.34).

Các bổ đề tiếp theo nhằm làm rõ mối liên hệ giữa đạo hàm yếu và các thế vị ở trên.

Bổ đề 1.6: Cho $u \in W_o^{1,1}(\Omega)$. Khi đó:

$$u(x) = \frac{1}{n \omega_n} \int_{\Omega} \frac{(x_i - y_i) D_i u(y)}{|x - y|^n} dy \quad (1.35)$$

Chứng minh: Giả sử rằng $u \in C_o^1(\Omega)$ và mở rộng u bằng cách cho $u = 0$ bên ngoài Ω . Khi đó với vectơ ω bất kì có $|\omega| = 1$,

$$u(x) = - \int_0^\infty D_r u(x + r\omega) dr.$$

Tích phân đối với ω , ta có được:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{n\omega_n} \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} D_r u(x + r\omega) dr d\omega \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_\Omega \frac{(x_i - y_i) D_i u(y)}{|x - y|^n} dy \end{aligned}$$

và (1.35) có được từ Bổ đề 1.4 và sự kiện rằng $C_0^1(\Omega)$ là trù mật trong $W_0^{1,1}(\Omega)$. Ngoài ra, ta còn có được với $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$

$$|u| \leq \frac{1}{n\omega_n} V_{1/n} |Du|. \quad (1.36)$$

Kết hợp Bổ đề 1.4 và bất đẳng thức (1.36) chúng ta có ngay phép nhúng $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ với $p^{-1} - q^{-1} < n^{-1}$, điều này gần như đã là kết luận của Định lý 1.2. Trên thực tế, phiên bản yếu hơn sẽ phù hợp cho mục đích của phần này. Khi kết hợp Bổ đề 1.5 với (1.36) ta có được một kết quả chính xác hơn của trường hợp $p = n$ được thể hiện trong định lý sau đây:
Định lý 1.7: *Cho $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Khi đó tồn tại các hằng số c_1, c_2 chỉ phụ thuộc vào n , sao cho:*

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{|u|}{c_1 \|Du\|_n}\right)^{n/(n-1)} dx \leq c_2 |\Omega| \quad (1.37)$$

Chú ý: Đánh giá (1.36) dễ dàng tổng quát cho các đạo hàm yếu bậc cao hơn. Ta có: cho $u \in W_0^{k,1}(\Omega)$,

$$|u| \leq \frac{1}{(k-1)!n\omega_n} V_{k/n} |D^k u|, \quad (1.38)$$

và dùng Bổ đề 1.5 ta có được một mở rộng của Định lý 1.7. Cụ thể là, tồn tại các hằng số c_1, c_2 chỉ phụ thuộc vào n và k , sao cho nếu $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ với $n = kp$, thì

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{|u|}{c_1 \|D^k u\|_n}\right)^{p/(p-1)} dx \leq c_2 |\Omega|. \quad (1.39)$$

Trường hợp $p > n$ của định lý nhúng Sobolev có thể được chính xác hóa thông qua bổ đề sau:

Bổ đề 1.8: Cho Ω lồi và $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Khi đó:

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |Du(y)| dy, \text{ hầu khắp nơi trên } \Omega \quad (1.40)$$

trong đó:

$$u_S = \frac{1}{|S|} \int_S u dx, d = \text{diam} \Omega,$$

và S là tập con đo được bất kỳ của Ω .

Chứng minh: Cho $u \in C^1(\Omega)$, $x, y \in \Omega$:

$$u(x) - u(y) = - \int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr, \omega = \frac{y - x}{|y - x|}.$$

Tích phân theo y trên S , ta được:

$$|S| (u(x) - u_S) = - \int_S dy \int_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega) dr.$$

Kí hiệu

$$V(x) = \begin{cases} |D_r u(x)|, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|} \int_{|x-y|<d} dy \int_0^{\infty} V(x + r\omega) dr \\ &= \frac{1}{|S|} \int_0^{\infty} \int_{|\omega|=1} \int_0^d V(x + r\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega dr \\ &= \frac{d^n}{n|S|} \int_0^{\infty} \int_{|\omega|=1} V(x + r\omega) d\omega dr \end{aligned}$$

$$= \frac{d^n}{n|S|} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |D_r u(y)| dy.$$

Ta có thể chứng minh định lý nhúng của Morrey.

