BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI

* * *

ĐỀ TÀI B93-0572

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ TRONG GIẢI TÍCH HIỆN ĐẠI

Chủ trì đề tài: PGS TS Nguyễn Văn Mậu

Hà Nội 1995

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
Trường Đại Học Tổng Hợp Hà Nội
———★★★———

A. BÁO CÁO TÓM TẮT
KẾT QỦA VÀ TÌNH HÌNH THỰC HIỆN ĐỀ TÀI CẤP BỘ
Năm 1993-1995

1. Tên đề tài:

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ TRONG GIẢI TÍCH HIỆN ĐẠI

2. Mã số : B93-0572

3. Chủ trì đề tài: PGS TS Nguyễn Văn Mậu,

Chủ nhiệm Bộ môn Giải tích,

Khoa Toán-Cơ-Tin học, ĐHTH Hà nội.

Các thành viên:

Trần Huy Hổ, Nguyễn Thủy Thanh, Nguyễn Vũ Lương,
Phạm Quang Hưng, Nguyễn Minh Tuấn.

4. Mục tiêu và nội dung nghiên cứu:

a) Nghiên cứu các bài toán nội suy tổng quát
b) Phép tính vi tích phân trừu tượng trong không gian rời rạc
c) Các bài toán biên trong Giải tích - Đại số.
d) Phương pháp giải phương trình tích phân kỳ dị.
e) Ứng dụng trong giảng dạy các chuyên đề của giải tích hiện đại.

5. Tình hình thực hiện đề tài :

Phương hướng biểu diễn nghiệm của các bài toán trong Giải tích đóng vai trò trung tâm trong các nghiên cứu gần đây của các nhà chuyên môn về Giải tích.

Trong khoảng 20 năm gần đây, người ta bắt đầu tập trung nhiều trong việc khai thác các phương pháp đại số. Đó là việc nghiên cứu các cấu trúc đại số, các thuật toán cơ bản và khái quát hóa các khái niệm trung tâm của Giải tích như phép tính vi phân, tích phân, toán tử biên và toán tử ban đầu, ... dưới ngôn ngữ của giải tích hàm là lý thuyết toán tử.

Từ đó cho các mô tả tổng quát các lớp nghiệm, giải một số lớp bài toán tổng quát.

Ngoài ra, rất nhiều bài toán nhận được từ thực tế không có những mô hình toán học đã được thiết lập trước đó, cần thiết phải có những công cụ sắc bén hơn để tìm cách chuyển hóa chúng về những dạng chính tắc có thuật toán hữu hiệu và tổng quát để giải. Vì vậy các mô hình đại số đã có những ứng dụng hữu hiệu và đặc biệt là rất đơn giản, không cần viện trợ đến các khái niệm sâu sắc của Giải tích như: Tính hội tụ, tô pô, độ đo,... Nhờ vậy mà có thể giúp cho những nhà kỹ thuật và nhiều người làm thực tế cũng như các sinh viên mau chóng nắm bắt được các phương pháp của Giải tích hiện đại và sử dụng chúng như một công cụ đắc lực trong các công việc nghiên cứu một cách có hiệu qủa.

Các kết qủa nghiên cứu đã được thể nghiệm trong giảng dạy một số chuyên đề cho các lớp cao học về chuyên ngành *Phương pháp toán sơ cấp*, như:

- ***Phương pháp giải tích đại số***
- ***Lý thuyết toán tử tuyến tính và phương trình toán tử***
- ***Đặc trưng hàm của các hàm số và phương trình hàm.***

Trong thời gian qua, từ tháng 4-1993 đến nay, đề tài đã tiến hành theo trình tự sau đây:

- Hàng tuần có 2 seminar khoa học được tiến hành tại

ĐHTH Hà Nội (sáng thứ Năm)

và tại

ĐHBK Hà Nội (sáng thứ Sáu),

với sự tham gia của đông đảo các nhà chuyên môn trong và ngoài trường.

Kết qủa:

-5 báo cáo khoa học tại Hội nghị khoa học khoa Toán- -Cơ-Tin học, ĐHTH Hà nội, 6/1994.

-8 bài báo khoa học đăng trong tạp chí chuyên ngành Trường ĐHTH Hà nội.

-Một báo cáo mời tại hội nghị quốc tế về giải tích ứng dụng.

-Đã chi:

- Chi cho hoạt động seminar: 140 buổi thuyết trình (mỗi buổi: 30.000 đồng): 4.200.000 đồng.
- Chi cho thông tin tư liệu in ấn, mua đĩa mềm và thuê giờ máy soạn thảo văn bản: 1.500.000 đồng.
- Chi cho 5 báo cáo khoa học tại
  Hội Nghị Khoa Học 6/1994 (mỗi báo cáo :100.000 đồng): 500.000 đồng.
- Chi cho 8 bài báo khoa học (mỗi bài: 200.000 đồng): 1.600.000 đồng.
- Nộp Khoa: 400.000 đồng.

B. PHẦN CHÍNH BÁO CÁO

I. Lý thuyết các bài toán nội suy tổng quát

Các bài toán nội suy cổ điển của Giải tích đã xuất hiện cách đây hơn một thế kỷ, khởi đầu bằng các công trình khoa học của các nhà toán học lỗi lạc như Lagrange, Hermite, Newton,... và đã tìm thấy rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết các bài toán biên và trong các bài toán của Vật Lý Toán và của Kỹ thuật.

Trong khoảng hai mươi năm gần đây, các nhà Giải tích đã tìm cách xây dựng một lý thuyết hoàn chỉnh, nhằm thống nhất các bài toán riêng rẽ thành một lý thuyết trừu tượng tổng quát, từ đó đưa ra các mô hình tổng quát và xây dựng các thuật toán hữu hiệu để mô tả lớp nghiệm dưới dạng biểu thức đại số. Hướng này đã được phát triển mạnh mẽ ở Balan, CHLB Đức, Úc, Mỹ như D. Przeworska-Rolewicz, S. Rolewicz, Z. Binderman, von Trotha, B. Tasche, L. Berg, H. Lauch,...

Đó là việc thay thế các toán tử vi phân, giả vi phân, tích phân và các phép biến đổi hàm bằng các toán tử trừu tượng khả nghịch phải D sao cho tồn tại $R \in L_0(X)$ thỏa mãn điều kiện $DR = I$ trong miền domD. Khi đó các phương trình truyền thống sẽ có dạng

$$\sum_{k=0}^{n} A_k D^k x = y, \quad y \in X$$

cùng với các điều kiện ban đầu kiểu Cauchy

$$F_j D^k x = x_{jk}, \quad x_{jk} \in \ker D, \quad j \in \{1, ..., m\}, \quad k \in \{0, ..., r_j\}.$$

Khi đó bài toán nội suy Lagrange được phát biểu như sau:

Tìm nghiệm u của phương trình $D^n u = 0$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$F_j u = x_j, \quad j = 1, 2, ..., n$$

trong đó $x_j \in \ker D$ cho trước, F_j là hệ thống các toán tử ban đầu cảm sinh bởi D.

Tương tự ta cũng có các dạng mô hình trừu tượng cho các bài toán nội suy kiểu Hermite, Newton,...

Hầu hết các bài toán truyền thống dạng cổ điển đã được nghiên cứu hoàn chỉnh và lý thuyết khái quát hóa chúng đã được xây dựng chặt chẽ như là một chuyên ngành mới độc lập và có tính tổng hợp rất cao. Lý thuyết này đã được mang một cái tên mới là Giải tích - Đại số.

Tuy nhiên, còn rất nhiều bài toán của Vật lý- Toán và của Kỹ thuật chưa được bao quát trong lý thuyết đã nêu.

Tác giả Phạm Quang Hưng đã thành công trong việc giải quyết các bài toán hỗn hợp không cổ điển đầu tiên trong lớp các bài toán nội suy. Đó là lớp các bài toán nội suy tổng quát không thỏa mãn điều kiện $c(R)$, thường vẫn được áp đặt trong lớp các bài toán truyền thống:

$$F_j R^k z = \left(\frac{c_{jk}}{k!}\right)z, \quad \text{với} \quad R \in \mathcal{R}_D, z \in \ker D, c_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Hàng loạt bài viết của Phạm Quang Hưng theo hướng này cho thấy công cụ mà tác giả thiết lập đã có những ưu việt rõ rệt, không những giải được nhiều lớp bài toán mới mà trước đây chưa có thuật toán hữu hiệu, mà còn mô tả được lớp nghiệm dưới dạng hiển.

Lớp các toán tử Green đối với bài toán giá trị biên tổng quát cho một toán tử trừu tượng khả nghịch phải đã được xây dựng trong các trường hợp khi lớp các toán tử ban đầu chỉ thỏa mãn tính chất $c(R)$ suy rộng, mà không đòi hỏi các tiêu chuẩn một chiều của hạch như đã được xét trước đây của hầu hết các tác giả. Dựa trên công thức Green, đã biểu diễn được lớp nghiệm của bài toán nội suy dưới dạng hiển qua các kết thức của bài toán tổng quát đã nêu.

Trong trường hợp tổng quát, khi các ràng buộc đối với lớp các toán tử ban đầu của bài toán nội suy Lagrange không đòi hỏi thỏa mãn , các tiêu chuẩn độc lập tuyến tính mạnh của hệ các toán tử ban đầu đã được đưa ra nhằm chứng minh tính thiết lập đúng đắn của bài toán đã nêu và đồng thời chỉ ra rằng các tiêu chuẩn nhận được là các điều kiện cần và đủ, điều đó đặc biệt có ý nghĩa khoa học về mặt lý thuyết, nó mô tả được các mối quan hệ giữa tiêu chuẩn khả nghịch của ma trận cơ bản cảm sinh từ bài toán đã nêu với các dữ kiện ban đầu của các điều kiện Cauchy tổng quát.

Các tiêu chuẩn tổng quát đã nêu ở trên được các tác giả Nguyễn Văn Mậu và Phạm Quang Hưng áp dụng để biểu diễn nghiệm của bài toán nội suy cổ điển tổng quát, mà các trường hợp riêng là các bài toán nội suy Lagrange, Hermite, Newton,... Thuật toán đã được nghiên cứu hoàn chỉnh không những về mặt lý thuyết mà cả trong lĩnh vực ứng dụng. Ở đây cũng đưa ra được các điều kiện cần và đủ để bài toán nội suy tổng quát có nghiệm duy nhất và phương pháp xây dựng nghiệm dưới dạng hiển.

Ngoài ra chúng tôi còn xây dựng được các dạng hiển của công thức nội suy của nhiều lớp bài toán hỗn hợp suy rộng kiểu Lagrange-Newton, Lagrange-Hermite,...

Các kết qủa nhận được đã cho thấy bức tranh toàn cục của các bài toán nội suy và các mối liên hệ sâu sắc giữa chúng với các dạng khác nhau của bài toán biên, bài toán ban đầu cũng như lớp các bài toán biên hỗn tạp. Thực chất, tất cả các kết qủa nhận được từ các bài toán nội suy sẽ cho ta cơ sở xây dựng nghiệm của bài toán biên. Phương pháp này đã được mô tả chi tiết trong [1].

Một vài ứng dụng trực tiếp của bài toán nội suy Lagrange trong việc tình các tổng hữu hạn, đã được Trịnh Đào Chiến xây dựng trong Luận văn Thạc sỹ (xem [5]).

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

[1] Phạm Quang Hưng, ***Bài toán giá trị biên tổng quát đối với đa thức các toán tử khả nghịch phải***, Tạp chí KHOA HỌC, No4 (1994), 9-16.

[2] Phạm Quang Hưng, ***On Lagrange interpolation problem induced by right invertible operators***, Journal of Science-1993, Special Issue on Mathematics, Mechanics and Informatics, 15-20.

[3] Nguyễn Văn Mậu and Phạm Quang Hưng, ***On a general classical interpolation problem***, Journal of Science-1993, special Issue on Mathematics, Mechanics and Informatics, 2-6.

[4] Phạm Quang Hưng, ***Toán tử Green đối với bài toán giá trị biên với một toán tử khả nghịch phải*** D^N, Tạp chí KHOA HỌC, No7 (1994), 11-18.

[5] Trịnh Đào Chiến, ***Một số vấn đề về dãy số***, Luận văn Thạc sỹ Toán Lý, ĐHTH 1995.

II. TOÁN TỬ SAI PHÂN SUY RỘNG

Một trong những hướng quan trọng của giải tích đại số là mô tả lớp các toán tử khả nghịch phải trong không gian rời rạc, đặc biệt là các không gian dãy vô hạn. Lớp các toán tử sai phân cổ điển và các phương trình sai phân với hệ số hằng là các đối tượng quan trọng trong các phương pháp số để giải gần đúng các phương trình vi tích phân hàm với các điều kiện biên cổ điển.

Các đặc trưng quan trọng nhất của các toán tử khả nghịch phải trong các không gian rời rạc còn được đề cập dưới các dạng riêng rẽ, chưa được hệ thống và chưa có một mô hình hoàn chỉnh để thống nhất các thuật toán riêng rẽ thành một cơ sở lý thuyết hoàn chỉnh.

Trong hướng này, Nguyễn Vũ Lương đã có những đóng góp đáng kể, có ý nghĩa khoa học không những về mặt lý thuyết, mà còn mở ra các khả năng ứng dụng hữu hiệu trong việc giải các phương trình và các bài toán biên phức hợp.

Giả sử X là không gian các dãy số vô hạn trên một trường $\mathcal{F}$ cho trước và $D \in L_0(X)$ là một toán tử khả nghịch phải với $\dim \ker D < +\infty$.

Trong [1], tác giả đã mô tả được lớp các nghịch đảo phải Volterra $R \in \mathcal{R}_D$ của D. Nhờ các đặc trưng này, đã mô tả đầy đủ tập hợp các nghịch đảo phải của một toán tử sai phân suy rộng tùy ý cho trước. Hơn thế nữa, tác giả đã dựng được dạng hiển của các dạng sai phân có hạch là một tập hữu hạn chiều cho trước. Nó cho phép xét các phương trình sai phân quen biết như những trường hợp riêng, và vì vậy, đã cho được thuật toán dựng nghiệm tường minh của các phương trình sai phân với hệ số biến thiên dạng

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_{n+k} = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

và dạng trừu tượng tổng quát

$$\sum_{k=0}^{n} A_k D^k x = y, \quad D \in R(X), A_k \in L_0(X).$$

Chú ý rằng, cho đến nay, các dạng phương trình này chỉ mới được đề cập riêng rẽ như những ví dụ độc lập, chưa được khái quát hóa và chưa có được một lý thuyết hoàn chỉnh để nghiên cứu chúng.

Trong [3], đưa ra các điều kiện cần và đủ để một nghịch đảo phải của toán tử sai phân có trọng vô hướng biến thiên dạng

$$D_p\{x_n\} = \{x_{n+1} - p, x_n\}, \quad x = \{x_n\} \in X$$

là một toán tử Volterra. Trường hợp riêng khi trọng là hằng số đã được một số các tác giả như Kalfat, Przeworska-Rolewicz,... khảo sát. Các kết qủa nhận được ở đây cho thấy các lược đồ xây dựng các dạng tường minh của các nghịch đảo phải kiểu Volterra. Từ đó cho được câu trả lời cho bài toán sau đây: Khi nào thì thì hệ các nghịch đảo phải Volterra là độc lập tuyến tính.

Cũng theo phương pháp tương tự, chúng tôi cũng nhận được một số kết qủa mới đối với các toán tử cảm sinh bởi các đạo hàm cổ điển như:

$$D_p\{x_n\} = \{p_n x_n\}, \quad \text{và} \quad D_p\{x_n\} = \{x_{n+k} - x_n + A\{x_n\}\}.$$

Đặc biệt, trong một số trường hợp riêng, ta nhận được các công thức biểu diễn nghiệm của các dãy Fibonacci tổng quát với hệ số biến thiên.

Các kết qủa này đã có những ứng dụng cụ thể trong các bài toán mô tả số hạng tổng quát của một số lớp dãy số, trong đó có những dãy số phi tuyến (xem Trịnh Đào Chiến [5]) và được ứng dụng trong phương trình hàm (xem Lê Quang Hòa [4]).

Gần đây chúng tôi đã thu được các tiêu chuẩn Volterra cho những lớp toán tử mà các thành phần của chúng là những phần tử của một không gian tuyến tính tổng quát. Từ đó cho bức tranh toàn cục tổng quát của nhiều dãy các toán tử quen biết của giải tích, như toán tử Cauchy, Laplace, Fourie,...

Đặc biệt là đã khái quát hóa được lớp các hàm lượng giác trừu tượng cho dãy toán tử và thiết lập được các các đẳng thức lượng giác. Hầu hết các kết trong trường hợp trọng vô hướng đã được chứng minh và thiết lập các đặc trưng tương tự cho toán tử với trọng đại số dạng

$$D_P\{x_n\} = \{P_n x_n\}, \quad D_A\{x_n\} = \{x_{n+1} - A_n x_n\},$$

với $P_n, A_n \in L_0(X), n \in N, x_n \in X$.

Ngoài ra, bàng thuậtoán tuyến tính hóa, một loạt các toán tử phi tuyến dạng

$$V\{x_n\} = \{x_{n+1}\}, \quad x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$$

và

$$U\{x_n\} = \{x_{n+2}\}, \quad x_{n+2} = ax_{n+1} \pm \sqrt{bx_n + c}$$

đều có thể tuyến tính hóa được để đưa về các dạng sai phân tuyến tính suy rộng mà công thức biểu diễn nghiệm đã được thiết lập.

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

[1] Nguyễn Vũ Lương, *On a class of generalized difference operators*, Journal of Science-1993, Special Issue on Mathematics, Mechanics and Informatics, 21-25.

[2] Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Văn Mậu, *Tiêu chuẩn Volterra đối với nghịch đảo phải của một lớp toán tử trong không gian rời rạc*, Tạp chí KHOA HỌC, No7 (1994), 1-5.

[3] Nguyễn Vũ Lương, *Tiêu chuẩn Volterra của nghịch đảo phải đối với toán tử sai phân có trọng*, Tạp chí KHOA HỌC, No1 (1992), 13-17.

[4] Lê Quang Hòa, *Phương trình hàm*, Luận văn Thạc sỹ Toán Lý, ĐHTH Hà Nội 1995.

III. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN KỲ DỊ VỚI ARGUMENT BIẾN ĐỔI

Lớp các phương trình tích phân kỳ dị là đối tượng nghiên cứu cơ bản của các bài toán biên của hàm giải tích. Một số dạng phương trình đặc trưng có thể biểu diễn nghiệm thông qua bài toán Rieman

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad G, g \in H^\alpha(\Gamma).$$

Tuy nhiên khi phương trình tích phân kỳ dị

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{x(s)ds}{s-t} = c(t), t \in \Gamma$$

có tham gia các toán tử dịch chuyển $(Wx)(t) = x(\beta(t))$ thì cấu trúc nghiệm không còn như trước nữa. Hầu hết các dạng phương trình tương ứng đều không có thuật toán hữu hiệu để giải. Vì vậy, việc xây dựng lớp các bài toán tổng quát cho nghiệm dưới dạng tường minh có một ý nghĩa quan trọng. Các kết qủa cơ bản theo hướng này, chủ yếu tập trung vào việc khảo sát các đặc trưng đại số của lớp các toán tử tích phân kỳ dị tổng quát.

Xét các toán tử tích phân sau đây:

$$(Sx)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{x(s)ds}{s-t},$$

$$(S_{n,k}x)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{s^k t^{n-1-k}}{s^k - t^k}x(s)ds,$$

$$(M_{n,k}x)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{s^k t^{n-1-k}\mathcal{M}_k(s,t)}{s^k - t^k}x(s)ds,$$

trong đó $\mathcal{M}_k(s,t)$ là các hàm thác triển giải tích được theo từng biến vào miền $D^+ = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$.

Như ta đã biết, một trong những đặc trưng đại số quan trọng nhất của toán tử tích phân kỳ dị Cauchy là tính đối hợp của nó ($S^2 = I$). Cũng như vậy, chúng tôi đã thiết lập được các đẳng thức tương tự cho các toán tử $S_{n,k}$ và $M_{n,k}$:

$$S_{n,k}^3 = S_{n,k}, \quad M_{n,k}^3 = M_{n,k}, \quad S_{n,k} = SP_k, \quad M_{n,k} = (S + N_k)P_k,$$

với P_k là các phép chiếu sinh bởi toán tử quay $(Wx)(t) = x(\epsilon t)$, $\epsilon = exp\{\frac{2\pi i}{n}\}$.

Áp dụng các đặc trưng đại số này và thuật toán đã biết của lý thuyết các bài toán biên cổ điển, ta có thể giải được một số lớp phương trình tích phân kỳ dị dạng đầy đủ có chứa các toán tử dịch chuyển và phần đều trong hạch của tích phân:

$$a(t)x(t) + b(t)(S_{n,k}x)(t) = c(t)$$

và

$$a(t)x(t) + b(t)(M_{n,k}x)(t) = c(t).$$

Một số dạng phương trình tổng quát với dịch chuyển thỏa mãn điều kiện Carleman bậc n đã được Nguyễn Minh Tuấn xét trong [1]:

$$\sum_{k=0}^{n} A_j S^j x = y, \quad S^n = I, \quad A_j \in L_0(X).$$

Đặc biệt khi trong phương trình không chứa toán tử tích phân kỳ dị, ta nhận được phương trình hàm với argument biến đổi. Đó là các phương trình hàm dạng

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)(A^j x)(t) = g(t), \quad (Ax)(t) = x(\alpha(t))$$

đã được Phạm Đăng Long nghiên cứu trong [2].

Một số các đặc trưng khác của toán tử tuyến tính rất được các nhà Giải tích và vật lý lý thuyết quan tâm nghiên cứu. Đó là các đặc trưng hoán tử. Từ các đặc trưng đó sẽ cho ta tiêu chuẩn giao hoán của một cặp toán tử tuyến tính.

Trong [3], Phan Khánh Tâm đã mô tả được tập hợp các toán tủ giao hoán với các toán tử tuyến tính sinh bởi các biến đổi trong giải tích, như toán tử ban đầu, toán tử khả nghịch một phía và toán tử đại số.

Lớp phương trình hàm xác định trên toàn trục thực hoặc trên một khoảng của trục thực đã được Lê Quang Hòa khảo sát trong [4]. Tác giả đã mô tả được hầu hết các đặc trưng cơ bản nhất của các hàm sơ cấp như lớp hàm đa thức, căn thức, mũ và logarit cũng như lớp các hàm lượng giác và lượng giác ngược.

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

[1] Nguyễn Minh Tuấn, *Conditions for generalized invertibility of polynomials in algebraic operators*, Journal of Science-1993, Special Issue on Mathematics, Mechanics and Informatics, 29-34.

[2] Phạm Đăng Long, *Remarks on functional equations with transformed argument*, Journal of Science, Special Issue on Mathematics, Mechanics and Informatics, 7-14.

[3] Phan Khánh Tâm, *Some properties of commutators with one sided invertible operators*, Journal of Science, Special Issue on Mathematics, Mechanics and Informatics, 26-28.

[4] Lê Quang Hòa, *Phương trình hàm*, Luận văn thạc sỹ Toán-Lý, ĐHTH Hà Nội 1995.

IV. KẾT LUẬN

Phương pháp giải tích đại số ngày càng được xây dựng hoàn chỉnh như một lĩnh vực toán học độc lập và đã tỏ ra có những hiệu lực rất to lớn trong nhiều chuyên ngành khác nhau của toán học. Đặc biệt, trong lý thuyết giải tích hiện đại, khi số lượng các mô hình đưa ra đã qúa tải, không đáp ứng được cho những ứng dụng trực tiếp, mà chỉ dừng lại trong các khuôn khổ thuần tuý của logic hình thức với các cấu trúc và những thuật toán định tính như: các tiêu chuẩn giải chuẩn, tính ổn định và ước lượng số nghiệm, thì việc hệ thống hóa, khái quát hóa và thuật toán hữu hiệu để giải các bài toán có cùng một cội nguồn là nhu cầu bức thiết trong các hoạt động thực tiễn.

Đề tài này đã tiệm cận được một số hướng của toán học hiện đại, đã xây dựng hoàn chỉnh được một số mô hình phức tạp, thu gọn được nhiều cấu trúc khác nhau trong các mô hình tổng quát.

Về mặt lý thuyết, đã có những đóng góp thiết thực, mang tính thời sự và có ý nghĩa khoa học. Những kết qủa cơ bản đã được tổng kết dưới dạng hoàn chỉnh. Một số kết qủa khác đã được gửi đăng đang chờ các đánh giá của các nhà chuyên môn trong và ngoài nước. Các kết qủa này hiện tại chưa được liệt kê chi tiết ở đây.

Về mặt ứng dụng cũng có một số kết qủa quan trọng. Trong đó, phải kể đến việc cải tiến các giáo trình cho các lớp sau đại học. Nó cho phép với một thời gian hợp lý có thể dạy cho các học viên nắm bắt được nhiều tư tưởng của toán học hiện đại mà trước đây thường phải xé lẻ thành các chuyên đề hẹp khác nhau. Đặc biệt cần nhấn mạnh rằng, ngay đối với các giáo viên phổ thông cũng đã tìm thấy trong đề tài này những ứng dụng phong phú trong lĩnh vực chuyên môn của mình một cách hữu hiệu. Những luận văn thạc sỹ Toán - Lý về toán sơ cấp là những minh chứng đầy sức thuyết phục.

Đề tài đã có những ảnh hưởng sâu sắc đến các hoạt động khoa học thường xuyên của các thành viên seminar khoa học của hai trường ĐHTH Hà Nội và ĐHBK Hà Nội. Sự tài trợ về mặt kinh phí của đề tài đã đem lại những hiệu qủa thiết thực.

JOURNAL OF SCIENCE - 1993
Special issue on Mathematics, Mechanics and Informatics

ON A GENERAL CLASSICAL INTERPOLATION PROBLEM

NGUYEN VAN MAU, PHAM QUANG HUNG
Faculty of Mathematics, Hanoi University

The general interpolation problem induced by a right invertible operator with initial operators possessing the property (c) was investigated by Przeworska - Rolewicz [7] (cf. also [2-9]). In [3] we found a general necessary and sufficient condition for this problem to have a unique solution. In the present note we give some other conditions for the general classical interpolation problem to be well-posed and then construct its unique solution in an evident form.

1.

By a general classical interpolation problem with N conditions (shortly: $(GI)_N$ - problem) we mean the following problem: To find a polynomial $x(t)$ of degree $N-1$ such that

$$x^{(s_k-1)}(t_{kj}) = a_{kj}, \quad a_{kj} \in C,\ t_{kj} \in R,\ t_{ki} \neq t_{kj} \quad \text{for } i \neq j, \tag{1}$$

$k = 1, \ldots, n;\ i, j = 1, \ldots, r_k;\ s_0 = 0 < s_1 < \cdots < s_{n-1};\ r_1 + \cdots + r_n = N,\ r_0 = 0.$ (Note that here we do not admit $t_{ki} \neq t_{mj}$ for $k \neq m$).

This problem is said to be well-posed if has a unique solution for every $a_{kj} \in C$ ($k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r_k$). If either there exist a_{kj} such that this problem has no solutions or the corresponding problem with $a_{kj} = 0$ ($k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r_k$) has at least one nontrivial solution then $(GI)_N$ - problem is said to be ill-posed.

Write:

$$g_N(t) = (1, t, \ldots, t^{N-1}), \quad g_N^{(k)}(t) = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, k!, \frac{(k+1)!}{1!}t, \ldots, \frac{(N-1)!}{(N-1-K)!}t^{N-k}\Big), \tag{2}$$

$$\mu \simeq (k, j) \quad \text{if} \quad \mu = r_0 + \cdots + r_{k-1} + j, \quad a_\mu = a_{kj},\ t_\mu = t_{kj} \quad \text{for } \mu \simeq (k, j),$$

$$g_{N,\mu} = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{S_{k-1}}, (s_{k-1})!, \frac{(s_{k-1}+1)!}{1!}t_{kj}, \ldots, \frac{(N-1)!}{(N-s_{k-1})!}t_{kj}^{N-S_{k-1}}\Big) \quad \text{for } \mu \simeq (k, j), \tag{3}$$

$$G_N = \begin{pmatrix} g_{N,1} \\ g_{N,2} \\ \vdots \\ g_{N,N} \end{pmatrix}, \quad G_{N,\mu}(t) = \begin{pmatrix} g_{N,1} \\ \vdots \\ g_{N,\mu-1} \\ g_N(t) \\ g_{N,\mu+1} \\ \vdots \\ g_{N,N} \end{pmatrix}, \ \mu = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

$$V_N = \det G_N, \quad V_{N\mu}(t) = \det G_{N\mu}(t) \tag{5}$$

It is easy to see that every $V_{N\mu}(t)$ is a polynominal with deg $V_{N,\mu} \leq N-1$.

In the sequel, by $V_{N-1,\mu}$ we denote the minor determinant obtained by cancelling in V_N the μ-th colum and the N-th row ($\mu = 1,\dots,N$).The corresponding interpolation problem with $N-1$ conditions (without the last condition: $x^{(s_n-1)}(t_{nr_n}) = a_{nr_n}$) is called by $(GI)_{N-1}$ - problem. Similarly, for this problem we also have the denotations as $g_{N-1}(t)$, G_{N-1}, ...

Lemma 1. If $\mu \simeq (k,j)$ then

$$V_{N,\mu}^{(s_k-1)}(t_{kj}) = V_N. \tag{6}$$

Proof is immediately follows from formulae (2) - (5).

Lemma 2. If $\mu \neq (k,j)$ then

$$V_{n\mu}^{(s_k-1)}(t_{kj}) = 0. \tag{7}$$

Proof. Let $m \simeq (k,j)$ then $g_N^{(s_k-1)}(t_{kj}) = g_{N,m}$. Hence, in the corresponding matrix of $V_{N,\mu}^{(s_k-1)}(t_{kj})$ two rows are the same. Thus (7) is valid.

Theorem 1. A necessary and sufficient condition for $(GI)_N$ - problem to be well-posed is $V_N \neq 0$. If it is the case, a unique solution of $(GI)_N$ - problem is given by the formula

$$x(t) = V_N^{-1} \sum_{m=1}^{N} a_m V_{Nm}(t). \tag{8}$$

Proof. Write:

$$x(t) = \sum_{m=1}^{N} u_m t^m, \quad u := (u-1,\dots,u_N)^T,$$

$a := (a_1,\dots,a_N)^T$. The condition (1) imply that u is a solution of the system

$$G_N u = a \tag{9}$$

if and only if $x(t)$ is a solution of $(GI)_N$ - problem. Obviously, $(GI)_N$ - problem is well-posed if and only if the linear system (9) has a unique solution for every a, i.e. Iff $V_N \neq 0$.

Formula (8) immediately follows from (6)-(7).

Corollary 1. The general boundary value problem

$$x^{(N)}(t) = y(t), \quad x^{(s_k-1)}(t_{kj}) = a_{kj} \ (k = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,r_k) \tag{10}$$

is well-posed if and only if $V_N \neq 0$. If it is the case, a unique solution of the problem (10) is of the form

$$x(t) = V_N^{-1} \sum_{m=1}^{N} a_m V_{Nm}(t) + R^N y - V_N^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_k} (R^{N-s_k-1} y)(t_{kj}), \tag{11}$$

where $R = \int_0^t$.

Indeed, if we put $x = v + R^N y$ we get $(GI)_N$ - problem for $v(t)$ with N conditions:

$$v^{(s_{k-1})}(t_{kj}) = a_{kj} - \left(R^{N-s_{k-1}}y\right)(t_{kj}),\ k = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,r_k.$$

To apply the formula (8) we find (11).

Lemma 3. A necessary condition for $(GI)_N$ - problem to be well - posed is that

$$s_{k-1} \leq \min(N - r_k, r_0 + \cdots + r_{k-1}), \quad k = 1,\ldots,n. \tag{12}$$

Proof. Let $k \in \{1,\ldots,n\}$ be fixed. Suppose that $r_k > N - s_{k-1}$. Since $p(t) = x^{(s_{k-1})}(t)$ is a polynomial of degree $N - s_{k-1} - 1$ and $t_{k1},\ldots,t_{kr_k}$ are different points on $\mathbf{R}$, we conclude that there is no polynomials $p(t)$ satisfying the Lagrange conditions $p(t_{kj}) = a_{kj}$ for all $a_{kj} \in \mathbf{R}$, $j = 1,\ldots,r_k$. Hence, $r_k \leq N - s_{k-1}$, i.e. $s_{k-1} \leq N - r_k$.

On the other hand, $s_0 = r_0 = 0$. If $s_{k-1} > r_0 + \cdots + r_{k-1}$ for some $k \in \{2,\ldots,n\}$ then $V_N = 0$, i.e. $(GI)_N$ - problem is ill-posed. Thus, (12) is true.

Remark 1. The condition $s_{k-1} \leq r_0 + \cdots + r_{k-1}$ $(k = 1,\ldots,n)$ was found by Karwowski and Przeworska - Rolewicz in [2].

Now we find some conditions for $V_N \neq 0$ by means of $(GI)_N$ - problem.

Lemma 4. Suppose that $V_{N-1} \neq 0$, i.e. $(GI)_{N-1}$ - problem is well - posed. Then there exists a $t_{nr_n} \in \mathbf{R}$ such that $(GI)_N$ - problem is well - posed.

Proof. Since $V_{N-1} \neq 0$ the $V_{NN}^{(s_{n-1})}$ is a polynomial of degree $N - 1$. On the other hand, $V_N = V_{NN}^{(s_{n-1})}(t_{nr_n})$ (Lemma 1), we conclude that if t_{nr_n} is not a root of $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t)$ then $V_N \neq 0$, i.e. $(GI)_N$ - problem is well - posed.

Remark 2. It is easy to check that $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t)$ has real roots only. So that $(GI)_N$- problem is ill - posed for at most $N - 1$ values of t_{nr_n}.

Lemma 5. Suppose that $V_{N-1} = 0$.

(i) If $V_{N-1,m} \neq 0$ for some $m \in \{s_{n-1} + 1, s_{n-1} + 2,\ldots,N\}$ then there is a $t_{nr_n} \in \mathbf{R}$ such that $V_N \neq 0$.

(ii) If $V_{N-1,m} = 0$ for all $m = s_{n-1} + 1, S_{n-1} + 2,\ldots,N$, then $V_N = 0$ for every $t_{nr_n} \in \mathbf{R}$.

Proof.

(i) From the assumptions we get $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t) \neq 0$ and deg $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t) < N - 1$. Suppose that m_0 is the most number from the set $\{s_{n-1} + 1, s_{n-1} + 2,\ldots,N\}$ such that $V_{N-1,m_0} \neq 0$, then deg $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t) = m_0 - 1 < N - 1$. Hence, if t_{nr_n} is not a root of the polynomial $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t)$ then by Lemma 1, $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t_{nr_n}) = V_N \neq 0$. (ii) Since $V_{N-1,m} = 0$ for all $m = s_{n-1} + 1, s_{n-1} + 2,\ldots,N$, we conclude that $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t) = 0$. Therefore $V_N = 0$ for all $t_{nr_n} \in \mathbf{R}$.

Corollary 2. If $V_{N-1} = 0$ then $(GI)_N$ - problem is well - posed for all $t_{nr_n} \in \mathbf{R}$ if and only if

$$V_{N-1,s_{n-1}+1} \neq 0, \quad V_{N-1,m} = 0 \quad \text{for} \quad m = s_{n-1} + 2,\ldots,N.$$

Indeed, in that case we have $V_{NN}^{(s_{n-1})}(t) = \text{constant} \neq 0$.

2. EXAMPLES

Example 1. Let be given $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$, $t_i \neq t_j$ for $i \neq j$ and $s \in \mathbf{N}$. Consider the following problem: To find a condition for $t_{so} \in \mathbf{R}$ such that $(GI)_{n+1}$ - problem

$$x(t_j) = a_j; \quad j = 1, \dots, n; \quad x^{(s)}(t_{so}) = a_{n+1} \tag{13}$$

is well-posed.

By Lemma 3, a necessary condition for $(GI)_{n+1}$ - problem to be well - posed is $s \leq n$.

Write:

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \dots t_1^{s-1} & t_1^s & t_1^{s+1} & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 \dots t_2^{s-1} & t_2^s & t_2^{s+1} & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n \dots t_n^{s-1} & t_n^s & t_n^{s+1} & \dots & t_n^n \\ 0 & 0 \dots 0 & s! & \dfrac{(s+1)!}{1!} t_{so} & \dots & \dfrac{n!}{(n-s)!} t_{so}^{n-s} \end{pmatrix}$$

The matrices $G_{n+1,m}(t)$ are obtained from G_{n+1} if we change in G_{n+1} the m - th row by $g(t) = (1, t, \dots, t^n)$.

