

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU PHƯƠNG

**PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC
VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ HỌC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU PHƯƠNG

PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ HỌC

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH Hà Huy Khoái**

THÁI NGUYÊN - 2012

Mục lục

Mở đầu	iii
1. PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN. . .	1
1.1. Khái niệm về phép biến hình bảo giác.	1
1.1.1. Định nghĩa.	1
1.1.2. Phép biến hình thực hiện bởi hàm giải tích.	1
1.1.3. Bổ đề Schwarz.	2
1.1.4. Nguyên lí đối xứng.	2
1.2. Phép biến hình bảo giác qua một số hàm sơ cấp.	3
1.2.1. Phép biến hình tuyến tính.	3
1.2.2. Phép biến hình nghịch đảo $w = \frac{1}{z}$	5
1.2.3. Phép biến hình Giucovski.	6
2. BÀI TOÁN THẨM PHẪNG.	11
2.1. Phương trình chuyển động nước thấm.	11
2.1.1. Khái niệm về nước thấm.	11
2.1.2. Vận tốc thấm.	11
2.1.3. Định luật Darcy.	13
2.1.4. Phương trình thấm.	14
2.2. Bài toán thẩm phẳng đồng chất.	15
2.2.1. Thế vị phức.	15
2.2.2. Đường dòng và đường thế.	17
2.2.3. Điều kiện biên.	18
2.2.3.1. Biên không thấm.	18
2.2.3.2. Biên thấm.	18

2.2.3.3. Biên ri.	19
2.2.3.4. Đường bão hòa.	20
3. PHƯƠNG PHÁP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ BÀI TOÁN THẨM CÓ ÁP DƯỚI CÁC CÔNG TRÌNH THỦY LỢI.	21
3.1. Biến hình đa giác thành nửa mặt phẳng.	21
3.1.1. Mở đầu.	21
3.1.2. Công thức Schwart – Christoffel.	22
3.1.3. Biến hình chữ nhật thành nửa mặt phẳng.	23
3.1.4. Các hàm Jacobi.	26
3.2. Thẩm dưới công trình thủy lợi.	28
3.2.1. Hình chữ nhật cơ sở của bài toán thẩm có áp.	28
3.2.2. Hộ đề phẳng trên lớp thẩm sâu vô hạn.	30
3.2.3. Hộ đề phẳng trên lớp thẩm hữu hạn.	33
3.2.4. Hộ đề phẳng trên lớp thẩm hữu hạn có vách cừ.	37
4. PHƯƠNG PHÁP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC TRONG BÀI TOÁN THẨM KHÔNG ÁP.	43
4.1. Hàm Giucovski.	43
4.2. Vách cừ Giucovski.	44
4.3. Thẩm qua máng lưới có lọc đôi xứng.	47
Kết luận	52
TÀI LIỆU THAM KHẢO	53

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Khái niệm ánh xạ bảo giác là một trong những khái niệm quan trọng nhất của toán học và là một trong những phần lý thú của lý thuyết hàm biến phức. Bài toán cơ bản và khó nhất của lý thuyết ánh xạ bảo giác là tìm hàm chỉnh hình thực hiện ánh xạ bảo giác miền cho trước lên miền cho trước. Bài toán này có ý nghĩa thực hành rất lớn, tuy nhiên cho đến ngày nay người ta chưa có những phương pháp đủ hiệu lực để giải nó, nhưng trong nhiều trường hợp đơn giản nhất (nhưng cũng đầy thú vị) bài toán có thể giải nhờ các hàm số sơ cấp biến phức.

Đặc biệt năm 2005, GS. Darren Crowdy đã có một công trình đột phá về việc ánh xạ bảo giác miền đa giác đa liên lên nửa mặt phẳng phức (công thức Schwartz-Christoffel cho trường hợp đa liên), một công cụ vô cùng quan trọng cho tất cả các nhà toán học, kỹ sư cũng như các nhà khoa học khi muốn chiếu các thông tin về hình khối phức tạp thành các hình dạng đơn giản như hình tròn để dễ dàng hơn trong việc phân tích. Kết quả trên còn được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác, chẳng hạn trong mô hình hóa và trực quan hóa các cấu trúc phức tạp của hệ thần kinh. Trong luận văn này, chúng ta mới sử dụng công thức Schwartz-Christoffel cho miền đơn liên.

Và nếu như trước đây một số các kỹ thuật giải tích được giới sinh viên toán ứng dụng dùng đến nhiều hơn so với phương pháp chiếu bảo giác, ví dụ như các phương pháp cổ điển để giải các bài toán cơ học continuum, tĩnh điện, hay các lĩnh vực sử dụng phương trình Laplace và Poisson hai chiều, nhưng với những gì mà tính chất phép biến hình bảo giác và nhờ các hàm số

sơ cấp biến phức thì chúng ta đã giải quyết được nhiều bài toán ứng dụng trong trường tĩnh điện và cơ học chất lỏng,...

Xuất phát từ thực tế đó, sau khi tiến hành nghiên cứu về một vài ứng dụng của phép biến hình bảo giác, tôi đã chọn đề tài với một vài bài toán ứng dụng phép biến hình bảo giác đã được mở rộng, mô phỏng lên phần nào các chuyển động của dòng nước trong cơ học chất lỏng.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí, giáo trình trong nước và quốc tế có liên quan đến phép biến hình bảo giác và các ứng dụng của phép biến hình bảo giác trong chuyển động cơ học. Từ đó, tìm hiểu mở rộng để nghiên cứu vấn đề của đề tài này

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là trình bày một số ứng dụng của phép biến hình bảo giác trong một số lớp bài toán quan trọng của cơ học, cụ thể là bài toán chuyển động của nước ngầm dưới các công trình thủy lợi. Từ đó có thể giúp các nhà nghiên cứu, làm thế nào để xây dựng được một công trình thủy lợi đạt chất lượng tốt nhất.

4. Nội dung của luận văn

Luận văn gồm bốn chương

Chương 1: Trình bày khái niệm phép biến hình bảo giác và một số phép biến hình bảo giác quan trọng trong giải tích phức.

Chương 2: Giới thiệu về phương trình chuyển động nước thấm và các vấn đề liên quan như vận tốc thấm, quy luật thấm. Từ đó đưa ra bài toán thấm phẳng đồng chất.

Chương 3: Trình bày ứng dụng phép biến hình bảo giác vào giải quyết bài toán thấm có áp dưới các công trình thủy lợi bằng cách tìm hàm biến hình bảo giác miền thế vị phức lên miền thấm.

Chương 4: Trình bày ứng dụng phép biến hình bảo giác vào giải quyết bài toán thấm không áp dưới các công trình thủy lợi. Trong bài toán này do miền thấm chưa xác định nên phải sử dụng hàm Giucốpxki sao cho miền giá trị của nó là xác định. Sau đó ta tìm hàm biến hình bảo giác miền thế vị phức lên miền xác định đó. Từ đó ta tìm được quan hệ giữa miền thấm và hàm thế vị phức.

Để hoàn thành được luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến GS. TSKH Hà Huy Khoái, người thầy đã hướng dẫn và tận tình chỉ bảo tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo trong trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học, Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Đồng thời tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Tuyên Quang, trường phổ thông Dân tộc nội trú – THPT tỉnh Tuyên Quang, các bạn trong lớp cao học K18B, gia đình và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện về mọi mặt để giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên tháng 08 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Phương

Chương 1

PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ MỘT SỐ HÀM SỐ CẤP CƠ BẢN

1.1 KHÁI NIỆM VỀ PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC

1.1.1. Định nghĩa:

Một phép biến hình được gọi là bảo giác nếu nó có các tính chất sau:

- Bảo toàn góc giữa hai đường cong bất kì đi qua z (kể cả độ lớn và hướng)
- Có hệ số co giãn không đổi tại điểm đó, nghĩa là mọi đường cong đi qua z đều có hệ số co giãn như nhau qua phép biến hình.

Nếu phép biến hình là bảo giác tại mọi điểm của miền G thì nó được gọi là bảo giác trong miền G .

1.1.2. Phép biến hình thực hiện bởi hàm giải tích:

Cho hàm $w = f(z)$ đơn diệp, giải tích trong miền G . Do ý nghĩa hình học của $f'(z)$ ta thấy rằng phép biến hình được thực hiện bởi hàm $w = f(z)$ là bảo giác tại mọi điểm mà $f'(z) \neq 0$.

Nếu chỉ xét trong một lân cận nhỏ của điểm z , thì phép biến hình bảo giác là một phép đồng dạng do tính chất bảo toàn góc. Các góc tương ứng trong hai hình là bằng nhau. Mặt khác nếu xem hệ số co giãn là không đổi thì tỉ số giữa hai cạnh tương ứng là không đổi.

Ngược lại người ta chứng minh được rằng phép biến hình $w = f(z)$ đơn diệp là bảo giác trong miền G thì hàm $w = f(z)$ giải tích trong G và có đạo hàm $f'(z) \neq 0$.

1.1.3. Bổ đề Schwarz:

Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình tròn $|z| < R$ và $f(0) = 0$. Nếu $|z| \leq M$ với mọi z mà $|z| < R$ thì ta có:

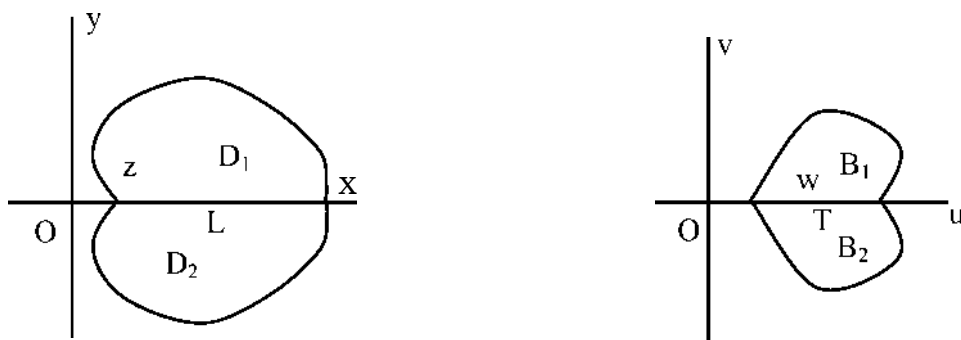
$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|, \quad |z| < R$$

trong đó đẳng thức xảy ra tại z_1 với $0 < |z| < R$ chỉ khi $f(z) = \frac{Me^{i\alpha}}{R}z$, α thực.

1.1.4. Nguyên lý đối xứng:

Trước hết ta thừa nhận một tính chất đặc biệt của hàm biến phức mà hàm biến số thực không có, đó là tính duy nhất, được phát biểu như sau: *Giả sử hai hàm $f(z)$ và $g(z)$ cùng giải tích trong miền D và thỏa mãn $f(z) = g(z)$ trên một cung L nào đó nằm trong D , khi đó $f(z) = g(z)$ trên toàn miền D .*

Giả sử D_1 và D_2 nằm kề nhau và có biên chung là L



Hình 1.1

Giả sử $f_1(z)$ giải tích trong D_1 và $f_2(z)$ giải tích trong D_2 . Nếu $f_1(z) = f_2(z)$ trên L thì ta gọi $f_2(z)$ là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 . Theo tính duy nhất của hàm giải tích nếu $f_3(z)$ cũng là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 thì ta phải có $f_3(z) = f_2(z)$ trong D_2 . Cách nhanh nhất để tìm thác triển giải tích của một hàm cho trước là áp dụng nguyên lý đối xứng sau đây:

Giả sử biên của miền D_1 chứa một đoạn thẳng L và $f_1(z)$ biến bảo giác D_1 lên B_1 trong đó L chuyển thành đoạn thẳng T thuộc biên của B_1 . Khi đó

tồn tại thác triển giải tích $f_2(z)$ của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 nằm đối xứng với D_1 đối với L . Hàm $f_2(z)$ biến bảo giác D_2 lên B_2 nằm đối xứng với B_1 đối với T và hàm:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{trong } D_1 \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{trên } L \\ f_2(z) & \text{trong } D_2 \end{cases}$$

biến bảo giác D thành B .

Nguyên lý đối xứng thường dùng để tìm phép biến hình bảo giác hai miền đối xứng cho trước.

1.2. PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC QUA MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP

1.2.1. Phép biến hình tuyến tính

Xét hàm tuyến tính $w = az + b$ trong đó a, b là các hằng số phức, $a \neq 0$. Nếu $a = |a|e^{i\alpha}$ thì $w = |a|e^{i\alpha}z + b$. Phép biến hình tuyến tính là bảo giác trong toàn mặt phẳng phức vì $f'(z) = a \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Hàm tuyến tính có thể coi là hợp của 3 hàm sau:

$$\zeta = kz \quad (k = |a| > 0)$$

$$\omega = e^{i\alpha} \cdot \zeta \quad (\alpha = \text{Arg} a)$$

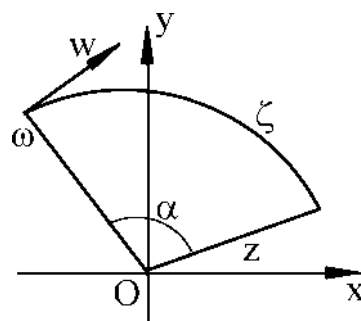
$$w = \omega + b$$

Nếu biểu diễn các điểm ζ, ω, w trong cùng một mặt phẳng thì dựa vào ý nghĩa hình học của phép nhân và phép cộng các số phức ta suy ra rằng:

- Điểm ζ nhận được từ điểm z bằng phép co giãn với hệ số k

- Điểm ω nhận được từ điểm ζ bằng phép quay tâm O , góc quay α .

