

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRƯỜNG THỊ HẢI VÂN

PHÉP CHIẾU XUỐNG TẬP LỜI VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2012

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	iii
Mở đầu	1
1 Các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert	3
1.1 Khái niệm về không gian Hilbert	3
1.2 Một số tính chất cơ bản	5
2 Phép chiếu xuống tập lồi đóng	12
2.1 Tập lồi	12
2.2 Phép chiếu xuống tập lồi	16
2.2.1 Định nghĩa	16
2.2.2 Sự tồn tại	16
2.2.3 Một số trường hợp cụ thể	20
3 Một số ứng dụng	24
3.1 Áp dụng chứng minh định lý tách	24
3.2 Tính dưới đạo hàm (subgradient)	28
3.3 Giải bài toán cân bằng	33
3.3.1 Mô tả thuật toán	38
3.3.2 Các bước giải.	38

Kết luận chung	45
Tài liệu tham khảo	46

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên của khóa luận này em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn Giáo sư Lê Dũng Mưu đã giao đề tài và tận tình hướng dẫn em trong quá trình hoàn thành khóa luận này. Nhân dịp này em xin gửi lời cảm ơn của mình tới toàn bộ các thầy cô giáo trong khoa Toán - Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ chúng em trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Đồng thời, tôi xin cảm ơn các bạn trong lớp K4 ngành Toán ứng dụng đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại lớp.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 06 năm 2012.

Người viết Luận văn

Trương Thị Hải Vân

Mở đầu

Giải tích lồi là một môn cơ bản của giải tích hiện đại, nghiên cứu về tập lồi, hàm lồi cùng với những vấn đề liên quan. Bộ môn này có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác của toán học ứng dụng, đặc biệt là trong tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân, các bài toán cân bằng v.v..

Sau các kết quả đầu tiên của H.Minkowski (1910) về tập lồi và hàm lồi, lý thuyết giải tích lồi đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Lý thuyết giải tích lồi được nghiên cứu nhiều trong khoảng bốn chục năm nay bởi các công trình nổi tiếng của H. Minkowski, C.Caratheodory, W.Fenchel, J.J.Moreau, R.T.Rockafellar, L.Klee, A.Brondsted, W.V.Jensen, G.Choquet và nhiều tác giả khác.

Phép chiếu xuống một tập lồi là một đề tài quan trọng trong giải tích lồi và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau, đặc biệt trong toán học. Trong không gian Hilbert, phép chiếu xuống tập lồi đóng có nhiều tính chất quan trọng. Việc tồn tại và tính duy nhất của hình chiếu lên một tập lồi đóng là cơ sở để chứng minh tính tồn tại và duy nhất của nhiều bài toán khác nhau trong giải tích ứng dụng như lý thuyết xấp xỉ, tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân và trong các vấn đề khác.

Mục đích chính của bản luận văn này là trình bày những tính chất cơ bản của phép chiếu xuống một tập lồi đóng trong không gian Hilbert và một số ứng dụng của phép chiếu. Cụ thể là sử dụng phép

chiếu để chứng minh các định lý tách, tính dưới đạo hàm, đặc biệt là để xây dựng thuật toán chiếu giải bài toán cân bằng.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert. Các kiến thức này sẽ được sử dụng trong các chương sau.

Chương 2: Khái niệm, tính chất cơ bản của tập lồi, phép chiếu xuống tập lồi đóng trong không gian Hilbert và một số trường hợp cụ thể.

Chương 3: Trình bày một số ứng dụng của phép chiếu trong giải tích lồi. Cụ thể là sử dụng phép chiếu để chứng minh các định lý tách, tính dưới đạo hàm, đặc biệt là để xây dựng thuật toán chiếu giải bài toán cân bằng.

Chương 1

Các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert

Trong chương này ta nhắc lại một số kết quả sẽ được dùng trong các chương sau. Đó là một số khái niệm, các tính chất cơ bản của không gian Hilbert. Các kết quả này có thể tìm thấy trong [1], [5].

1.1 Khái niệm về không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathcal{H}$ là một không gian trên trường K . Tích vô hướng xác định trên $\mathcal{H}$ là một ánh xạ xác định như sau

$$\begin{aligned} \langle ., . \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow K \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

thỏa mãn các tiên đề sau

$$i, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ với mọi } x, y \in \mathcal{H}.$$

$$ii, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ với mọi } x, y, z \in \mathcal{H}.$$

$$iii, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \text{ với mọi } x, y \in \mathcal{H} \text{ và } \lambda \in K.$$

iv, $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$ và $\langle x, x \rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

$\langle x, y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x và y . Cặp $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ được gọi là không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Unità).

Từ định nghĩa ta nhận thấy rằng khi K là trường số thực thì tích vô hướng là một dạng song tuyến tính xác định trên $\mathcal{H}$.

Ví dụ 1.1. Lấy $\mathcal{H} = \mathcal{R}^n$

với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{H}$ và biểu thức

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

xác định một tích vô hướng trên $\mathcal{R}^n$.

Ví dụ 1.2. Lấy $H = C_{[0,1]}$ không gian gồm các hàm liên tục trên $[0, 1]$ nhận giá trị phức, với $x, y \in H$ biểu thức

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt,$$

xác định một tích vô hướng trên $C_{[0,1]}$. Khi đó không gian này là một không gian tiền Hilbert và thường kí hiệu $C_{[0,1]}^L$.

Định lí 1.1. Cho $\mathcal{H}$ là không gian tiền Hilbert với $x, y \in \mathcal{H}$ ta luôn có bất đẳng thức sau $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$. Bất đẳng thức này còn gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Nhận xét 1.1. Trong bất đẳng thức Schwarz dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 1.2. Cho $\mathcal{H}$ là không gian tiền Hilbert. Khi đó $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathcal{H}$ xác định một chuẩn trên $\mathcal{H}$.

Định nghĩa 1.2. Cho không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{H}$ là không gian đầy đủ thì ta gọi $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert.

1.2 Một số tính chất cơ bản

Định lí 1.3. Cho $\mathcal{H}$ là một không gian tiền Hilbert. Khi đó

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

là một hàm liên tục.

Chứng minh.

Cho $(x_n), (y_n)$ là hai dãy trong không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ lần lượt hội tụ về x_0 và y_0 . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle| + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\|. \end{aligned}$$

Theo giả thiết (x_n) hội tụ trong $\mathcal{H}$ nên nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số $M > 0$ sao cho $\|x_n\| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vì vậy, ta có

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leq M \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\|.$$

Chuyển qua giới hạn ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| = 0.$$

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Định lí 1.4. Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn trên trường K . Giả sử với mọi x, y thuộc X thỏa mãn $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Khi đó trên X có một tích vô hướng sao cho $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

Định lí 1.5. Cho M là một tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Khi đó mỗi $x \in \mathcal{H}$ tồn tại duy nhất một phần tử y thuộc M sao cho $\|x - y\| = d(x, M)$.

Định nghĩa 1.3. Hai phần tử x, y trong không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ được gọi là trực giao nếu $\langle x, y \rangle = 0$, kí hiệu $x \perp y$.

Định lí 1.6. Giả sử M là một không gian con đóng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Khi đó mỗi phần tử $x \in \mathcal{H}$ được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = y + z$, trong đó $y \in M$ và $z \in M^\perp$ được gọi là hình chiếu trực giao của x lên M .

Chứng minh.

Nếu $x \in M$ thì đặt $y = x, z = 0$.

Nếu $x \notin M$ thì M là lồi đóng nên tồn tại duy nhất $y \in M$ sao cho $\|x - y\| = d(x, M)$.

Đặt $z = x - y$, ta có $x = y + z$. Ta phải chứng minh $z \in M^\perp$.

Thật vậy, với mọi $\alpha \in K, u \in M$ ta có

$$\begin{aligned}\|z\| &= \|x - y\| \leq \|x - (y + \alpha u)\| \\ &= \|z - \alpha u\|.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &\leq \langle z - \alpha u, z - \alpha u \rangle \\ &= \|z\|^2 - \alpha \langle u, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, u \rangle + \alpha^2 \|u\|^2.\end{aligned}$$

Chọn $\alpha = \langle z, u \rangle$ và $\|u\| = 1$.

Ta được $0 \leq -|\langle z, u \rangle|^2$.

Suy ra $\langle z, u \rangle = 0$ với mọi $u \in M, \|u\| = 1$.

Vậy $z \in M^\perp$.

Bây giờ ta chứng minh sự biểu diễn duy nhất, giả sử $x = y_1 + z_1$ với $y_1 \in M, z_1 \in M^\perp$.

Khi đó $y - y_1 = z_1 - z$ nên $y - y_1 \in M$ và $y - y_1 \in M^\perp$, suy ra $\langle y - y_1, y - y_1 \rangle = 0$. Vậy $y = y_1$, do đó $z = z_1$.

Từ tính duy nhất của biểu diễn ta có thể viết $X = M \oplus M^\perp$.