Định lý 1.9: Cho $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, khi đó $u \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, trong đó $\gamma = 1 - n/p$. Hơn nữa, với hình cầu bất kì $B = B_R$,

$$\operatorname{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leq CR^\gamma \|Du\|_p, \quad (1.41)$$

trong đó $C = C(n, p)$, $\operatorname{osc}_{\omega} = \sup_{x, y \in \omega} |u(x) - u(y)|$.

Chứng minh: Kết hợp đánh giá (1.40) và (1.33), cho $S = \Omega = B$, $q = \infty$ và $\mu = n^{-1}$, ta có:

$$|u(x) - u_B| \leq C(n, p) R^\gamma \|Du\|_p \text{ (hầu khắp nơi } (\Omega \cap B)) .$$

Từ đó suy ra kết quả vì:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_B| + |u(y) - u_B| \\ &\leq 2C(n, p) R^\gamma \|Du\|_p \text{ (hầu khắp nơi } (\Omega \cap B)) . \end{aligned}$$

Kết hợp Định lý 1.2 và Định lý 1.9, với $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và $p > n$ ta có đánh giá:

$$|u|_{0,\gamma} \leq C[1 + (\operatorname{diam}\Omega)^\gamma] \|Du\|_p. \quad (1.42)$$

Hơn nữa, kết quả của các Định lý 1.2, 1.7, 1.9 có thể tóm lược theo sơ đồ sau đây:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \begin{array}{l} \nearrow L^{np/(n-p)}(\Omega), \quad p < n \\ \rightarrow L^\varphi(\Omega), \Omega = \exp\left(|t|^{n/(n-1)}\right) - 1, p = n \\ \searrow C^\lambda(\Omega), \lambda = 1 - \frac{n}{p}, \quad p > n \end{array}$$

trong đó $L^\varphi(\Omega)$ là kí hiệu của không gian Orlicz với hàm φ xác định.

Từ Bổ đề 1.4 và 1.6 ta có : Với $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

$$\|u\|_p \leq \left(\frac{1}{\omega_n} |\Omega|\right)^{1/n} \|Du\|_p; \quad (1.43)$$

Trong khi mà từ Bổ đề 1.4 và 1.8 ta có: với $u \in W^{1,p}(\Omega)$ và Ω lồi:

$$\|u - u_S\|_p \leq \left(\frac{\omega_n}{|S|} \right)^{1-1/n} d^n \|Du\|_p, \quad (1.44)$$

$d = \text{diam}\Omega$ là đường kính của miền Ω .

Chương 2

NGHIỆM MẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

2.1 Khái niệm nghiệm mạnh

2.1.1 Thế vị Newton

Xét phương trình Laplace có dạng:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}. \quad (2.1)$$

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$. Thế vị Newton của f được định nghĩa là hàm $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x, y) f(y) dy, \quad (2.2)$$

trong đó $\Gamma(x, y)$ là nghiệm cơ bản của phương trình Laplace được cho bởi công thức:

$$\Gamma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \log |x-y|, & n = 2, \end{cases} \quad (2.3)$$

trong đó ω_n là thể tích hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$. Ta có công thức:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma}(x, y) - \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) dS_x + \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta u dx \quad (2.4)$$

với $y \in \Omega$,

$\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$ là vectơ pháp tuyến ngoài đơn vị tại $x \in \partial\Omega$

Khi $\partial\Omega$ đủ trơn có thể coi một hàm thuộc $C^2(\overline{\Omega})$ như là tổng của hàm điều hòa và thế vị Newton của phương trình Laplace của nó. Chính vì vậy việc nghiên cứu phương trình Poisson $\Delta u = f$ phần lớn thể hiện thông qua nghiên cứu thế vị Newton.