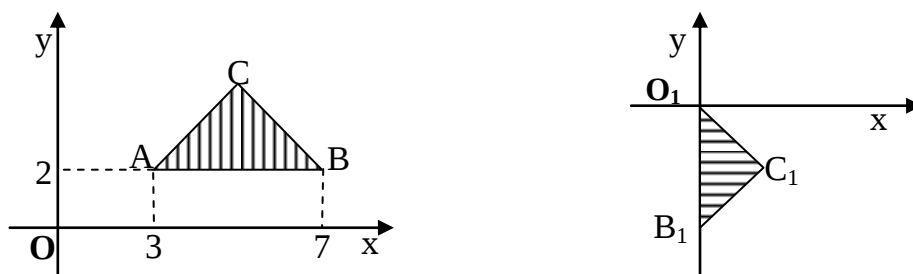
- Điểm w nhận được từ điểm ω bằng phép tịnh tiến xác định bởi vector biểu diễn số phức b .



Hình 1.2

Như vậy muốn được ảnh w của z ta phải thực hiện liên tiếp một phép co dãn, một phép quay và một phép tịnh tiến. Tích của 3 phép biến hình trên là một phép đồng dạng. Vậy phép biến hình tuyến tính là một phép đồng dạng. Nó biến một hình bất kì thành một hình đồng dạng với hình ấy. Đặc biệt, ảnh của một đường tròn là một đường tròn, ảnh của một đường thẳng là một đường thẳng.

Ví dụ: Tìm hàm $w = f(z)$ biến hình tam giác vuông cân $A(3 + 2i)$, $B(7 + 2i)$, $C(5 + 4i)$ thành tam giác vuông cân có đỉnh tại O_1 , $B_1(-2i)$ và $C_1(1 - 2i)$



Hình 1.3

Vì các tam giác ABC và tam giác $O_1B_1C_1$ đồng dạng nên phép biến hình này được thực hiện bằng một hàm bậc nhất $w = az + b$. Phép biến hình này có thể phân tích thành các phép biến hình liên tiếp sau đây:

- Phép tịnh tiến từ A về gốc, xác định bằng vec tơ $(-3 - 2i)$. Phép tịnh tiến này được xác định bởi hàm $\zeta = z - (3 - 2i)$

- Phép quay quanh gốc một góc $-\frac{\pi}{2}$, ứng với hàm $\omega = \zeta e^{-i\frac{\pi}{2}}$

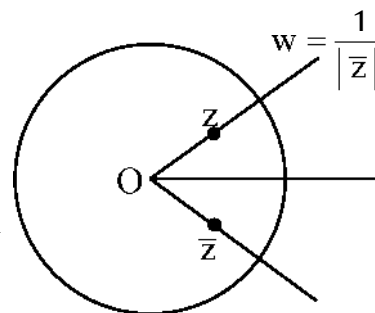
- Phép co dãn tâm O , hệ số $k = \frac{O_1B_1}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, được thực hiện bằng hàm

$$w = \frac{1}{2} \omega$$

$$\text{Vậy } w = \frac{1}{2}(z - 3 - 2i)e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2}(z - 3 - 2i) = -\frac{i}{2}z + \frac{3}{2}i - 1$$

1.2.2. Phép biến hình nghịch đảo $w = \frac{1}{z}$:

Phép biến hình này đơn diệp, biến mặt phẳng phức mở rộng z (tức mặt phẳng phức có bổ sung thêm điểm $z = \infty$) lên mặt phẳng phức mở rộng w . Ảnh của điểm $z = 0$ là điểm $w = \infty$. Ngược lại ảnh của điểm $z = \infty$ là điểm $w = 0$. Vì $w' = -\frac{1}{z^2}$ nên



Hình 1.4

phép biến hình bảo giác tại $z \neq 0$ và $z \neq \infty$.

Ta sẽ nêu ra cách tìm ảnh của một điểm z bất kì. Chú ý là hai điểm z và $\frac{1}{\bar{z}}$ đối xứng nhau qua đường tròn đơn vị vì $\text{Arg} \frac{1}{\bar{z}} = -\text{Arg} \bar{z} = \text{Arg} z$. Mặt

khác $|z| \cdot \frac{1}{|\bar{z}|} = 1$. Vậy muốn được w , ta dựng $\frac{1}{\bar{z}}$ đối xứng với z qua đường tròn

đơn vị rồi lấy đối xứng qua trục thực. Nói khác đi, phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ là

tích của hai phép đối xứng:

- Phép đối xứng qua đường tròn đơn vị
- Phép đối xứng qua trục thực.

Tính chất: Phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ biến:

- Một đường tròn đi qua gốc tọa độ thành một đường thẳng.
- Một đường tròn không đi qua gốc tọa độ thành một đường tròn
- Một đường thẳng đi qua gốc tọa độ thành một đường thẳng
- Một đường thẳng không đi qua gốc tọa độ thành một đường tròn đi qua gốc tọa độ.

Nếu coi đường thẳng là một đường tròn có bán kính vô hạn thì tính chất

trên được phát biểu gọn lại là: Phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ biến một đường tròn thành một đường tròn.

Chứng minh: Xét đường cong C' có phương trình:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

trong đó A, B, C, D là những hằng số thực.

Viết phương trình ấy dưới dạng phức ta có:

$$Azz + Ez + \overline{Ez} + D = 0$$

trong đó $E = B - iC$

Nếu $A \neq 0, D = 0$ thì C' là đường tròn đi qua gốc tọa độ.

Nếu $A = 0$ thì C' là đường thẳng.

Nếu $A = D = 0$ thì C' là đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Ảnh của C' qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ là đường cong L có phương trình:

$$A \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} + \frac{E}{w} + \frac{\overline{E}}{\overline{w}} + D = 0$$

hay:

$$Dw\overline{w} + \overline{E}w + E\overline{w} + A = 0$$

Nếu $D = 0$ thì L là đường thẳng. Nếu $D = A = 0$ thì L là đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Nếu $A = 0$ thì L là đường tròn đi qua gốc tọa độ.

1.2.3. Phép biến hình Giucovski:

Ta gọi hàm phức $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ là hàm Giucovski. Hàm này có rất nhiều

ứng dụng trong kỹ thuật mà chương sau ta sẽ biết một phần ứng dụng của nó.

Hàm Giucovski có một điểm bất thường hữu hạn là $z = 0$. Đạo hàm của nó là $w' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right)$, $w' = 0$ tại các điểm $z = \pm 1$. Vậy phép biến hình Giucovski bảo góc tại mọi điểm z hữu hạn khác với điểm 0 và ± 1 .

Ta đi tìm miền đơn diệp của hàm. Giả sử $z_1 \neq z_2$ nhưng

$$\frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right) \text{ hay } (z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

Ta thấy đẳng thức (1.1) xảy ra khi $z_1 z_2 = 1$. Vậy phép biến hình sẽ đơn diệp trong mọi miền không chứa hai điểm nghịch đảo nhau. Chẳng hạn miền $|z| < 1$ là miền đơn diệp của hàm số; miền $|z| > 1$ cũng là một miền đơn diệp khác.

Ví dụ : Tìm ảnh của phép biến hình Giucovski của

i, Đường tròn $|z| = h, 0 < h < 1$

Ta đặt $z = re^{i\varphi}$. Hàm Giucovski được viết thành:

$$w = u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{2} \left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi) \right]$$

Tách phần thực và phần ảo ta có

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi$$

$$v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi$$

Từ đó suy ra ảnh của đường tròn $|z| = r = h$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{h} \right) \cos \varphi \\ v = \frac{1}{2} \left(h - \frac{1}{h} \right) \sin \varphi = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} - h \right) \sin \varphi \end{cases}, \varphi \text{ là tham số}$$

Đó là một elip (γ) , có tâm O và các bán trục $a = \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{h} \right)$ và

$$b = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} - h \right), \text{ tiêu cự } 2c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \sqrt{\frac{1}{4} \left(h + \frac{1}{h} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(h - \frac{1}{h} \right)^2} = 2. \text{ Các}$$

tiêu điểm của elip là $F_1(-1; 0)$ và $F_2(1; 0)$. Khi φ biến thiên từ 0 đến 2π , điểm z chạy dọc đường tròn $|z| = h$ theo hướng dương trong khi ảnh w tương ứng của nó chạy trên elip theo hướng âm của mặt phẳng.

Vì khi $0 < \varphi < \pi$ thì $v < 0$ và khi $\pi < \varphi < 2\pi$ thì $v > 0$ nên ảnh của nửa đường tròn trên là nửa elip dưới, ảnh của nửa đường tròn dưới là nửa elip trên.

Chú ý là khi $h \rightarrow 0$ thì các bán trục a, b của elip dần ra ∞ , nghĩa là nếu đường tròn $|z| = h$ càng nhỏ thì ảnh của nó có các bán trục càng lớn. Khi $h \rightarrow 1$ thì $a \rightarrow 1$ và $b \rightarrow 0$, nghĩa là nếu đường tròn $|z| = h$ càng dần vào đường tròn đơn vị thì elip ảnh dẹt dần và tiến tới đoạn kép F_1F_2 (sở dĩ gọi là đoạn kép vì F_1F_2 đồng thời là ảnh nửa cung tròn đơn vị trên và là ảnh nửa cung tròn đơn vị dưới). Ta quy ước bờ trên của đoạn thẳng là ảnh nửa cung tròn đơn vị nằm trong nửa mặt phẳng dưới; bờ dưới của đoạn thẳng là ảnh nửa cung tròn đơn vị nằm trong nửa mặt phẳng trên.

ii, Đoạn thẳng $\text{Arg} z = \alpha, |z| < 1$

Nếu gọi L là ảnh của đoạn thẳng:

$$\begin{cases} \text{Arg} z = \alpha \\ |z| < 1 \end{cases}$$

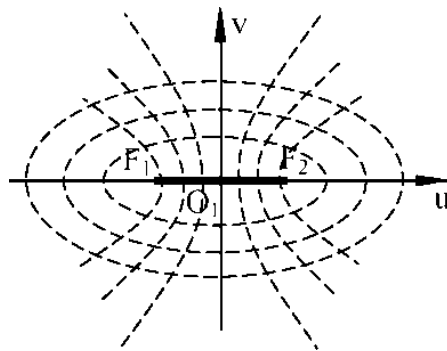
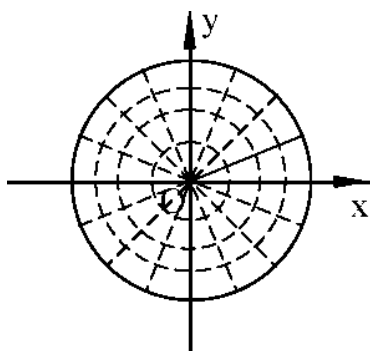
thì phương trình tham số của L là:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha \end{cases} \quad (1.2)$$

Khử r trong các phương trình của (1.2) ta có

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1 \quad (1.3)$$

Đây là phương trình của một hyperbol có các tiêu điểm trùng với F_1 và F_2 .



Hình 1.5

Nếu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì ảnh L là nhánh hyperbol (1.3) nằm trong góc phần tư thứ tư. Khi điểm z chạy trên đoạn bán kính từ gốc tọa độ tới đường tròn đơn vị thì ảnh w của nó chạy trên nhánh hyperbol nằm trong góc phần tư thứ tư từ ∞ tới trục thực O_1u .

iii, Hình tròn đơn vị $|z| < 1$

Khi cho h biến thiên từ 0 đến 1 thì đường tròn $|z| = h$ sẽ quét nên hình tròn $|z| < 1$. Ảnh (γ) của L trong mặt phẳng w sẽ quét nên mặt phẳng w , bỏ đi lát cắt dọc đoạn F_1F_2 . Bờ dưới của lát cắt là ảnh của cung tròn đơn vị trên. Bờ trên của lát cắt là ảnh của cung tròn đơn vị dưới. Nửa hình tròn đơn vị trên có ảnh là nửa mặt phẳng dưới. Ngược lại nửa hình tròn đơn vị dưới có ảnh là nửa mặt phẳng trên.

iv, Nửa mặt phẳng trên, nằm ngoài hình tròn đơn vị tâm O .

Tương tự như ở ý i, ảnh của nửa đường tròn trên:

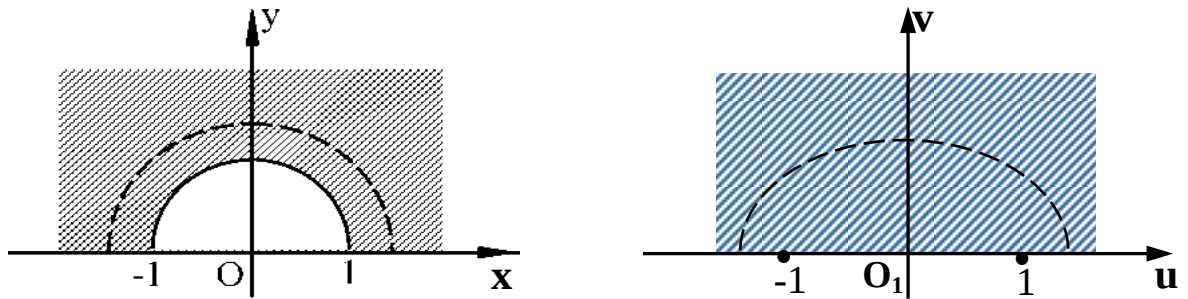
$$r = h \ (h > 1), \ 0 < \varphi < \pi$$

có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{h} \right) \cos \varphi \\ v = \frac{1}{2} \left(h - \frac{1}{h} \right) \sin \varphi \end{cases}, \ 0 < \varphi < \pi$$

Đây là một cung elip nằm trong nửa mặt phẳng trên , có các bán trục là $a = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right)$ và $b = \frac{1}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)$

Khi nửa đường tròn trên tâm O, bán kính h quét nên phần nửa mặt phẳng trên nằm ngoài đường tròn đơn vị thì ảnh của nó quét nên nửa mặt phẳng trên $\text{Im}z > 0$ (hình 1.6)



Hình 1.6

Chương 2

BÀI TOÁN THẨM PHẪNG

2.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG NƯỚC THẨM

2.1.1. Khái niệm về nước thẩm

Hiện tượng thẩm có liên quan với tính xốp của đất. Tính chất xốp này được đặc trưng bởi độ xốp. Ta xét một mẫu đất xốp có thể tích V và gọi V_1 là tổng thể tích của các lỗ hổng. Tỉ số giữa V_1 và V gọi là độ xốp của mẫu đất. Ta kí hiệu độ xốp là σ :

$$\sigma = \frac{V_1}{V} \quad (2.1)$$

Nước có thể tồn tại trong đất xốp dưới nhiều trạng thái như hơi nước, nước bám chặt vào mặt ngoài các hạt, nước dính vào đất do lực phân tử .v.v..., nhưng quan trọng đối với vấn đề ở đây là trạng thái nước tự do, chuyển động dưới tác dụng của trọng lực và áp suất thủy động. Hiện tượng thẩm là hiện tượng nước tự do chảy trong đất xốp.