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 1.4. Ánh xạ $P : \mathcal{H} \rightarrow M$ xác định bởi $P(x) = y$ trong biểu diễn của định lý trên được gọi là phép chiếu trực giao từ $\mathcal{H}$ lên M .

Định lý 1.7. Phép chiếu trực giao P của không gian Hilbert $\mathcal{H}$ lên không gian con đóng $M \neq \{0\}$ là một toán tử tuyến tính liên tục và có $\|P\| = 1$.

Chứng minh.

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha \in K$, theo định lý trên ta có

$$x_1 = Px_1 + z_1, \quad x_2 = Px_2 + z_2,$$

trong đó $z_1, z_2 \in M^\perp$.

Vì vậy

$$x_1 + x_2 = Px_1 + Px_2 + z_1 + z_2,$$

trong đó $Px_1 + Px_2 \in M$, $z_1 + z_2 \in M^\perp$.

Từ tính duy nhất của sự biểu diễn trong định lý trên ta suy ra

$$P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2.$$

Tương tự $P(\alpha x_1) = \alpha P(x_1)$. Vậy P tuyến tính.

Mặt khác, với $x \in \mathcal{H}$ ta có

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|z\|^2 \geq \|Px\|^2.$$

Suy ra P bị chặn. Vậy P liên tục và $\|P\| \leq 1$.

Hơn nữa, với $x \in M$ ta có $\|Px\| = \|x\|$.

Vì vậy $\|P\| = 1$.

Vậy định lý được chứng minh. □

Định nghĩa 1.5. Một tập hợp $S = \{x_i\}_{i \in T}$ trong không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ được gọi là hệ trực giao nếu các phần tử thuộc S trực giao với nhau từng đôi một. Nếu mọi phần tử của S có chuẩn bằng 1 thì S được gọi là hệ trực chuẩn.

Định lí 1.8. Nếu S là một hệ các phần tử trực giao trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ thì S là hệ độc lập tuyến tính.

Định lí 1.9. (Dạng thức Pythagore) Nếu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là một hệ trực giao trong $\mathcal{H}$ thì $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Định lí 1.10. Giả sử $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một hệ gồm n phần tử trực chuẩn trong $\mathcal{H}$. Khi đó mỗi phần tử $x \in \mathcal{H}$ có hình chiếu trực giao lên không gian con $\mathcal{H}$ sinh bởi hệ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

Chứng minh.

Vì M là không gian con hữu hạn chiều nên M đóng trong $\mathcal{H}$.

Theo định lí hình chiếu trực giao, với mỗi $x \in \mathcal{H}$ được biểu diễn dưới dạng

$$x = y + z,$$

trong đó $y \in M$, $z \in M^\perp$.

Do $y \in M$, ta có

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Với mỗi $j = 1, \dots, n$ ta có

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle &= \langle y + z, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \right\rangle \\ &= \alpha_j \|e_j\| = \alpha_j. \end{aligned}$$

Vậy $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. □

Định lí 1.11. Giả sử $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hệ trực giao trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ và

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Đặc biệt, nếu $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn ta có $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\|^2$.

Định lí 1.12. *Giả sử $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Khi đó với mọi $x \in \mathcal{H}$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ được gọi là chuỗi Fourier của x đối với hệ $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức Bessel.*

Định nghĩa 1.6. *Hệ trực chuẩn $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ được gọi là một cơ sở trực chuẩn nếu không gian con sinh bởi hệ này là trù mật trong $\mathcal{H}$.*

Định lí 1.13. *(Định lý Riesz) Giả sử $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Nếu dãy số (ξ_n) thỏa mãn điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$ thì sẽ tồn tại duy nhất $x \in \mathcal{H}$ nhận ξ_n làm hệ số Fourier $\xi_n = \langle x, e_n \rangle$ và*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2.$$

Chứng minh.

Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ hội tụ kéo theo chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ hội tụ.

Đặt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n.$$

Với mỗi $m \in \mathbb{N}$, ta có

$$\langle x, e_m \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, e_m \right\rangle = \xi_m.$$

Điều này có nghĩa x nhận các số ξ_n làm hệ số Fourier.

Giả sử có $y \in \mathcal{H}$ sao cho $\xi_n = \langle y, e_n \rangle$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta có

$$\xi_n = \langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle.$$

Do vậy $\langle x - y, e_n \rangle = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Suy ra $x - y$ trực giao với M là không gian con sinh bởi hệ $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Vì tích vô hướng liên tục nên $x - y \perp \overline{M}$, mà $\overline{M} = \mathcal{H}$.

Vậy $x = y$. Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 1.7. Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert. Dãy (x_n) trong $\mathcal{H}$ được gọi là hội tụ yếu đến phần tử x trong $\mathcal{H}$ nếu với mọi $y \in \mathcal{H}$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$. Kí hiệu $x_n \xrightarrow{w} x$.

Định lý 1.14. Giả sử $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert

a) Nếu dãy (x_n) hội tụ yếu đến $x \in \mathcal{H}$ và dãy (y_n) hội tụ mạnh đến $y \in \mathcal{H}$ thì dãy số $(\langle x_n, y_n \rangle)$ hội tụ đến $\langle x, y \rangle$.

b) Nếu dãy (x_n) hội tụ yếu đến $x \in \mathcal{H}$ và dãy $(\|x_n\|)$ hội tụ đến $\|x\|$ thì dãy (x_n) hội tụ mạnh đến $x \in \mathcal{H}$.

Chứng minh.

a) Theo giả thiết dãy (x_n) hội tụ yếu đến $x \in \mathcal{H}$ nên (x_n) bị chặn, do đó tồn tại $M > 0$ sao cho $\|x_n\| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle| - |\langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle| - |\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq M \|y_n - y\| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|. \end{aligned}$$

Theo giả thiết a) nên khi cho $n \rightarrow \infty$, từ bất đẳng thức trên ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x \rangle. \\ &= \|x_n\|^2 - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle + \|x\|^2. \end{aligned}$$

Từ giả thiết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = \langle x, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, x_n \rangle,$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức trên ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

Chương 2

Phép chiếu xuống tập lồi đóng

Trong chương này, ta nhắc lại một số kết quả sẽ được dùng ở trong chương và chương sau. Đó là một số kết quả của giải tích lồi gồm các khái niệm, một số tính chất cơ bản của tập lồi và phép chiếu xuống tập lồi đóng. Trong toán học tính toán rất nhiều phương pháp giải dựa trên việc tìm hình chiếu của một điểm lên một tập lồi. Trong trường hợp tổng quát, đây là một bài toán khó giải. Tuy nhiên khi tập lồi có những cấu trúc riêng, như tập lồi đa diện thì bài toán này có thể giải một cách hiệu quả bởi những chương trình phần mềm hiện nay đã có sẵn. Thậm chí trong những trường hợp đặc biệt, khi tập lồi là hình cầu, siêu hộp, đơn hình, nửa không gian v.v... thì hình chiếu xuống các tập này có thể tính theo công thức tường minh. Bài toán tìm hình chiếu xuống tập lồi có vai trò quan trọng trong tối ưu và nhiều lĩnh vực khác như bất đẳng thức biến phân, cân bằng, xấp xỉ v.v... Các kết quả này có thể tìm thấy trong [2], [4], [5].

2.1 Tập lồi

Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert trên trường số thực $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 2.1. Đoạn thẳng nối hai điểm $a, b \in \mathcal{H}$ là tập các véc tơ x có dạng

$$\{x \in \mathcal{H} : x = \alpha a + \beta b; \alpha \geq 0; \beta \geq 0; \alpha + \beta = 1\}$$

Tập lồi là một khái niệm cơ bản nhất của giải tích lồi nó được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 2.2. Một tập $C \subset \mathcal{H}$ được gọi là một tập lồi, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C; \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Ví dụ 2.1. • Tập rỗng là một tập lồi.

- Toàn bộ không gian là tập lồi.
- Các không gian con là các tập lồi.
- Các tam giác, hình tròn trong mặt phẳng là các tập lồi.
- Quả cầu $C = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ là tập lồi.

Định nghĩa 2.3. Ta nói x là tổ hợp lồi của các điểm (véc-tơ) $x^1, \dots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j \geq 0, \lambda_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, k, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1.$$

Mệnh đề 2.1. Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là: C lồi khi và chỉ khi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \forall x^1, \dots, x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j \in C.$$

Chứng minh.

Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa.

Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều cần chứng minh suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với k điểm. Thật vậy:

Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, \dots, x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, k, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1.$$

Đặt

$$\xi = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \xi < 1$

và

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k \\ &= \xi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j + \lambda_k x^k. \end{aligned}$$

Do

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} = 1,$$

và $\frac{\lambda_j}{\xi} > 0$ với mọi $j = 1, \dots, k-1$, nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j \in C.$$

Ta có

$$x = \xi y + \lambda_k x^k.$$

Do $\xi > 0, \lambda_k > 0$

và

$$\xi + \lambda_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1,$$

nên x là một tổ hợp lồi của hai điểm y và x^k đều thuộc C .