2.1.2 Khái niệm nghiệm mạnh

Định nghĩa 2.1: Xét phương trình:

$$\Delta u = f.$$

Hàm số $u \in W^{2,2}(\Omega)$ được gọi là nghiệm mạnh của phương trình nếu nó thỏa mãn phương trình hầu khắp nơi trên Ω .

Định lý 2.1: Cho $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, ω là thế vị Newton của f .

Khi đó $\omega(x) \in W^{2,2}(\Omega)$, $\Delta\omega = f$ hầu khắp nơi trong Ω và

$$\|D^2\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.5)$$

Chứng minh: Giả sử: $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset\subset \Omega_0$, Ω_0 : bị chặn với miền biên trơn.

Với $x \in \Omega$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \omega(x) &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(x, y) (f(y) - f(x)) dy \\ &\quad + f(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(x, y) \gamma^j d\sigma(y), \end{aligned} \quad (2.6)$$

trong đó: $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$: pháp tuyến ngoài đơn vị, $d\sigma(y)$: là độ đo cảm sinh trên $\partial\Omega_0$.

Trên đây là hệ quả của biểu thức:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(x, y) (f(y) - f(x)) \right| &\leq \text{const} \frac{1}{|x - y|^n} |f(y) - f(x)| \\ &\leq \text{const} \frac{1}{|x - y|^{n-1}} \|f\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Nói khác đi, điểm kỳ dị dưới dấu tích phân là khả tích. Điều đó có nghĩa là:

$$v_\varepsilon(x) = \int \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(x, y) \eta_\varepsilon(y) f(y) dy$$

Trong đó:

$$\eta_\varepsilon(y) = 0 \quad \text{với} \quad |y| \leq \varepsilon$$

$$\eta_\varepsilon(y) = 1 \quad \text{với} \quad |y| \geq 2\varepsilon.$$

$$|D\eta_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon}.$$

$D_j v_\varepsilon$: hội tụ tới biểu thức bên phải của (2.6) khi $\varepsilon \rightarrow 0$

Chú ý: Phương trình (2.6) vẫn đúng đối với hàm liên tục Holder f . Bởi vì trong trường hợp này ta có thể ước lượng hàm dưới tích phân bởi biểu thức:

$$\text{const} \frac{1}{|x - y|^{n-\alpha}} \|f\|_{C^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Bởi vì: $\Delta \Gamma(x, y) = 0 \quad \forall x \neq y$

đối với $\Omega_0 = B(x, R)$, với R đủ lớn, từ (2.6) ta nhận được :

$$\Delta \omega(x) = \frac{1}{d\omega_n R^{n-1}} f(x) \int_{|x-y|=R} \sum_{i=1}^n \nu^i(y) \nu^i(y) d\sigma_y = f(x). \quad (2.7)$$

Vì vậy nếu f có giá compact thì $\Delta \omega$ cũng vậy. Giả sử giá của f chứa trong phần trong của $B(0, R)$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \omega \right)^2 &= - \int_{B(0,R)} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \omega \frac{\partial}{\partial x^i} f \\
&+ \int_{\partial B(0,R)} D\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} D\omega d\sigma \\
&= \int_{B(0,R)} (\Delta \omega)^2 \\
&+ \int_{\partial B(0,R)} D\omega \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} D\omega d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Khi $R \rightarrow \infty$, $D\omega$ có dáng điệu như R^{1-n} , $D^2\omega$ có dáng điệu như R^{-n} . Vì vậy tích phân trên miền $\partial B(0, R)$ hội tụ tới không khi $R \rightarrow \infty$. Từ (2.7) và (2.8) suy ra (2.5)

Để nghiên cứu trường hợp tổng quát $f \in L^2(\Omega)$ ta nhận thấy rằng từ Định lý về bất đẳng thức Poincare đối với $f \in C_0^\infty(\Omega)$ thì chuẩn trong $W^{1,2}$ của hàm ω có thể đánh giá qua chuẩn trong L^2 của hàm f . Áp dụng (2.5) đối với hiệu số $(\omega_n - \omega_m)$ của thế vị Newton ω_n của f_n ta thấy rằng dãy ω_n là dãy Cauchy trong $W^{2,2}(\Omega)$. Giới hạn ω một lần nữa lại thỏa mãn (2.5) và vì các hàm thuộc L^2 xác định hầu khắp nơi nên $\Delta\omega = f$ cũng đúng hầu khắp nơi.