Since $V_{n+1}(t) := \det G_{n+1,n+1}(t)$ has n different real roots, we conclude that $V_{n+1}^{(s)}(t)$ is a polynomial of degree $n-s$ and has $n-s$ different real roots. Thus, the $(GI)_{n+1}$ - problem (13) is well-posed if and only if t_{so} is not a root of $V_{n=1}^{(s)}(t)$. In particular, if $s = n$ then this problem is well - posed for every $t_{so} \in \mathbf{R}$.

Let t_{so} be not a root of $V_{n+1}^{(s)}(t)$. The solution of (13) is of the form

$$x(t) = V_{n+1}^{-1} \sum_{m=1}^{n+1} a_m V_{n+1,m}(t),$$

where $V_{n+1} = \det G_{n+1}$, $V_{n+1,n}(t) = \det G_{n+1,m}(t)$.

Example 2. (generalized Lagrange - Newton interpolation problem). Let be given n systems of points on $\mathbf{R}$: $(t_{k1}, \dots, t_{kr_k})$, $k = 1, \dots, n$; $t_{ki} \neq t_{kj}$ for $i \neq j$, $r_1 + \dots + r_n = N$ and let $r_0 = 0$.

By $(L-N)$ - problem we mean the following problem: to find a polynomial of degree $N-1$ such that

$$F_{kj} D^{r_0 + \dots + r_{k-1}} x = a_{kj}, \quad a_{kj} \in \mathbf{C}, \ k = 1, \dots, n; \ j = 1, \dots, r_k,$$

where $(F_{kj} x)(t) = x(t_{kj})$, $(Dx)(t) = d/dt$.

Obviously, if $r_2 = r_3 = \dots = r_n = 0$ we get the Lagrange interpolation problem and if $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ we get the Newton interpolation problem.

It is easy to check that this problem is well - posed. From formula (8) we can construct a solution of (L_N) - problem in an evident form.

Write:

$$(Rx)(t) = \int_0^t, \quad w_{kj} = \prod_{i=1, i \neq j}^{r_k} (t_{kj} - t_{ki})^{-1}(t - t_{ki}),$$

$$w_k(t) = \sum_{j=1}^{r_k} a_{kj} w_{kj}(t); \quad k = 1, \dots, n; \ j = 1, \dots, r_k.$$

By the Lagrange formula, we get

$$F_{kj} w_k = a_{kj}, \quad F_{kj} w_{ki} = \delta_{ij} a_{kj}, \quad k = 1, \dots, n; \ j = 1, \dots, r_k.$$

We introduce the following sequence:

$$y_n(t) = R^{r'_{n-1}} \sum_{j=1}^{r_n} a_{nj} w_{nj}(t),$$

$$y_{n-k}(t) = R^{r'_{n-k-1}} \sum_{j=1}^{r_{n-k}} (a_{n-k,j} - F_{n-k,j} D^{r'_{n-k-1}} y_{n-k+1}) w_{n-k,j} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

$$x_k(t) = y_k(t) + \dots + y_n(t), \quad k = 1, \dots, n; \ r'_k := r_0 + \dots + r_k.$$

It is easy to see that deg $y_{n-k} < r'_{n-k}$. Hence $D^{r'_{n-k}} y_{n-k} = 0$ $(k = 0, \dots, n-1)$. We show that $x_1(t)$ is a solution of $(L - N)$ - problem.

Indeed, $D^N x_1 = 0$ for deg $x_1 < r'_n = N$ and

$$F_{nj} D^{r'_{n-1}} x_1 = F_{nj} D^{r'_{n-1}} R^{r'_{n-1}} \sum_{i=1}^{r_n} a_{ni} w_{ni}(t) = a_{nj},$$

$$F_{n-1j} D^{r'_{n-2}} x_1 = F_{n-1} D^{r'_{n-2}} (y_{n-1} + y_n) = F_{n-1j} D^{r'_{n-2}} y_{n-1} + F_{n-1j} D^{r'_{n-2}} Y_n =$$

$$= F_{n-1j} \sum_{i=1}^{r_{n-1}} (a_{n-1i} - F_{n-1i} D^{r'_{n-2}} y_n) w_{n-1i} + F_{n-1j} D^{r'_{n-2}} y_n =$$

$$= a_{n-1j} - \sum_{i=1}^{r_{n-1}} (F_{n-1i} D^{r'_{n-2}} y_n) F_{n-1j} w_{n-1i} + F_{n-1j} D^{r'_{n-2}} y_n = a_{n-1j}$$

for $F_{n-1j} w_{n-1i} = \delta_{ij}$.

Similarly, we find $F_{n-k,j} D^{r'_{n-k-1}} x_1 = a_{n-k,j}$ for $k = 2, \dots, n-1$; $j = 1, \dots, r_{n-k}$.

So that $x_1(t) = y_1(t) + \dots + y_n(t)$ is a solution of $(L - N)$ - problem.

REFERENCES

1. Hermite Ch., Sur la formule d'interpolation de Lagrange, J. Reine Angew Math. **84** (1978), *70-79.*
2. Karwowski W. E., Przeworska - Rolewicz D., Green operators ~~for~~ linear boundary value problems with a right investible operator D^N, Preprint Series Universität Karlszuhe, November 1989.
3. Nguyen Van Mau. Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singular integral equations, Demonstratio Math., **23** (1990), 191-212.
4. Nguyen Van Mau, Remarks on initial value problems for equations with right invertible operators. Preprint No 451, Institute of Mathematics, Polish Acad. Sc., Warsaw 1989.
5. Nguyen Van Mau, Boundary and mixed boundary value problems for equations with right invertible operators, ibidem No 465, Warsaw 1989.
6. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis, PWN - Polish Scientific Publisheres and D. Reidel Publishing Company, Warszawa / Dordrecht / Landcaster / Tokyo 1988.
7. Przeworska - Rolewicz D., Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators, Demonstratio Math., **21** (1988) *1203-1044.*
8. Przeworska - Rolewicz D., Rolewicz S., Equations in Linear spaces, Monografie *Matematyczne* **47**, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1968.
9. Tasche M., A unified approach to interpolation methods, J. Integral Equations **4** (1982), *55-75.*

JOURNAL OF SCIENCE - 1993
Special issue on Mathematics, Mechanics and Informatics

REMARKS ON FUNCTIONAL EQUATIONS WITH TRANSFORMED ARGUMENT

PHAM DANG LONG
Faculty of Mathematics, Hanoi University

As we know, every linear operator A of a finite dimentional space X into itself is an algebraic operator, because it always corresponds to a square matrix of finite order, which has its characteristic $P(t)$ such that $P(A) = 0$. (Theorem Cayley-Hamilton). With an infinite dimentional space X we can not examine general linear operators by means of infinite square matrices. So that just now we often have examined only mappings possessing properties of an algebraic operator. Such operators are as the transformation of Fourier:

$$(Fx)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{\infty} e^{-it\tau} x(\tau) d\tau, \quad x \in L_2(\mathbf{R})$$

or the cosin transformation:

$$(F_c x)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t\tau) x(\tau) d\tau, \quad x \in L_2(\mathbf{R})$$

or the transformation of Cauchy on regular closed arc in the complex plane:

$$(S\varphi)(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} (\tau - 1)^{-1} \varphi(\tau) d\tau.$$

where $\varphi \in H^{\mu}(\Gamma)$ $(0 < \mu \leq 1)$. It is easy to check that

$$F^4 = I, \quad F_c^3 = F_c \quad \text{and} \quad S^2 = I$$

(cf. [1]).

A natural generalization to a theory for the class of abstract equations has been exposed by professor Danuta - Rolewicz in her book: "Equations with transformed argument. An algebraic approach" [1].

In this report we deal with some applications of the general theory of algebraic operators in solving some functional equations with transformed argument. These equations appear in many International Olympiads on Mathematics.

1. SOME FUNDAMENTAL PROPERTIES OF ALGEBRAIC OPERATORS

Let X be a linear space over a field of scalars ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$ or $\mathbf{F} = \mathbf{C}$), $L(X)$ be the space of all linear operators acting on X, $L_0(X)$ the set of all linear operators A with dom $A = X$, and $I \in L_0(X)$ be the indentity operator on X

Lemma 1. (cf. [1]).

Suppose that $A \in L_0(X)$ is an algebraic operator of order N and the characteristic polynomial $P_A(t)$ has single roots only i.e.

$$P_A(t) = \prod_{j=1}^{N}(t - t_j), \quad t_i \neq t_j \quad \text{for} \quad i \neq j.$$

Then there exist N operators $P_j \in L_0(X)$ such that

$$P_j P_k = 0 \quad \text{for } j \neq k, \; P_j^2 = P_j,$$
$$\sum_{j=1}^{N} P_j = I \quad \text{and} \quad AP_j = t_j P_j,$$

namely

$$P_j := \sum_{m=1, m\neq j}^{N} (t_j - t_m)^{-1}(A - t_m I), \quad (j,k = 1,\dots,N).$$

And the space X is a direct sum of N eigenspaces X_j of the operator A corresponding to the eigenvalues $t_1, \dots, t_N$ respectively, i.e.

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_N$$

where $X_j := \text{Ker } (A - t_j I)$, $j = 1, \dots, N$.

Moreover, we have

$$A = \sum_{j=1}^{N} t_j P_j, \quad A^j P_k = t_j^k P_k,$$

and

$$A^j = \sum_{k=i}^{N} t_k^j P_k, \quad (k, j := 1, \dots, N).$$

Definition 1. An operator $A \in L_0(X)$ is said to be *involution of order* N if $A^N = I$ and $A^k \neq I$ for $k := 1, \dots, N_1$. If $N = 2$ we say briefly that A is an involution.

By definition, every involution of order N is an algebraic operator with the characteristic roots $t_1, \dots, t_N$ as following:

$$t_j = \exp(2\pi i j/N), \quad (j = 1, \dots, N).$$

Definition 2. Let $X = C(\mathbb{R})$ or $X = C(\mathbb{C})$. A function $f \in X$ is said to be *invariant* to an operator $A \in L_0(X)$ if

$$(Af)(t) = f(t),$$

for all $t \in \mathbb{R}$ or $t \in \mathbb{C}$ respectively.

Example 1. The reflection of functions

$$(Sx)(t) := x(-t), \quad x \in C(\mathbf{R})$$

is an involution because $S^2 = I$. Every even function $f(t)$ is invariant to S.

Example 2. The operator A defined by the formula following:

$$(Af)(z) := f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{-d/c\},$$

where $ad - bc = 1$ and $a + d = 2\cos\frac{k\pi}{N}$, is an involution of order N.

Example 3. The operator defined follows

$$(Af)(x) := f\left(\frac{x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{N}}{1 - x\operatorname{tg}\frac{\pi}{N}}\right), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{N}\}$$

is an involution of order N. Every function $f(x)$ such that

$$f\left(\frac{x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{N}}{1 - x\operatorname{tg}\frac{\pi}{N}}\right) = f(x)$$

is invariant to A.

Now, let X be a linear space of all functions with the domain and the range contained in $\mathbf{F}$, $A \in L_0(X)$ an involution of a given order $N \geq 2$, and $a_j \in X$ invariant to A, $g \in X$ a given arbitrary function. Consider the following functional equation:

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) \cdot (A^j f)(t) = g(t) \tag{1}$$

we have:

Theorem 1. Suppose that the functions $a_j(t)$ are invariant to the operator $A \in L_0(X)$ which is and involution of order N. Then the functional equation (1) has solution if and only if for all $t \in \mathbf{F}$ and for every $k := 1, \ldots, N$

$$b_k(t) \neq 0 \tag{2}$$

or $b_k(t)$ and $(P_k g)(t)$ vanish simultaneously, where

$$b_k(t) := \sum_{j=0}^{N-1} t_k^j a_j(t), \quad t_k := \exp(2\pi k i/N),$$

$$P_j := \sum_{m=1, m\neq j}^{N} (t_j - t_m)^{-1}(A - t_j I).$$

Under the above condition the solutions of the equation (1) are of the form

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t),$$

where f_k are solutions of the system:

$b_k(t) \cdot f_k(t) = (P_k g)(t(, \quad k := 1, \dots, N.$ ( ) i.e.

$$f_k(t) = \begin{cases} b_k(t)^{-1} \cdot (P_k g)(t) & \text{if} \quad b_k(t) \neq 0, \\ s \in \mathbf{F}, & \text{arbitrary for if } b_k(t) = 0. \end{cases}$$

In particular, if $b_k(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbf{F}$ and $k := 1, \dots, N$, then the given equation has only one unique solution:

$$f(t) := \sum_{k=1}^{N} b_k(t)^{-1} \cdot (P_k g)(t). \tag{3}$$

Proof. Necessity. Suppose the equation (1) has a solution f. We have $A^N = I$, the characteristic polynomial is $P_A(t) = t^N - 1$ which has N single roots $t_1, \dots, t_N$, namely

$$t_k := \exp(2\pi i k/N).$$

From lemma 1, we have $A = \sum_{k=1}^{N} t_k P_k$ and $A^j P_k = t_k^j P_k$ or $A^j = \sum_{k=1}^{N} t_k^j P_k$.

Thus the functional equation (1) is equivalent to

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) \cdot \Big(\sum_{m=1}^{N} t_m^j P_m f \Big)(t) = g(t).$$

But a_j are invariant to A, also from lemma 1. the equation (1) will be equivalent to the system following

$$\begin{aligned}
\Big(P_k \Big(\sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) \cdot \sum_{m=1}^{N} t_m^j P_m f \Big) \Big)(t) &= (P_k g)(t) \\
\Big(\sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) \cdot \sum_{m=1}^{N} t_m^j P_k P_m f \Big)(t) &= (P_k g)(t) \\
\Big(\sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) t_k^j P_k f \Big)(t) &= (P_k g)(t) \\
\Big(\sum_{j=0}^{N-1} t_k^j a_j(t) \Big) (P_k f)(t) &= (P_k g)(t) \\
b_k(t) \cdot f_k(t) &= (P_k g)(t), \quad k = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{4}$$

Clearly, if there exist $t_0 \in \mathbf{F}$ such that

$$b_k(t_0) = 0 \quad \text{and} \quad (P_k g)(t_0) \neq 0,$$

then the last system has no solution. This contradicts to our assumption. Thus (2) (3) must b satisfied. The solution of (1) is of the form:

$$f := \sum_{k=1}^{N} f_k,$$

because

$$f = If = \sum_{k=1}^{N} P_k f \quad \text{and} \quad f_k = P_k f.$$

Sufficiency. Suppose the (2), (3) are satisfied and suppose that f_k is a solution of the system (4) and $f = \sum_{k=1}^{N} f_k$. We have to prove that f satisfy (1). Indeed, by L we denote the left member of 1, then we have

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) \cdot \Big[A^j\Big(\sum_{k=1}^{N} f_k\Big)\Big](t) = \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) \cdot \sum_{m=1}^{N} t_m^j P_m\Big(\sum_{k=1}^{N} \beta_k(t) P_k g\Big)(t)
\end{aligned}$$

$$\left(\text{where } \beta_k(t) := \begin{cases} b_k(t)^{-1} \cdot (P_k g)(t) & \text{if } \ b_k(t) \neq 0, \\ s \in \mathbf{F} \quad \text{arbitrary if } b_k(t) = 0. \end{cases}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N-1} a_j(t)\Big[\sum_{m=1}^{N} t_m^j \sum_{k=1}^{N} \beta_k(t) \cdot (P_m P_k g)\Big](t) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} a_j(t)\Big(\sum_{m=1}^{N} t_m^j \beta_m(t) P_m g\Big)(t), \qquad \text{(lemma 1)} \\
&= \sum_{m=1}^{N} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} t_m^j a_j(t)\Big) \cdot \beta_m(t) \cdot (P_m g)(t) \\
&= \sum_{m=1}^{N} b_m(t) \cdot \beta_m(t) \cdot (P_m g)(t) \\
&= \sum_{m=1}^{N} (P_m g)(t).
\end{aligned}$$

(because if $b_m(t) \neq 0$ then $b_m(t) \cdot \beta_m(t) = 1$, and if

$b_m(t) = 0$ then $(P_m g)(t)$ must be equal to 0)

$$= \Big[\Big(\sum_{m=1}^{N} P_m\Big) g\Big](t) = (IG)(t) = g(t), \quad \text{(from lemma 1)}.$$

SOME EXAMPLES OF APPLICATION

Example 4. Determine all function $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ such that

$$x^2 \cdot f(x) + f(-x) = x + 1.$$

It is easy to check that the operator $A \in L_0(X)$ $X = C(\mathbf{R})$ defined by the formula following

$$(Af)(x) = f(-x)$$

is involution with the characteristic polynomial $P_A(t) = t^2 - 1$ and the characteristic roots are $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. From lemma 1 we have $P_1 := \frac{1}{2}(I + A)$, $P_2 := \frac{1}{2}(I - A)$. Then

$$(P_1 f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad \text{and}$$
$$(P_2 f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

It is clear that

$$(P_1 f + P_2 f)(x) = f(x) = (If)(x)$$
$$(t_1 P_1 f + t_2 P_2 f)(x) = f(-x) = (Af)(x).$$

we have $a_0(x) = x^2$, $a_1(x) = 1$ are invariant to the operator A. So that from theorem 1, we calculate

$$\begin{aligned}
b_1(t) &:= a_0(x) + a_1(x) = x^2 + 1, \\
b_2(x) &:= a_0(x) - a_1(x) = x^2 - 1, \\
b_1(x).f_1(x) &:= (P_1 g)(x) \quad \text{where } g(x) = x + 1 \\
&:= [x + 1 + (-x) + 1]/2 \\
&:= 1, \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \\
b_2(x), f_2(x) &:= (P_2 g)(x) \\
&:= [x + 1 - (-x) - 1]/2 \\
&= x \Rightarrow f_2(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad \text{if } x \neq \pm 1.
\end{aligned}$$

At last

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 - 1}, \quad \forall x \neq \pm 1.$$

But with $x = \pm 1$, $b_2(x)$ and $(P_2 g)(x)$ are not equal to 0 simultaneously, so that the given equati has determined on all $\mathbf{R}$. It is easy to check that above function $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2-1}$ solutions for $x \neq \pm 1$, satisfies the given equation.

Example 5. Let $N \geq 2$ and let φ be an involution function of order N; a_j be invari functions with the domain and the value in $\mathbf{C}$. Determine all functions $f \in L_0(X)$, where $X = C($ such that

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j(z) f(\varphi^j(z)) = g(z),$$

where $g \in X$ is given.