Vậy $x \in C$. □

Lớp các tập lồi là đóng với các phép giao, phép cộng đại số và phép nhân tích Decastes. Cụ thể ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.2. Nếu A, B, C là các tập lồi đóng trong $\mathcal{H}$, thì các tập sau là lồi:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\},$$

$$\lambda A + \beta B := \{x \mid x = \alpha a + \beta b, a \in A, b \in B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$A \times C := \{x \in \mathcal{H}, \mathcal{H} \mid x = (a, c) : a \in A, c \in C\}.$$

Định nghĩa 2.4. Một tập C được gọi là một tập lồi đa diện nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng.

Như vậy, theo định nghĩa, tập lồi đa diện là tập hợp nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính. Dạng tường minh của tập lồi đa diện được cho như sau:

$$C := \{x \in \mathcal{H} \mid \langle a^j, x \rangle \leq b_j, j \in I, |I| < +\infty\}.$$

Trong đó $a^j \in \mathcal{H}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{H}$.

Mệnh đề 2.3. Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là một tập lồi.

Chứng minh.

Giả sử $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ là họ các tập lồi. Cần chứng minh $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ là một tập lồi.

- Với mọi $x_1, x_2 \in A$ suy ra $x_1, x_2 \in A_\alpha$ ($\forall \alpha \in I$).
- Với mọi $\alpha \in I$. Do A_α lồi nên $\forall \lambda \in [0; 1]$ ta có

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in A.$$

Theo định nghĩa $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ là một tập lồi. □

Định nghĩa 2.5. Một tập $C \subset \mathcal{H}$ được gọi là nón nếu

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là *nón lồi* nếu nó là nón và là một tập lồi.

Định nghĩa 2.6. Cho $C \subseteq \mathcal{H}, x^o \in C$. Nón pháp tuyến ngoài của tập C tại x^o là tập hợp

$$N_C(x^o) := \{w : \langle w, x - x^o \rangle \leq 0; \forall x \in C\}.$$

2.2 Phép chiếu xuống tập lồi

2.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.7. Cho C khác rỗng là một tập lồi đóng thuộc không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và $y \in \mathcal{H}$, đặt

$$d_C := \inf_{x \in C} \|x - y\|.$$

Ta nói $d_C(y)$ là khoảng cách từ y đến C . Nếu tồn tại $\pi \in C$ sao cho $d_C(y) = \|\pi - y\|$, thì ta nói π là hình chiếu khoảng cách của y trên C .

Ký hiệu: $\pi = p_C(y)$ là hình chiếu của y trên C .

2.2.2 Sự tồn tại

Mệnh đề 2.4. Cho $C \in \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó:

(i) Với $y \in \mathcal{H}, \pi \in C$ hai tính chất sau là tương đương

a) $\pi = p_C(y)$.

b) $y - \pi \in N_C(\pi)$.

(ii) Với mọi $y \in \mathcal{H}$, hình chiếu $p_C(y)$ của y trên C luôn tồn tại và duy nhất.

(iii) Nếu $y \notin C$, thì $\langle p_C(y) - y, x - p_C(y) \rangle = 0$ là siêu phẳng tựa của C tại $p_C(y)$ và tách hẳn y khỏi C , tức là

$$\langle p_C(y) - y, x - p_C(y) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

và

$$\langle p_C(y) - y, y - p_C(y) \rangle < 0.$$

(iv) Ánh xạ $y \rightarrow p_C(y)$ có các tính chất sau:

a) $\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, \forall y$. (tính không giãn)

b) $\langle p_C(x) - p_C(y), x - y \rangle \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2$. (tính đồng bậc)

Chứng minh.

(i) • Giả sử có $\pi = p_C(y)$ cần chứng minh $y - \pi \in N_C(\pi)$. Lấy $x \in C$ và $\lambda \in (0; 1)$. Đặt

$$x_\lambda := \lambda x + (1 - \lambda) \pi.$$

Ta có $x, \pi \in C$ và tập C lồi nên $x_\lambda \in C$.

Do $\pi = p_C(y)$ suy ra $\|\pi - y\| \leq \|y - x_\lambda\|$.

$$\|\pi - y\|^2 \leq \|y - x_\lambda\|^2$$

$$\|\pi - y\|^2 \leq \|y - (\lambda x + (1 - \lambda) \pi)\|^2$$

$$\|\pi - y\|^2 \leq \|\lambda(\pi - x) + (y - \pi)\|^2$$

$$\|\pi - y\|^2 \leq \lambda^2 \|\pi - x\|^2 + \|y - \pi\|^2 + 2\lambda \langle \pi - x, y - \pi \rangle$$

$$\lambda^2 \|\pi - x\|^2 + 2\lambda \langle \pi - x, y - \pi \rangle \geq 0.$$

Do $\lambda > 0$ nên $\lambda \|\pi - x\|^2 + 2 \langle \pi - x, y - \pi \rangle \geq 0$ đúng $\forall x \in C$ và $\lambda \in (0; 1)$.

Do đó $\lambda \rightarrow 0$ thì $\langle \pi - y, x - \pi \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C$.

Suy ra $y - \pi \in N_C(\pi)$.

• Có $y - \pi \in N_C(\pi)$. Chứng minh $\pi = p_C(y)$.

Do $y - \pi \in N_C(\pi); \forall x \in C$ ta có

$$(y - \pi)^T (x - \pi) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y - \pi)^T (x - y + y - \pi) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \|y - \pi\| + (y - \pi)^T (x - y) \leq 0.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\|y - \pi\|^2 \leq (y - \pi)^T (x - y) \leq \|y - \pi\| \|y - x\|.$$

Suy ra $\|y - \pi\| \leq \|y - x\|, \forall x \in C$. Do đó $\pi = p_C(y)$.

$$(ii) \text{ Nếu } y \in C \text{ thì } \begin{cases} p(y) = y \\ d_C(y) = 0 \end{cases}.$$

Nếu $y \notin C$, ta có $d_C(y) = \|\pi - y\|$. Nên theo định nghĩa cận dưới đúng, tồn tại một dãy $\{x^k\} \in C$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y\| = d_C(y) < +\infty.$$

Vì dãy $\{x^k\}$ bị chặn nên tồn tại một dãy con $\{x^{kj}\}$ hội tụ yếu đến điểm π nào đó. Do C đóng và lồi nên C đóng yếu, suy ra $\pi \in C$. Vậy

$$\|\pi - y\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{kj} - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y\| = d_C(y).$$

Suy ra π là hình chiếu của y trên C .

Ta chứng minh tính duy nhất. Giả sử tồn tại hai điểm π^1 và π^2 là hình chiếu của y trên C thì $y - \pi^1 \in N_C(\pi^1)$; $y - \pi^2 \in N_C(\pi^2)$.

Suy ra

$$\begin{cases} \langle \pi^1 - y, \pi^1 - \pi^2 \rangle \geq 0 \\ \langle \pi^2 - y, \pi^2 - \pi^1 \rangle \geq 0 \end{cases}.$$

Cộng vế với vế $\|\pi^1 - \pi^2\| \leq 0 \Rightarrow \pi^1 = \pi^2$.

Vậy hình chiếu $p_C(y)$ của y trên C luôn tồn tại và duy nhất.

(iii) Do $y - \pi \in N_C(\pi)$ nên

$$\langle \pi - y, x - \pi \rangle \geq 0, \forall x \in C.$$

Vậy $\langle \pi - y, x \rangle = \langle \pi - y, \pi \rangle$ là một siêu phẳng tựa của C tại π . Siêu phẳng này tách hẳn khỏi y nên

$$\langle \pi - y, x - \pi \rangle = -\|\pi - y\|^2 < 0.$$

(iv)

a) Theo (ii) $x \rightarrow p(x)$ xác định khắp nơi. Do

$$z - p(z) \in N_C(p(z)), \quad \forall z.$$

Suy ra

$$\langle z - p(z), p(x) - p(z) \rangle \leq 0, \quad (2.1)$$

$$\langle z - p(z), p(y) - p(z) \rangle \leq 0. \quad (2.2)$$

Áp dụng $z = y$ và $z = x$ vào (2.1) và (2.2), ta có

$$\langle x - p(x), p(y) - p(x) \rangle \leq 0,$$

$$\langle y - p(y), p(x) - p(y) \rangle \leq 0.$$

Cộng về hai bất đẳng thức ta được

$$\langle p(y) - p(x), p(y) - p(x) + x - y \rangle \leq 0.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $\|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|$

b) Theo tính chất (ii) áp dụng lần lượt với $p(x)$ và $p(y)$, ta có:

$$\langle p(x) - x, p(x) - p(y) \rangle \leq 0,$$

$$\langle y - p(y), p(x) - p(y) \rangle \leq 0.$$

Cộng hai bất đẳng thức này ta được

$$\langle p(x) - p(y) + y - x, p(x) - p(y) \rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \|p(x) - p(y)\|^2 + \langle p(x) - p(y), y - x \rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle p(x) - p(y), x - y \rangle \geq \|p(x) - p(y)\|^2.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. □

Chú ý. Phép chiếu khoảng cách còn một tính chất mạnh hơn tính không giãn là

$$\|p(x) - p(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|p(x) - p(y) - x + y\|^2 \quad \forall x, y.$$

2.2.3 Một số trường hợp cụ thể

Trong một số trường hợp thường gặp, tập chiếu là hình hộp chữ nhật, hình cầu đóng hay không gian con thì điểm chiếu có thể tính được một cách tường minh.