2.2 Độ trơn L^p của nghiệm mạnh bên trong miền

2.2.1 Độ trơn L^2 bên trong miền

Định lý 2.2: Cho $u \in W^{1,2}(\Omega)$ là nghiệm yếu của phương trình: $\Delta u = f$ trong đó $f \in L^2(\Omega)$,

Khi đó:

$$u \in W^{2,2}(\Omega')$$

$$\forall \Omega' : \Omega' \subset\subset \Omega$$

và

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.9}$$

Hơn nữa, $\Delta u = f$ ở hầu khắp mọi nơi trong Ω

Chứng minh: Xét trường hợp $u \in C^3(\Omega)$. Cho $B(x, R) \subset \Omega$, $\sigma \in (0, 1)$ và cho $\eta \in C_0^3(B(x, R))$ là một hàm cắt với:

$$0 \leq \eta(y) \leq 1$$

$$\begin{aligned} \eta(y) &= 1 \quad \text{với } y \in B(x, \sigma R) \\ \eta(y) &= 0 \quad \text{với } y \in R^n \setminus B\left(x, \frac{1+\sigma}{2}R\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D\eta| &\leq \frac{4}{(1-\sigma)R} \\ |D^2\eta| &\leq \frac{16}{(1-\sigma)^2 R^2} \end{aligned}$$

Đặt $v = \eta u$. Khi đó $v \in C_0^3(B(x, R))$ và từ biểu thức:

$$\begin{aligned} \|D^2v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_{x^i x^j} v_{x^i x^j} = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_{x^i x^j x^i} v_{x^j} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x^i x^i} \sum_{j=1}^n v_{x^j x^j} = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

suy ra:

$$\|D^2v\|_{L^2(B(x,R))} = \|\Delta v\|_{L^2(B(x,R))}. \quad (2.10)$$

Ta có: $\Delta v = \eta \Delta u + 2DuD\eta + u\Delta\eta$.

Do đó:

$$\begin{aligned} \|D^2u\|_{L^2(B(x,\sigma R))} &\leq \|D^2v\|_{L^2(B(x,R))} \\ &\leq \text{const} \left(\|f\|_{L^2(B(x,R))} + \frac{1}{(1-\sigma)R} \|Du\|_{L^2\left(B\left(x, \frac{1+\sigma}{2}R\right)\right)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \|u\|_{L^2(B(x,R))} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cho $\xi \in C_0^1(B(x, R))$ là hàm cắt với:

$$0 \leq \xi(y) \leq 1$$

$$\xi(y) = 1 \quad \text{với } y \in B\left(x, \frac{1+\sigma}{2}R\right)$$

$$|D\xi| \leq \frac{4}{(1-\sigma)R}$$

Đặt $\omega = \xi^2 u$ với u là nghiệm yếu của phương trình $\Delta u = f$ ta nhận được:

$$\begin{aligned} \int_{B(x,R)} Du \cdot D(\xi^2 u) &= - \int_{B(x,R)} f \xi^2 u \\ \int_{B(x,R)} \xi^2 |Du|^2 &= -2 \int_{B(x,R)} \xi u Du D\xi - \int_{B(x,R)} f \xi^2 u \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B(x,R)} \xi^2 |Du|^2 + 2 \int_{B(x,R)} u^2 |D\xi|^2 \\ &\quad + (1-\sigma)^2 R^2 \int_{B(x,R)} f^2 + \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \int_{B(x,R)} u^2. \end{aligned}$$

Do đó ta có được đánh giá đối với $\|\xi Du\|_{L^2(B(x,R))}$:

$$\begin{aligned} \|Du\|_{L^2\left(B\left(x, \frac{1+\sigma}{2}R\right)\right)} &\leq \|\xi Du\|_{L^2(B(x,R))} \\ &\leq \text{const} \left(\frac{1}{(1-\sigma)R} \|u\|_{L^2(B(x,R))} + (1-\sigma)R \|f\|_{L^2(B(x,R))} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Từ (2.11) và (2.12) cho ta bất đẳng thức sau:

$$\|D^2 u\|_{L^2(B(x,\sigma R))} \leq \text{const} \left(\|f\|_{L^2(B(x,R))} + \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \|u\|_{L^2(B(x,R))} \right) \quad (2.13)$$