Consider the operator A as following

$$(Af)(z) = f(\varphi(z)).$$

Clearly, the operator A is an involution of order N, and the equation (2) becomes

$$\Big(\sum_{j=0}^{N-1} a_j(z) \cdot A^j f\Big) = g(z).$$

Apply theorem 1 we have the result following as a corollary of the theorem:

Corollary 1. The functional equation (5) has solutions if and only if for all $z \in \mathbf{C}$ and for every $k := 1, \dots, N$

$$\sum_{j=0}^{N-1} t_k^j a_j(z) \neq 0 \quad \text{or} \quad \sum_{j=0}^{N-1} t_k^j a_j(z) = 0 \quad \text{and} \quad (P_k g)(z) = 0,$$

where

$$t_k = \exp(2k\pi i/N),$$

$$(P_k f)(z) = \prod_{m=1, m \neq k}^{N} (t_k - t_m)^{-1} (f\varphi - t_m f)(z), \quad f \in X.$$

Every solution of (5) is of the form

$$f(z) := \sum_{k=1}^{N} \beta_k(z).(P_k g)(z)$$

where

$$\beta_k(z) = \begin{cases} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} t_k^j a_j(z)\Big)^{-1} & \text{if} \quad \sum_{j=0}^{N-1} t_k^j a_j(z) \neq 0 \\ \beta \in \mathbf{C} \quad \text{arbitrary} & \text{if} \quad \sum_{j=1}^{N-1} t_k^j a_j(z) = 0. \end{cases}$$

Example 6. Determine all functions $f \in X = (\mathbf{R})$ such that

$$\begin{cases} f(t + 2\pi) = f(t) \\ \sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) f(t + 2\pi j/N) = g(t) \end{cases} \tag{6}$$

where $a_j \in X$, such that $a_j(t + 2\pi/N) = a_j(t)$ and $g \in X$ are given, $N \geq 2$ is given.

The operator $A \in L_0(X)$ such that

$$(Af)(t) = f(t + 2\pi/N)$$

is an involution of order N, a_j are invariant to A. So that, we have:

Corollary 2. The system (6) has solutions if and only if for all $t \in \mathbf{R}$ and for every $k = 1, \dots, N$

$$b_k(t) \neq 0$$

or $b_k(t) = 0$ and $(P_k g)(t) = 0$, where

$$b_k(t) = \sum_{j=0}^{N-1} t_k^j a_j(t), \quad t_k = \exp(2\pi k i/N),$$

$$(P_k g)(t) = \sum_{m=1, m\neq k}^{N} (t_k - t_m)^{-1}(g(t + 2\pi/N) - t_m g(t)), \; k = 1, \ldots, N$$

if there exist solution f then it is of the form

$$f(t) := \sum_{k=1}^{N} \beta_k(t)(P_k g)(t)$$

where

$$\beta_k(t) := \begin{cases} (b_k(t))^{-1} & \text{if} \quad b_k(t) \neq 0 \\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{arbitrary} & \text{if} \quad b_k(t) = 0. \end{cases}$$

Example 7. For the system

$$\begin{cases} f(q^N t) = f(t), \\ \sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) f(q^j t) = g(t), \end{cases}$$

where $f \in X = C(R^+)$ is unknowm function, $q \in R^+$, $g \in X$, a_j are given such that

$$a_j(t) = a_j(qt).$$

After check that the operator $A \in L_0(X)$ such that

$$(Af)(t) = f(qt), \quad f \in X$$

is an involution of order N, a_j are invariant to A and applying the theorem 1, it is easy to solve the above system.

REFERENCES

1. Przeworska - Rolewicz D., Equations with transformed argument. An algebraic approach. Amsterdam-Warsaw 1973.
2. Przeworski - Rolewicz S., Equations in linear spaces. Warszawa 1968.
3. Nguyen Van Mau, Generalized algebraic elements and linear singular integral with transformed argument. Warsrawa 1989.

JOURNAL OF SCIENCE – 1993
Special issue on Mathematics, Mechanics and Informatics

ON LAGRANGE INTERPOLATION PROBLEM INDUCED BY RIGHT INVERTIBLE OPERATORS

PHAM QUANG HUNG
Faculty of Mathematics, Hanoi University

The general interpolation problems induced by right invertible operators were investigated by Przeworska - Rolewics in [1]. A necessary and sufficient condition for the general interpolation problems was given by Nguyen Van Mau in [2]. All results on interpolation problems of those authors based on the property (c) of a given system of initial operators. However, not all initial operators possess the property (c). In this remark we deal with Lagrange interpolation problem induced by right invertible operators without the property (c). We give a necessary and sufficient condition for Lagrange interpolation problem to have a unique solution and present a general formula of its unique solution.

1. CHARACTERIZATION OF INITIAL OPERATORS

Let X be a linear space over a field $\mathcal{F}$ of scalars (where $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ or $\mathcal{F} = \mathbb{C}$). Denote by $R(X)$ the set of all right invertible operators acting in X. For $D \in R(X)$ we write

$$\mathcal{R}_D = \{R \in L_0(X) \ : \ DR = I\},$$
$$\mathcal{F}_D = \{F \in \text{dom } D \ : \ F(\text{dom } D) = \ker D, \ F^2 = F \text{ and } \underset{R\in \mathcal{R}_D}{\exists} \ FR = 0\}.$$

In the sequel we assume that dim ker $D \neq 0$, i.e. D is not invertible.

Definition 1. Every operator $F \in \mathcal{F}_D$ is said to be initial operator corresponding to $R \in \mathcal{R}_D$. Elements of the form

$$z_0 + Rz_1 + \cdots + R^m z_m, \quad \text{where} \quad z_k \in \ker D, \ k = 0, 1, \ldots, m,$$

are called D-polynomials.

Definition 2. Let $D \in R(X)$. An initial operator F_0 for D has the property $c(R)$ for $R \in \mathcal{R}_D$ if there exist scalars c_k such that

$$F_0 R^k z = (c_k/k!)z \quad \text{for all} \quad z \in \ker D, \ k \in \mathbb{N}.$$

Write:

$$P_N(R) = \text{lin}\,\{R^k z, \ z \in \ker D, \ k = 0, 1, \ldots, N-1\}.$$

It is easy to see that $P_N(R) \subset \ker D^N$. In general, $P_N(R) \neq \ker D^N$. However, we have

Lemma 1. $P_N(R) = \ker D^N$ if and only if $\dim \ker D = 1$.

Proof. Indeed, for any $z_k \in \ker D$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, we get $\overline{z} = z_0 + Rz_1 + \cdots + R^{N-1}z_{N-1} \in \ker D^N$. So that $P_N(R) = \ker D^N$ iff there are $z \in \ker D$, $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathcal{F}$ such that $\overline{z} = \beta_0 z + \beta_1 Rz + \cdots + \beta_{N-1}R^{N-1}z$. It is the case iff $z_k = \beta_k z$ for $k = 0, 1, \ldots, N-1$, i.e. $\ker D = lin\{z\}$.

The following result has been obtained by Przeworska - Rolewicz in [1].

Theorem 1. The set $\mathcal{F}_D$ of all initial operator has the property (c) if and only if $\dim \ker D = 1$.

Now we characterize the condition for a given initial operator to possess the property $c(R)$.

Lemma 2. Let $D \in R(X)$ and $\dim \ker D = s < +\infty$. Then an initial operator F_0 has property $c(R)$ for $R \in \mathcal{R}_D$ if and only if there is a basic $(e_1, \ldots, e_s)$ of $\ker D$ such that

$$F_0 R^k e_j = d_k e_j, \; d_k \in \mathcal{F}, \; k \in \mathbf{N}, \; j = 1, \ldots, s. \tag{1}$$

Indeed, if (1) is satisfied, then for any element $z = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_s e_s \in \ker D$, we find

$$F_0 R^k z = \beta_1 F_0 R^k e_1 + \cdots + \beta_s F_0 R^k e_s = d_k z,$$

i.e. $F_0 \in c(R)$.

Definition 3.

(i) The system of initial operators $(F_1, F_2, \ldots, F_N)$ is said to be linearly independent on $P_N(R)$ if

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i F_i u = 0 \quad \text{for all} \quad u \in P_N(R)$$

follows $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_N = 0$.

(ii) The system $(F_1, F_2, \ldots, F_N)$ is said to be strongly linearly independent on $P_N(R)$ if

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i F_i u_j = 0 \quad \text{for all} \quad u_j \in P_{Nj}(R) := \text{lin}\,\{R^k e_j, k = 0, \ldots, N-1\}$$

follows $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_N = 0$.

Lemma 3. $\ker D^N = \bigoplus_{j=1}^{s} P_{Nj}(R)$.

Proof. Let $u \in P_{Nj}(R) \cap P_{Nk}(R)$ for $j \neq k$. Hence, there are constants a_{jm}, b_{km} such that

$$\sum_{m=0}^{N-1} a_{jm} R^m e_j = \sum_{m=0}^{N-1} b_{km} R^m e_k.$$

Since $D^m R^m = I$, it follows $a_{jm} = b_{km} = 0$; $m = 0, \ldots, N_1$.

On the other hand, $P_{Nj}(R) \subset \ker D^N$ for $j = 1, \ldots, s$, it is enough to prove

$$\ker D^N \subset \bigoplus_{j=1}^{s} P_{Nj}(R).$$

But the last inclusion immediately follows from definitions of the sets $P_{Nj}(R)$ and the formula

$$\ker D^N = \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} R^j z_j, \quad z_j \in \ker D \quad \text{are arbitrary} \right\}.$$

Corollary 1.

$$P_N(R) \subset \bigoplus_{j=1}^{s} P_{Nj}(R)$$

The equality takes place if and only if dim ker $D = 1$.

2. LAGRANGE INTERPOLATION PROBLEM

The Lagrange interpolation problem (L-IP) is to find a D-polynomial of degree $n-1$ which admits for given different initial operators $F_1, F_2, \dots, F_n$ the given values

$$F_i u = u_i, \quad \text{where} \quad u_i \in \ker D \quad \text{are given},$$

$u = z_0 + Rz_1 + \cdots + R^{n-1} z_{n-1}$, $z_k \in \ker D$ are to be determined.

Suppose that dim ker $D = s < \infty$, $R \in \mathcal{R}_D$ and $(e_1, \dots, e_s)$ is a basic of ker D. By definition of $F_j \in \mathcal{F}_D$ we have

$$F_i R^k e_j = \sum_{m=1}^{s} \beta_{ikjm} e_m, \quad \beta_{ikjm} \in \mathcal{F}, \quad i = 1, \dots, n; \; j = 1, \dots, s; \; k = 0, 1, \dots \tag{2}$$

Lemma 4. Write:

$$F_i' = (F_i, F_i R, \dots, F_i R^{n-1}). \tag{3}$$

Then the system $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ is linearly independent on $P_n(R)$ if and only if the system $(F_1', F_2', \dots, F_n')$ is linearly independent on ker D.

Proof. Suppose that $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ is linearly independent on $P_n(R)$ and

$$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i' z = 0, \quad a_i \in \mathcal{F}, \quad z \in \ker D.$$

This follows

$$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i R^k z = 0 \quad \text{for} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Hence,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k R^k z \Big) = 0 \quad \text{for all } \beta_k \in \mathcal{F}, \; k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Since every element of $P_n(R)$ is of the form $\beta_0 z + \beta_1 Rz + \cdots + \beta_{n-1} R^{n-1} z$, we find $a_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, i.e. $(F_1', \dots, F_n')$ is a linearly independent system on ker D.

Conversely, if $(F_1', F_2', \dots, F_n')$ is linearly independent on ker D and

$$\sum_{i=1}^{n} b_i F_i u = 0, \quad b_i \in \mathcal{F}, \quad u \in P_N(R).$$

Hence

$$\sum_{i=1}^{n} b_i F_i \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k R^k z = 0 \quad \text{for all} \quad \beta_k \in \mathcal{F}, \quad z \in \ker D.$$

This implies

$$\sum_{i=1}^{n} b_i F_i R^k z = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad z \in \ker D,$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i F_i' z = 0$$

and $b_1 = \dots = b_n = 0$, which was to be proved.

Write:

$$\beta_{ikjm} := \beta_{(i-1)s+m, ks+j}, \quad \beta_{ikjm} \quad \text{are of the form (2)}, \tag{4}$$

$$u_i = \sum_{\mu=1}^{s} u'_{(i-1)s+\mu} e_\mu, \quad z_i = \sum_{\mu=1}^{s} z'_{is+\mu} e_\mu, \tag{5}$$

$$E = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{ns}. \tag{6}$$

Theorem 1. The system of initial operators $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ is strongly linearly independent on $P_n(R)$ if and only if $\det E \neq 0$.

The proof is based on the following additional lemmas.

Lemma 5. The system $(F_1, \dots, F_n)$ is strongly linearly independent if and only if the system $(F_1', \dots, F_n')$ of the form (3) is linearly independent on every subspace $Z_j := \text{lin}\,\{e_j\}$, $j = 1, \dots, s$.

The proof is going by the same way as the proof of lemma 4.

Lemma 6. The system $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ is strongly independent if and only if the system of vectors

$$d_\mu := (\beta_{\mu 1}, \beta_{\mu 2}, \dots, \beta_{\mu N}), \quad \mu = 1, 2, \dots, N, \tag{7}$$

is linearly independent.

Proof. Suppose that $(d_1, d_2, \dots, d_N)$ is linearly independent and

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} F_i x_j = 0 \quad \text{for all} \quad x_j \in P_{n_j}(R).$$

Hence

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{n-1} a_{ij}F_iR^k c_{jk}e_j = 0 \quad \text{for all} \quad c_{jk} \in \mathcal{F}.$$

By (2), we can rewrite this equality in the form

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{s} a_{ij}c_{jk}\beta_{ikj\mu}e_\mu = 0 \quad \text{for all} \quad c_{jk} \in \mathcal{F}.$$

This follows

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\beta_{ikj\mu} = 0; \quad k = 0,\ldots,n-1;\ \mu = 1,\ldots,s.$$

Using the notations (4)-(6) we find

$$\sum_{m=1}^{N} a'_m\beta_{m\ell} = 0, \quad \ell = 1,\ldots,N,$$

i.e

$$\sum_{m=1}^{N} a'_m d_m = 0,$$

which implies $a'_m = 0$, i.e. $a_{ij} = 0$ $(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,s)$. Conversely, if the system $(F_1, F_2,\ldots,F_n)$ is strongly independent on $P_n(R)$ and

$$\sum_{m=1}^{N} a'_m d_m = 0, \quad a'_m \in \mathcal{F},$$

Then we form a_{ij} $(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,s)$ by the same way as (4):

$$a_{ij} = a'_{(i-1)s+j}$$

and we find

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}F_ix_j = 0 \quad \text{for all } x_j \in P_{nj}(R).$$

Thus, $a_{ij} = 0$, i.e. $a'_m = 0$ $(m = 1,\ldots,N)$.

Proof of Theorem 1 immediately follows from the fact det $E \neq 0$ if and only if the system of vectors d_m of the form (7) is linearly independent.

Now we can formulate the main result of Lagrange interpolation problem.

Theorem 2. The Lagrange interpolation problem has unique solution for all $u_i \in \ker D$ $(i = 1,\ldots,n)$ if and only if the system of initial operators for D is strongly linearly independent on $P_N(R)$.

If it is the case, a unique solution is given by the formula

$$u = z_0 + Rz_1 + \cdots + R^{n-1}z_{n-1},$$

$$z_i = \sum_{\mu=1}^{s} z'_{is+\mu}e_\mu,$$

$(z'_1, \ldots, z'_N)$, $N = ns$, is a unique solution of the following linear system

$$E(z'_1, \ldots, z'_N)^T = (u'_1, \ldots, u'_N)^T,$$

where

$$u_i = \sum_{\mu=1}^{s} u'_{(i-1)s+\mu}e_\mu.$$

Proof. Let u_i, z_i be of the forms (5) and $u = \sum_{k=0}^{n-1} R^k z_k$ be a required element in $\ker D^n$.

Formula (2) implies

$$F_i u = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{s} z'_{ks+\mu} F_i R^k e_\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{s} \sum_{\mu=1}^{s} z'_{ks+j}\beta_{ikjm}e_\mu$$

Hence, equalities $F_i u = u_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ are equivalent to the following system

$$\sum_{m=1}^{N} \beta_{\ell m} z'_m = u'_\ell, \quad \ell = 1, 2, \ldots, N; \; N := ns. \tag{8}$$

The corresponding matrix of system (8) is E of the form (6). So that the proof is an immediate sequence of Theorem 1.

REFERENCES

1. Przeworska - Rolewicz D., Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators. *Demonstratio Math.* **21** *(1988), 1023-1044*.
2. Nguyen Van Mau, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singular integral equations. *Demonstratio Math.* **23** (1990), *191-212*.
3. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis. Warszawa - Dordrecht, 1988.

JOURNAL OF SCIENCE – 1993
Special issue on Mathematics, Mechanics and Informatics

ON A CLASS OF GENERALIZED DIFFERENCE OPERATORS

NGUYEN VU LUONG
Faculty of Mathematics, Hanoi University

Let X be a linear space of all infinite sequences of complex numbers over a field of scalars. Let $X_0 \subset X$ be a subspace of X. Every right invertible operator $D \in L_0(X)$ possessing the property $\ker D = X_0$ will called a generalized difference operaror over X_0.

In this note we give the answer to the following question: Is there a generalized difference operator over any given finite dimensional subspace $X_0 \subset X$?

We give the positive answer to this question and present a general method to construct right inverses and corresponding initial operators.

1. ALGEBRAIC PROPERTIES OF DIFFERENCE OPERATORS

The algebraic theory of right invertible operators was introduced and applied by Przeworska - Rolewicz (cf. [1]).

Let X be a linear space over a field $\mathcal{F}$ of scalars (where $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ or $\mathcal{F} \equiv \mathbf{R}$). An operator $D \in L(X)$ is said to be right invertible if there is $R \in L_0(X)$ such that $DR = I$. By $R(X)$ we denote the set of all right invertible operators acting in X. By $\mathcal{R}_D$ we denote the set of all right inverses of D. Write:

$$\mathcal{F}_D = \{F \in L_0(X) : \ FX = \ker D, \ F^2 = F, \ \underset{R\in \mathcal{R}_D}{\exists} FR = 0\}.$$

Every F is called an initial operator for D corresponding to R. Every right inverse R of D is given by formula: $R = R_0 - F_0 A$, $A \in L_0(X)$, $F_0 \in \mathcal{F}_D$, $R_0 \in \mathcal{R}_D$. Conversely, every initial operator for $D \in R(X)$ is given by the formula $F = I - RD$ on dom D, where $R \in \mathcal{R}_D$.