- **Chiếu xuống hình hộp chữ nhật**

Khi C là một hình hộp, định nghĩa bởi

$$C := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

trong đó $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathcal{R}^n$.

Khi đó, hình chiếu của x lên C được xác định như sau:

$$(P_K(x))_i = \begin{cases} a_i, & \text{ khi } x_i \leq a_i \\ x_i, & \text{ khi } x_i \in [a_i, b_i] \\ b_i, & \text{ khi } x_i \geq b_i \end{cases}.$$

- **Chiếu xuống hình cầu đóng**

Khi C là hình cầu bán kính R tâm $a \in \mathcal{H}$ định nghĩa bởi

$$C := \{z \in \mathcal{H} : \|z - a\| \leq R\}.$$

Khi đó, hình chiếu $y = P_C(x)$ của x lên C được xác định như sau:

Nếu $x \in C$ thì $y \equiv x$.

Nếu $x \notin C$ thì hình chiếu của x lên C là giao điểm của đường thẳng nối x và tâm A của C , kí hiệu là Δ với mặt cầu

$$C := \{z \in \mathcal{H} : \|z - a\| \leq R\}.$$

Ta có

$$\Delta = \{z \in \mathcal{H} \mid z = a + t(x - a), \ t \geq 0\}.$$

Thay $z = a + t(x - a)$ ta được

$$t^2 \|x - a\|^2 = R^2.$$

Do đó

$$t = \frac{R}{\|x - a\|}.$$

• Chiếu xuống không gian con

Khi $C \subset H$ là không gian con k chiều với một cơ sở

$$B = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}.$$

Giả sử $x \in \mathcal{H}$ và $y = \sum_{j=1}^k y_j \eta_j \in C$ trong đó y_j là các hệ số thực sao cho $w = x - y$ thỏa mãn $\langle w, \eta_j \rangle = 0, \forall j = 1, 2, \dots, k$ (ta sẽ tìm y thỏa mãn điều kiện này sau).

Khi đó y là hình chiếu của x lên C . Thật vậy, vì w trực giao với mọi véc-tơ trong cơ sở của C nên nó cũng trực giao với mọi véc-tơ của C . Do đó với $z \in L$ ta có:

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \langle x - y + y - z, x - y + y - z \rangle \\ &= \langle x - y, x - y \rangle + \langle y - z, y - z \rangle + 2 \langle w, y - z \rangle \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy y là hình chiếu của x lên C .

Bây giờ ta tìm véc-tơ y như vậy. Với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ ta có

$$\langle x - y, \eta_i \rangle = 0.$$

Hay

$$\sum_{j=1}^k \langle \eta_i, \eta_j \rangle y_j = \langle x, \eta_i \rangle. \quad (2.3)$$

Với $1 \leq i, j \leq k$ đặt

$$a_{ij} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle,$$

và

$$b_i = \langle x, \eta_j \rangle.$$

Khi đó, từ (2.3) ta thu được một hệ tuyến tính k phương trình k ẩn

$$Ay^T = y,$$

trong đó $A = (a_{ij})$ và $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T$.

Hơn nữa, theo định nghĩa A là ma trận xác định dương nghĩa là $\det(A) \neq 0$, do đó hệ này có đúng một nghiệm.

Vì

$$y = \sum_{j=1}^k y_j \eta_j.$$

Vậy khi biết y_j ta sẽ xác định được y .

Nếu B được chọn là một cơ sở trực chuẩn của C nghĩa là:

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases},$$

thì A là ma trận đơn vị.

Do đó ta tính được

$$y_i = b_i = \langle x, \eta_j \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Mệnh đề 2.5. Cho C là không gian con trong $\mathcal{H}$, $p_C(x)$ là hình chiếu của x nếu và chỉ nếu

$$\langle x - p_C(x), y \rangle = 0, \quad \forall y \in C.$$

Chứng minh.

Do C là không gian con và $y \in C$, $p_C(x) \in C$ nên $p_C(x) + y$ và $p_C(x) - y$ đều thuộc C với mọi $y \in C$.

Nên ta có

$$\langle y, x - p_C(y) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C,$$

và

$$\langle -y, x - p_C(y) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. □

Chương 3

Một số ứng dụng

Trong chương này, ta xét một số ứng dụng của phép chiếu gồm: chứng minh định lý tách, chứng minh sự tồn tại và gợi ý cách tích dưới đạo hàm và đặc biệt là việc xây dựng thuật toán chiếu giải bài toán cân bằng. Đây là một công cụ sắc bén và khá đơn giản để chứng minh nhiều định lý quan trọng như định lý tách, các định lý về sự tồn tại nghiệm của nhiều vấn đề khác nhau trong toán ứng dụng. Các kết quả này có thể tìm thấy trong [3], [9].

3.1 Áp dụng chứng minh định lý tách

Trong giải tích lồi và nhiều lĩnh vực khác như giải tích hàm, giải tích không trơn và giải tích phi tuyến v.v..., các định lý tách hai tập lồi có một vai trò trung tâm. Về bản chất, định lý tách trả lời câu hỏi rằng một phần tử có thuộc một tập lồi không, nếu không thuộc thì nó sẽ có tính chất gì? Đây là câu hỏi về liên thuộc (membership), một vấn đề cơ bản của toán học. Ta có thể hình dung tập lồi đó là tập hợp nghiệm của một hệ phương trình đại số, tập các điểm bất động của một ánh xạ, hay là tập nghiệm của một bài toán tối ưu v.v... Dĩ nhiên nếu câu trả lời là có thì vấn đề liên thuộc đã được giải quyết. Trái lại, nếu câu trả lời là không thì sẽ xảy ra điều gì? Điều này giải thích tại sao các định lý tách là công cụ rất mạnh và thường được dùng để

chứng minh sự tồn tại của một đối tượng trong nhiều vấn đề thuộc những lĩnh vực khác nhau. Người ta chứng minh được sự tương đương giữa định lý tách và định lý Hahn - Banach rất quen thuộc trong giải tích hàm. Sự mở rộng các định lý tách và những ứng dụng đa dạng của chúng từ lý thuyết đến các vấn đề thực tế (chẩn đoán u lành, u ác trong y học, hoặc dự đoán sự thành bại hay phát triển của các doanh nghiệp v.v...) hiện vẫn là một đề tài nghiên cứu thu hút sự quan tâm của nhiều người.

Định nghĩa 3.1. Cho hai tập C và D khác rỗng, ta nói siêu phẳng $a^T x = \alpha$ tách C và D nếu

$$a^T x \leq \alpha \leq a^T y, \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in D.$$

Ta nói siêu phẳng $a^T x = \alpha$ tách chặt C và D nếu

$$a^T x < \alpha < a^T y, \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in D.$$

Ta nói siêu phẳng $a^T x = \alpha$ tách mạnh C và D nếu

$$\sup_{x \in C} a^T x < \alpha < \inf_{y \in D} a^T y.$$

Định lý 3.1. (Định lý Tách 1). Cho C và D là hai tập lồi khác rỗng trong $\mathcal{H}$ sao cho $C \cap D = \emptyset$. Khi đó có một siêu phẳng tách C và D . Định lý tách vừa nêu có thể suy ra ngay từ bổ đề dưới đây, chính là định lý tách một tập lồi và một phần tử không thuộc nó.

Bổ đề 3.1. (Bổ đề liên thuộc). Cho $C \subset \mathcal{H}$ là một tập lồi khác rỗng. Giả sử $x^0 \notin C$. Khi đó tồn tại $t \in H$, $t \neq 0$ thỏa mãn

$$\langle t, x \rangle \geq \langle t, x^0 \rangle \quad \forall x \in C.$$

Chứng minh.

Áp dụng (iii) của mệnh đề 2.4 với $P_C(y) = x^0$ và $t = P_C(y) - y$. Do $x^0 \notin riC$, nên tồn tại siêu phẳng tách trong bổ đề.

Chứng minh định lí.

Do C và D là lồi, nên $C - D$ cũng lồi.

Hơn nữa $0 \notin (C - D)$, vì $C \cap D = \emptyset$. Theo bổ đề trên áp dụng với $x^0 = 0$, tồn tại véc-tơ $t \in H$, $t \neq 0$ với mọi $z \in C - D$.

Vì $z = x - y$ với $x \in C$, $y \in D$, nên ta có

$$\langle t, x \rangle \geq \langle t, y \rangle \quad \forall x \in C, y \in D.$$

Lấy $\alpha := \sup_{y \in D} \langle t, y \rangle$, khi đó siêu phẳng $\langle t, x \rangle = \alpha$ tách C và D . $\square$

Chú ý. Chứng minh bổ đề liên thuộc ở trên gợi ý cho việc xác định siêu phẳng tách. Theo chứng minh mệnh đề trên, việc xác định siêu phẳng tách điểm x^0 và tập C chính là việc tìm điểm chiếu của x^0 trên $\overline{C}$. Điểm này chính là nghiệm của bài toán $\min \left\{ \|x - x^0\|^2 \mid x \in \overline{C} \right\}$.