2.1.2. Vận tốc thẩm

Vận tốc thẩm là hiện tượng nước chảy qua một đơn vị diện tích của môi trường xốp trong một đơn vị thời gian.

Giả thiết có một dòng chất lỏng chảy qua một diện tích S của môi trường xốp. Gọi S_1 là diện tích phần lỗ hổng trong S , $\bar{u}$ là vận tốc trung bình của chất lỏng qua phần lỗ hổng, U_n là phần chiếu của $\bar{u}$ lên pháp tuyến của S và gọi tỉ lệ

$$m = \frac{S_1}{S} \quad (2.2)$$

là độ xốp mặt. Lưu lượng qua S trong một đơn vị thời gian bằng

$$Q = S_1 U_n = S \cdot m U_n \quad (2.3)$$

Từ đó ta suy ra rằng lưu lượng qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian là $m U_n$, đó là vận tốc thấm và vector vận tốc thấm là:

$$\vec{V} = m \vec{U} \quad (2.4)$$

Lấy một mẫu đất hình trụ có độ cao h, gọi $S_1(z)$ là diện tích lỗ hổng trên tiết diện S của mẫu đất ở độ cao z. Độ xốp của mặt tiết diện ấy sẽ là

$$m(z) = \frac{S_1(z)}{S}$$

Giá trị trung bình của độ xốp mặt trong mẫu đất được tính theo công thức:

$$m = \frac{1}{h} \int_0^h m(z) dz$$

Biểu thức này có thể viết

$$m = \frac{1}{hS} \int_0^h S \cdot m(z) dz = \frac{1}{V} \int_0^h S_1(z) dz$$

Ở đây V là thể tích của mẫu đất, còn $\int_0^h S_1(z) dz$ chính là thể tích lỗ hổng trong mẫu ấy, tức là V_1 . Vậy ta có

$$m = \frac{V_1}{V} = \sigma$$

Vậy độ xốp mặt bằng độ xốp (thể tích) và vận tốc thấm ở (2.4) có thể viết là

$$\vec{V} = \sigma \vec{U} \quad (2.5)$$

2.1.3. Định luật Darcy

Ta xác định mỗi điểm M của môi trường thấm bằng ba tọa độ x, y, z :
 $M = M(x, y, z)$ và gọi u, v, w là các thành phần của vận tốc thấm:
 $\vec{V} = (u, v, w)$, $p = p(x, y, z)$ là áp suất nước tại M.

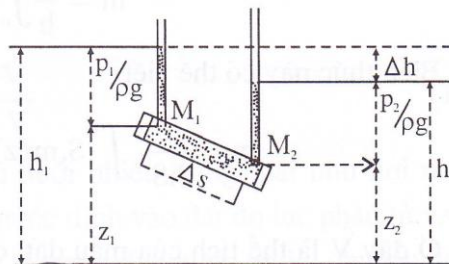
Ta kí hiệu:

$$h = h(x, y, z) = \frac{p}{\rho g} + z \quad (2.6)$$

trong đó ρ là tỉ trọng của nước (hay chất lỏng thấm nói chung), g là gia tốc trọng trường và gọi h là áp suất thủy lực tại điểm M. Ta hãy lấy một cung con Δs theo hướng của vận tốc thấm, giới hạn

$$J = -\frac{dh}{ds} = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta s}$$

gọi là *độ dốc thủy lực* tại M (hình 2.1)



Hình 2.1

Định luật Darcy: *Tốc độ thấm V chỉ phụ thuộc vào độ dốc thủy lực J . Đối với những trường hợp thường gặp, sự phụ thuộc ấy là tuyến tính:*

$$V = kJ = -k \frac{dh}{ds} \quad (2.7)$$

trong đó k được gọi là *hệ số thấm*, công thức (2.7) được gọi là *công thức Dupuy*.

Từ công thức (2.7) ta rút ra các phần chiếu của vector vận tốc thấm lên các trục tọa độ:

$$V_x = u = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = v = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad V_z = w = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.8)$$

Định luật Darcy phù hợp với thực tế khi tích V.d của tốc độ thấm và đường kính trung bình của hạt đất là khá bé, cụ thể là nằm dưới một giới hạn nào đó (chừng $0,7\text{cm}^2/\text{giây}$). Khi đó hệ số thấm k có những giá trị từ 1 đến 10^{-2} đối với cát, từ 5.10^{-4} đến 5.10^{-5} đối với đất sét. Hệ số thấm đối với các loại đất sét pha cát nằm giữa hai khoảng đó.

Trong môi trường thấm, hệ số k có thể thay đổi theo từng điểm, tức là một hàm số của x, y, z : $k = k(x, y, z)$

Trong trường hợp k là một hằng số thì môi trường thấm được gọi là đồng chất.

2.1.4. Phương trình thấm

Ta lấy một khối nước thấm hình lập phương với kích thước dx, dy, dz , có các mặt song song với các mặt tọa độ. Lưu lượng chất lỏng qua các mặt thẳng góc với trục Ox cách gốc một khoảng x là:

$$u dy dz = u(x, y, z) dy dz$$

Lưu lượng qua mặt như thế cách gốc một khoảng $x + dx$ là:

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz$$

Vậy hiệu số giữa lưu lượng nước chảy vào và lưu lượng nước chảy ra là:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz.$$

Cũng vậy hiệu số ấy đối với hai hướng y và z là:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy dz dx \text{ và } \frac{\partial u}{\partial z} dz dx dy$$

Vậy giả thiết là chất lỏng không nén được, thì lượng nước chảy vào khối lập phương bằng lượng nước chảy ra, cho nên ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ hay } \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.9)$$

Phương trình (2.9) gọi là *phương trình liên tục*.

Lấy biểu thức của $\vec{V}$ ở (2.8) đặt vào phương trình liên tục (2.9) ta sẽ được *phương trình thấm*:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Trong trường hợp môi trường thấm là đồng chất, nghĩa là k là một hằng số, thì ta có thể rút k ra ngoài và giản ước, khi đó *phương trình thấm* sẽ trở thành

$$\operatorname{div} \vec{\operatorname{grad} h} = \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

Vậy trong trường hợp đồng chất, áp lực thủy lực là một hàm điều hòa của các biến x, y, z đồng thời vận tốc thấm có một thế vị, tức là $\vec{V} = \vec{\operatorname{grad} \varphi}$, với

$$\varphi = -kh = -k \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (2.12)$$

2.2. BÀI TOÁN THẨM PHẪNG ĐỒNG CHẤT

2.2.1. Thế vị phức

Ta nói bài toán thấm là phẳng nếu các đại lượng thấm (áp lực, vận tốc thấm v.v...) không phụ thuộc vào một chiều nào đấy, Oz chẳng hạn. Thí dụ trong sự thấm qua một đập đất dài, thì hiện tượng thấm đều hầu như nhau ở mỗi tiết diện của đập thẳng góc với chiều dài và bài toán thấm qua đập là phẳng. Mỗi tiết diện như thế của đập được gọi là *mặt phẳng thấm*.

Trong mặt phẳng thấm ta chọn hai trục tọa độ Ox ngang và Oy dọc hướng lên trên. Lúc ấy phương trình chuyển động thấm phẳng sẽ có dạng

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -k \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.13)$$

với

$$h = \frac{p}{\rho g} + y, \quad \varphi = -kh = -k \left(\frac{p}{\rho g} + y \right) \quad (2.14)$$

trong đó k là hằng số. Hàm $\varphi = \varphi(x, y)$ gọi là hàm thế. Theo (2.11), ta có

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.15)$$

Hàm thế là một hàm điều hòa của hai biến x, y .

Phương trình liên tục trở thành

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

Theo đó thì $-vdx + udy$ là một vi phân đúng $d\psi$ của một hàm $\psi = \psi(x, y)$ gọi là hàm dòng:

$$d\psi = -vdx + udy \quad (2.17)$$

Ta có

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.18)$$

Từ (2.13) và (2.18) ta rút ra

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.19)$$

Tức là hai hàm $\varphi(x, y)$ và $\psi(x, y)$ thỏa mãn điều kiện Cauchy – Riemann. Vậy chúng là các hàm điều hòa liên hợp và là phần thực và phần ảo của một hàm phức, giải tích $\omega(z)$ của biến phức $z = x + iy$:

$$\omega = \varphi + i\psi$$

Hàm $\omega = \omega(z)$ gọi là *thế vị phức* của sự thấm. Đạo hàm của nó bằng

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv = \overline{W(z)} \quad (2.20)$$

trong ấy $W(z) = u + iv$ là vận tốc thấm.

Vậy đạo hàm của thế vị phức bằng liên hợp của vận tốc thấm. Và như thế liên hợp của vận tốc $W(z)$ là một hàm giải tích và bản thân vận tốc $W(z)$ là một hàm nghịch giải tích.

2.2.2. Đường dòng và đường thế

Đường dòng thấm là đường tiếp xúc với vector vận tốc thấm tại mỗi điểm của nó. Phương trình của một đường như vậy là

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

hay
$$0 = vdx - udy = -\frac{\partial\psi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -d\psi$$

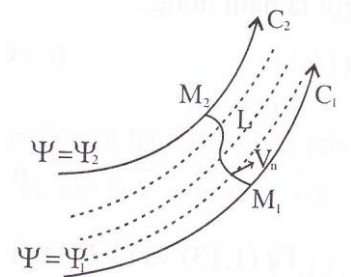
Vậy trên đường dòng ta có: $\psi = \text{hằng số}$. Đó là lí do vì sao ta gọi hàm $\psi(x, y)$ là hàm dòng.

Quỹ đạo trực giao của đường dòng rõ ràng là những đường $\varphi = \text{hằng số}$, mà ta gọi là *đường thế*.

Giả sử ta có hai đường dòng C_1 và C_2 (hình 2.2)

$$C_1: \psi = \psi_1 \text{ hằng số}$$

$$C_2: \psi = \psi_2 \text{ hằng số}$$



Hình 2.2

Ta hãy xét ý nghĩa của hiệu $\psi_2 - \psi_1$. Ta nối một điểm M_1 trên C_1 với một điểm M_2 trên C_2 bằng một đường L khả vi. Ta có:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_L d\psi = \int_L \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \int_L (-vdx + udy)$$

Nếu ta gọi V_n là phần chiếu của vận tốc thấm lên pháp tuyến của L và ds là vi phân cung của L thì ta có

$$-vdx + udy = V_n ds = dQ$$

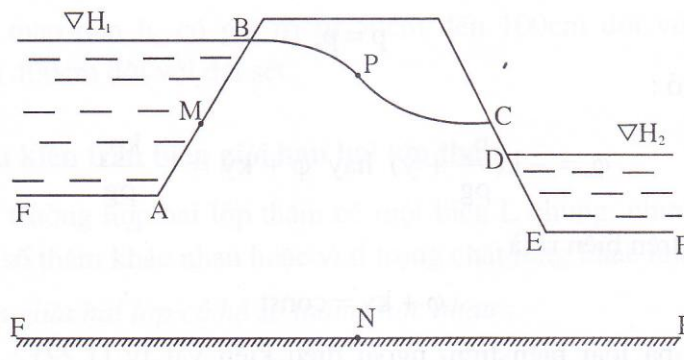
trong đó dQ là lưu lượng nước thấm qua cung vi phân ds . Lấy tích phân, ta có

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_L V_n ds = Q_1^2 \quad (2.21)$$

Như vậy hiệu $\psi_2 - \psi_1$ chính bằng lưu lượng Q_1^2 nước thấm giữa hai đường dòng $\psi = \psi_1$ và $\psi = \psi_2$ trên một bề dày đơn vị.

2.2.3. Điều kiện biên

Miền thấm được giới hạn bởi những đường gọi là biên hay đường viền (hình 2.3). Thế vị phức $\omega(z)$ là một hàm giải tích trong miền ấy. Nó thỏa mãn một số điều kiện trên các đường viền gọi là điều kiện biên. Những điều kiện này tùy thuộc vào loại biên mà sau đây ta sẽ lần lượt xét.



Hình 2.3

2.2.3.1. Biên không thấm

Đó là biên giới hạn những khối không thấm nước, như công trình bằng bê – tông hay nền đá rắn (ví dụ FNF ở hình 2.3)

Biên như thế rõ ràng phải là một đường dòng, tức là dọc theo đường biên không thấm ta có điều kiện

$$\psi = \text{const} \quad (2.22)$$

2.2.3.2. Biên thấm

Đó là biên giới hạn một khối nước (ví dụ các biên FA, AB, DE, EF trong hình 2.3)

Áp suất trong khối nước được phân bố theo quy luật thủy động học. Tại một điểm M bất kì trên biên thấm AB chẳng hạn, áp suất sẽ là

$$p = p_a + \rho g(H_1 - y)$$

trong đó p_a là áp suất trên mặt nước (áp suất không khí), H_1 và y là độ cao của mặt nước và của điểm M tính từ một trục ngang chung. Do đó giá trị của một hàm thế φ tại M là

$$\varphi = -k \left(\frac{p}{\rho g} + y \right) = -k \left(\frac{p_a}{\rho g} + H_1 \right) = \text{const} \quad (2.23)$$

Như vậy biên thấm nước là một đường thế, trên đó ta có điều kiện biên:

$$\varphi = \text{const}$$

Vận tốc trên biên thấm nước thẳng góc với biên ấy, vì $V_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$.