Let $X = (c)$ be a space of all infinite sequences of complex numbers ever $\mathbf{C}$. Consider a difference operator of order one:

$$D(x_n) = (x_{n+1} - x_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{1.1}$$

It is well-known that $D \in R(X)$ and $\ker D = \{\beta e, \ \beta \in \mathbf{C}\}$, where $e = (1, 1, \dots)$. Write:

$$R(x_n) = (0, x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \dots). \tag{1.2}$$

It is easy to check that R is a Volterra right inverse of D. The initial operator for D corresponding to R is of the form

$$F(x_n) = x_0 e. \tag{1.3}$$

Hence, every right inverse of D is given by the formula

$$R_1 = R + FA, \quad A \in L_0(X). \tag{1.4}$$

Similarly, if we choose an initial operator F_k in the form

$$F_k(x_n) = x_k e,$$

We can find the corresponding right inverse of F_k by formula

$$R_k = R - F_k R.$$

Now we consider the case of generalized difference operators of order one.

Let $e_0 = (\beta_0, \beta_1, \dots) \neq (0, 0, \dots)$ be given. The linear space induced by e_0 is denoted by X_0, i.e.

$$X_0 = \operatorname{lin}\{e_0\} = \{\beta e_0,\ \beta \in \mathbf{C}\}.$$

Since $e_0 \neq (0, 0, \dots)$, there is j such that $\beta_j \neq 0$. Write:

$$X_1 = \{x = (x_0, x_1, \dots), x_j = 0\}.$$

It is easy to check that $X = X_1 \oplus X_0$. Let F' be an operator defined by formula

$$F'(x_n) = (x_j/\beta_j)e_0.$$

Then $F'(X) = X_0$ and $(F')^2 = F'$. If we choose a left invertible operator by the following rule $R'(x_n) = (y_n)$ where

$$y_n = \begin{cases} -(x_{j-1} + x_{j-2} + \dots + x_n), & \text{if} \quad n = 0, 1, \dots, j-1, \\ 0 & \text{if} \quad n = j, \\ x_j + x_{j+1} + \dots + X_{n-1} & \text{if} \quad n = j+1, j+2, \dots \end{cases}$$

Then one can check that R' is a Volterra operator. Moreover, $F'R' = 0$.

Now we construct a right invertible operator D' such that R' is a right inverse of D' and F' is an initial operator for D' corresponding to R'.

Write:

$$D'(x_n) = \big(x_{n+1} - x_n - (x_j/\beta_j)(\beta_{n+1} - \beta_n)\big). \tag{1.5}$$

Lemma 1. Operator D' of the form (1.5) is right invertible and $\ker D' = X_0$.

Proof. From (1.5) we conclude that $(x_n) \in \ker D'$ if and only if $x_{n+1} - x_n - (x_j/\beta_j)(\beta_{n+1} - \beta_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ By an introduction, it follows

$$\begin{cases} x_{j+n} - x_j &= (x_j/\beta_j)(\beta_{j+n} - \beta_j), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ x_j - x_{j-k} &= (x_j/\beta_j)(\beta_j - \beta_{j-k}), \quad k = 0, 1, \dots, j. \end{cases}$$

Hence, $x_n = (x_j/\beta_j)\beta_n$, i.e. $\ker D' = X_0$. On the other hand, also by (1.5) we find

$$D'R'(x_n) = \big(y_{n+1} - y_n - (y_j/\beta_j)(\beta_{n+1} - \beta_n)\big) = (y_{n+1} - y_n) = (x_n),$$

i.e. D' is right invertible and F' is an initial operator for D.

Since superposition of a right invertible operator and invertible operator is again a right invertible operator, then for every pair operators A, $B \in L_0(X)$ which are both invertible and X_0 is an invariant subspace of B, the operator

$$D = AD'B$$

is right invertible operator and ker $D = X_0$.

2. GENERALIZED DIFFERENCE OPERATORS

Let $X = (c)$ be a linear space of all infinite sequences of complex numbers and let X_0 be a finite dimensional subspace of X.

Definition 1. An operator $B \in L_0(X)$ in said to be a generalized difference operator over X_0 if B is right invertible and ker $D = X_0$.

In this section we describe a method to construct a generalized difference operator.

Let

$$e_k = (a_{k0}, a_{k1}, \dots, a_{kn}, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

be a basic of X_0. Hence $X_0 = \text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$. It is easy to check that there are s indeces $k_1, k_2, \dots, k_s$ $(0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_s < \infty)$ such that the system of a vectors

$$\left(e_1' = (a_{1k_1}, a_{1k_2}, \dots, a_{1k_s}) \dots, \ e_s' = (a_{sk_1}, a_{sk_2}, \dots, a_{sk_s})\right)$$

is linearly independent.

Write:

$$Q_E = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_s} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \dots & a_{2k_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{sk_1} & a_{sk_2} & \dots & a_{sk_s} \end{pmatrix}$$

Then det $Q_E \neq 0$ and there exists Q_E^{-1}:

$$Q_E^{-1} = \begin{pmatrix} d_{k_1 1} & d_{k_1 2} & \dots & d_{k_1 s} \\ d_{k_2 1} & d_{k_2 2} & \dots & d_{k_2 s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k_s 1} & d_{k_s 2} & \dots & d_{k_s s} \end{pmatrix}$$

Lemma 2.

$$X = X_1 \oplus X_0, \tag{2.2}$$

where

$$X_1 = \{x = (x_n) : \ x_{k_r} = 0 \quad \text{for} \quad r = 1, 2, \dots, s\}.$$

Proof. Indeed, if $(x_n) \in X_1 \cap X_0$ then

$$(x_n) = \sum_{i=1}^{s} \beta_i e_i.$$

It follows

$$x_{k_r} = \sum_{i=1}^{s} \beta_i a_{ik_r}, \quad r = 1, 2, \dots, s.$$

Since $(x_n) \in X_1$ we find $x_{k_r} = 0$ and $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_i a_{ik_r} = 0$, for $r = 1, 2, \dots, s$. Therefore $(x_n) = (0, 0, \dots)$.

On the other hand, let be given $(x_n) \in X$. For $n = k_r$, $r = 1, 2, \dots, s$, the system

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ik_r}\beta_i = x_{k_r}, \quad r = 1,2,\dots,s.$$

has a unique solution

$$(\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_s^0)^T = Q_E^{-1}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s})^T$$

Thus, if we choose

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{s} \beta_i^0 a_{in}, \quad \text{for} \quad n \neq k_r, \quad r = 1,2,\dots,s,$$

and $y_{k_r} = 0$ for $r = 1,2,\dots,s$, then $(y_n) \in X_1$ and $(x_n) = (y_n) + (z_n)$, where $(z_n) = \sum_{i=1}^{s} \beta_i^0 e_i$. The proof is complete.

Lemma 3. There is a projection operator $F \in L_0(X)$ such that $FX = X_0$.

Proof. We construct operator F by the following rule

$$F(x_n) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{r=1}^{s} d_{k_r i} x_{k_r i} e_i.$$

Obviously, $FX \subset X_0$. Since for every given system $(b_1, b_2, \dots, b_s)$, the system of equations

$$\sum_{r=1}^{s} d_{k_r i} x_{k_r} = b_i, \quad i = 1,2,\dots,s,$$

has a unique solution, we conclude that $FX = X_0$.

On the other hand,

$$Fe_j = \sum_{i=1}^{s}\sum_{r=1}^{s} d_{k_r i} a_{jk_r} e_i = \sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{r=1}^{s} a_{jk_r} d_{k_r i}\Big) e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \delta_{ji} e_i = e_j, \quad j = 1,2,\dots,s.$$

Hence, $F^2 e_j = e_j$ and it follows $F^2 x = Fx$ for all $x \in X$, which was to be proved.

To construct a generalized difference operator over X_0, we deal with the following involution operators:

$$T_r(x_n) = (y_{r,n}), \quad r = 1,\dots,s; \quad T = T_1 T_2 \dots T_s,$$

where

$$y_{r,n} = \begin{cases} x_n & \text{for} \quad n \neq k_r,\ n \neq r-1, \\ x_{r-1} & \text{for} \quad n = k_r, \\ x_{k_r} & \text{for} \quad n = r-1 \end{cases}$$

It is easy to see that

$$T_i T_r = T_r T_i, \quad T_i^2 = I; \quad i, r, \dots, s.$$

So that $T^2 = T$, i.e. $T^{-1} = T$.

Lemma 4. $TX_1 = X_2$, where

$$X_2 = \{x = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{s}, x_0, x_1, \ldots)\}.$$

Proof follows immediately from definitions of X_1 and $T_j (j = 1, \ldots, s)$, T.

Lemmas 5. There is a left invertible operator R' such that $R'X = X_2$.

Proof. Let $(x_n) \in X$. Write:

$$R'(x_n) = (0, 0, \ldots, 0, x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \ldots).$$

It is easy to check that dim ker $R' = 0$ and $R'X = X_2$.

Define operator $D'(x_n) = (x_{s+n+1} - x_{s+n})$. Then we find

$$D'R'(x_n) = D'(0, 0, \ldots, 0, x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \ldots) = (x_n),$$

i.e. R' is left invertible and D' is its left inverse.

Corrolary 1. Operator $R := TR'$ is left invertible and $RX = X_1$.

Now we construct a right invertible operator $\overline{D} \in L_0(X)$ such that $\overline{D}R' = I$ and ker $\overline{D} = TX_0$.

Since T is an invertible operator, TX_0 is a subspace of X and the system $\{Te_1, Te_2, \ldots, Te_s\}$ forms a basic of TX_0. So we can get

$$\overline{D}(x_n) = \Big((x_{s+n+1} - x_{s+n}) - \sum_{i=1}^{s}\sum_{r=1}^{s} d_{k_r i} x_{k_r}(\beta_{i,s+\overline{n}+1}\beta_{i,s+n})\Big)$$

Hence, if we choose

$$D = \overline{D}T, \quad R = TR'$$

we find $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$, $F \in \mathcal{F}_D$, $FR = I$ and ker $D = X_0$.

Now we can formulate the main result

Theorem 1. For any finite dimensional space $X_0 \subset X$, there is a generalized difference operator such that

$$\text{ker } D = X_0.$$

It is easy to check that the right inverse $R = TR'$ is a Volterra operator.

By the same argument as in [1] - [4], we can construct an infinite number of Volterra right inverses for D.

REFERENCES

1. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis, PWN Reidel Pub. Warsaw 1988.
2. Przeworska - Rolewicz D., Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators, *Demonstratio Math.* **21** (1988), *1023-1044*.
3. Nguyen Van Mau, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singular intergral equations, *Demonstratio Math.* **23** (1990), *191-212*.
4. Nguyen Van Mau. Characterization of Volterra right inverses, *Opuscula Math.* **6** (1990), *21-37*.

JOURNAL OF SCIENCE - 1993
Special issue on Mathematics, Mechanics and Informatics

SOME PROPERTIES OF COMMUTATORS WITH ONE SIDED INVERTIBLE OPERATORS

PHAN KHANH TAM
Faculty of Mathematics, Hanoi University

Let X be a linear space over a field of scalars. We consider a linear operator A defined in a linear subset dom A, called the domain of A, and mapping dom A into X. Denote by $L(X)$ the set of all such operators. Write: $L_0(X) = \{A \in L(X) : \text{dom } A = X\}$. An operator $D \in L(X)$ is said to be right invertible if there exists an operator $R \in L_0(X)$ such that $RX \subset \text{dom } D$, $DR = I$. The operator R is called a right inverse of D and R is called left invertible. Denote by $R(X)$ the set of all right invertible operators. The set of all right inverses for an operator $D \in R(X)$ will be denoted by $\mathcal{R}_D$.

An operator $F \in L(X)$ is said to be an initial operator for $D \in R(X)$ corresponding to $R \in \mathcal{R}_D$ if dom $D \subset$ dom F, $F(\text{dom } D) = \ker D$, $F^2 = F$, $FR = 0$.

The definition immediately implies that $DF = 0$.

It is well-known the following facts (cf. [1]):

(1) $F \in L(X)$ is an initial operator for $D \in R(X)$ corresponding to $R \in \mathcal{R}_D$ if and only if $F = I - RD$ on dom D.

(2) Suppose that we are given $D \in R(X)$ and an operator $F \in L(X)$ such that dom $D \subset$ dom F, $F^2 = F$, $F(\text{dom } D) = \ker D$. Then F is an initial operator for D corresponding to the right inverse $R = R' - FR'$, where R is uniquely defined independently of the choice of right inverses R' of D.

(3) Let $D \in R(X)$ and let R, $R' \in \mathcal{R}_D$ which are commutative then $R = R'$.

(4) Let $D \in R(X)$ and let F, F' be two commutative initial operators for D then $F = F'$.

The following theorems were given by Przeworska - Rolewicz in [2].

Theorem 1. Suppose that D_1, $D_2 \in R(X)$, $R_1 \in \mathcal{R}_{D_1}$, $R_2 \in \mathcal{R}_{D_2}$, $D_1D_2 = D_2D_1$ on $X_{12} :=$ dom $D_1 \cap$ dom D_2. A necessary and sufficient condition for $R_1R_2 = R_2R_1$ is that there exists $A \in L_0(X)$ such that $F_1A = 0$, $F_2D_1A = 0$, where F_i is an initial operator for D_i corresponding to R_i $(i = 1, 2)$.

Theorem 2. Suppose that $A \in L(X)$. If there exists $B \in L_0(X)$ such that $BX \subset$ dom A, (i) $\ker B = \{0\}$, (ii) the operator $P = I - BA$ is a projection into $\ker A$, (iii) $PB = 0$, then A is right invertible, B is a right inverse of A and P is an initial operator for B corresponding to R.

In this report, we give some new characterizations for commutators induced by one-sided invertible operators and by their initial and co-initial operators, Moreover, we also give the answer the following question posed by Przeworska - Rolewicz in [2]: will conditions (i), (ii) and (iii) be all essential for the proof of Theorem 2?

In the sequel, we will denote by $\mathcal{F}_D$ the set of all initial operators for D which belong to $L_0(X)$.

Lemma 1. Let $D \in R(X)$ and let $F \in \mathcal{F}_D$. Then every operator $A \in L_0(X)$ that commutes with F is of the form

$$A = FA_0 + A_0F - A_0, \quad A_0 \in L_0(X) \quad \text{is arbitrary.} \tag{1}$$

Proof. Indeed. If A is of the form (1) then

$$AF - FA = (FA_0 + A_0F - A_0)F - F(FA_0 + A_0F - A_0) = FA_0F - FA_0F = 0.$$

Conversely, if $AF = FA$ then we choice $A_0 = (2F - I)A$. Since $F^2 = F$, we find

$$\begin{aligned} FA_0 + A_0F - A_0 &= F(2F - I)A + (2F - I)AF - (2F - I)A = \\ &= (2F - F)A + (2F - F)A - 2FA + A = A, \end{aligned}$$

which was to be proved.

Corollary 1. If $V \in L_0(X)$ is left invertible and G is a co-initial operator for V then every operator $B \in L_0(X)$ which commutes with G must be of the form

$$B = VB_0 + B_0V - B_0,$$

where $B_0 \in L_0(X)$ is arbitrary.

Lemma 2. Let D_1, $D_2 \in R(X)$ and let $F_i \in \mathcal{F}_{D_i}$ $(i = 1, 2)$. Then a necessary and sufficient condition for $A \in L_0(X)$ to be commute with F_1, F_2 is that there exist A_1, $A_2 \in L_0(X)$ such that

$$A = F_iA_i + A_iF_i - A_i, \quad i = 1, 2.$$

Proof is going by the same way as the proof of lemma 1.

Corollary 2. Let D_1, $D_2 \in R(X)$ and let $F_i \in \mathcal{F}_{D_i}$ $(i = 1, 2)$ Then a necessary and sufficient condition for F_2 to be commute with F_1 is that

$$F_2 \in \{F_1B + BF_1 - B, \quad B \in L_0(X)\}. \tag{2}$$

Remark 1. It follows from Lemma 1 that we can put $B = (2F_1 - I)F_2$ provided $F_1F_2 = F_2F_1$.

Now we give a condition for a given operator A to be stationary, i.e. A commutes with both operator $D \in R(X)$ and $R \in \mathcal{R}_D$.

Lemma 3. Let $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$ and F be an initial operator for D corresponding to R. Suppose that $A \in L_0(X)$ and $DA = AD$ on dom A commutes with R if and only if

$$FAR = 0.$$

Proof. Indeed, if $AR = RA$ then $FAR = FRA = 0$. Conversely, if $FAR = 0$ then it follows $AR = RDAR = RADR = RA$.

Similarly we also have the following result.

Lemma 4. Let $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$ and let $F \in \mathcal{F}_D$ be an initial operator for D corresponding to R. Let be given $A \in L_0(X)$ and $AR = RA$. Then a necessary and sufficient condition for $DA = AD$ on dom D is $A(\ker D) \subset \ker D$.

Proof. Since for every $z \in \ker D$, $Az \in \ker D$, it follows $DAz = 0$. hence, $DAF = 0$. By the assumption, $AR = RA$, we find $DAR = A$ and $AD = DARD = DA(I - F) = DA - DAF = DA$.

Conversely, if $AD = DA$ then for $z \in \ker D$ we find $DAz = ADz = 0$, i.e. $D(Az) = 0$, which implies that $Az \in \ker D$.

Corollary 3. If $A \in L_0(X)$ is stationary then

$$FAR = 0, \quad DAF = 0. \tag{4}$$

Now we can formulate an other condition for commutator induced by a given initial operator F.

Lemma 5. Let $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$ and F is an initial operator for D corresponding to R. Then $A \in L_0(X)$ commutes with F if and only if the conditions (4) are satisfied.

Proof. Indeed, if $AF = FA$ then $FAR = AFR = 0$ and $DAF = DFA = 0$. Conversely, if (4) is satisfied then we find $FARD = 0$, i.e. $FA = FAF$ and $RDAF = 0$, i.e. $AF = FAF$. So that $FA = AF$.

Corollary 4. If $A \in L_0(X)$ is stationary then A is commutative with the initial operator F.