Trong (2.13) đặt $\sigma = \frac{1}{2}$ và phủ Ω' bởi một số hữu hạn của hình cầu $B\left(x, \frac{R}{2}\right)$ với $R \leq d(\Omega', \partial\Omega)$ và ta được đánh giá (2.9) đối với $u \in C^3(\Omega)$.

Trong trường hợp tổng quát $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Ta xét u_h với u_h được định nghĩa:

Cho $u_h \in L^p(\Omega); h > 0$:

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy$$

trong đó:

$$\rho(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

c được chọn để sao cho $\int \rho dx = 1$

đặt $u(y) = 0$ với $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ khi đó $u_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Cho $0 < h < d(\Omega', \partial\Omega)$. Khi đó:

$$\int_{\Omega} D_{u_h} Dv = - \int f_h v \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

Do $u_h \in C^\infty(\Omega)$ nên $\Delta u_h = f$

Ta dùng bổ đề sau:

Cho $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ với $h \rightarrow 0$ ta có:

$$\|u - u_h\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

Hơn nữa u_h hội tụ tới u theo từng điểm hầu khắp nơi (đặt $u = 0$ bên ngoài Ω).

Nên:

$$\|u_h - u\|, \|f_h - f\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$$

. Trong trường hợp cụ thể u_h và f_h thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy trong $L^2(\Omega)$

Áp dụng (2.9) cho $u_{h_1} - u_{h_2}$ ta được:

$$\|u_{h_1} - u_{h_2}\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|u_{h_1} - u_{h_2}\|_{L^2(\Omega)} + \|f_{h_1} - f_{h_2}\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Do đó: u_h thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy trong $W^{2,2}(\Omega')$. Cuối cùng giới hạn u là trong $W^{2,2}(\Omega')$ và thỏa mãn (2.9).

Định lý 2.3: Cho $u \in W^{1,2}(\Omega)$ là nghiệm yếu của phương trình $\Delta u = f$, $f \in W^{k,2}(\Omega)$. Khi đó $u \in W^{k+2,2}(\Omega_0)$ với $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ và:

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega_0)} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \right)$$

với hằng số chỉ phụ thuộc vào k, n, Ω, Ω_0

2.2.2 Độ trơn $L^p(\Omega)$ bên trong miền

Bằng các kỹ thuật như trong Mục 2.2.1, ta có thể chứng minh các định lý sau:

Định lý 2.4: Cho $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở và bị chặn, ω là thế vị Newton của f được xác định bởi công thức (2.2).

Khi đó $\omega \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta\omega = f$ hầu khắp mọi nơi trong Ω và :

$$\|D^2\omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c(n, p) \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.14)$$

trong đó: hằng số $c(n, p)$ chỉ phụ thuộc vào số chiều n và số mũ p

Định lý 2.5: Cho $u \in W^{1,2}(\Omega)$ là nghiệm yếu của phương trình $\Delta u = f$, $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$

$$\int \text{Du} \cdot \text{D}\varphi = - \int f\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.15)$$

Với $u \in W^{2,p}(\Omega')$ và với mỗi $\Omega' \subset\subset \Omega$ và:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right), \quad (2.16)$$

với hằng số chỉ phụ thuộc vào p , n , Ω , Ω' và:

$$\Delta u = f. \quad (2.17)$$

Trong phần này, biểu thức (2.10) được thay thế bởi bất đẳng thức:

$$\|D^2v\|_{L^p(B(x,R))} \leq \text{const} \left(\|v\|_{L^p(B(x,r))} \right). \quad (2.18)$$

Từ (2.14) của Định lý 2.4 ta nhận được bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \|D^2v\|_{L^p(B(x,R))} &\leq \text{const} \left(\|f\|_{L^p(B(x,R))} + \frac{1}{(1-\sigma)R} \|Du\|_{L^p(B(x, \frac{1+\sigma}{2}R))} \right) \\ &+ \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \|u\|_{L^p(B(x,r))} \end{aligned} \quad (2.19)$$

với: $0 < \sigma < 1$, $B(x, R) \subset \Omega$.