2.2.3.3. Biên rĩ

Đó là biên tiếp xúc với không khí (ví dụ biên CD trong hình 2.3). Áp suất trên biên rĩ bằng áp suất không khí

$$p = p_a$$

Vậy ta có:

$$\varphi = -k \left(\frac{p_a}{\rho g} + y \right) \text{ hay } \varphi + ky = -\frac{kp_a}{\rho g} \quad (2.24)$$

và điều kiện trên biên rĩ là

$$\varphi + ky = \text{const}$$

Đối với ba loại biên trên, ngoài điều kiện vật lý (2.22), (2.23) hay (2.24), ta còn điều kiện hình học, tức là phương trình xác định các biên ấy đã cho trước dạng

$$f(x, y) = 0$$

Trong các trường hợp thường gặp, các biên ấy là đường thẳng và phương

trình sẽ có dạng

$$ax + by + c = 0 \quad (2.25)$$

2.2.3.4. Đường bão hòa

Đó là đường phân chia đất thấm và đất không thấm (ví dụ đường BPC trong hình 2.3). Sở dĩ ở đó nước không thấm lên được nữa là vì áp suất đã bằng áp suất của không khí $p = p_a$

Do đó một điều kiện trên đường bão hòa là:

$$\varphi + ky = \text{const} \quad (2.26)$$

Nếu không có sự thấm xuống hay sự bốc hơi thì đường bão hòa cũng là đường dòng, cho nên một điều kiện vật lý khác trên đường bão hòa là

$$\varphi = \text{const} \quad (2.27)$$

Ngoài hai điều kiện (2.26) và (2.27), trên đường bão hòa không còn điều kiện nào khác. Nó là một biên không biết trước.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ BÀI TOÁN THẨM CỐ ÁP DƯỚI CÁC CÔNG TRÌNH THỦY LỢI

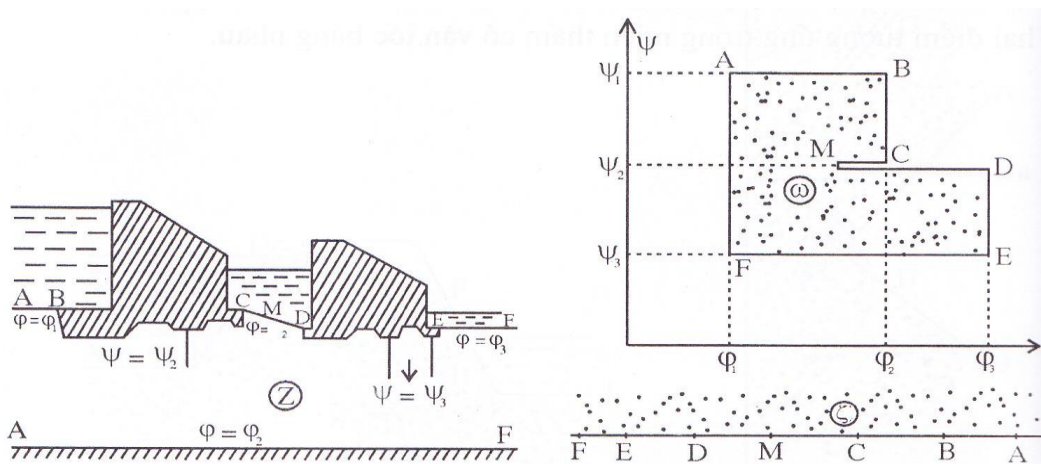
3.1. BIẾN HÌNH ĐA GIÁC THÀNH NỬA MẶT PHẶNG

3.1.1. Mở đầu:

Giả sử ta biến được miền thấm z và miền thế vị phức ω lên nửa mặt phẳng trên $\text{Im } \zeta > 0$ của mặt phẳng ζ , sao cho các điểm tương ứng z và $\omega(z)$ có cùng một ảnh ζ (muốn thế chỉ cần 3 điểm ζ tương ứng trùng nhau trên biên $\text{Im } \zeta = 0$). Ta sẽ có hai hàm $z = z(\zeta)$ và $\omega = \omega(\zeta)$ để giải quyết bài toán thấm. Chẳng hạn vận tốc sẽ cho bởi:

$$\overline{W} = u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega}{d\zeta} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \quad (3.1)$$

Bài toán thấm có áp dưới các công trình thủy lợi có hai đặc điểm (hình 3.1)



Hình 3.1

a) Ở đây ta chỉ có biên không thấm trên đó $\psi = \text{const}$ và biên thấm nước $\varphi = \text{const}$, cho nên miền thế vị phức ω là một đa giác có các cạnh dọc hay là ngang.

b) Miền thấm thường cũng được giới hạn bởi những đoạn thẳng, tức cũng là một đa giác, hoặc là xấp xỉ một đa giác.

Như vậy, việc tìm các hàm $z(\zeta)$ và $\omega(\zeta)$ được quy về việc tìm phép biến hình đa giác lên nửa mặt phẳng. Đó là cơ sở của phương pháp mà vào khoảng năm 1920 N.N.Paolôpxki đã dùng để giải rất nhiều bài toán thấm có áp.

3.1.2. Công thức Schwartz – Christoffel

Giả sử trong mặt phẳng của biến số phức $z = x + iy$, chúng ta có một đa giác kín $A_1A_2 \dots A_n$; những góc tương ứng bằng $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ là những số thực thỏa mãn

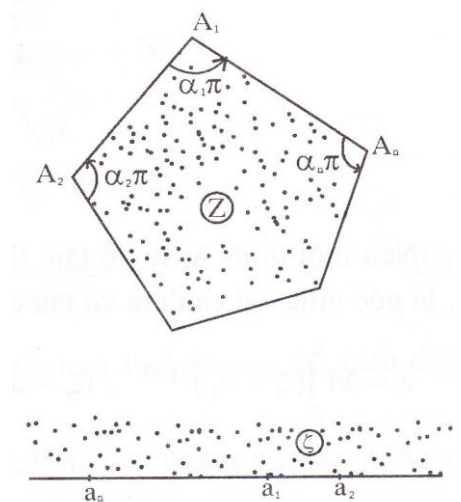
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2 \quad (3.2)$$

Theo lý thuyết các hàm giải tích đơn trị, đa giác này sẽ được biến hình bảo giác lên nửa mặt phẳng trên $\zeta = \xi + i\eta$ bởi công thức:

$$z = M \int_0^\zeta (\zeta - a_1)^{\alpha_1-1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n-1} d\zeta + N \quad (3.3)$$

Gọi là công thức Schwartz – Christoffel, trong đó $a_1, \dots, a_n$ là tọa độ của những điểm trên trục thực của nửa mặt phẳng ζ ứng với các đỉnh của đa giác, M và N là những hằng số phức. Ta có thể chọn tùy ý 3 điểm a_i , sau đó thì các số a_i và các hằng số M, N được xác định duy nhất.

Nếu một điểm a_i ra vô tận, chẳng hạn $a_n = \infty$, thì công thức cũng như trên



Hình 3.2

nhưng bỏ đi nhân thức tương ứng:

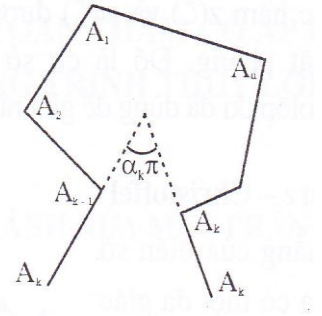
$$z = M \int_0^{\zeta} (\zeta - a_1)^{\alpha_1-1} \dots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} d\zeta + N$$

Khi ấy thì số α_n được tính bằng công thức (3.2):

$$\alpha_n = n - 2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})$$

Nếu một đỉnh A_k ra vô tận, thì công thức cũng như trên, nhưng phải lấy α_k là góc giữa hai cạnh ra vô tận đối dấu:

$$z = M \int_0^{\zeta} (\zeta - a_1)^{\alpha_1-1} \dots (\zeta - a_{k-1})^{\alpha_{k-1}-1} (\zeta - a_k)^{\alpha_k-1} (\zeta - a_{k+1})^{\alpha_{k+1}-1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n-1} d\zeta + N$$

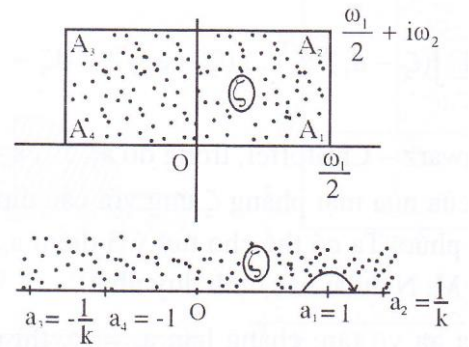


Hình 3.2'

3.1.3. Biến hình chữ nhật thành nửa mặt phẳng:

Ta hãy biến bảo giác chữ nhật có cạnh là ω_1 và ω_2 như trong hình 3.3 lên nửa mặt phẳng trên ζ .

Ta có thể cho trước $a_1=1, a_4=-1$ và $\zeta(0)=0$. Khi ấy vì lí do đối xứng, các điểm a_2 và a_3 sẽ là đối xứng nhau qua điểm gốc và ta đặt $a_2 = \frac{1}{k}, a_3 = -\frac{1}{k}$, k sẽ được xác



Hình 3.3

định sau ($k < 1$). Ở đây $\alpha_i = \frac{1}{2}$ ($i=1,2,3,4$). Hàm thực hiện phép biến hình có dạng

$$z = M' \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - 1) \left(\zeta^2 - \frac{1}{k^2} \right)}} + N'$$

Vì $z(0) = 0$ nên $N' = 0$. Gọi $M = M'k$, ta có thể viết

$$z = M \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (3.4)$$

Tích phân ở (3.4) gọi là tích phân elliptic loại 1 và không thể biểu diễn được qua các hàm sơ cấp.

Để xác định được các hằng số M và k , ta sử dụng các tương ứng $a_1 \rightarrow A_1$ và $a_2 \rightarrow A_2$. Trước hết ta có:

$$\frac{\omega_1}{2} = M \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (3.5)$$

Tiếp đó là

$$\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 = M \int_0^{\frac{1}{k}} \dots = \int_0^1 \dots + M \int_1^{\frac{1}{k}} \dots = \frac{\omega_1}{2} + iM \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (3.6)$$

(ở đây ta lấy $\sqrt{1-\zeta^2} = -i\sqrt{\zeta^2-1}$ vì ta phải vòng điểm $\zeta=1$ theo chiều âm như chỉ ở hình 3.3). So sánh (3.5) và (3.6) ta có:

$$\omega_2 = M \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (3.7)$$

Chia (3.5) cho (3.7), hằng số M sẽ được giản ước và ta nhận được phương trình liên hệ k với tỉ số $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Như vậy k chỉ phụ thuộc vào tỉ số giữa các cạnh, biết tỉ số đó ta có thể dùng bảng tính để tính k . Nếu đã biết k ta sẽ tính M từ (3.5):

$$M = \frac{\omega_1}{2K} \quad (3.8)$$

Với K là tích phân xác định

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (3.9)$$

K được gọi là tích phân elliptic đầy đủ, nó phụ thuộc vào số k được gọi là môđun của tích phân elliptic. Vì k luôn luôn bé thua 1, nên bao giờ cũng có một góc α để cho $K = \sin \alpha$ và thường người ta cho bảng tính K theo α . Số $k' = \sqrt{1-k^2} = \cos \alpha$ được gọi là môđun bù. Tích phân ở (3.7) được kí hiệu là K' và với phép biến đổi biến số

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}\zeta^2}$$

sẽ thành

$$K' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} = K(k') \quad (3.10)$$

K' được gọi là tích phân elliptic bù đầy đủ. Ta có:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{K'}{2K} \quad (3.11)$$

Thường người ta cho bảng liên hệ giữa α và $\log q = -\pi \frac{K'}{K}$. Khi biết tỉ số các cạnh của hình chữ nhật, ta có thể tìm $\frac{K'}{K}$ và do đó có $\log q$. Với giá trị $\log q$ đã biết, từ bảng ta tìm được α tương ứng, và sau đó cũng từ bảng ta tìm giá trị của K . Biết K và ω_1 ta tính được M theo (3.8).

Với những kí hiệu đã đưa vào, phép biến hình đang xét (3.4) được viết là:

$$z = \frac{\omega_1}{2K} = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (3.12)$$

Nếu bây giờ ta làm phép thay đổi biến số tích phân: $\zeta = \sin \varphi \Rightarrow \varphi = \arcsin \zeta$, thì tích phân cuối cùng sẽ trở thành

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.13)$$

Đó là dạng lượng giác của tích phân elliptic. Đối với tích phân ấy người ta thành lập bảng chi tiết. Đại lượng φ được gọi là biên độ của $F(\varphi, k)$.