Lemmas 4 and 5 together imply the following

Theorem 3. Operator $A \in L_0(X)$ is stationary if and only if A commutes with F and $DAR = A$.

Proof. Indeed, if A is stationary, i.e. A is commutative with both D and R, then by lemas 4 and 5, it follows $FAR = 0$, $DAF = 0$ and $AF = FA$. Hence F commutes with A and $DAR = ADR = A$. Conservely, if $FA = AF$ and $DAR = A$ then we find $ARD = RDA$ and $RA = RDAR = ARDR = AR$, $AD = DARD = DRDA = DA$, which was to be proved.

Now we give an other characterization of right invertible operators.

Theorem 4. Suppose that $A \in L(X)$ and Im $A = X$. If there exists an operator $B \in L_0(X)$ such that $\ker B = 0$ and BA is a projection, then A is right invertible and $P = I - BA$ is an initial operator for A corresponding to the right inverse B of A.

Proof. By the assumption $BABA = BA$ we find $ABA = A$. Since Im $A = X$, it follows $AB = I$. Hence B is a right inverse of A and $P = I - BA$ ia an initial operator for A corresponding to B.

REFERENCES

1. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis, Warsaw 1988.
2. Przeworska - Rolewicz D., Some properties of right inverses. SERDICA Bulgaricae Math. pub. **7** (1981), *298-300*.

JOURNAL OF SCIENCE – 1993
Special issue on Mathematics, Mechanics and Informatics

CONDITIONS FOR GENERALIZED INVERTIBILITY OF POLYNOMIALS IN ALGEBRAIC OPERATORS

NGUYEN MINH TUAN
Faculty of Mathematics, Hanoi University

The theory of singular integral equations started with works of Noether and Carleman from 1921 and has been developed by many mathematicians as Muskhelisvili, Gakhov, Vekua, ...

A natural generalization is the Noetherian theory of abstract singular operators and equations. Halilov was the first who gave a theory of regularization and solvability of linear equations with involutions in unitary rings. Cherski generalized Halilov's results to Banach spaces. Since 1960 Przeworska - Rolewicz inverstigated general equations of the type

$$Kx := \sum_{j=0}^{n-1} A_j S^j x + Tx = y$$

in general linear spaces with algebraic operator S. Note that in the cited works, it is assumed that S commutes or commutes modulo a two-sided ideal with all coefficients of the polynomial under consideration. In 1984, Nguyen Van Mau generalized those results for the general case when S does not commute with coefficients of K. All the above results were obtained under the assumptions that the corresponding simbols are invertible or one-sided invertible.

In this report we deal with operator polynomials when their simbols are generalized invertible only. Moreover, we also give some effective formulae of generalized inverses for other operators induced by nilpotent and impotent elements.

§1.

Let X be a linear space over a field $\mathcal{F}$ of scalars (where $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ or $\mathcal{F} = \mathbb{R}$). Denote by $L(X)$ the set of all linear operators acting in X and by $L_0(X)$ the set of all operators $A \in L(X)$ with dom $A = X$. Let $\ddot{A}$ be an agebra in $L_0(X)$ with unit I.

Definition 1 [1] - [2]. We say that an element $S \in \ddot{A}$ is algebraic if there exists a polynomial

$$P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n; \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \ldots, n$$

satisfying the condition $P(S) = 0$.

If S is an algebraic element then we denote by $P_S(t)$ its characteristic (minimal) polynomial.

Definition 2 [5]. An element $A \in \ddot{A}$ is said to be generalized invertible if there is $B \in \ddot{A}$ such that $ABA = A$.

Let S be an algebraic element with characteristic polynomial

$$P_S(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-t_j)^{r_j},\quad r_1+\cdots+r_n=N,\ t_i\neq t_j\quad \text{if}\quad i\neq j.$$

Let $P_1,\ldots,P_n$ are disjoint projection operators induced by S, i.e. $P_1+P_2+\cdots+P_n=I$, $P_iP_j=\delta_{ij}P_j$, $(S-t_iI)^{r_i}P_i=0$, $i=1,\ldots,n$. Then every operator polynomial

$$A(S):=\sum_{j=0}^{N-1}A_jS^j \tag{1}$$

can be represented in the form

$$A(S)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{r_j-1}T_{j\mu}Q_j^{\mu},\quad T_{j\mu}=\sum_{k=\mu}^{r_j-1}\binom{k}{\mu}t_j^{k-\mu}A_k. \tag{2}$$

In the sequel, we suppose that there exists $A_{ij}\in\tilde{A}$ such that

$$S^iA_j=A_{ji}S^i;\quad i,j=0,1,\ldots,N-1. \tag{3}$$

§2.

Consider the following operator

$$B=\sum_{j=1}^{n}B_jP_j,\quad B_j,P_j\in\tilde{A} \tag{4}$$

where $P_iP_j=\delta_{ij}P_j$, $P_1+P_2+\cdots+P_n=I$.

Suppose that there exists element B_{ijk} and R_{kij} for which

$$P_iB_j=\sum_{k=1}^{n}B_{ijk},\quad B_jP_i=\sum_{k=1}^{n}P_kR_{kij}\quad (i,j=1,\ldots,n). \tag{5}$$

Denote by B_{ij} and R_{ij} elements B_{ijj} and R_{kjj}, respectively. By $[B_{ij}]$ and $[R_{kj}]$ we will denote $(n\times n)$ - matrices associated with B_{ij} and R_{kj}, respectively.

Lemma 1. If matrix $[B_{ij}]$ is generalized invertible then B is generalized invertible.

Proof. Note that

$$B=\sum_{i=1}^{n}P_iB=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_iA_jP_j=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}B_{ij}\Big)P_j.$$

Denote by β_B the matrix $[B_{ij}]$ and by β'_B its generalized inverse, i.e. $\beta_B\beta'_B\beta_B=\beta_B$, $\beta'_B=[M_{ij}]$.

Write

$$M=\sum_{i=1}^{n}B_iP_i.$$

Then we find

$$BMB = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell i}\Big)P_i \sum_{j=1}^{n} B_j P_j \sum_{k=1}^{n} B_k P_k =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell i} M_{ij} B_{jk} P_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{\ell i} M_{ij} B_{jk}\Big)\Big) P_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell k}\Big) P_k = B, \text{ which was to be proved.}$$

Similarly, we also have

Lemma 2. If matrix $[R_{kj}]$ is generalized invertible then operator B of the form (4) is generalized invertible.

§3.

Now we consider the following operator induced nilpotent elements

$$T := \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1} T_{ik} Q_k^i, \tag{6}$$

where $Q_i Q_j = \delta_{ij} Q_j^2$, $Q_i^0 Q_j^0 = \delta_{ij} Q_j^0$, $Q_1^0 + Q_2^0 + \cdots + Q_n^0 = I$, $Q_i^{r_i} = 0$.

Assume that

$$Q_k^i T_{\ell j} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{r_m-1} T_{ki\ell j}^{(m,\mu)} Q_m^{\mu} \tag{7}$$

Denote by $\overline{X}_k$ the vector with coordinates $(X_{k0}, X_{k1}, \ldots, X_{kr_k-1})$ and by $\overline{X}$ the vector with coordinates $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n)$. Denote by $[\overline{T}]$ the matrix of elements $T^{(m,k)}$ $(m, k = 1, \ldots, n)$ and by $\overline{\overline{T}}^{(m,k)}$ we denote matrices of elements $T_{\mu,j}^{(m,k)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots, r_m - 1,\ j = 0, 1, \ldots, r_k - 1)$.

If we choose

$$T_{is}^{(k,\ell)} = \sum_{j=0}^{s} T_{ik\ell j}^{(\ell, s-j)}, \tag{8}$$

where $T_{ik\ell j}^{(\ell,\mu)}$ are defined by (7), then $\overline{X}$ is called the simbol of T and denote it by β_T.

Lemma 3. For every operator T of the form (6), the following equality holds

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\Big(\sum_{j=0}^{n} T_{0,i}^{(j,k)}\Big) G_k^i = T. \tag{9}$$

Proof. From (7) we find

$$T = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1} T_{ki}Q_k^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1} Q_j^0 T_{ki} Q_k^i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{s=0}^{r_\ell-1} T_{j0ki}^{(\ell,s)} Q_\ell^s Q_k^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{(r_k-1)}\sum_{s=0}^{r_k-1} T_{j0ki}^{(k,s)} Q_k^{s+i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{r_k-1}\Big(\sum_{i=0}^{\mu} T_{j0ki}^{(k,\mu-i)}\Big) Q_k^\mu = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{r_k-1} T_{0,\mu}^{(j,k)} Q_k^\mu,$$

which was to be proved.

Now we can prove the main result

Theorem 1. If simbol β_T of T is generallized invertible then operator T is generalized invertible.

Proof. Let $\beta_M = \big(M_{\mu,j}^{(m,k)}\big)$ be a matrix such that $\beta_T\beta_M\beta_T = \beta_T$. Let M be of the form

$$M = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=0}^{r_\ell-1} M_{\ell j} Q_\ell^j, \quad M_{\ell j} = \sum_{i=1}^{n} M_{0,j}^{(i,\ell)}.$$

Write:

$$A_{ki} := \sum_{j=1}^{n} T_{0,i}^{(j,k)}.$$

By Lemma 3, we find

$$TMT = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1} A_{ki}Q_k^i \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=0}^{r_\ell-1} M_{\ell j}Q_\ell^j \sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{r_m-1} T_\mu Q_m^\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\sum_{j=0}^{r_\ell-1}\sum_{\mu=0}^{r_m-1} A_{ki}\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=0}^{r_p-1} M_{ki\ell j}^{(p,s)} Q_p^s Q_\ell^j T_{m\mu} Q_m^\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\sum_{j=0}^{r_\ell-1}\sum_{\mu=0}^{r_m-1} A_{ki}\sum_{s=0}^{r_\ell-1} M_{ki\ell j}^{(\ell,s)} Q_\ell^{s+j} T_{m\mu} Q_m^\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\sum_{\mu=0}^{r_m-1} A_{ki}\Big(\sum_{s=0}^{r_\ell-1}\sum_{j=0}^{r_\ell-1} M_{ki\ell j}^{(\ell,s)} Q_\ell^{s+j}\Big) T_{m\mu} Q_m^\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\sum_{\mu=0}^{r_m-1} A_{ki}\sum_{s=0}^{r_\ell-1} M_{i,s}^{(k,\ell)} Q_\ell^s T_{m\mu} Q_m^\mu =$$

$$= \sum_{k,\ell,m=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\sum_{s=0}^{r_\ell-1}\sum_{\mu=0}^{r_m-1} A_{ki} M_{i,s}^{(k,\ell)} T_{s,\mu}^{(\ell,m)} Q_m^\mu =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{r_m-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_k-1}\sum_{s=0}^{r_\ell-1} T_{0,i}^{(j,k)} M_{i,s}^{(k,\ell)} T_{s,\mu}^{(\ell,m)}\Big)\Big) Q_m^\mu =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{r_m-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} T_{0,\mu}^{(j,m)}\Big) Q_m^\mu = T.$$

The proof is complete.

§4. GENERALIZED INVERTIBILITY OF OPERATOR POLYNOMIALS IN ALGEBRAIC OPERATORS

Now consider the polynomial $A(S)$ of the form (1). We need the following representation formula for $A(S)$ (cf. [4]-[5])

Lemma 4. The polynomial $A(S)$ can be represented in the following form

$$A(S) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{r_j-1} T_{js} Q_j^s, \tag{10}$$

where T_{js} are of the form (2) and

$$\begin{aligned} Q_k^i T_{\ell j} &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{r_m-1} T_{ki\ell j}^{(m,\mu)} Q_m^\mu, \\ T_{ki\ell j}^{(m,0)} &= \sum_{s=1}^{r_\ell-1} \binom{s}{j} t_\ell^{s-j} P_k^{(i,k)}(A_s, t_m), \\ T_{ki\ell j}^{(m,\mu)} &= \sum_{s=1}^{r_\ell-1} \binom{s}{j} t_\ell^{s-j} P_{km\mu}^{(i,k)}(A_s), \quad \mu = 1, \ldots, r_m - 1. \end{aligned}$$

So that we can form the corresponding simbol for $A(S)$ as in §3.

Definition 3. Simbol $\beta_{A(S)}$ of operator $A(S)$ of the form (10) is said to be the formal simbol of polynomial (1).

Theorem 1 immediately follows

Theorem 2. If the formal simbol of $A(S)$ of the form (1) is generalized invertible then $A(S)$ is generallized invertible and its generalized inverses can be obtained in a closed form.

Now we deal with the case when S has one characteristic root only, i.e.

$$P_s(t) = (t - t_0)^{r_0}.$$

Setting $S - t_0 I = Q$, we obtain

$$Q^{r_0} = 0 \quad \text{and} \quad A(S) = \sum_{s=0}^{r_0-1} B_s Q^s, \quad B_s = \sum_{m=s}^{r_0-1} \binom{m}{s} A_m t_0^{m-s}. \tag{11}$$

Lemma 5. For every index i $(i = 1, 2, \ldots, r_0 - 1)$, the following equalities hold

$$Q^i A(S) = \sum_{j=0}^{r_0-1} B_{ij} Q^j, \quad B_{ij} = \sum_{k+\mu=j} B_{i\mu k}, \tag{12}$$

where

$$B_{i\mu k} = \begin{cases} \sum_{m=\mu}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{i} \binom{m}{\mu}\binom{i}{j}\binom{j}{k}(-1)^{i-j} t_0^{m+i-\mu-k} A_{mj} & \text{if } k \leq i, \\ 0 \quad \text{if } k > i \end{cases} \tag{13}$$

Proof follows immediately from the assumptions (3). Write:

$$B_{0j} := B_j, \quad \beta_{A(S)} := B_{ij}. \tag{14}$$

Definition 4. $\beta_{A(S)}$ defined by (14) is said to be the formal simbol of $A(S)$.

Theorem 3. If the formal simbol $\beta_{A(S)}$ is generalized invertible then $A(S)$ is generalized invertible.

Proof. Let β_M be a generalized inverse of $\beta_{A(S)}$ and $\beta_M = [M_{ij}]$. Arcording Lemm 5, we find $M = \sum_{s=0}^{r_0-1} M_{0s} Q^s$ and

$$\begin{aligned} A(S) &= \sum_{i=0}^{r_0-1} \sum_{s=0}^{r_0-1} \sum_{\mu=0}^{r_0-1} B_{0i} Q^i M_{0s} Q^s B_{0\mu} Q^\mu \\ &= \sum_{i=0}^{r_0-1} \sum_{\mu=0}^{r_0-1} B_{0i} \sum_{s=0}^{r_0-1} M_{is} Q^s B_{0\mu} Q^\mu \\ &= \sum_{i=0}^{r_0-1} \sum_{s=0}^{r_0-1} B_{0i} M_{is} \sum_{\mu=0}^{r_0-1} B_{s\mu} Q^\mu \\ &= \sum_{i=0}^{r_0-1} \sum_{s=0}^{r_0-1} \sum_{\mu=0}^{r_0-1} (B_{0i} M_{is} B_{s\mu}) Q^\mu = \sum_{\mu=0}^{r_0-1} B_{0\mu} Q^\mu = A(S), \end{aligned}$$

which was to be proved.

REFERENCES

1. Przeworska - Rolewicz D., Equations with transformed argument. An algebraic approach. Amsterdam-Warsaw 1973.
2. Przeworska - Rolewicz D., Rolewicz S., Equations in linear spaces. Warszwa 1968.
3. Gakhov F. D., Boundary value problems, Oxford 1966 (3rd Russian complemented and corrected edition, Moscow 1977).
4. Mushlisvili N. I., Singular Integral Equations. Groningen 1953 (3rd Russian complemented and corrected edition, Moscow 1968).
5. Nguyen Van Mau, Generalized algebraic elements and singular integral equations with transformed argument. Warszawa 1989.
6. Nguyen Van Mau, Regularization of polynomials in algebraic and almost algebraic operators. *Demonstratio Math.* **17** (1984), *15-17*.

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN TỔNG QUÁT ĐỐI VỚI ĐA THỨC CỦA CÁC TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH PHẢI

Phạm Quang Hưng
Khoa Toán Cơ - Tin học, Đại học Tổng hợp Hà Nội

Tính chất $c(R)$ của các toán tử ban đầu sinh bởi một toán tử khả nghịch phải đã được D. Przeworska - Rolewicz đưa ra và áp dụng giải các bài toán giá trị biên trong [1], [2], [3], [4].

W. Z. Karwowski và D. Przeworska - Rolewicz đã áp dụng giải các bài toán giá trị biên tổng quát trong [9].

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm tính chất $c(R)$ - suy rộng và áp dụng giải bài toán giá trị biên tổng quát:

$$\sum_{k=0}^{N} Q_k D^k x = y, \qquad F_j D^k x = x_{jk},$$

trong đó F_j $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ là các toán tử ban đầu có tính chất $c(R)$ - suy rộng, $x_{jk} \in \ker D$ $(k \in I_j,\ j = 0, 1, \dots, n)$.

1.

Giả sử X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathcal{F}$ (ở đây $\mathcal{F} = \mathbf{R}$ hoặc $\mathcal{F} = \mathbf{C}$. $L(X)$ là tập tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong không gian tuyến tính X. Ký hiệu:

$$L_0(X) = \{A \in L(X) \ : \ \operatorname{dom} A = X\}.$$

Một toán tử $D \in L(X)$ được gọi là khả nghịch phải nếu $\exists R \in L(X)$, sao cho $\operatorname{Im} R \subset \operatorname{dom} D$ và $DR = I$ trên $\operatorname{dom} R$.

Nếu toán tử D là khả nghịch phải thì ta viết $D \in R(X)$. Nếu tồn tại một nghịch đảo phải $R \in L_0(X)$ thì ta viết $D \in R_0(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$.

Ký hiệu:

$$\mathcal{F}_D = \left\{F \in L_0(X) \ : \ FX = \ker D,\ F^2 = F \text{ và } \underset{R \in \mathcal{R}_D}{\exists} FR = 0\right\}$$

Mỗi một toán tử $F \in \mathcal{F}_D$ sao cho $FR = 0$ đối với một $R \in \mathcal{R}_D$ được gọi là toán tử ban đầu của D tương ứng với R.

Ta có:

$$\ker D^n = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} R^k z_k \ : \ z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \ker D\right\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

Ký hiệu:

$$P_n(R) = \lim\{R^k z \ : \ z \in \ker D,\ k = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ta đã biết $P_n(R) = \ker D^n \Leftrightarrow \dim \ker D = 1$.