Định lí 3.2. (Định lí tách 2 - Định lí nói về việc tách mạnh hai tập lồi). Cho C và D là hai tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathcal{H}$ sao cho $C \cap D = \emptyset$. Giả sử có ít nhất một tập com-pắc. Khi đó hai tập này có thể tách mạnh được bởi một siêu phẳng.

Bổ đề 3.2. Cho $C \subset \mathcal{H}$ là một tập lồi đóng khác rỗng sao cho $0 \notin C$. Khi đó tồn tại một véc-tơ $t \in \mathcal{H}$, $t \neq 0$ và $\alpha > 0$ sao cho

$$\langle t, x \rangle \geq \alpha > 0, \quad \forall x \in C.$$

Theo bổ đề này, thì C và điểm gốc tọa độ có thể tách mạnh, ví dụ bởi siêu phẳng $\langle t, x \rangle = \frac{\alpha}{2}$.

Chứng minh bổ đề.

Do C đóng và $0 \notin C$, nên tồn tại quả cầu B tâm ở gốc, bán kính $r > 0$ sao cho $C \cap B = \emptyset$.

Áp dụng định lí tách 1 cho hai tập C và B , ta có $t \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, sao cho

$$\langle t, x \rangle \geq \alpha \geq \langle t, y \rangle \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in B.$$

Bằng cách chuẩn hóa ta có thể xem $\|t\| = 1$ và do đó khoảng cách từ gốc đến siêu phẳng ít nhất là bằng $\alpha \geq r$.

Vậy

$$\langle t, x \rangle \geq \alpha \geq r > 0.$$

Chứng minh định lí tách 2.

Giả sử C là tập compact. Ta chỉ ra tập $C - D$ đóng.

Thật vậy, giả sử $z^k \in C - D$ và $z^k \rightarrow z$.

Ta có $z^k = x^k - y^k$ với $x^k \in C$, $y^k \in D$.

Vì C compact, nên có một dãy con $x^{k_j} \rightarrow x$ khi $j \rightarrow +\infty$.

Vậy $z = x - y \in C - D$. Chứng tỏ $C - D$ là tập đóng.

Do $0 \notin C - D$, nên theo bổ đề trên tồn tại $t \neq 0$, sao cho $\langle t, x - y \rangle \geq \alpha > 0$ với mọi $x \in C, y \in D$.

Vậy

$$\inf_{x \in C} \langle t, x \rangle - \frac{\alpha}{2} \geq \sup_{y \in D} \langle t, y \rangle + \frac{\alpha}{2}.$$

Chứng tỏ C và D có thể tách mạnh. □

Chú ý. Điều kiện một trong hai tập là compact trong định lí là không thể bỏ được. Hãy xét ví dụ trong đó

$$C := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, t = 0\},$$

$$D := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq \frac{1}{x}, t > 0, x > 0 \right\}.$$

Rõ ràng hai tập này lồi, đóng không có điểm chung, nhưng chúng không thể tách mạnh được.

Bổ đề 3.3. (Bổ đề Farkas) Cho A là một ma trận thực cấp $m \times n$ và $a \in \mathcal{H}$. Khi đó trong hai hệ dưới đây có một hệ và chỉ duy nhất một hệ có nghiệm:

$$Ax \geq 0, \quad a^T x < 0 \text{ với một } x \in \mathcal{H},$$

$$A^T y = a, \quad y \geq 0 \text{ với một } y \in \mathcal{H}.$$

Chứng minh bổ đề Farkas.

Giả sử $A^T y = a$, $y \geq 0$ với một $y \in \mathcal{H}$ có một nghiệm y nào đó. Nếu như $Ax \geq 0$, thì từ $A^T y = a$, nhân tích vô hướng với x và do $Ax \geq 0$, $y \geq 0$, ta có $a^T x = y^T Ax \geq 0$. Vậy $Ax \geq 0$, $a^T x < 0$ với một $x \in \mathcal{H}$ không thể có nghiệm. Bây giờ ta giả sử $A^T y = a$, $y \geq 0$ với một $y \in \mathcal{H}$ không có nghiệm. Lấy tập $C = \{x \mid \exists y \geq 0 : A^T y = x\}$. Hiển nhiên C là tập lồi đóng và $0 \in C$. Do $A^T y = a$, $y \geq 0$ với một $y \in \mathcal{H}$ không có nghiệm, nên $a \notin C$. Theo định lí tách mạnh, tồn tại $p \neq 0$ và một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $p^T a < \alpha < p^T x$ với mọi $x \in C$. Do $0 \in C$ nên $\alpha < 0$. Thay $x = A^T y$, với $y \geq 0$, ta viết được $\alpha \leq p^T A^T y = y^T Ap$. $\square$

Chú ý rằng nếu $x \in C$ thì $\zeta x \in C$ với mọi $\zeta \geq 0$, vì từ $x = A^T y$ có $\zeta x = A^T \zeta y$. Vậy các tọa độ của y có thể lớn tùy ý, nên từ bất đẳng thức $\alpha \leq p^T A^T y = y^T Ap$, suy ra $Ap \geq 0$. Vậy ta đã chỉ ra sự tồn tại của một véc-tơ p sao cho $Ap \geq 0$ và $a^T p < 0$. Chúng ta chứng tỏ hệ $Ax \geq 0$, $a^T x < 0$ với một $x \in \mathcal{H}$ có nghiệm.

3.2 Tính dưới đạo hàm (subgradient)

Phép tính vi phân là một trong những đề tài cơ bản nhất của giải tích cổ điển. Trong giải tích lồi, lý thuyết này lại càng trở nên phong phú nhờ những tính chất đặc biệt của tập lồi và hàm lồi. Trước hết, ta định nghĩa về đạo hàm theo hướng, dưới vi phân, chứng minh sự tồn tại và các tính chất cơ bản của nó.

Định nghĩa 3.2. Cho $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ta nói $x^* \in \mathcal{H}$ là dưới đạo hàm của f tại x nếu $\langle x^*, z - x \rangle + f(x) \leq f(z) \quad \forall z$.

Tương tự đối với hàm lồi khả vi thông thường, biểu thức này có

nghĩa là phương trình tiếp tuyến nằm dưới đồ thị của hàm số. Tuy nhiên khác với trường hợp khả vi, tiếp tuyến ở đây có thể không tồn tại duy nhất.

Định nghĩa 3.3. Tập tất cả các dưới đạo hàm của f tại x được gọi là dưới vi phân của f tại x .

Kí hiệu tập hợp tất cả các dưới đạo hàm của f tại x là $\partial f(x)$.

Khi $\partial f(x) \neq \emptyset$, thì ta nói hàm f khả dưới vi phân tại x . Theo định nghĩa, một điểm $x^* \in \partial f(x)$ khi và chỉ khi nó thỏa mãn một hệ vô hạn các bất đẳng thức tuyến tính. Như vậy $\partial f(x)$ là giao của các nửa không gian đóng. Vậy $\partial f(x)$ luôn là một tập lồi đóng (có thể rỗng). Như trong lý thuyết toán tử đa trị, ta sẽ kí hiệu

$$\text{dom}(\partial f) := \{x | \partial f(x) \neq \emptyset\}.$$

Ví dụ 3.1. 1. $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathcal{H}$. Tại điểm $x = 0$ hàm này không khả vi, nhưng nó khả dưới vi phân và

$$\partial f(0) = \{x^* | \langle x^*, x \rangle \leq \|x\| \quad \forall x\}.$$

2. $f = \delta_C$ là hàm chỉ của một tập lồi $C \neq \emptyset$. Khi đó với $x^0 \in C$,

$$\partial \delta_C(x^0) = \{x^* | \langle x^*, x - x^0 \rangle \leq \delta_C(x) \quad \forall x\},$$

Với $x \notin C$ thì $\delta_C(x) = +\infty$ nên bất đẳng thức này luôn đúng. Vậy

$$\partial \delta_C(x^0) = \{x^* | \langle x^*, x - x^0 \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C\} = N_C(x^0).$$

Vậy dưới vi phân của hàm chỉ của tập lồi C khác rỗng tại một điểm $x^0 \in C$ chính là nón pháp tuyến ngoài của C tại x^0 .

Định nghĩa 3.4. Cho hàm $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là lồi nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \lambda \in [0, 1].$$

Ta nói f là lồi chính thường khi

$$\text{dom} f := \{x \in H : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset.$$

Mệnh đề dưới đây cho một định nghĩa khác tương đương của dưới vi phân.

Mệnh đề 3.1. Cho $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lồi, chính thường.

(i) $x^* \in \partial f(x)$ khi và chỉ khi $f'(x, y) \geq \langle x^*, y \rangle \quad \forall y$. Nếu $x \in \text{ri}(\text{dom} f)$, thì với mọi y ta có

$$f'(x, y) = \sup_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, y \rangle.$$

(ii) Nếu f là hàm lồi chính thường trên $\mathcal{H}$, thì với mọi $x \in \text{dom}(\partial f)$, ta có $f(x) = \bar{f}(x)$ và $\partial f(x) = \partial \bar{f}(x)$.