Khi $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có tích phân đầy đủ:

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Với kí hiệu (3.13), phép biến hình (3.12) trở thành

$$z = \frac{\omega_1}{2K} = F(\arcsin \zeta, k) \quad (3.14)$$

Nếu ta gọi hàm ngược của hàm $u = F(\arcsin \zeta, k)$ là $\zeta = \operatorname{sn}(u, k)$ thì (3.12) cũng có thể viết

$$\zeta = \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\omega_1} z, k\right) \quad (3.15)$$

3.1.4. Các hàm Jacobi

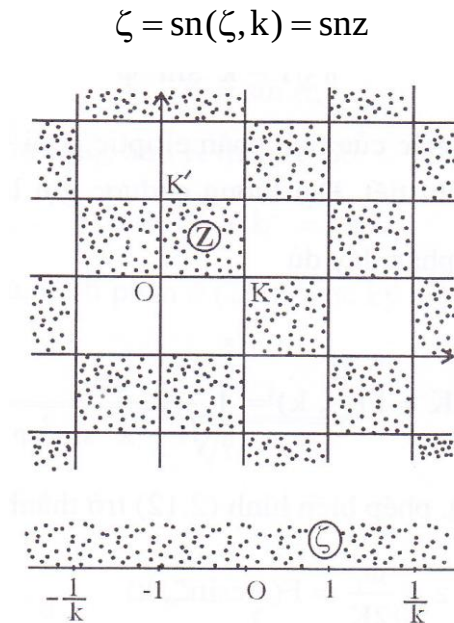
Như trên đã nói, hàm ngược của tích phân elliptic

$$z = F(\arcsin \zeta, k) = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}$$

là hàm $\zeta = \operatorname{sn}(z, k)$ được gọi là hàm Jacobi với môđun k , và cũng được viết tắt là $\zeta = \operatorname{sn} z$, nếu k là cố định. Nó ứng với (3.12) khi $\omega_1 = 2K$, và theo (3.11) $\omega_2 = K'$. Vậy nó biến lên nửa mặt phẳng trên ζ hình chữ nhật có cạnh $2K$ và K' , và ta có:

$$\operatorname{sn}(K) = \operatorname{sn}(K, k) = 1, \quad \operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{sn}(iK') = \infty \quad (3.16)$$

Theo nguyên lý đối xứng hàm $\text{sn}z$ có thể thác triển và có thể tiếp tục ra toàn mặt phẳng z để trở thành một hàm phân hình trên toàn mặt phẳng (hình 3.4):



Hình 3.4

Hàm phân hình này là hàm tuần hoàn kép có hai chu kỳ: $4K$ và $2iK'$. Với n_1 và n_2 nguyên, ta có

$$\text{sn}(z + 4n_1K + 2n_2iK') = \text{sn}z \quad (3.17)$$

Đồng thời nó cũng là một hàm lẻ: $\text{sn}(-z) = -\text{sn}z$

Hàm $\text{sn}z$ có khai triển lượng giác

$$\text{sn}z = \frac{\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi z}{2K}}{\text{sh}(2m+1)\frac{\pi K'}{2K}} \quad (3.18)$$

Cùng với hàm sn người ta còn xét các hàm

$$\text{cn}z = \sqrt{1 - \sin^2 z}, \quad \text{dn}z = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} \quad (3.19)$$

cũng có những tính chất tương tự và gọi là các hàm elliptic của Jacobi. Nếu $k = 0$ thì $\text{sn}z$ trở thành $\sin z$, $\text{cn}z$ thành $\cos z$ và $\text{dn}z$ thành hằng số 1.

Đối với các hàm Jacobi, ta còn có các công thức sau đây:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{cn} z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{dn} z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(z+w) &= \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w + \operatorname{sn} w \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 w} \\ \operatorname{cn}(z+w) &= \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} w - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} w \operatorname{dn} z \operatorname{dn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 w} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\operatorname{dn}(z+w) = \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{dn} w - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} w \operatorname{cn} z \operatorname{cn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 w}$$

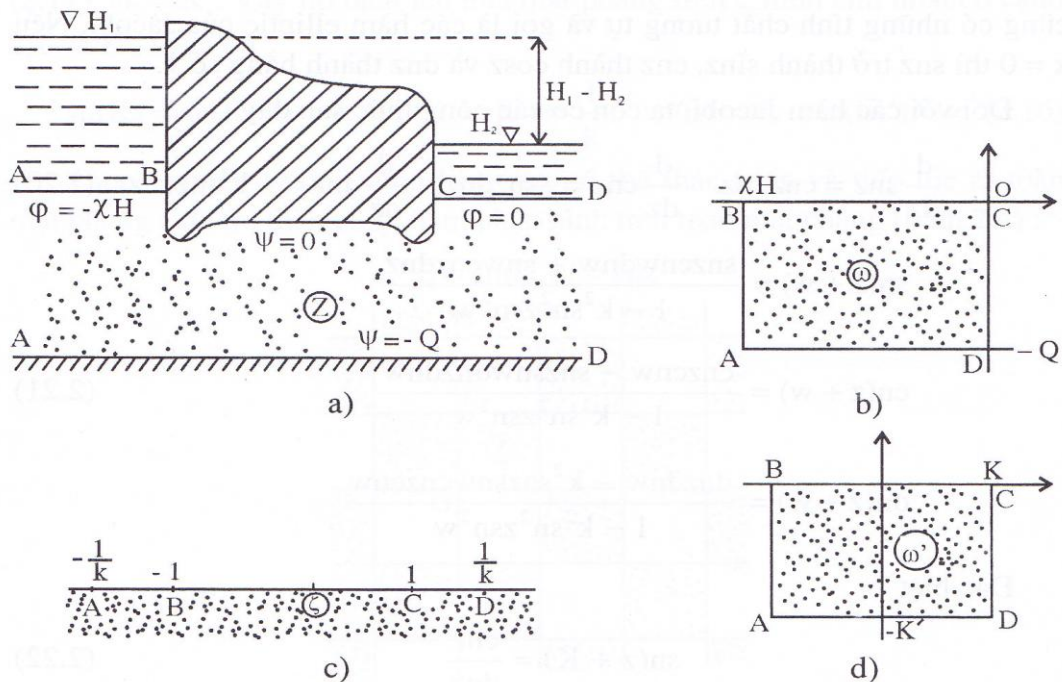
Đặc biệt

$$\operatorname{sn}(z+K) = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z} \quad (3.22)$$

3.2. THẨM DƯỚI CÔNG TRÌNH THỦY LỢI

3.2.1. Hình chữ nhật cơ sở của bài toán thẩm có áp

Chúng ta hãy xét bài toán thẩm dưới công trình thủy lợi như hình vẽ dưới đây (hình 3.5a)



Hình 3.5

Ở đây để khỏi lẫn với môđun k , ta gọi hệ số là χ . Ta gọi $H = H_1 - H_2$ là hiệu số các mực nước H_1, H_2 ở thượng lưu và hạ lưu, Q là tổng lưu lượng nước thấm (tính theo đơn vị bề dày), từ thượng lưu sang hạ lưu mà ta sẽ phải tính. Hàm thế φ là hằng số trên AB và CD , hàm dòng ψ là hằng số trên BC và AD . Ta có

$$\psi_{BC} - \psi_{AD} = Q$$

$$\varphi_{AB} - \varphi_{CD} = -\chi(H_1 - H_2) = -\chi H$$

Vì các hàm φ và ψ có thể chọn sai kém một hằng số, cho nên ta có thể lấy điều kiện biên như sau:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{trên } CD \\ -\chi H & \text{trên } AD \end{cases}, \quad \psi = \begin{cases} 0 & \text{trên } BC \\ -Q & \text{trên } AD \end{cases}$$

Với sự lựa chọn ấy miền thế vị đã được vẽ trên mặt phẳng ω : đó là hình chữ nhật có các cạnh bằng χH và Q , được gọi là hình chữ nhật cơ sở của bài toán thấm (hình 3.5b).

Giả sử ta đã biến bảo giác miền thấm z lên nửa mặt phẳng dưới ζ , với sự tương ứng như trong hình 3.5c. Tham số k được xác định bởi kích thước của miền thấm. Với số k ấy làm môđun, ta sẽ lập hàm số $\omega' = F(\arcsin \zeta, k)$. Hàm này sẽ biến nửa mặt phẳng dưới ζ lên hình chữ nhật ω' có cạnh bằng $2K$ và K' như trong hình 3.5d. Quan hệ giữa ω và ω' là bảo giác nên hai hình chữ nhật là đồng dạng: $\frac{Q}{\chi H} = \frac{K'}{2K}$. Từ đó rút ra

$$Q = \frac{\chi H K'(k)}{2K(k)} \quad (3.23)$$

Vậy là ta tính được lưu lượng nếu đã tính được môđun k

Theo như hình 3.5, quan hệ giữa ω và ω' là:

$$\omega' = \frac{2K}{\chi H} \omega + K$$

Cho nên quan hệ giữa ζ và ω là

$$\omega = \frac{\chi H}{2K} [F(\arcsin \zeta, k) - K] \quad (3.24)$$

và ngược lại

$$\zeta = \operatorname{sn} \left(\frac{2K\omega}{\chi H} + K \right) \quad (3.25)$$

Hay

$$\zeta = \operatorname{sn}(u + K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \quad \text{với } u = \frac{2K\omega}{\chi H} \quad (3.26)$$

Nếu đáy tựa không có, tức là coi như đáy ở vô tận thì hình chữ nhật cơ sở sẽ trở thành nửa giải, số $k = 0$ và $K = \frac{\pi}{2}$ hàm sn trở thành hàm $\sin$ và (3.25) sẽ trở thành

$$\zeta = \cos \frac{\pi \omega}{\chi H} \quad (3.27)$$

3.2.2. Hộ đề phẳng trên lớp thấm sâu vô hạn

Giả sử cho trước hiệu áp lực thủy động là H và độ dài BC = 2ℓ (hình 3.6a)

Ta có thể cho

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\chi H}{2} \text{ trên AB} \\ \frac{\chi H}{2} \text{ trên CA} \end{cases} ; \quad \psi = 0 \text{ trên BC}$$

Thế thì miền ω là nửa giải như trong hình 3.6b, có bề rộng là χH . Trước hết ta hãy biến miền z và miền ω lên nửa mặt phẳng ζ (hình 3.6c). Ta có:

$$z = \ell \zeta$$

và theo (3.27):

$$\omega = -\frac{\chi H}{\pi} \arccos \zeta$$

Loại ζ ra ta có hàm thế vị phức dưới dạng:

$$\omega = -\frac{\chi H}{\pi} \arccos \frac{z}{\ell} \quad (3.28)$$

Vận tốc thấm tại mỗi điểm của miền thấm sẽ được cho bởi

$$\overline{W} = u - iv = \frac{d\omega}{dz} = -\frac{\chi H \ell}{2} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 - z^2}} \quad (3.29)$$

Vận tốc thấm triệt tiêu tại vô tận : $z = \infty$ và trở thành vô cùng tại B và C:

$$z = \pm \ell$$

Để tìm các đường dòng và đường thế ta viết

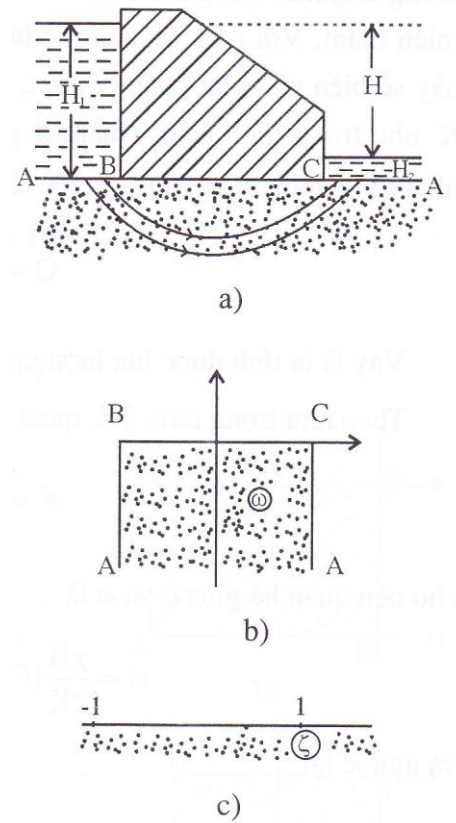
$$z = x + iy = \ell \cos \frac{\pi}{\chi H} (\varphi + i\psi) = \ell \cos \frac{\pi}{\chi H} \varphi \operatorname{ch} \frac{\pi}{\chi H} \psi + i \ell \sin \frac{\pi}{\chi H} \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi}{\chi H} \psi$$

Tách phần thực và phần ảo:

$$\begin{cases} x = \ell \cos \frac{\pi}{\chi H} \varphi \operatorname{ch} \frac{\pi}{\chi H} \psi \\ y = \ell \sin \frac{\pi}{\chi H} \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi}{\chi H} \psi \end{cases} \quad (3.30)$$

Các đường dòng ứng với $\psi = \psi_0$ hằng số. Muốn có phương trình đường dòng ứng với $\psi = \psi_0$, thì ta loại φ ở hai phương trình (3.30). Ta được

$$\frac{x^2}{\ell^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{\chi H} \psi_0} + \frac{y^2}{\ell^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{\chi H} \psi_0} = 1 \quad (3.31)$$



Hình 3.6

Đó là phương trình của một elip , có các trục là $a = \ell \operatorname{ch} \frac{\pi}{\chi H} \psi_0$ và

$b = \ell \operatorname{sh} \frac{\pi}{\chi H} \psi_0$. Ta có:

$$a^2 - b^2 = \ell^2$$

Vậy đó là một elip có tiêu điểm tại A và B : $z = \pm \ell$. Thay đổi ψ_0 ta sẽ có một họ elip đồng tiêu (hình 3.6).