2.2.3 Độ trơn của nghiệm phương trình elliptic phi tuyến

Xét phương trình :

$$\Delta u + \Gamma(u) |Du|^2 = 0, \quad (2.20)$$

trong đó $\Gamma(u)$: trơn và bị chặn hay u là nghiệm bị chặn.

Khi đó phương trình (2.20) giống như phương trình Euler - Lagrange của bài toán biến phân:

$$I(u) = \int_{\Omega} g(u(x)) |Du(x)|^2 dx \rightarrow \min \quad (2.21)$$

với g là hàm trơn thỏa mãn bất đẳng thức:

$$0 < \lambda \leq g(v) \leq \Lambda < \infty, \quad |g'(v)| \leq k < \infty, \quad (2.22)$$

trong đó: g' là đạo hàm của g với các hằng số λ, Λ, k, v

Để dẫn ra phương trình Euler - Lagrange (2.21), với $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega), t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$I(u + t\varphi) = \int_{\Omega} g(u + t\varphi) |D(u + t\varphi)|^2 dx.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(u + t\varphi) |_{t=0} &= \int \left\{ 2g(u) \sum_i D_i u D_i \varphi + g'(u) |Du|^2 \varphi \right\} dx \\ &= \int \left(-2g(u) \Delta u - 2 \sum_i D_i g(u) D_i u + g'(u) |Du|^2 \right) \varphi dx \\ &= \int \left(-2g(u) \Delta u - g'(u) |Du|^2 \right) \varphi dx. \end{aligned}$$

Ở đây ta sử dụng phép tích phân từng phần và tạm giả thiết $u \in C^2$. Phương trình Euler - Lagrange xuất hiện từ yêu cầu tích phân cuối cùng bằng không với mỗi $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$. Ví dụ nếu u giảm tới $I(u)$ tương ứng với giá trị bị chặn cố định. Khi đó phương trình là:

$$\Delta u + \frac{g'(u)}{2g(u)} |Du|^2 = 0, \quad (2.23)$$

với: $\Gamma(u) = \frac{g'(u)}{2g(u)}$ ta có (2.20)

Để áp dụng lý thuyết L^p , chúng ta giả thuyết rằng u là nghiệm yếu của phương trình (2.20) với

$$\begin{cases} u \in W^{1,p_1}(\Omega) \\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.24)$$

với: $p_1 > n$, n là số chiều của không gian

Giả thiết (2.24) có thể xuất hiện một cách tùy ý. Nó là một giả thiết điển hình cho phương trình vi phân phi tuyến. Tuy nhiên giả thiết như thế là cần thiết mặc dù điều này có thể chỉ ra trong những trường hợp cụ thể là nghiệm yếu $u \in W^{1,2}(\Omega)$ cũng được chứa trong không gian $W^{1,p}(\Omega)$ với mọi p .

Trong trường hợp u là giá trị vectơ thay vì giá trị vô hướng thì điều trên là không đúng nên cần giả thiết (2.24).

Để áp dụng lý thuyết L^p cho nghiệm của phương trình (2.20) ta đặt:

$$f(x) = -\Gamma(u(x)) |Du(x)|^2. \quad (2.25)$$

Vì điều kiện (2.24) và tính bị chặn của $\Gamma(u)$ nên:

$$f \in L^{p_1/2}(\Omega) \quad (2.26)$$

và u thỏa mãn trong Ω :

$$\Delta u = f \quad (2.27)$$

Do Định lý 2.5 nên:

$$\begin{cases} u \in W^{2, \frac{p_1}{2}}(\Omega') \\ \Omega' \subset\subset \Omega. \end{cases} \quad (2.28)$$