Định lí 3.3. Cho $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lồi, chính thường. Khi đó:

- (i) Nếu $x \notin \text{dom} f$, thì $\partial f(x) = \emptyset$.
(ii) Nếu $x \in \text{int}(\text{dom} f)$, thì $\partial f(x) \neq \emptyset$ và compact. Ngược lại, nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$ và compact thì $x \in \text{ri}(\text{dom} f)$.

Chứng minh.

(i) Cho $z \in \text{dom} f$, thì $f(z) < +\infty$. Vậy nếu $x \notin \text{dom} f$ thì $f(z) = +\infty$ và do đó không thể tồn tại x^* thỏa mãn

$$\langle x^*, z - x \rangle + f(x) \leq f(z) < +\infty.$$

Vậy $\partial f(x) = \emptyset$.

(ii) Trước hết giả sử $x \in \text{int}(\text{dom} f)$. Ta có điểm $(x, f(x))$ nằm trên biên của $\text{epi} f$.

Do f lồi, chính thường, nên tồn tại siêu phẳng tựa của bao đóng của $\text{epi} f$ đi qua $(x, f(x))$, tức là tồn tại $p \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn

$$\langle p, x \rangle + tf(x) \leq \langle p, y \rangle + t\mu \quad \forall (y, \mu) \in \text{epi} f. \quad (3.1)$$

Ta có $t \neq 0$, vì nếu $t = 0$ thì

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, y \rangle \quad \forall y \in \text{dom} f.$$

Nhưng do $x \in \text{int}(\text{dom} f)$, nên điều này kéo theo $p = 0$. Vậy $t \neq 0$. Hơn nữa $t > 0$, vì nếu $t < 0$ thì trong bất đẳng thức (3.1), khi cho $\mu \rightarrow \infty$ ta suy ra mâu thuẫn vì vế trái cố định. Chia hai vế của (3.1) cho $t > 0$, đồng thời thay $\mu = f(y)$ và đặt $x^* = -\frac{p}{t}$ ta được

$$\langle x^*, x \rangle + f(x) \leq \langle x^*, y \rangle + f(y) \quad \forall y \in \text{dom} f,$$

Hay là $\langle x^*, y - x \rangle + f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in \text{dom} f$.

Nếu $y \notin \text{dom} f$ thì $f(y) = \infty$, do đó $\langle x^*, y - x \rangle + f(x) \leq f(y) \quad \forall y$. Chứng tỏ $x^* \in \partial f(x)$.

Cách chứng minh trên cho thấy dưới đạo hàm của f tại x chính là véc-tơ pháp tuyến của siêu phẳng tựa của bao đóng của $\text{epi} f$ tại $(x, f(x))$. Thực ra f khả dưới vi phân tại mọi điểm $x \in \text{ri}(\text{dom} f)$. Điều này có thể chứng minh ngắn gọn như sau:
Do $x \in \text{ri}(\text{dom} f)$ nên theo mệnh đề 3.1 có

$$f'(x, y) = \max_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, y \rangle$$

và $f'(x, y)$ hữu hạn, nên $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Bây giờ ta chỉ ra tập $\partial f(x)$ compact.

Do $x \in \text{ri}(\text{dom} f)$ nên theo mệnh đề 3.1, $x^* \in \partial f(x)$ khi và chỉ khi

$$f'(x, d) \geq \langle x^*, d \rangle \quad \forall d. \quad (3.2)$$

Lấy e^i véc-tơ đơn vị thứ i ($i = 1, \dots, n$) của H (tọa độ thứ i của e^i bằng 1 và mọi tọa độ khác bằng 0).

Áp dụng (3.2) lần lượt với $d = e^i$ với i ($i = 1, \dots, n$) ta có

$$x_i^* \leq f'(x, e^i).$$

Tương tự áp dụng với $d = -e^i$ với i ($i = 1, \dots, n$), ta có

$$-x_i^* \leq f'(x, -e^i).$$

Hay $x_i^* \geq -f'(x, -e^i)$.

Tóm lại

$$-f'(x, -e^i) \leq x_i^* \leq -f'(x, +e^i) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Do $x \in ri(dom f)$ nên $f'(x, y)$ hữu hạn với mọi y .

Nói riêng $f'(x, -e^i), f'(x, e^i)$ hữu hạn với mọi i ($i = 1, \dots, n$).

Vậy $\partial f(x)$ bị chặn và do tính đóng nên nó compact.

Ngược lại, giả sử rằng $\partial f(x)$ khác rỗng và compact. Ta chỉ ra rằng $x \in ri(dom f)$.

Do $\partial f(x) \neq \emptyset$ nên $x \in dom f$. Nếu trái lại $x \notin ri(dom f)$ thì x ở trên biên tương đối của $dom f$.

Do $dom f$ lồi, theo mệnh đề về siêu phẳng tựa, tồn tại một siêu phẳng tựa của bao đóng của $dom f$ tại x , tức là tồn tại một siêu phẳng tựa của bao đóng của $dom f$ tại x , tức là tồn tại véc-tơ $p \in H, p \neq 0$ sao cho

$$p^T x \geq p^T z \quad \forall z \in dom f.$$

Lấy $x^* \in \partial f(x)$. Từ đây và theo định nghĩa dưới vi phân ta có:

$$f(z) - f(x) \geq \langle x^*, z - x \rangle \geq \langle x^* + \lambda p, z - x \rangle \quad \forall \lambda \geq 0, \forall z.$$

Chúng tỏ $x^* + \lambda p \in \partial f(x)$ với mọi $\lambda \geq 0$. Điều này mâu thuẫn với tính bị chặn của $\partial f(x)$. Vậy $x \in ri(dom f)$. $\square$

Ví dụ 3.2. Ví dụ sau đây cho thấy nếu $x \notin \text{int}(dom f)$ thì tập $\partial f(x)$ có thể bằng rỗng.

Cho hàm một biến

$$f(x) = \begin{cases} -2x^{\frac{1}{2}} & (x \geq 0) \\ +\infty & (x < 0) \end{cases}.$$

Khi đó $\partial f(0) = \emptyset$.

Thật vậy, giả sử $\partial f(0) \neq \emptyset$. Khi đó ta có:

$$\langle x^*, z \rangle \leq -2z^{\frac{1}{2}} \quad \forall z.$$

Lấy $z = x^*$ thì $\langle x^*, x^* \rangle \leq -2(x^*)^{\frac{1}{2}}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\partial f(0) = \emptyset$. $\square$

3.3 Giải bài toán cân bằng

Trong mục này ta xét đến việc áp dụng phép chiếu để giải bài toán cân bằng. Các khái niệm và kết quả trình bày trong mục này được lấy từ tài liệu [3], [9].

Cho C là tập lồi, đóng khác rỗng thuộc $\mathbb{R}^n$, lấy $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sao cho $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$ và $C \times C$ chứa trong miền xác định của f .

Ta xét bài toán cân bằng $EP(f, C)$

Tìm

$$x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (3.3)$$

Tập lời giải của bài toán (3.3) được kí hiệu bởi $S(f, C)$.

Các trường hợp riêng của bài toán cân bằng

1. Bài toán tối ưu

Xét bài toán

$$(OP) : \begin{cases} \text{Min} \\ x \in C \end{cases} \varphi(x).$$

Nếu ta đặt

$$f(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x), \quad x, y \in C,$$

thì hiển nhiên

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) \quad \forall y \in C.$$

Suy ra

$$f(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Khi đó hai tập nghiệm trùng nhau.

Vậy bài toán tối ưu trên là một trường hợp riêng của bài toán (EP).

2. Bài toán bất đẳng thức biến phân

Xét bài toán

$$x^* \in C : \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

trong đó F là một ánh xạ từ C vào $\mathbb{R}^n$. Nếu ta đặt

$$f(x, y) := \langle F(x), y - x \rangle, \quad x, y \in C,$$

thì ta suy ra ngay rằng $f(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C$.

Vậy bài toán bất đẳng thức biến phân trên là một trường hợp riêng của bài toán (EP).

3. Bài toán điểm bất động Brouwer

Xét bài toán

$$x^* \in C : \phi(x^*) = x^*,$$

trong đó $\phi : C \rightarrow C$.

Nếu ta đặt

$$f(x, y) := \langle x - \phi(x), y - x \rangle, \quad x, y \in C,$$

thì ta có $f(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C$.

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của (3.3) thì $f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C$.

Ta lấy $y = \phi(x^*) \in C$ thì $f(x^*, \phi(x^*)) \geq 0$.

Mà

$$\begin{aligned} f(x^*, \phi(x^*)) &= \langle x^* - \phi(x^*), \phi(x^*) - x^* \rangle \\ &= -\|x^* - \phi(x^*)\|^2. \end{aligned}$$

Nên

$$f(x^*, \phi(x^*)) \leq 0,$$

Vậy

$$f(x^*, \phi(x^*)) = 0,$$

$$\Rightarrow x^* = \phi(x^*).$$

Vậy bài toán điểm bất động Brouwer là một trường hợp riêng của bài toán (EP).

4. Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác.

Xét một trò chơi có p người chơi (đấu thủ). Giả sử $C_j \subset \mathbb{R}^{P_j}$ là tập phương án mà đấu thủ thứ j có thể lựa chọn trong đó (gọi là tập chiến lược). Đặt $C := C_1 \times C_2 \times \dots \times C_p$ và gọi $\varphi_j : C \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lợi ích của đấu thủ thứ j . Giả sử $\varphi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_p)$ là lợi ích của đấu thủ j khi đấu thủ này chọn phương án chơi $x_j \in C_j$, còn các đấu thủ k khác chọn phương án chơi là $x_k \in C_k$ với mọi $k \neq j$. Lẽ tự nhiên là mỗi đối thủ đều muốn chọn trong tập chiến lược của mình một phương án sao cho lợi ích là tốt nhất.

Định nghĩa 3.5. (Điểm cân bằng Nash) Ta gọi $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$ là điểm cân bằng của $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ trên tập $C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_p$ nếu với mọi j và mọi $y_j \in C_j$, ta có

$$\begin{aligned} & \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) \\ & \leq \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*). \end{aligned}$$

Định nghĩa này cho thấy rằng nếu một đấu thủ j nào đó rời khỏi phương án cân bằng, trong khi các đấu thủ khác vẫn giữ phương án cân bằng thì đấu thủ j sẽ bị thua thiệt. Đây chính là lí do mà khái niệm cân bằng này được chấp nhận trong thực tế. Điểm cân bằng này được gọi là điểm cân bằng Nash vì khái niệm này do nhà kinh tế học F. Nash đưa ra đầu tiên. Dưới đây bài toán cân bằng Nash sẽ được

hiểu là bài toán tìm một điểm cân bằng (Nash) của φ trên C . Ta sẽ ký hiệu bài toán này là $N(\varphi, C)$. Bài toán cân bằng Nash có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng (EP) như sau

Đặt

$$f(x, y) := \sum_{j=1}^p [\varphi_j(x) - \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_p)].$$

Hiển nhiên nếu x^* là điểm cân bằng Nash thì $f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in C$. Ngược lại, giả sử $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán (EP), tức là $f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in C$. Ta sẽ chứng tỏ $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$ với $x_j^* \in C_j$ là một điểm cân bằng Nash.

Thật vậy, nếu trái lại, sẽ tồn tại j và một $y_j \in C_j$ sao cho

$$\varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) < \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*).$$

Khi đó với phương án $y = \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*)$, theo định nghĩa của hàm f , ta có

$$f(x^*, y) = \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) - \varphi_j(x^*) < 0.$$

Mâu thuẫn với việc x^* là nghiệm của (EP).

Vậy bài toán cân bằng Nash là một trường hợp riêng của bài toán (EP).

Dưới đây, ta sẽ trình bày một phương pháp xấp xỉ để giải bài toán cân bằng. Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm sẽ được dùng trong thuật toán và trong chứng minh sự hội tụ của nó.

Định nghĩa 3.6. Lấy $\xi \geq 0$ và $x \in \mathbb{R}^n$. Điểm $p_x \in C$ được gọi là phép chiếu ξ - xấp xỉ của x trên C nếu p_x là lời giải ξ - xấp xỉ của bài toán

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right\},$$

nghĩa là

$$\frac{1}{2}\|x - p_x\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x - P_C(x)\|^2 + \xi,$$

trong đó $P_C(x)$ là phép chiếu trực giao của x trên C .

Ta chỉ ra được rằng phép chiếu ξ - xấp xỉ của x trên C được đặc trưng bởi

$$\langle x - p_x, p_x - y \rangle \geq -\xi \quad \forall y \in C. \quad (3.4)$$

Định nghĩa 3.7. ε - dưới vi phân đường chéo $\partial_2^\varepsilon f(x, x)$ của song hàm f tại $x \in C$ cho bởi

$$\begin{aligned} \partial_2^\varepsilon f(x, x) &:= \{g \in \mathbb{R}^n : f(x, y) + \varepsilon \geq f(x, x) + \langle g, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}, \\ &:= \{g \in \mathbb{R}^n : f(x, y) + \varepsilon \geq \langle g, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mệnh đề 3.2. Lấy $\{v_k\}$ và $\{\delta_k\}$ là các dãy số thực không âm thỏa mãn $v_{k+1} \leq v_k + \delta_k$ với $\sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < +\infty$. Khi đó dãy $\{v_k\}$ hội tụ.

Mệnh đề 3.3. Lấy θ, β và ξ là những số thực không âm thỏa mãn $\theta^2 - \beta\theta - \xi \leq 0$. Khi đó

$$\beta\theta \leq \beta^2 + \xi. \quad (3.6)$$

Chứng minh.

Xét hàm bậc hai $s(\theta) = \theta^2 - \beta\theta - \xi$. Khi đó $s(\theta) \leq 0$.

Mà

$$\theta \leq \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\xi}}{2},$$

với $\theta > 0$.

Nhân hai vế bất đẳng thức với β và sử dụng tính chất $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ta có

$$\begin{aligned}
\beta\theta &\leq 2^{-1} \left[\beta^2 + \beta\sqrt{\beta^2 + 4\xi} \right] \\
&\leq 2^{-1} \left[\beta^2 + \frac{\beta^2 + \beta^2 + 4\xi}{2} \right] \\
&= 2^{-1} [\beta^2 + \beta^2 + 2\xi] \\
&= \beta^2 + \xi.
\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề được chứng minh. $\square$

3.3.1 Mô tả thuật toán

Lấy p là tham số dương và $\{p_k\}, \{\beta_k\}, \{\varepsilon_k\}, \{\xi_k\}$ xác định bởi các điều kiện:

$$p_k > p, \beta_k > 0, \varepsilon_k \geq 0, \xi_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

$$\sum_1^\infty \frac{\beta_k}{p_k} = +\infty, \quad \sum_1^\infty \beta_k^2 < +\infty, \quad (3.8)$$

$$\sum_1^\infty \frac{\beta_k \varepsilon_k}{p_k} = +\infty, \quad \sum_1^\infty \xi_k < +\infty. \quad (3.9)$$

3.3.2 Các bước giải.

Bước 0: Chọn $x^0 \in C$. Cho $k = 0$.

Bước 1: Lấy $x^k \in C$. Tính $g^k \in \partial_2^{\varepsilon_k} f(x_k, x_k)$. Xác định $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}$, trong đó

$$\gamma_k = \max \{p_k, \|g_k\|\}. \quad (3.10)$$

Bước 2: Tìm $x^{k+1} \in C$ sao cho

$$\langle \alpha_k g^k + x^{k+1} - x^k, x - x^{k+1} \rangle \geq -\xi_k \quad \forall x \in C. \quad (3.11)$$

Chú ý rằng x^{k+1} là phép chiếu ξ_k của $x_k - \alpha_k g^k$ trên C . Cụ thể, nếu $\xi_k = 0$ thì $x^{k+1} = P_C(x^k - \alpha_k g^k)$.

Nếu thuật toán chính xác (tức là $\xi_k = \varepsilon_k = 0 \ \forall k$) và nếu $g^k = 0$ hoặc $x^{k+1} = x^k$ thì x^k là nghiệm của bài toán $EP(f, C)$.

Bổ đề 3.4. *Nếu thuật toán ISPM chính xác tạo nên một dãy hữu hạn thì điểm cuối của dãy là lời giải của bài toán $EP(f, C)$.*

Chứng minh.

Với $\varepsilon_k = 0$ ta có $g_k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$. Theo cách xây dựng, thuật toán sẽ dừng lại ở bước 1 nếu $g_k = 0$.

Bây giờ ta giả sử thuật toán dừng lại ở bước 2, nghĩa là $x^k = x^{k+1}$. Giả sử phản chứng $x^k \notin S(f, C)$. Khi đó tồn tại $x \in C$ sao cho $f(x^k, x) < 0$.

Khi đó ta có

$$0 > f(x^k, x) \geq \langle g^k, x - x^k \rangle. \quad (3.12)$$

Do $x^{k+1} = x^k$ nên (3.11) với $\xi_k = 0$, ta thu được kết quả

$$\langle \alpha_k g^k, x - x^k \rangle \geq 0. \quad (3.13)$$

Từ (3.12) và (3.13) ta thấy được sự mâu thuẫn bởi vì $\alpha_k > 0$, vậy $x^k \in S(f, C)$. $\square$

Mệnh đề 3.4. *Với mỗi k , ta có bất đẳng thức sau:*

$$(i) \ \alpha_k \|g^k\| \leq \beta_k.$$

$$(ii) \ \beta_k \|x^{k+1} - x^k\| \leq \beta_k^2 + \xi_k.$$

Chứng minh.