Cũng vậy đường thế ứng với $\varphi = \varphi_0$ ta sẽ có phương trình

$$\frac{x^2}{\ell^2 \cos^2 \frac{\pi}{\chi H} \varphi_0} - \frac{y^2}{\ell^2 \sin^2 \frac{\pi}{\chi H} \varphi_0} = 1 \quad (3.32)$$

Đó là phương trình của một hypebol , có các trục là $a = \ell \cos \frac{\pi}{\chi H} \varphi_0$ và

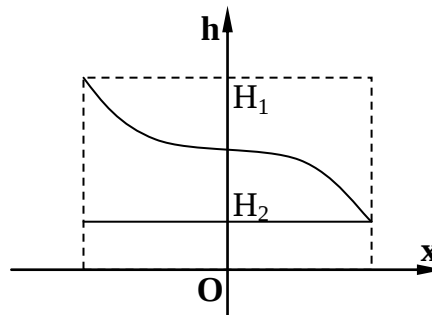
$b = \ell \sin \frac{\pi}{\chi H} \varphi_0$. Ở đây vì $a^2 + b^2 = \ell^2$ ta có những hypebol đồng tiêu với các

elip trên. Rõ ràng hai họ elip và hypebol này là trực giao với nhau.

Bây giờ ta hãy tính áp lực trên đáy công trình AB. Ta có:

$$h(x, 0) = -\frac{\varphi(x, 0)}{\chi} + C, \quad -\ell < x < \ell$$

nhưng trên AB ta có $\psi = 0$ cho nên $\omega = \varphi$, tức là $\varphi(x, 0) = \omega(x, 0)$. Do đó



Hình 3.7

$$h(x,0) = \frac{H}{\pi} \arccos \frac{x}{\ell} + C = \frac{H_1 - H_2}{\pi} \arccos \frac{x}{\ell} + C$$

Tại $x = -\ell$ thì $h(-\ell, 0) = H_1$

Do đó

$$\frac{H_1 - H_2}{\pi} \arccos(-1) + C = H_1$$

hay $H_1 - H_2 + C = H_1$, hay $C = H_2$. Vậy

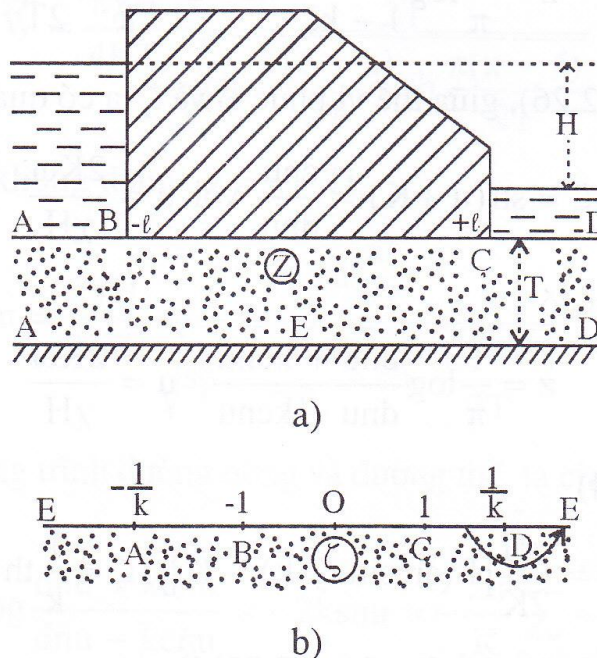
$$h(x,0) = \frac{H_1 - H_2}{\pi} \arccos \frac{x}{\ell} + H_2 \quad (3.33)$$

Biểu đồ của áp lực trên đáy được vẽ ở hình 3.7

3.2.3. Hộ đề phẳng trên lớp thấm hữu hạn

Trước hết ta hãy biến miền thấm z lên nửa mặt phẳng ζ

Muốn thế ta coi nó như là một tứ giác có các đỉnh A, B, C, D với các góc $0, \pi, \pi, 0$



Hình 3.8

Công thức Schwartz – Christoffel cho

$$z = M_1 \int_0^{\zeta} \left(\zeta^2 - \frac{1}{k^2} \right)^{-1} d\zeta = M \int_0^{\zeta} \frac{k^2 d\zeta}{1 - k^2 \zeta^2}$$

Với $M = -M_1$. Cuối cùng ta có:

$$z = \frac{M}{2k} \log \frac{1 + k\zeta}{1 - k\zeta} \quad (3.34)$$

Tại $\zeta = 1$ thì $z = \ell$, trong đó 2ℓ là bề rộng BC, cho nên ta có

$$z = \frac{M}{2k} \log \frac{1 + k}{1 - k} \quad (3.35)$$

Bây giờ ta quay quanh điểm D $\left(\zeta = \frac{1}{k} \right)$ theo chiều dương từ đoạn CD sang đoạn DE (hình 3.8), thì $\log(1 + k\zeta)$ không đổi,

$\log(1 - k\zeta) = \log\left(\zeta - \frac{1}{k}\right) + \log(-k)$ sẽ tăng lên πi , trong lúc đó thì z sẽ biến thiên $-\pi i$, trong đó T là độ sâu của miền thâm. Vậy ta có

$$-\pi i = \frac{M}{2k} (-\pi i) \text{ hay } M = \frac{2kT}{\pi}$$

Do đó, từ (3.35) ta rút ra giá trị cần biết của k :

$$\ell = \frac{T}{\pi} \log \frac{1 + k}{1 - k} \text{ hay } k = \text{th} \frac{\pi \ell}{2T} \quad (3.36)$$

Phép biến hình đang tìm sẽ là

$$z = \frac{T}{\pi} \log \frac{1 + k\zeta}{1 - k\zeta} \text{ hay } \zeta = \frac{1}{k} \text{th} \frac{\pi z}{2T} \quad (3.37)$$

Mặt khác theo (3.26), giữa thê vị phức ω và ζ ta có quan hệ

$$\zeta = \text{sn}(u + K) = \frac{\text{cnu}}{\text{dnu}} \text{ với } u = \frac{2K\omega}{\chi H}$$

cho nên cuối cùng ta có

$$z = \frac{T}{\pi} \log \frac{\text{dnu} + k\text{cnu}}{\text{dnu} - k\text{cnu}}, \quad u = \frac{2K\omega}{\chi H} \quad (3.38)$$

Hoặc ngược lại (3.24)

$$\omega = \frac{\chi H}{2K} \left[F(\arcsin \zeta, k) \right], \zeta = \frac{1}{k} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2T} \quad (3.39)$$

Lưu lượng trên đơn vị bề dày theo (3.23) là

$$Q = \frac{\chi H K'(k)}{2K(k)}, k = \frac{\operatorname{th} \pi \ell}{2T} \quad (3.40)$$

Áp lực theo công trình là:

$$h = -\frac{\phi}{\chi} = \frac{H}{2K} \left[K - F \left(\arcsin \frac{\operatorname{th} \frac{\pi x}{2T}}{\operatorname{th} \frac{\pi \ell}{2T}}, k \right) \right] \quad (3.41)$$

Vận tốc là:

$$\overline{W} = u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega}{d\zeta} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\pi \chi H}{4KT} \sqrt{\frac{1 - k^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} \quad (3.42)$$

hay theo (3.37):

$$\overline{W} = \frac{\pi \chi H}{4KT} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \ell}{2T}}{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi(\ell + z)}{2T} \operatorname{sh} \frac{\pi(\ell - z)}{2T}}} \quad (3.43)$$

Đặc biệt dọc theo đáy hạ lưu: $z = x > \ell$,

$$\overline{W} = \frac{\pi \chi H}{4KT} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \ell}{2T}}{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi(x + \ell)}{2T} \operatorname{sh} \frac{\pi(x - \ell)}{2T}}} \quad (3.44)$$

và dọc theo nền không thấm: $z = x - Ti$,

$$u = \frac{\pi \chi H}{4KT} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \ell}{2T}}{\sqrt{\operatorname{sh} \frac{\pi(x + \ell)}{2T} \operatorname{ch} \frac{\pi(x - \ell)}{2T}}} \quad (3.45)$$

Để tìm phương trình đường dòng và đường thế, ta chú ý rằng theo (3.18):

$$\frac{d}{du} \log \frac{dnu + kcnu}{dnu - kcnu} = -2ksnu = -\frac{2\pi}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1) \frac{\pi u}{2K}}{\operatorname{sh}(2m+1) \frac{\pi K'}{2K}}$$

cho nên theo (3.38)

$$\frac{d}{du} z = -\frac{2\pi}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1) \frac{\pi u}{2K}}{\operatorname{sh}(2m+1) \frac{\pi K'}{2K}}$$

Do đó

$$z = \frac{4T}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1) \frac{\pi u}{2K}}{(2m+1) \operatorname{sh}(2m+1) \frac{\pi K'}{2K}} \quad (3.46)$$

Ta thay u bằng giá trị ở (3.38) và đặt

$$\frac{\omega}{\chi H} = \frac{\varphi + i\psi}{\chi H} = -\frac{h + iq}{H} = -(\bar{h} - i\bar{q}), \alpha = \frac{\pi K'}{2K}$$

Rồi dùng khai triển $z = x + iy$ và

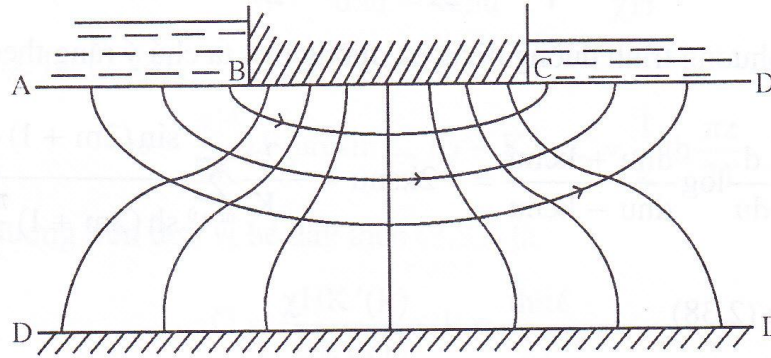
$$\cos \cos \pi(\bar{h} - i\bar{q}) = \cos \pi \bar{h} \operatorname{ch} \pi \bar{q} - i \sin \pi \bar{h} \operatorname{sh} \pi \bar{q}$$

Ta sẽ có

$$\begin{aligned} x &= \frac{4T}{\pi} \left(\frac{\cos \pi \bar{h} \operatorname{ch} \pi \bar{q}}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{\cos 3\pi \bar{h} \operatorname{ch} 3\pi \bar{q}}{3 \operatorname{sh} 3\alpha} + \dots \right) \\ y &= -\frac{4T}{\pi} \left(\frac{\sin \pi \bar{h} \operatorname{sh} \pi \bar{q}}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{\sin 3\pi \bar{h} \operatorname{sh} 3\pi \bar{q}}{3 \operatorname{sh} 3\alpha} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Từ những công thức này ta có thể vẽ các đường thẳng $\bar{h} = -\frac{\varphi}{\chi H} = \text{const}$ và

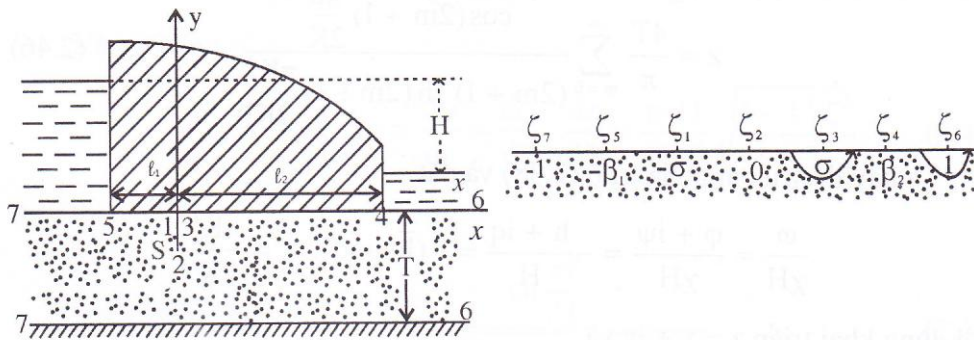
đường dòng $\bar{q} = -\frac{\psi}{\chi H} = \text{const}$ (hình 3.9).



Hình 3.9

3.2.4. Hộ đề phẳng trên lớp thâm hữu hạn có vách cù

Ta giả thiết vách cù cách hai đầu là ℓ_1 và ℓ_2 : $\ell_1 + \ell_2 = 2\ell$ và có độ dài là S , độ sâu của miền thâm là T (hình 3.10)



Hình 3.10

Giả sử ta đã biến miền thâm z lên nửa mặt phẳng ζ , sao cho các điểm: 2, 6, 7 chuyển thành các điểm:

$$\zeta_2 = 0, \zeta_6 = 1, \zeta_7 = -1$$

Vì lí do đối xứng các điểm 1, 3 sẽ chuyển về những điểm đối xứng đối với gốc:

$$\zeta_1 = -\sigma, \zeta_3 = \sigma$$

Sau đó ta gọi ảnh những điểm 4 và 5 là

$$\sigma_4 = \beta_2, \sigma_5 = -\beta_1$$

Về góc thì ta có $\alpha_6 = \alpha_7 = 0, \alpha_4 = \alpha_5 = \pi, \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \pi$. Phép biến hình có dạng

$$z = A \int_0^{\zeta} \frac{\zeta d\zeta}{(1-\zeta^2)\sqrt{\sigma^2-\zeta^2}} + Si$$

Ta thay đổi biến số $t = \sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}$ và đặt $\sigma' = \sqrt{1-\sigma^2}$ và được

$$z = -\frac{A}{\sigma'} \left(\arctan \frac{\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}}{\sigma'} - \arctan \frac{\sigma}{\sigma'} \right) + Si$$

Tại $\zeta = \sigma$, ta có $z = 0$, nên

$$0 = \frac{A}{\sigma'} \arctan \frac{\sigma}{\sigma'} + Si \quad (3.48)$$

do đó

$$z = -\frac{A}{\sigma'} \arctan \frac{\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}}{\sigma'} \quad (3.49)$$

Nếu ta chuyển sang đoạn $\zeta = \xi > \sigma$ bằng cách quay quanh điểm $\zeta = \sigma$ một góc π thì $\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}$ chuyển thành $i\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}$, tức là đối với đoạn $\xi > \sigma$ ta có:

$$z = -\frac{Ai}{\sigma'} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}}{\sigma'}$$

hay dưới dạng loga

$$z = -\frac{Ai}{2\sigma'} \log \frac{1 + \frac{\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}}{\sigma'}}{1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}}{\sigma'}} = -\frac{Ai}{2\sigma'} \log \frac{(\sqrt{1-\sigma^2} + \sqrt{\zeta^2 - \sigma^2})^2}{(1-\zeta)(1+\zeta)}$$

Đến điểm $\zeta = \zeta_6 = 1$, ta lại quay quanh điểm đây một góc π , $\log \frac{1}{1+\zeta}$ sẽ biến thiên $-\pi i$, tức là z sẽ biến thiên

$$-\frac{Ai}{2\sigma'}(-\pi i) = -\frac{A\pi}{2\sigma'}$$

Mặt khác xét trên miền thâm thì z biến thiên $-Ti$, nên ta có

$$-\frac{A\pi}{2\sigma'} = -Ti \text{ hay } -\frac{Ai}{\sigma'} = \frac{2T}{\pi} \quad (3.50)$$

Như vậy (3.49) sẽ thành

$$z = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}}{\sigma'} \quad (3.51)$$

Giải theo ζ ta có

$$\zeta = \pm \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2 \operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2T}}$$

trong đó ta lấy dấu $+$ hay $-$, tùy theo z ở bên phải hay bên trái của trục ảo.