Do Định lý nhúng cho không gian Sobolev nên:

$$\begin{cases} u \in W^{1,p_2}(\Omega') \\ \Omega' \subset\subset \Omega, \end{cases} \quad (2.29)$$

trong đó: $p_2 = \frac{n \frac{p_1}{2}}{n - \frac{p_1}{2}} > p_1$ bởi vì $p_1 > n$ nên:

$$\begin{cases} f \in L^{\frac{p_2}{2}}(\Omega') \\ \Omega' \subset\subset \Omega \end{cases} \quad (2.30)$$

và chúng ta có thể áp dụng Định lý 2.5 và định lý nhúng cho không gian Sobolev một lần nữa và nhận được kết quả:

$$\begin{cases} u \in W^{2, \frac{p_2}{2}} \cap W^{1, p_3}(\Omega') \\ p_3 = \frac{n \frac{p_2}{2}}{n - \frac{p_2}{2}} > p_2, \end{cases} \quad (2.31)$$

trong đó $\Omega' \subset\subset \Omega''$

Lặp đi lặp lại quá trình này cuối cùng ta nhận được:

$$u \in W^{2, q}(\Omega'), \forall q. \quad (2.32)$$

Bây giờ ta lấy vi phân phương trình (2.20) khi đó nhận được phương trình đối với $D_i u$, $i = 1, \dots, n$

$$\Delta D_i u + \Gamma'(u) D_i u |Du|^2 + 2\Gamma(u) \sum_i D_j u D_{ij} u = 0. \quad (2.33)$$

Lần này ta đặt:

$$f = -\Gamma'(u) D_i u |Du|^2 - 2\Gamma(u) \sum_i D_j u D_{ij} u. \quad (2.34)$$

Khi đó:

$$|f| \leq \text{const} \left(|Du|^3 + |Du| |D^2 u| \right).$$

Do (2.32) nên $f \in L^p(\Omega')$ với mọi p . Điều này có nghĩa là: $v = D_i u$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \Delta v = f \\ f \in L^p(\Omega'), \forall p \end{cases} \quad (2.35)$$

Do Định lý 2.5 ta suy ra được:

$$\begin{cases} v \in W^{2,p}(\Omega'), \forall p \\ u \in W^{3,p}(\Omega'), \forall p \end{cases} \quad (2.36)$$

Ta lại tiếp tục lấy vi phân phương trình một lần nữa và nhận được phương trình đối với $D_{ij}u$, $i, j = 1, \dots, n$ sau đó áp dụng Định lý 2.5 suy ra $u \in W^{4,p}(\Omega')$. Lặp lại quá trình này (đó là việc lấy đạo hàm cao hơn thay vì lấy số mũ cao hơn) và áp dụng định lý nhúng cho không gian Sobolev. Ta nhận được kết quả được viết trong định lý sau:

Định lý 2.6: Cho $u \in W^{1,p_1}(\Omega)$, $p_1 > n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) là nghiệm yếu của phương trình:

$$\Delta u + \Gamma(u) |Du|^2 = 0$$

trong đó: $\Gamma(u)$ là trơn và bị chặn. Khi đó: $u \in C^\infty(\Omega)$.

Kết luận

Trong luận văn trình bày nội dung sau:

- Trình bày khái niệm không gian Sobolev, các định lý nhúng.
- Khái niệm nghiệm mạnh cùng các lý thuyết độ trơn của nghiệm mạnh.

Nghiệm mạnh là các hàm thuộc $W^{2,2}(\Omega)$ thỏa mãn phương trình $\Delta u = f$ hầu khắp nơi. Luận văn đã chỉ ra rằng khi độ trơn của các hệ số và của vế phải thì phương trình tăng thì độ trơn của nghiệm mạnh cũng tăng theo và trở thành nghiệm cổ điển của phương trình.

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tiếng Việt

- [1] Nguyễn Mạnh Hùng(2008), *Phương trình đạo hàm riêng*, NXB Đại học Sư phạm.

Tài liệu tiếng Anh

- [2] David Gibarg . NeilS. Trudinger (1998), *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*, Springer.
- [3] Jurgen Jost(2002), *Partial Diffrential Equation*, Springer.