(i) Từ (3.10) ta có

$$\alpha_k \|g^k\| = \frac{\beta_k \|g^k\|}{\max\{p_k, \|g^k\|\}} \leq \beta_k. \quad (3.14)$$

(ii) Thay $x = x^k$ vào (3.11) ta thu được

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^k\|^2 &\leq \langle \alpha_k g^k, x^k - x^{k+1} \rangle + \xi_k \\ &\leq \alpha_k \|g^k\| \|x^{k+1} - x^k\| + \xi_k \\ &\leq \beta_k \|x^{k+1} - x^k\| + \xi_k.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Với $\theta = \|x^{k+1} - x^k\|$, $\beta = \beta_k$, $\xi = \xi_k$ ta suy ra điều phải chứng minh với mỗi $k \in \mathbb{N}$.

Ta cần giả thiết sau

A1. $S(f, C)$ khác rỗng.

Bổ đề 3.5. *Giả sử rằng A1 tồn tại. Khi đó với mọi $x^* \in S(f, C)$ và với mỗi k ta có*

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k f(x^k, x^*) + \delta_k. \quad (3.16)$$

trong đó $\delta_k = 2\alpha_k \varepsilon_k + 2\beta_k^2 + 4\xi_k$.

Chứng minh.

Bằng biến đổi đại số ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1} \rangle \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1} \rangle.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Kết hợp với (3.11) tại $x = x^*$ ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle \alpha_k g^k, x^* - x^{k+1} \rangle + 2\xi_k \\ &= \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle \alpha_k g^k, x^* - x^k \rangle \\ &\quad + 2\langle \alpha_k g^k, x^k - x^{k+1} \rangle + 2\xi_k.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và mệnh đề 3.4 (i) ta thu được

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle \\ &\quad + 2\beta_k \|x^k - x^{k+1}\| + 2\xi_k.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Kết hợp (3.19) và mệnh đề 3.4 (ii) ta có kết quả

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle + 2\beta_k^2 + 4\xi_k. \quad (3.20)$$

Mặt khác, ta có $g^k \in \partial_2^{\varepsilon_k} f(x^k, x^k)$ nên

$$\langle g^k, x^* - x^k \rangle \leq f(x^k, x^*) + \varepsilon_k.$$

Do đó, với $\alpha_k > 0$ ta có

$$2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle \leq 2\alpha_k f(x^k, x^*) + 2\alpha_k \varepsilon_k. \quad (3.21)$$

Từ (3.20), (3.21) ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Ta cần giả thiết sau

A2. $S(f, C) \subseteq S_d(f, C)$.

Định lí 3.4. *Giả sử ta có giả thiết A1, A2, thì:*

(i) $\{\|x^k - x^*\|^2\}$ hội tụ với mọi $x^* \in S(f, C)$.

(ii) $\{x^k\}$ bị chặn.

Chứng minh.

(i) Lấy $x^* \in S(f, C)$, $k \in N$.

Theo A2 ta có $f(x^k, x^*) \leq 0$, kết hợp với bổ đề 3.5 thu được

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + \delta_k. \quad (3.22)$$

trong đó $\delta_k = 2\alpha_k \varepsilon_k + 2\beta_k^2 + 4\xi_k$.

Do đó, kết hợp với (3.8), (3.9), (3.10) ta có

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k < +\infty. \quad (3.23)$$

Kết hợp các kết quả (3.22), (3.23) và mệnh đề 3.4 thì $\{\|x^k - x^*\|^2\}$ là dãy hội tụ.

(ii) Từ (i) ta dễ dàng suy ra được (ii). $\square$

Ta cần các giả thiết sau

A3. ε dưới vi phân đường chéo là tập bị chặn trên mọi tập bị chặn của C .

A3'. Dãy $\{g^k\}$ bị chặn.

Định lí 3.5. *Giả sử có giả thiết A1 và A2. Với giả thiết A3 hoặc A3' ta có*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup f(x^k, x^*) = 0 \quad \forall x^* \in S(f, C).$$

Chứng minh.

Lấy $x^* \in S(f, C)$. Theo bổ đề 3.5 và A2 ta thu được kết quả

$$0 \leq 2\alpha_k [-f(x^k, x^*)] \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \delta_k. \quad (3.24)$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \sum_{k=0}^m \alpha_k [-f(x^k, x^*)] \\ &\leq \|x^0 - x^*\|^2 - \|x^{m+1} - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k \\ &\leq \|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Khi $m \rightarrow \infty$ ta có

$$0 \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k [-f(x^k, x^*)] \leq \|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k. \quad (3.26)$$

Kết hợp với (3.23) ta có

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k [-f(x^k, x^*)] < +\infty. \quad (3.27)$$

Mặt khác theo A3 và A3' ta có $\{\|g_k\|\}$ bị chặn.

Mà ta lại có $\{x^k\}$ bị chặn. Do đó từ (3.7), (3.10) ta chỉ ra rằng tồn

tại $L \geq p : \|g^k\| \leq L, \forall k \in \mathbb{N}$.

Nên ta suy ra

$$\frac{\gamma_k}{\rho_k} = \max \{1, \rho_k^{-1} \|g^k\|\} \leq \frac{L}{\rho} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \geq \frac{\rho}{L} \frac{\beta_k}{\rho_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

Vậy từ (3.27) và (3.28) ta có

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} [-f(x^k, x^*)] < +\infty. \quad (3.29)$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Ta cần các giả thiết sau

A4. Lấy $x^* \in S(f, C)$ và $\bar{x} \in C$. Nếu $f(\bar{x}, x^*) = f(x^*, \bar{x}) = 0$ thì $\bar{x} \in S(f, C)$.

A5. $f(., y)$ là nửa liên tục trên với mọi $y \in C$.

Định lí 3.6. Giả sử các điều kiện A1, A2, A3 hoặc A3', A4, A5 thỏa mãn. Khi đó dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến nghiệm của $EP(f, C)$.

Chứng minh.

Lấy $x^* \in S(f, C)$. Theo định lí 3.5, tồn tại một dãy con $\{x^{k_j}\}$ của $\{x^k\}$ sao cho

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, x^*). \quad (3.30)$$

Theo định lý 3.4, ta có dãy $\{x^{k_j}\}$ bị chặn.

Do đó, tồn tại $\bar{x} \in C$ và dãy con $\{x^{k_j}\}$ sao cho

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j} = \bar{x}. \quad (3.31)$$

Kết hợp giả thiết $A5$ với định lí 3.5 ta có

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}, x^*) &\geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, x^*) \\
 &= \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, x^*) \\
 &= \limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, x^*) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Từ giả thiết $A2$ ta có $f(\bar{x}, x^*) \leq 0$ nên:

$$f(\bar{x}, x^*) = 0. \tag{3.33}$$

Từ $A4$ ta có $\bar{x} \in S(f, C)$.

Mặt khác theo định lí 3.4 ta có dãy $\{\|x^k - \bar{x}\|^2\}$ hội tụ.

Kết hợp (3.31), với $\bar{x} \in S(f, C)$ ta được

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = \bar{x}.$$

□

Kết luận chung

Luận văn nghiên cứu về phép chiếu xuống tập lồi đóng trong không gian Hilbert thực và một số ứng dụng. Những kết quả của luận văn là:

1. Chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của phép chiếu xuống tập lồi đóng trong không gian Hilbert thực. Khảo sát các tính chất cơ bản của toán tử chiếu này và tính được cụ thể tập chiếu trong các trường hợp đặc biệt.
2. Dùng phép chiếu vuông góc chứng minh sự tồn tại nghiệm và phương pháp giải bài toán cân bằng trong không gian hữu hạn chiều.
3. Sử dụng phép chiếu chứng minh định lý tách và chứng minh này đã gợi ý cho việc tính siêu phẳng tách.
4. Sử dụng phép chiếu chứng minh sự tồn tại nghiệm và gợi ý cách tính dưới vi phân của hàm lồi.
5. Sử dụng phép chiếu để xây dựng thuật toán chiếu giải bài toán cân bằng.

Tài liệu tham khảo

Tài liệu Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Xuân Liêm (1997), *Giải tích hàm*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
- [2] Đỗ Văn Lưu, Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [3] Lê Dũng Mưu và Nguyễn Văn Hiền (sẽ ra), *Nhập môn giải tích lồi ứng dụng*, Nxb Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.
- [4] Lê Dũng Mưu (1998), *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [5] Hoàng Tụy (2006), *Lý thuyết tối ưu*, Viện toán học, Hà Nội.

Tài liệu Tiếng Anh

- [6] P. N. Anh and L. D. Muu (2004), *Coupling the Banach Contraction Mapping Principle and the Proximal Point Algorithm for Solving Monotone Variational Inequalities*, Acta Math Vietnamica, **29**, pp. 119-133.
- [7] P. N. Anh and L. D. Muu (2006), *Contraction Mapping Fixed Point Algorithms for Multivalued Mixed Variational Inequalities*, Optimization with Multivalued Mappings, Eds Stephan D. and Vyacheslav K., Springer.

- [8] Hoang Tuy (1997), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.
- [9] Paulo Santos and Susana Scheimberg (2011), *Computational and Applied Mathematics*, **30**, pp. 91 -107.