Thay giá trị của $\frac{A}{\sigma'}$ từ (3.50) vào (3.48) ta sẽ có

$$\sigma = \sin \frac{\pi S}{2T}, \quad \sigma' = \cos \frac{\pi S}{2T} \quad (3.52)$$

và đối với ζ ta có

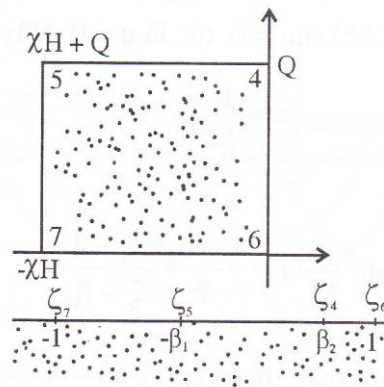
$$\zeta = \pm \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2T} + \tan^2 \frac{\pi S}{2T}} \quad (3.53)$$

Cho $z = -\ell_1$ và $z = +\ell_2$, với quy luật dấu như trên ta sẽ có

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi \ell_1}{2T} + \tan^2 \frac{\pi S}{2T}} \\ \beta_2 &= \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi \ell_2}{2T} + \tan^2 \frac{\pi S}{2T}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Theo mục 3.1 của chương này, bài toán thắm sẽ được giải quyết nếu ta biến được hình chữ nhật cơ bản của miền thế vị ω lên nửa mặt phẳng ζ , sao cho các đỉnh ứng với các điểm $\zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7$. Ta hãy viết công thức Schwartz – Christoffel dưới dạng vi phân

$$d\omega = M \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - \zeta_4)(\zeta - \zeta_5)(\zeta - \zeta_6)(\zeta - \zeta_7)}} = M \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - \beta_2)(\zeta + \beta_1)(\zeta^2 - 1)}}$$



Hình 3.11

Thay ζ ta đưa vào biến số mới u xác định bởi

$$\operatorname{sn}^2 u = \operatorname{sn}^2(u, k) = \frac{1 + \beta_2}{2} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta - \beta_2}, \quad k = \sqrt{\frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}} \quad (3.55)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}^2 u &= \operatorname{cn}^2(u, k) = 1 - \operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \beta_2}{2} \cdot \frac{\zeta + 1}{\zeta - \beta_2} \\ \operatorname{dn}^2 u &= \operatorname{dn}^2(u, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_1} \cdot \frac{\zeta + \beta_1}{\zeta - \beta_2} \end{aligned}$$

Lấy vi phân của $\operatorname{sn}^2 u$, theo (3.55) ta có

$$2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u du = \frac{1 + \beta_2}{2} \cdot \frac{1 - \beta_2}{(\zeta - \beta_2)^2} d\zeta$$

do đó

$$du = \frac{\sqrt{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}}{2} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-\beta_2)(\zeta+\beta_1)(\zeta^2-1)}} = \frac{\mu}{M} d\omega \quad (3.56)$$

$$\text{với} \quad \mu = \frac{1}{2} \sqrt{(1+\beta_1)(1+\beta_2)} \quad (3.57)$$

theo miền thế vị đã chọn như trong hình 2.11, thì khi $\zeta = \zeta_6 = 1$ thì $\omega = 0$, đồng thời theo (3.55) $\text{snu} = 0$, tức là $u = 0$. Vậy từ (3.56) ta rút ra

$$u = \frac{\mu}{M} \omega \quad (3.58)$$

và từ (3.55)

$$\text{sn}^2 \frac{\mu}{M} \omega = \frac{1+\beta_2}{2} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta-\beta_2} \quad (3.59)$$

Tại $\zeta = \zeta_4 = \beta_2$ thì một mặt theo (3.55), $\text{sn} \frac{\mu}{M} \omega = \infty$, tức là $\frac{\mu}{M} \omega = -iK'$, mặt khác $\omega = Qi$ (hình 3.11). Vậy

$$Q = -\frac{M}{\mu} K' \quad (3.60)$$

Tại $\zeta = \zeta_5 = -\beta$, thì một mặt theo (3.55), $\text{sn} \frac{\mu}{M} \omega = \frac{1}{k}$, tức là $\frac{\mu}{M} \omega = K - iK'$, mặt khác $\omega = -\chi H + Qi$. Vậy:

$$M = -\frac{\chi \mu H}{K} \quad (3.61)$$

Quan hệ giữa ω và ζ ở (3.59) trở thành

$$\text{sn}^2 \frac{K\omega}{\chi H} = \frac{1+\beta_2}{2} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta-\beta_2} \quad (3.62)$$

Đồng thời từ (3.60) và (3.61) ta suy ra công thức tính lưu lượng:

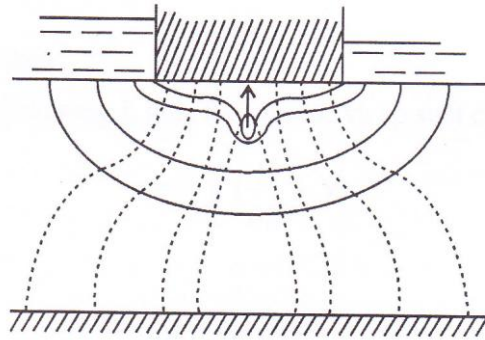
$$Q = \frac{\chi HK'}{K}$$

trong ấy K và K' ứng với môđun k ở (3.55).

Trong trường hợp đối xứng là: $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ (hình 3.12), thì ta có:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \cos \frac{\pi S}{2T} \sqrt{\text{th}^2 \frac{\pi \ell}{2T} + \tan^2 \frac{\pi S}{2T}}$$

và $k = \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}$



Hình 3.12

Với quan hệ như thế giữa k và β , thì ta có đẳng thức Landen

$$\frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{K'(\beta)}{2K(\beta)}$$

cho nên lưu lượng có thể viết

$$Q = \frac{\chi H K'(\beta)}{2K(\beta)}$$

Điều mà ta có thể thấy được bằng cách biến miền thấm lên nửa mặt phẳng dưới bằng phép biến đổi (3.53)

Chương 4

PHƯƠNG PHÁP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC TRONG BÀI TOÁN THẨM KHÔNG ÁP

Đặc trưng của chuyển động thẩm không áp là có mặt tự do (hay còn gọi là mặt bão hòa). So với chuyển động có áp, việc nghiên cứu các bài toán thẩm không áp phức tạp hơn nhiều vì trong trường hợp này có một phần biên giới của miền thẩm chưa biết. Đó chính là mặt tự do. Phương pháp giải các bài toán có áp là tìm hàm biến hình bảo giác miền thể vị phức lên miền thẩm. Trong các bài toán thẩm không áp phương pháp biến hình bảo giác trực tiếp như thế không còn dùng được nữa vì miền thẩm chưa xác định. Để khắc phục khó khăn đó người ta đưa ra các hàm phụ sao cho miền giá trị của nó hoàn toàn xác định. Sau đó ta tìm hàm biến hình bảo giác miền này lên miền thể vị phức. Thông qua mối liên hệ đó ta tìm được quan hệ giữa hàm thể vị phức và miền thẩm. Hơn thế nữa ta xác định được phương trình mặt tự do.

Dưới đây là **phương pháp hàm Giucovski** cho bài toán này

4.1. Hàm Giucovski

Ta thấy giữa thể vận tốc và áp suất có mối liên hệ như sau:

$$\varphi = -\chi \left(\frac{p}{\rho g} + y \right)$$

Từ đó suy ra

$$-\frac{\chi}{\rho g} p = \varphi + \chi y$$

Ta đặt

$$\theta_1 = \varphi + \chi y \quad (4.1)$$

Hàm θ_1 chỉ sai khác áp suất một hằng số nhân . Vì $\varphi(x, y)$ và y là các hàm điều hòa cho nên hàm θ_1 cũng là một hàm điều hòa (theo các biến x, y).
Rõ ràng hàm

$$\theta_2 = \psi - \chi x \quad (4.2)$$

là hàm điều hòa liên hợp với θ_1 . Do đó hàm

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \omega - i\chi z \quad (4.3)$$

là một hàm giải tích.

Hàm θ và các hàm sai khác θ một hằng số nhân gọi là *hàm Giucovski*

Ta xem xét đưa ra hàm Giucovski được lợi gì?

Vấn đề ta đang quan tâm là các mặt tự do . Như đã biết điều kiện trên biên mặt tự do có dạng

$$\varphi + \chi y = \text{const}$$

Bởi vậy điều kiện trên biên của hàm Giucovski trên mặt tự do có dạng

$$\text{Re } \theta = \theta_1 = \text{const} \quad (4.4)$$

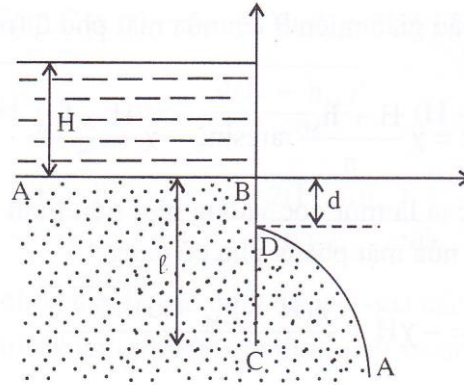
Nhờ hệ thức (4.4) mà trong nhiều trường hợp miền giá trị của hàm Giucovski hoàn toàn xác định.

Dưới đây ta đưa một vài thí dụ về hàm Giucovski.

4.2. Vách cừ Giucovski

Giả sử vách bê tông thẳng đứng ngập sâu trong đất với chiều sâu ℓ . Phía thượng lưu có nước với chiều sâu H . Nước thấm quanh cọc cừ và dâng lên sau cọc cừ đến độ cao cách mặt đất một khoảng bằng d và tạo thành mặt tự do (hình 4.1). Trước hết ta xét cụ thể điều kiện biên trên mặt tự do . Trên đó áp suất bằng áp suất không khí và thường xem bằng không . Nếu có áp lực mao dẫn thì áp suất đó bằng $-\rho g h_M$, với h_M là độ cao nước dâng trong đất do mao dẫn. Khi đó điều kiện biên trên mặt tự do là

$$\theta_1 = \varphi + \chi y = \chi h_M \quad (4.5)$$



Hình 4.1

Trên biên AB là biên thấm ta có

$$\varphi = -\chi H \quad (4.6)$$

Trên biên BC là biên không thấm ta đặt $\psi = 0$

$$(4.7)$$

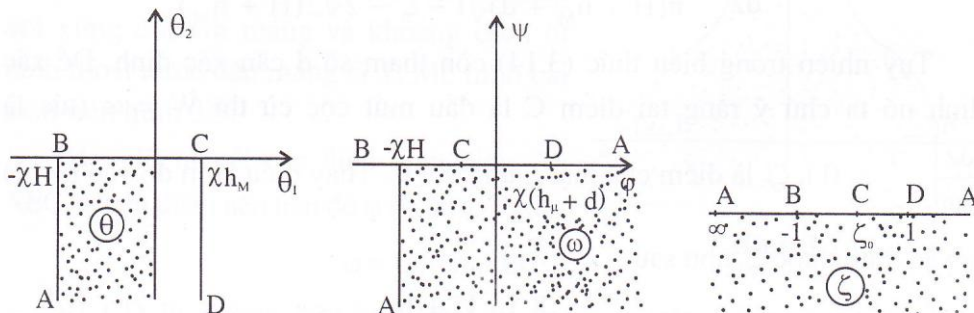
Trên đoạn AB ta có $\varphi = -\chi H$ và $y = 0$, nên điều kiện đối với hàm Giucovski trên AB có dạng

$$\theta_1 = \varphi + \chi y = -\chi H \quad (4.8)$$

Vì dọc theo BCD thì $\psi = 0$, $x = 0$ nên trên đó ta có

$$\theta_2 = \psi - \chi x = 0 \quad (4.9)$$

Nhờ các điều kiện biên (4.5), (4.8) và (4.9) miền của hàm Giucovski trên mặt phẳng θ là hoàn toàn xác định. Đó là nửa giải trên hình vẽ 4.2.



Hình 4.2

Phép biến hình bảo giác miền θ lên nửa mặt phụ ζ (như trên hình vẽ 4.2) có dạng

$$\theta = \omega - iz = \chi \frac{H + h_M}{\pi} \arcsin \zeta - \chi \frac{H - h_M}{2} \quad (4.10)$$

Miền thê vị phức ω là một góc vuông như trong hình 4.2. Phép biến hình bảo giác miền này là nửa mặt phẳng phụ có dạng

$$\omega = -\chi H + \frac{\chi(H + h_M + d)\sqrt{\zeta + 1}}{\sqrt{2}} \quad (4.11)$$

Việc tìm ra các biểu thức (4.10) và (4.11) dựa vào các phép biến hình bảo giác của các hàm sơ cấp. Khử ω từ (4.10) và (4.11) ta có phương trình xác định z như sau:

$$iz = \frac{1}{\sqrt{2}}(H + h_M + d)\sqrt{\zeta + 1} - \frac{H + h_M}{2} - \frac{H + h_M}{\pi} \arcsin \zeta \quad (4.12)$$

Lấy đạo hàm các phương trình (4.10) và (4.11) theo ζ ta có

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\zeta} - i\chi \frac{dz}{d\zeta} &= \chi \frac{H + h_M}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \\ \frac{d\omega}{d\zeta} &= \frac{\chi(H + h_M + d)}{2\sqrt{2}(\zeta + 1)} \end{aligned}$$

Chia từng vế các phương trình ta có:

$$1 - i\chi \frac{dz}{d\omega} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{1 - \zeta}} \cdot \frac{H + h_M}{H + h_M + d} \quad (4.13)$$

Hệ thức (4.13) cho phép ta xác định được vận tốc thấm:

$$\overline{W} = \frac{d\omega}{dz} = \frac{i\chi\pi(H + h_M + d)\sqrt{1 - \zeta}}{\pi(H + h_M + d)\sqrt{1 - \zeta} - 2\sqrt{2}(H + h_M)} \quad (4.14)$$

Tuy nhiên trong biểu thức (4.14) có tham số d cần xác định. Để xác định nó ta chú ý rằng tại điểm C là đầu mút cọc cừ thì $W = \infty$, tức là $\left. \frac{dz}{d\omega} \right|_{\zeta=\zeta_0} = 0$,

ζ_0 là điểm của ζ ứng với C. Thay điều kiện đó vào (4.13) ta xác định được ζ_0 như sau:

$$\zeta_0 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{H + h_M}{H + h_M + d} \right)^2 \quad (4.15)$$

Mặt khác, tại điểm C ta có $z = -i\ell$. Vì vậy từ (4.15) và (4.12) ta suy ra

$$\ell = \sqrt{(H + h_M + d)^2 - \frac{4(H + h_M)^2}{\pi^2}} - (H + h_M) + \frac{2(H + h_M)}{\pi} \arcsin \frac{2(H + h_M)}{\pi(H + h_M + d)} \quad (4.16)$$

Hệ thức (4.16) cho phép ta xác định được d qua các đại lượng đã biết.

Bây giờ ta đi tìm phương trình xác định mặt tự do. Từ (4.10) và (4.11) ta có

$$\omega = -\chi \left[H - (H + h_M + d) \cos \frac{\pi(\theta - \chi h_M)}{2\chi(H + h_M)} \right] \quad (4.17)$$

Dọc theo mặt tự do ta có

$$\varphi + \chi y = \chi h_M, \quad \psi = 0, \quad \theta = -(i\chi x + \chi h_M), \quad \omega = -\chi y + \chi h_M.$$

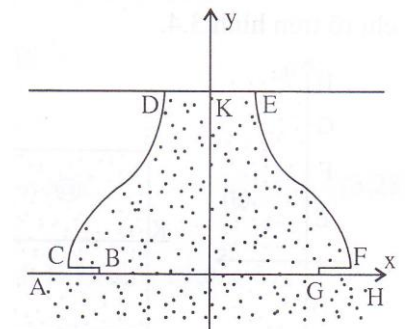
Thay những điều kiện trên vào (4.17) ta tìm được phương trình xác định mặt tự do như sau:

$$y = H + h_M - (H + h_M + d) \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2(H + h_M)} \quad (4.18)$$

Đó là phương trình của một đường dây xích cô định tại điểm $z = -id$.

4.3. Thấm qua máng lưới có lọc đối xứng

Giả sử máng có dạng đơn giản là một đoạn thẳng nằm ngang dài BG. Nói một cách khác là độ cao mực nước trong kênh không đáng kể. Có hai rãnh thoát nước nằm ngang đối xứng đối với máng



và khoảng cách từ rãnh thoát nước đến máng là T (hình 4.3)

Bây giờ ta xét các điều kiện biên . Vì ABC là biên thấm nên trên đó $\varphi = \text{const}$.

Ta đặt $\varphi = 0$ trên ABC . (4.19)

Vì CD là đường bão hòa (mặt tự do) nên trên đó có hai điều kiện $\psi = \text{const}$ và $\varphi + \chi y = \text{const}$. Ta đặt

$$\psi = -\frac{Q}{2} \text{ và } \varphi + \chi y = 0 \text{ trên } DC \quad (4.20)$$

Biên DE là biên thấm nên trên đó $\varphi = \text{const}$. Theo (4.20), tại điểm D ta có $\varphi + \chi T = 0$. Vậy ta có

$$\varphi = -\chi T \text{ trên } DE \quad (4.21)$$

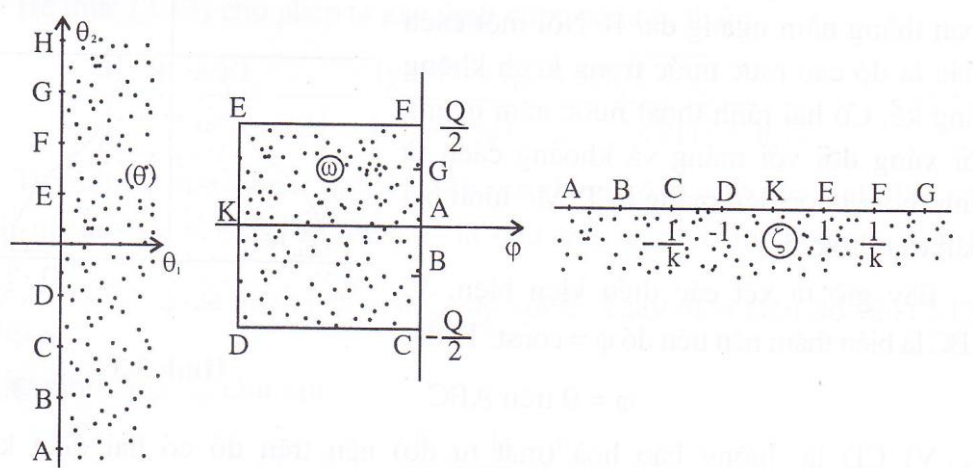
Biên EF là đường bão hòa, vậy $\psi = \text{const}$ và $\varphi + \chi y = \text{const}$. Vì trên DC ta đã đặt $\psi = -\frac{Q}{2}$ và hiệu số của hàm dòng ψ giữa EF và CD phải bằng Q nên trên DC $\psi = \frac{Q}{2}$. Vì tại E ta có $\varphi + \chi y = 0$ (suy từ (4.21)) thì trên toàn EF ta có $\varphi + \chi y = 0$. Vậy các điều kiện trên biên EF là

$$\psi = \frac{Q}{2} \text{ và } \varphi + \chi y = 0 \quad (4.22)$$

Do FGH là biên thấm và trên đó $y = 0$ thì theo (4.22) tại điểm F $\varphi = 0$. Do đó ta có

$$\varphi = 0 \text{ trên } FGH \quad (4.23)$$

Do các điều kiện biên từ (4.19) đến (4.23) dễ thấy miền thế vị phức là một hình chữ nhật, còn miền của hàm Gourski là nửa mặt phẳng (vì trên mọi biên ta đều có $\theta_1 = \varphi + \chi y = 0$) Các miền của ω , θ và nửa mặt phẳng phụ ζ được chỉ rõ trên hình 4.4.



Hình 4.4

Trước hết ta tìm quan hệ giữa θ và ζ . Đó là phép biến hình nửa mặt phẳng lên nửa mặt phẳng giữ nguyên điểm vô tận. Cho nên hàm biến hình có dạng

$$\theta = a\zeta + b \quad (4.24)$$

Các hệ số trong (4.24) ta sẽ xác định như sau. Vì miền ω là một hình chữ nhật, cho nên theo kết quả đã biết ở chương 3, hàm biến hình có dạng quen biết

$$\omega = \frac{Q_i}{2K} \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - \chi T \quad (4.25)$$

trong đó số k sẽ được xác định sau.

Tương tự như ở chương 3, ta có mối quan hệ sau đây đối với lưu lượng thấm:

$$Q = \frac{2\chi TK}{K'} = \frac{2\chi TK(k)}{K'(k)} \quad (4.26)$$

Do biểu thức của hàm Giucovski ta có thể viết (4.24) dưới dạng

$$\omega - i\chi z = a\zeta + b \quad (4.27)$$

Tại điểm K ta có $\zeta = 0$ và $z = Ti$, $\omega = -\chi T$. Thay các giá trị này vào (4.27) ta có $b = 0$.

Tại điểm E ta có $\zeta = 1, z = \frac{B}{2} + Ti, \omega = -\chi T + \frac{Qi}{2}$ với B là chiều rộng của kênh. Thay các giá trị này vào (4.27) ta có $a = \frac{i}{2}(Q - \chi B)$

Tóm lại ta có

$$\omega - i\chi z = \frac{i}{2}(Q - \chi B)\zeta \quad (4.28)$$

Tại điểm F ta có $\zeta = \frac{1}{k}, z = \frac{L}{2}, \omega = \frac{Q}{2}i$, với L là khoảng cách giữa C và F. Thay các giá trị trên vào (4.28) ta dễ dàng tìm được hệ thức

$$Q = \frac{\chi}{1-k}(B - kL) \quad (4.29)$$

So sánh (4.29) với (4.26) ta có

$$\frac{B}{T} - k\frac{L}{T} = 2(1-k)\frac{K}{K'} \quad (4.30)$$

Từ đó ta xác định được môđun k nếu đã biết B, T và L (cho L tức là đã định trước bề mặt rộng phải tưới) và do đó xác định Q theo (4.26). Bây giờ từ (4.25) và (4.26) ta có

$$\zeta = \operatorname{sn} \frac{K'(\omega + \chi T)}{i\chi T} \quad (4.31)$$

Thay (4.31) vào (4.28) ta sẽ có quan hệ cần tìm giữa ω và z:

$$-i\chi z = -\omega + \frac{i}{2}(Q - \chi B)\operatorname{sn} \frac{K'(\omega + \chi T)}{i\chi T} \quad (4.32)$$

Cuối cùng để thiết kế cái lọc, ta hãy tính khoảng cách $BG = l$. Tại điểm G ta có $z = \frac{l}{2}, \omega = i\psi_0$, trong đó ψ_0 cần xác định. Thay các giá trị này vào (4.32) ta thu được

$$\frac{-i\chi l}{2} = -i\psi_0 + \frac{i}{2}(Q - \chi B)\operatorname{sn} \frac{K'(i\psi_0 + \chi T)}{i\chi T} \quad (4.33)$$

Mặt khác đạo hàm hai vế của (4.32) theo ω ta có

$$-i\chi \frac{dz}{d\omega} = -1 + \frac{i}{2}(Q - \chi B) \frac{d}{d\omega} \operatorname{sn} \frac{K'(\omega + \chi T)}{i\chi T} \quad (4.34)$$

Vì tại điểm G vận tốc bằng vô hạn nên từ (4.34) suy ra

$$0 = -1 + \frac{K'}{2\chi\pi}(Q - \chi B) \operatorname{cn} \frac{K'(i\psi_0 + \chi T)}{i\chi T} \operatorname{dn} \frac{K'(i\psi_0 + \chi T)}{i\chi T} \quad (4.35)$$

Phương trình (4.35) xác định cho ta ψ_0 , và từ (4.33) ta sẽ tính được l .

Kết luận

Luận văn đã trình bày được các vấn đề sau:

1. Khái niệm phép biến hình bảo giác và một số phép biến hình bảo giác quan trọng trong giải tích phức.
2. Bài toán thấm phẳng đồng chất và phương trình chuyển động nước thấm
3. Ứng dụng phép biến hình bảo giác vào giải quyết bài toán thấm có áp dưới các công trình thủy lợi bằng cách tìm hàm biến hình bảo giác miền thế vị
4. Ứng dụng phép biến hình bảo giác vào giải quyết bài toán thấm không áp dưới các công trình thủy lợi. Trong bài toán này do miền thấm chưa xác định nên đã sử dụng hàm Giucovski sao cho miền giá trị của nó là xác định. Sau đó ta tìm hàm biến hình bảo giác miền thế vị phức lên miền xác định đó. Từ đó ta tìm được quan hệ giữa miền thấm và hàm thế vị phức. Hơn thế nữa ta còn có thể xác định được phương trình mặt tự do (phần biên giới của miền thấm chưa biết).

Tài liệu tham khảo

1. Hà Huy Khoái, *Bài giảng Giải tích phức*, (Giáo trình cao học), 2012.
2. Lê Bá Long, *Sách hướng dẫn học tập Toán chuyên ngành*, Đại học bưu chính viễn thông, 2006, 17 – 23
3. Hà Trần Phương, *Bài giảng Hàm biến phức Mở đầu về lý thuyết phân bố giá trị*, (Giáo trình cao học), 2009
4. Lê Văn Thiêm, *Các công trình khoa học tiêu biểu* (Hà Huy Khoái sưu tầm, tuyển chọn, giới thiệu), NXB Giáo dục, 2007.
5. Lê Văn Thiêm, Ngô Văn Lược, Lê Văn Thành, *Bài toán thám trong vấn đề rửa mặn*, Tập san Toán lý, 1968.
6. Palubarinova – Kochina, *Lý thuyết chuyển động nước thấm*, NXB KHKT, 1970.