Nói chung trong trường hợp tổng quát thì $P_n(R) \underset{\neq}{\subset} \ker D^n$.

Định nghĩa 1. [2]. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là nh chất $c(R)$ nếu tồn tại hằng số c_k sao cho:

$$F_0 R^k z = c_k z, \quad \text{đối với mọi } z \in \ker D, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Một tập $\mathcal{F}_D^0 \subset \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ nếu mỗi một $F \in \mathcal{F}_D^0$ có tính chất $c(R)$.

Định lý 1. [2]. $\mathcal{F}_D^0(R) = \mathcal{F}_D \Leftrightarrow \dim \ker D = 1$

Ta đã biết, nếu $\dim \ker D > 1$ thì không phải mọi toán tử ban đầu đều có tính chất $c(R)$.

Định nghĩa 2. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D(X)$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là nh chất $c(R)$ - suy rộng nếu như tồn tại các không gian con $Z_1, \dots, Z_s$ của $\ker D$ sao cho:

$$\text{i/} \quad \ker D = \bigoplus_{j=1}^{s} Z_j; \quad Z_j \neq \{0\}; \quad Z_i \cap Z_j = \{0\}, \qquad i \neq j \quad i,j = 1,2,\dots,s. \tag{1}$$

ii/ Tồn tại hằng số $c_{kj} \in \mathcal{F}$,

$$F_0 R^k z_j = c_{kj} z_j \quad \text{đối với tất cả } z_j \in Z_j, \quad k \in \mathbf{N} \tag{2}$$

Nếu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng thì ta viết $F_o \in C_G(R)$

Bổ đề 1. $F_0 \in C_G(R)$ có tính chất $c(R)$ khi và chỉ khi đối với $Z_j \subset \ker D$ bất kỳ ($j = \dots, s$) thỏa mãn (1), tồn tại hằng số $c_k \in \mathcal{F}$ sao cho

$$F_0 R^k z_j = c_k z_j, \quad \forall z_j \in Z_j, \quad (j = 1,2,\dots,s) \tag{3}$$

Chứng minh:

$$\forall z \in \ker D, \quad z_j \in Z_j \quad (j = 1,2,\dots,s),$$

cho: $z = z_1 + \dots + z_s$. Khi đó:

$$F_o R^k z = \sum_{j=1}^{s} F_0 R^k z_j = \sum_{j=1}^{s} c_k z_j = c_k \sum_{j=1}^{s} z_j = c_k z.$$

Từ bổ đề 1 ta thấy rằng $F_0 \in \mathcal{F}_D$. có tính chất $c(R)$ thì F_0 có tính chất $c(R)$ - suy rộng.

Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng tồn tại $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng, nhưng không có tính $c(R)$.

Ví dụ 1. Cho $X = C^2(\mathbf{R})$, $D = \dfrac{d^2}{dt^2}$;

$$(RX)(t) = \int_0^t \int_0^\tau x(\sigma) d\sigma d\tau, \quad \ker D = \{\alpha e_1 + \beta e_2\};$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = t, \quad Z_1 = \operatorname{lin}\{e_1\}, \quad Z_2 = \operatorname{lin}\{e_2\}.$$

$$(\hat{F}_0 x)(t) = x(0) + \frac{1}{2}[x(1) + x(-1)] \in \mathcal{F},$$
$$(\hat{F}_1 x)(t) = x'(0) + \frac{1}{2}[x(1) - x(-1)] \in \mathcal{F}.$$

Dễ dàng thấy rằng: $\hat{F}_0^2 = \hat{F}_0$; $\hat{F}_1^2 = \hat{F}_1$,

$$R = \hat{R}_0^2, \quad \text{ở đây} \quad (\hat{R}_0 x)(t) = \int_0^t x(t)dt,$$

$$D = D_0^2, \quad \text{ở đây } D_0 = \frac{d}{dt}; \quad \hat{F}_0 X = \ker D_0, \quad \hat{F}_1 X = \ker D_0,$$
$$(F_0 x)(t) = (\hat{F}_0 x)(t).e_1 + (\hat{F}_1 x)(t).e_2; \quad e_2 = \hat{R}_0 e_1.$$

Xét $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, khi đó ta có: $z_1 = \alpha e_1$; $z_2 = \beta e_2$.

Ta có:

$$F_0 R^k z_1 = F_0 \hat{R}_0^{2k} z_1 = \alpha(\hat{F}_0 \hat{R}_0^{2k} e_1).e_1 + \alpha(\hat{F}_1 R_0^{2k} e_1).e_2 =$$
$$= \frac{\alpha}{2} \frac{(1)^{2k} + (-1)^{2k}}{(2k)!} \cdot e_1 + \frac{\alpha}{2} \frac{(1)^{2k} - (-1)^{2k}}{(2k)!} \cdot e_2 = \frac{1}{(2k)!} z_1$$

$$F_0 R^k z_2 = F_0 \hat{R}_0^{2k+1} z_1 = \beta(\hat{F}_0 \hat{R}_0^{2k+1} e_1).e_1 + \beta(\hat{F}_1 \hat{R}_0^{2k+1} e_1).e_2 =$$
$$= \frac{\beta}{2} \frac{(1)^{2k+1} + (-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} e_1 + \frac{\beta}{2} \frac{(1)^{2k+1} - (-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} e_2 = \frac{1}{(2k+1)!} z_2.$$

Từ đó ta có:

$$F_0 R^k z_1 = \frac{1}{(2k)!} z_1, \quad \forall z_1 \in Z_1$$
$$F_0 R^k z_2 = \frac{1}{(2k+1)!} z_2, \quad \forall z_2 \in Z_2$$

Như vậy: F_0 có tính chất $c(R)$ - suy rộng nhưng không có tính chất $c(R)$, (vì $(2k)! \neq (2k+1)!$ và theo bổ đề 1).

2. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN TỔNG QUÁT

Giả sử $D \in R(X)$, $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng tương ứng với các không gian con $Z_1, \ldots, Z_s$ của $\ker D$ ($F_j \neq F_k$ với $j \neq k$).

Cho n tập hữu hạn I_j của các khoảng không âm với $\# I_j = r_j$; $r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1} = N$.

Xét toán tử:

$$Q(D) = \sum_{k=0}^{N} Q_k D^k$$

trong đó $Q_0, \ldots, Q_{N-1} \in L_0(X)$, $Q_N = I$.

Bài toán giá trị biên tổng quát đối với toán tử $Q(D)$ là: Tìm tất cả nghiệm của phương trình

$$Q(D)x = y, \quad y \in X \qquad (4)$$

thỏa mãn điều kiện:

$$F_j D^k x = x_{jk}, \quad x_{jk} \in \ker D \quad (k \in I_j,\ j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{5}$$

Theo giả thiết $F_0, \ldots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng, ta có:

$$F_j R^k z_\nu = c_{jk\nu}, \quad \forall z_\nu \in Z_\nu \qquad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \ldots, s \\ k \in \mathbf{N} \\ j = 0, 1, \ldots, n-1, \end{array}$$

từ đó đối với mỗi $z_k \in \ker D$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, ta có:

$$F_j R^k z_k = F_j R^k \sum_{\nu=1}^{s} z_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{s} F_j R^k z_{k\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} c_{jk\nu} z_{k\nu} \quad \forall z_{k\nu} \in Z_\nu$$

$$\begin{array}{l} \nu = 1, \ldots, s \\ k, j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

Viết:

$$\begin{aligned} b_{jk} &:= (c_{jk1}, c_{jk2}, \ldots, c_{jks}) \\ Z_k &:= (z_{k1}, \ldots, z_{ks})^T \\ W_N &:= (b_{jk}) \quad j, k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ V_N &:= \det W_N. \end{aligned}$$

Giả sử bài toán giá trị biên đối với toán tử $Q(D) = D^N$ là thiết lập đúng đắn, tức là bài toán:

$$\begin{aligned} &D^N x = y \\ &F_j D^k x = x_{jk} \quad (k \in I_j; \quad j = 0, 1, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{6}$$

có nghiệm duy nhất đối với mọi $y \in X$ và $x_{jk} \in \ker D$.

Ta đã biết (xem trong [8] bài toán (6) có nghiệm duy nhất đối với mọi $y \in X$ và $x_{jk} \in \ker D$ với giả thiết

$$V_N = \det W_N \neq 0 \tag{7}$$

và

$$\begin{aligned} &B_j R^k z = b_{jk} z, \quad z \in \ker D \\ &B_{r_0 + \cdots + r_{j-1} + m} = F_j D^{k,m} \\ &\qquad m = 1, \ldots, r_j \\ &\qquad j = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{8}$$

Nghiệm của bài toán (6) viết dưới dạng:

$$x = U_N(x_0, \ldots, x_{N-1}) \tag{9}$$

trong đó:

$$x_{r_0 + \cdots + r_{j-1} + m} = x_{jk,m}, \quad (m = 1, \ldots, r_j; \ j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{10}$$

$$U_N(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} V_{Nj}(R)x_j$$

$$V_{Nj}(t) = \frac{1}{V_N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+j} V_{Njk} t^k \qquad (11)$$

$$(j = 0, 1, \ldots, N-1)$$

và V_{Njk} là định thức con sinh bởi định thức V_N gạch đi cột thứ k và hàng thứ j, $(j, k = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Định nghĩa 3. Giả sử $D \in R(X)$, các toán tử ban đầu $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng và $V_N \neq 0$, cho $B_0, \ldots, B_{n-1}$ xác định bởi (8), toán tử G_N xác định như sau:

$$G_N u = U_N(B_0 u, \ldots, B_{N-1} u) \quad \text{đối với } u \in \operatorname{dom} D^{N-1} \qquad (12)$$

trong đó U_N xác định bở (11).

Toán tử G_N được gọi là toán tử Green đố với toán tử D^N với điều kiện (5).

Bổ đề 2. Giả sử $F_0, \ldots, F_{N-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng, khi đó một phần tử $x \in \operatorname{dom} D^N$ thỏa mãn điều kiện (5) khi và chỉ khi nó có dạng:

$$x = (I - G_N)R^N u + U_N(x_0, \ldots, x_{N-1}) \qquad (13)$$

Chứng minh bổ đề này giống như chứng minh hệ quả 3.3 trong [8].

Định lý 2. [9]. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) được thỏa mãn,

Ký hiệu:

$$\tilde{Q}(t, p) = \sum_{k=0}^{N-1} Q_k t^k p^{N-k}, \quad Q_0, \ldots, Q_{N-1} \in L_0(X) \qquad (14)$$

$$Q(t, p) = t^N + \tilde{Q}(t, p)$$

$$\tilde{Q}(D) = \tilde{Q}(D, I); \quad Q^0(R) = \tilde{Q}(I, R) \qquad (15)$$

Khi đó bài toán giá trị biên (4), (5) tương dương với phương trình

$$[I + G_N^0(R)]u = x_N \qquad (16)$$

trong đó:

$$G_N^0(R) = Q(I, R) - \tilde{Q}(D)G_N R^N \qquad (17)$$

$$X_N = y - \tilde{Q}(D)U_N(x_0, \ldots, x_{N-1}) \text{ cho trước} \qquad (18)$$

Hệ quả 1. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) thỏa mãn:

(i) Nếu -1 là một giá trị chính quy của toán tử $G_N^0(R)$ thì bài toán (4), (5) là thiết lập đúng đắn và nghiệm duy nhất của bài toán là:

$$x = (I - G_N)R^N [I + G_N^0(R)]^{-1} x_N$$

(ii) Nếu -1 là giá trị riêng của toán tử $G_N^0(R)$ thì bài toán (4), (5) là thiết lập không đúng đắn, hay bài toán không có nghiệm hoặc có nhiều hơn 1 nghiệm. Bài toán (4), (5) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$x_N \in [I + G_N^0(R)]X.$$

Nếu điều kiện trên thỏa mãn thì các nghiệm của bài toán (4), (5) có dạng:

$$x = (I - G_N)R^N(w + v),$$

trong đó $w \in \ker[I + G_N^0(R)]$ bất kỳ và v là một phần tử cố định bất kỳ của nghịch ảnh của phần tử x_N bởi ánh xạ $I + G_N^0(R)$.

Định lý 3. [9]. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) thỏa mãn và toán tử $Q(I, R)$ khả nghịch. Nếu toán tử

$$A = I - G_N R^N [Q(I, R)]^{-1} \tilde{Q}(D)\Big|_{\ker D^N}$$

khả nghịch trên $\ker D^N$ thì toán tử $I + G_N^0(R)$ khả nghịch trên X.

Hệ quả 2. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) thỏa mãn và toán tử $Q(I, R)$ khả nghịch. Nghiệm của bài toán giá trị biên (4), (5) có dạng sau:

$$x = R^N[Q(I, R)]^{-1}x_N + U_N x_0, \dots, x_{N-1}.$$

Định lý 4. [9] . Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) được thỏa mãn, khi đó toán tử A khả nghịch trên $\ker D^N$ khi và chỉ khi hệ

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{b_{ik}I - B_i R^N [Q(I, R)]^{-1} \tilde{Q}(D) R^k\} z_k = x_i - B_i R^N [Q(I, R)]^{-1} y, \quad (i = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (19)$$

có nghiệm duy nhất $(z_0, \dots, z_{N-1})$, ở đây $z_0, \dots, z_{N-1} \in \ker D$.

Định lý 5. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) được thỏa mãn, khi đó hệ (19) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi các toán tử

$$\Phi_i = B_i\{I - R^N [Q(I, R)]^{-1} \tilde{Q}(D)\}, \quad (i = 0, 1, \dots, N - 1)$$

độc lập tuyến tính trên $\ker D^N$.

Chứng minh. Từ (8) ta có: $b_{ik}z = B_i R^k z$, $z \in \ker D$, $(i, k = 0, 1, \dots, N_1)$, khi đó hệ (19) có thể viết lại dưới dạng

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_i\{I - R^N [Q(I, R)]^{-1} \tilde{Q}(D)\} R^k z_k = y_i \quad (20)$$

ở đây

$$y_i = x_i - B_i R^N [Q(I, R)]^{-1} y \in \ker D, \quad (i = 0, 1, \dots, N - 1)$$

ta có:

$$z_k = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_{k\nu} e_\nu, \quad y_k = \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{\nu k} e_\nu$$

Viết:

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks}) \\ \beta_k &:= (\beta_{k1}, \ldots, \beta_{ks}) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \\ e &:= (e_1, \ldots e_s)^T \end{aligned}$$

Từ đó hệ (20) có dạng:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \Phi_i(R^k e) = B_i e \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{21}$$

trong đó $0 \neq e \in \ker D$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}$, $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$ là các hằng số.

Xét $v \in \ker D^N$, khi đó $v = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k R^k e$, từ (21) ta có $\Phi_i v = B_i e$, do đó Φ_i là ánh xạ từ $\ker D^N$ vào $\ker D$. Điều này chứng tỏ rằng tồn tại các hàm tuyến tính φ_i sao cho:

$$\Phi_i(R^k e) = \varphi_i(R^k e) e \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Viết $d_{ik} = \varphi_i(R^k e)$, $(i, k = 0, 1, \ldots, N-1)$, khi đó từ (21) ta có hệ N phương trình với N ẩn $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_{ik} \alpha_k = \beta_i \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{22}$$

trong đó $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$ là các hằng số đã cho.

Ta đã biết hệ (22) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\det\, (d_{ik})_{i,k=0,\ldots,N-1} \neq 0.$$

Giả sử $\Phi_0, \ldots, \Phi_{N-1}$ là phụ thuộc tuyến trên $\ker D^N$, điều này có nghĩa là tồn tại các hằng số $\gamma_0, \ldots, \gamma_{N-1}$ không đồng thời bằng 0, sao cho:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \Phi_m v &= \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \Phi_m \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k R^k e = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \Phi_m(R^k e) = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \sum_{k=0}^{N-1} d_{mk} \alpha_k \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \beta_m. \end{aligned}$$

Từ đó ta có: $\det\, (d_{ik})_{i,k=0,1,\ldots,N_1} = 0$, do đó hệ (22) không có nghiệm duy nhất hay hệ (19) không có nghiệm duy nhất.

Ngược lại, giả sử hệ (19) không có nghiệm duy nhất. Điều đó có nghĩa là $\det\, (d_{ik})_{i,k=0,\ldots,N-1} = 0$, tức là tồn tại các hằng số $\gamma_0, \ldots, \gamma_{N-1}$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \beta_i = 0$$

Khi đó:

$$0 = \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \beta_i\Big) e = \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \sum_{k=0}^{N-1} d_{ik}\alpha_k\Big) e =$$
$$= \Big[\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi_i(R^k e)\Big] e = \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \Phi_i\Big) v$$

trong đó $v \in \ker D^N$

Từ đó ta có $\Phi_0, \dots, \Phi_{N-1}$ là phụ thuộc tuyến tính trên $\ker D^N$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. Przeworska - Rolewicz, Algebraic analysis, PWN - Polish Scientific Publishers, and D. Reidel Publ Company, Warszawa / Dordrecht/ Landcaster/Tokyo 1988.
2. D. Przeworska-Rolewicz, Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators, Demostratio Math; 21 (1988), 1023-1044.
3. D. Przeworska-Rolewicz, Linear boundary value problems for right invertible operators, Preprint 413, Institute of Mathematics, Polish Acad. Sci., Warszawa 1988.
4. D. Przeworska-Rolewicz, Spaces of D-paraanalytic elements. Dissertationes Math. No 302, Warszawa 1990.
5. Nguyen Van Mau, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singular integral equations. Demonstratio Math. 23 (1990), 191-212.
6. Nguyen Van Mau, Boundary value problems and controllability of linear systems with right invertible operators, Dissertationes Math, CCC XVI, Warszawa 1992.
7. Nguyen Van Mau and Pham Quang Hung: On a general classical interpolation problem, Journal of Science, special issue on Mathematics Mechanics and Informatics, Hanoi University, 1993. 2-6.
8. W. Z Karwowski and D. Przeworska-Rolewicz, Green operators for linear boundary value problems with a right invertible operators D^N, Math. Nachr. 152 (1991), 21-34.
9. W. Z. Karwowski and D. Przeworska-Rolewicz, General linear boundary value problems for polynomials invertble operators. Demonstratio Math. 25 (1992), 325-340.

GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR POLYNOMIALS IN RIGHT INVERTIBLE OPERATORS

Pham Quang Hung

Faculty of Mathematics, Mechanics and informatics

Hanoi University

The $c(R)$ - Property for initial operators induced by a given right inverse was introduced and applied to boundary value problemsa and general linear boundary value problems for polynomials in right invertible operators by D. Przeworska-Rolewicz, Nguyen Van Mau and W. Z. Karwowski. In this paper we introduce the generalized $c(R)$ - property and apply to solve the general boundary value problems.

$$\sum_{k=0}^{N} Q_k D^k x = y, \qquad F_j D^k x = x_{jk}, \quad (k \in I_j, \quad j = 0, \dots, n-1).$$

TẠP CHÍ KHOA HỌC No 7 - 1994

TÓAN TỬ GREEN ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN VỚI MỘT TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH PHẢI D^N

Phạm Quang Hưng
Khoa Toán - Cơ - Tin học, ĐHTH Hà Nội

Toán tử Green đối với bài toán giá trị biên với một toán tử khả nghịch phải D^N đã được W. Z. Karwowski và D. Przeworska-Rolewicz đưa ra và nghiên cứu trong [8]. Kết quả trên dựa vào giả thiết hệ các toán tử ban đầu $F_0, \ldots, F_{n-1}$ của toán tử D tương ứng với R có tính chất $c(R)$. Tuy nhiên không phải tất cả các toán tử ban đầu đều có tính chất $c(R)$.

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm tính chất $c(R)$-suy rộng và xây dựng toán tử Green đối với toán tử D^N trong trường hợp $\dim \ker D = s < +\infty$.

1.

Giả sử X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathcal{F}$ (ở đây $\mathcal{F} = \mathbf{R}$ hoặc $\mathcal{F} = \mathbf{C}$), $L(X)$ là tập tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong không gian tuyến tính X. Kí hiệu:

$$L_0(X) = \Big\{A \in L(X) \ : \ \mathrm{dom}\, A = X\Big\}.$$

Một toán tử $D \in L(X)$ được gọi là khả nghịch phải nếu $\exists R \in L(X)$, sao cho $\mathrm{Im}\, R \subset \mathrm{dom}\, D$ và $DR = I$ trên $\mathrm{dom}\, R$.

Nếu toán tử D là khả nghịch phải thì ta viết $D \in R(X)$. Nếu tồn tại một nghịch đảo phải $R \in L_0(X)$ thì ta viết $D \in R_0(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$.

Kí hiệu:

$$\mathcal{F}_D = \Big\{F \in L_0(X) : F^2 = F, \ FX = \ker D \text{ và } \exists FR \underset{R \in \mathcal{R}_D}{=} 0\Big\}$$

Mỗi toán tử $F \in \mathcal{F}_D$ sao cho $FR = 0$ với một $R \in \mathcal{R}_D$ được gọi là toán tử ban đầu của D tương ứng với R.

Ta có:

$$ker\ D^n = \Big\{\sum_{k=0}^{n-1} R^k z_k \ : \ z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \ker D\Big\}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^+.$$

Kí hiệu:

$$P_n(R) := \mathrm{lin}\Big\{R^k z \ : \ z \in \ker D, \ k = 0, 1, \ldots, n-1\Big\}, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

Ta biết $P_n(R) = \ker D^n \Leftrightarrow \dim \ker D = 1$.

Nói chung trong trường hợp tổng quát thì $P_n(R) \not\subseteq \ker D^n$.

Định nghĩa 1 [2]. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là tính chất $c(R)$ nếu tồn tại hằng số c_k sao cho:

$$F_0 R^k z = c_k z, \quad \forall z \in \ker D, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Một tập $\mathcal{F}_D^0(R) \subset \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ nếu mỗi $F \in \mathcal{F}_D^0$ đều có tính chất $c(R)$.

Định lý 1 [2]. $\mathcal{F}_D^0(R) = \mathcal{F}_D \Leftrightarrow \dim \ker D = 1$.

Ta đã biết, nếu $\dim \ker D > 1$ thì không phải mọi toán tử ban đầu đều có tính chất $c(R)$.

Định nghĩa 2. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là có tí chất $c(R)$-suy rộng nếu như tồn tại bộ các không gian con $(Z_1, \ldots, Z_s)$ của $\ker D$ sao cho:

i) $\ker D = \bigoplus_{j=1}^{s} Z_j$; $\quad Z_j \neq \{0\}, \quad Z_i \cap Z_j = 0, \quad i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, s.$

ii) Tồn tại hằng số $c_{kj} \in \mathcal{F}$ sao cho

$$F_0 R^k z_j = c_{kj} z_j, \quad \forall z_j \in Z_j, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Nếu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$-suy rộng thì ta viết $F_0 \in c_G(R)$.

Bổ đề 1. $F_0 \in c_G(R)$ có tính chất $c(R)$ khi và chỉ khi đối với $Z_j \subset \ker D$ bất kỳ $(j = 1, \ldots$ thỏa mãn (1), tồn tại hằng số $c_k \in \mathcal{F}$ sao cho:

$$F_0 R^k z_j = c_k z_j, \quad \forall z_j \in Z_j, \quad (j = 1, \ldots, s)$$

Chứng minh: $\forall z \in \ker D$, $z_j \in Z_j$, $(j = 1, \ldots, s)$, sao cho $z = z_1 + \cdots + z_s$, khi đó

$$F_0 R^k z = \sum_{j=1}^{s} F_0 R^k z_j = \sum_{j=1}^{s} c_k z_j = c_k \sum_{j=1}^{s} z_j = c_k z.$$

Từ bổ đề 1 ta thấy $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ thì F_0 có tính chất $c(R)$-suy rộng.

Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng tồn tại $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$-suy rộng, nhưng không có chất $c(R)$.

Ví dụ 1. Cho

$$X = C^2(\mathbf{R}) \; ; \quad D = \frac{d^2}{dt^2} \; ; \quad (Rx)(t) = \int_0^t \int_0^\tau x(\sigma) d\sigma d\tau \; ; \quad D_0 = \frac{d}{dt} \; ;$$

$$(\hat{F}_k x)(t) = x(k) \; ; \quad (\hat{R}_0 x)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Đặt

$$(F_k x)(t) = (\hat{F}_0 x)(t) + \frac{1}{2}(\hat{F}_k + \hat{F}_{-k}) D x(t) + \left[\hat{F}_0 D_0 + \frac{1}{2}(\hat{F}_k - \hat{F}_{-k} D\right] x(t).t, \quad (k = 1, 2).$$

dễ dàng thấy rằng: $\hat{F}_k \in \mathcal{F}_{D_0}$; $F_k \in \mathcal{F}_D$ và $\ker D = Z_1 \oplus Z_2$, ở đây $Z_1 = \text{lin}\{e_1\}$, $Z_2 = \text{lin}\{$ $e_1 = 1$, $e_2 = t$.

Từ $\dim \ker D_0 = 1$, $\dim Z_1 = \dim Z_2 = 1$ ta có các $\hat{F}_k$ có tính chất $c(R_0)$.

$$\hat{F}_k \hat{R}_0^j e_1 = \frac{k^j}{j!} e_1 ; \quad e_2 = \hat{R}_0 e_1.$$

Với $k = 1, 2$ ta có:

$$F_k R^j e_1 = F_k \hat{R}_0^{2j} e_1 = \left[\hat{F}_0 + \frac{1}{2}(\hat{F}_k + \hat{F}_{-k})D\right] \hat{R}_0^{2j} e_1 + \left\{\left[\hat{F}_0 D_0 + \frac{1}{2}(\hat{F}_k - \hat{F}_{-k})D\right] \hat{R}_0^{2j} e_1\right\} \cdot e_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{F}_k + \hat{F}_{-k})\hat{R}_0^{2j-2} e_1 + \left[\frac{1}{2}(\hat{F}_k - \hat{F}_{-k})\hat{R}_0^{2j-2} e_1\right] \cdot e_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{k^{2j-2}}{(2j-2)!} + \frac{(-k)^{2j-2}}{(2j-2)!}\right] e_1 + \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{k^{2j-2}}{(2j-2)!} - \frac{(-k)^{2j-2}}{(2j-2)!}\right] e_1\right\} = \frac{k^{2j-2}}{(2j-2)!} e_1.$$

$$F_k R^j e_2 = F_k \hat{R}_0^{2j+1} e_1 = \left[\hat{F}_0 + \frac{1}{2}(\hat{F}_k + \hat{F}_{-k})D\right] \hat{R}_0^{2j+1} e_1 + \left\{\left[\hat{F}_0 D_0 + \frac{i}{2}(\hat{F}_k - \hat{F}_{-K}\right] \hat{R}_0^{2j+1} e_1\right\} \cdot e_2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{k^{2j-1}}{(2j-1)!} + \frac{(-k)^{2j-1}}{(2j-1)!}\right] e_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{k^{2j-1}}{(2j-1)!} - \frac{(-k)^{2j-1}}{(2j-1)!}\right] \cdot e_2 = \frac{k^{2j-1}}{(2j-1)!} e_2.$$

Từ đó ta có:

$$F_k R^j e_1 = \frac{(k)^{2j-2}}{(2j-2)!} e_1, \qquad F_k R^j e_2 = \frac{(k)^{2j-1}}{(2j-1)!} e_2, \qquad j = 1, 2, \dots$$

Như vậy hệ $\{F_1, F_2\}$ có tính chất $c(R)$-suy rộng, nhưng không có tính chất $c(R)$ (vì $(2j-2)! \neq (2j-1)!$, Bổ đề 1).

2. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN VÀ TOÁN TỬ GREEN ĐỐI VỚI D^N

Giả sử $D \in R(X)$; $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$-suy rộng tương ứng với bộ các không gian con $(Z_1, \dots, Z_s)$ của $\ker D$ ($F_j \neq F_k$ với $j \neq k$).

Cho n tập hữu hạn I_j của các số nguyên không âm với $\#I_j = r_j$; $r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1} = N$.

Bài toán giá trị biên tổng quát đối với toán tử D^N là: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$D^N x = y, \qquad y \in X \tag{4}$$

thỏa mãn điều kiện:

$$F_j D^k x = x_{jk}, \qquad x_{jk} \in \ker D \quad (k \in I_j,\ j = 0, 1, \dots, n-1). \tag{5}$$

Theo giả thiết $F_0, \dots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$-suy rộng, ta có:

$$F_j R^k z_\nu = c_{jk\nu} z_\nu, \quad \forall z_\nu \in Z_\nu \quad (\nu = 1, \dots, s;\ k \in \mathbb{N};\ j = 0, 1, \dots, n-1),$$

từ đó đối với mỗi $z_k \in \ker D$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), ta có:

$$F_j R^k z_k = F_j R^k \sum_{\nu=1}^{s} z_{k\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} F_j R^k z_{k\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} c_{jk\nu} z_{k\nu} \tag{6}$$

$\forall z_{k\nu} \in Z_\nu, \ \ \nu = 1, \ldots, s; \ \ k, j = 0, 1, \ldots, n-1.$

Kí hiệu:

$$b_{jk} := (c_{jk1}, c_{jk2}, \ldots, c_{jks}), \tag{7}$$

$$z_k := (z_{k1}, \ldots, z_{ks})^T, \tag{8}$$

$$W_N := (b_{jk})_{j,k=0,1,\ldots,N_1} \qquad V_N = \det W_N \tag{9}$$

Định lý 2. Nếu $V_N \neq 0$ thì bài toán giá trị biên

$$D^N u = 0 \quad (N \geq 2), \tag{10}$$

$$F_j D^k u = u_{jk}, \quad u_{jk} \in \ker D, \quad (k \in I_j, \ j = 0, \ldots, n-1) \tag{11}$$

là thiết lập đúng đắn và nghiệm duy nhất của bài toán có dạng:

$$u = U_N(u_0, \ldots, u_{N-1}) \tag{12}$$

ở đây

$$u_{r_0+\cdots+r_{j-1}+m} = u_{jk_jm} \quad (m = 1, \ldots, r_j; \ j = 0, \ldots, n-1) \tag{13}$$

$$U_N(u_0, \ldots, u_{N-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} V_{Nj}(R) u_j, \quad V_{Nj}(t) = \frac{1}{V_N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+j} \cdot V_{Njk} t^k \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{14}$$

và V_{Njk} là định thức con sinh bởi V_N bằng cách gạch đi cột thứ k và hàng thứ j $(j, k = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Chứng minh: Nghiệm của bài toán (10) viết dưới dạng:

$$u = \sum_{i=0}^{N-1} R^i z_i, \quad z_0, \ldots, z_{N-1} \in \ker D.$$

Ta phải xác định các $z_0, \ldots, z_{N-1}$. Từ (6), (7) và (11) ta có:

$$\begin{aligned} F_j D^k u &= F_j D^k \sum_{i=0}^{N-1} R^i z_i = F_j D^k \sum_{i=0}^{N-1} R^i \sum_{\nu=1}^{s} z_{i\nu} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{s} F_j D^k R^i z_{i\nu} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{s} c_{jk\nu} z_{i\nu} \\ &= \sum_{i=k}^{N-1} b_{j,i-k} z_i = u_{jk} \quad (k \in I_j, \ j = 0, 1, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

$$\left(\text{vì } F_j D^k R^i z = b_{j,i-k} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i < k = k_j m \\ b_{j,i-k} & \text{nếu } i \geq k = k_j m \end{cases} \quad m = 1, \ldots, r_j; \ j = 0, \ldots, n-1 \right).$$

Theo giả thiết $V_N \neq 0$, khi đó hệ trên có nghiệm duy nhất $Z_0, \ldots, Z_{N-1}$ với mọi u_{jk} $(k \in I_j; \ j = 0, \ldots, n-1)$. Điều này có ý nghĩa là bài toán (10)-(11) là thiết lập đúng đắn. Theo công thức Cramer đối với hệ phương trình trên ta được nghiệm của bài toán có dạng (12). □

Kí hiệu:

$$u_j = B_j \ U_N(u_0, \ldots, u_{N-1})$$

ở đây
$$B_{r_0+\cdots+r_{j-1}+m} = F_j D^{k_j m} \quad (m = 1,\ldots,r_j;\ j = 0,\ldots,n-1). \tag{15}$$

Định nghĩa 3. Giả sử $D \in R(X)$, các toán tử ban đầu $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$-suy rộng và $V_N \neq 0$, cho $B_0, \ldots, B_{N-1}$ xác định bởi (15), toán tử G_N xác định như sau:

$$G_N u = U_N(B_0 u, \ldots, B_{N-1} u) \text{ đối với } u \in \operatorname{dom} D^{N-1} \tag{16}$$

ở đây U_N xác định bởi (14).

Toán tử G_N được gọi là toán tử Green đối với toán tử D^N với điều kiện (11) (hay đối với bài toán (10)-(11)).

Định lý 3. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn. Khi đó toán tử Green G_N ánh xạ $\operatorname{dom} D^{N-1}$ vào $\operatorname{dom} D^N$ và có các tính chất sau đây: Nếu $u \in \operatorname{dom} D^{N-1}$ thì:

$$D^N G_N u = 0 \tag{17}$$
$$B_j G_N u = B_j u, \quad (j = 0,\ldots,n-1) \tag{18}$$
$$G_N^2 u = G_N u \tag{19}$$

Chứng minh: Cho $u \in \operatorname{dom} D^{N-1}$ bất kỳ, khi đó từ định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} G_N u &= \frac{1}{V_N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{i+j} V_{Nji} R^i B_j u \\ &= \frac{1}{V_N} \sum_{i=0}^{N-1} R^i \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{i+j} V_{Nji} B_j u \end{aligned}$$

từ đó ta có $G_N u$ là tổ hợp tuyến tính của các phần tử dạng $R^i v_i$, ở đây

$$v_i = \frac{1}{V_N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{i+j} V_{Nji} B_j u \in \ker D, \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Từ (15) ta có các toán tử B_j $(j = 0,\ldots,N-1)$ có ảnh trong $\ker D$. Khi đó $G_N u \in \ker D^N \subset \operatorname{dom} D^N$ và do u bất kỳ thuộc D^{N-1} ta có $G_N(\operatorname{dom} D^{N-1}) \subset \operatorname{dom} D^N$ và $D^N G_N u = 0$ đối với $u \in \operatorname{dom} D^{N-1}$.

Cho $0 \le j \le N-1$ cố định bất kỳ, khi đó

$$B_j R^i z = b_{ji} z \quad \text{đối với} \quad z \in \ker D \quad (i, j = 0,\ldots,N-1).$$

Ta có:

$$\begin{aligned} B_j G_N u &= \frac{1}{V_N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{i+k} V_{Nki} B_j R^i B_k u \\ &= \frac{1}{V_N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{i+k} V_{Nki} b_{ji} B_k u \\ &= \frac{1}{V_N} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{i+j} V_{Nji} b_{ji} B_j u = B_j u. \end{aligned}$$

$$G_N u = U_N(B_0 u, \ldots, B_{N-1}u) = U_N(B_0 G_N u, \ldots, B_{N-1} G_N u)$$
$$= G_N(G_N u) = G_N^2 u. \square$$

Định lý 4. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn và $u \in \operatorname{dom} D^{N-1}$, khi đó:

$$D^k G_N u \in \ker D^{N-k}, \quad (k = 0, \ldots, N-1) \tag{20}$$

$$F D^k G_N u = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{k+j} \frac{V_{Njk}}{V_N} B_j u. \tag{21}$$

Chứng minh: Từ định nghĩa của toán tử Green ta có:

$$D^k G_N u = D^k \sum_{i=0}^{N-1} R^i \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{i+j} \frac{V_{Nji}}{V_N} B_j u$$
$$= \sum_{i=k}^{N-1} R^{i-k} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{i+j} \frac{V_{Nji}}{V_N} B_j u$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1-k} R^m \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j+m+k} \frac{V_{Nj,m+k}}{V_N} B_j u$$

từ đó ta có $D^k G_N u$ có dạng

$$\sum_{m=0}^{N-1-k} R^m z_m, \quad \text{ở đây} \quad z_0, \ldots, z_{N-1-k} \in \ker D.$$

hay (20) được chứng minh.

Ta có:

$$F D^k G_N u = F \sum_{m=0}^{N-1-k} R^m z_m = \sum_{m=0}^{N-1-k} F R^m z_m = z_0 =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j+k} \frac{V_{Njk}}{V_N} B_j u. \square$$

Hệ quả 1. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn, khi đó:

$$G_N u = \sum_{k=0}^{N-1} R^k F D^k G_N u \quad \text{đối với} \quad u \in \operatorname{dom} D^{N-1}$$

Hệ quả 2. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn, khi đó: Nếu $u \in \ker D^N$ thì $G_N u = u$.

Hệ quả 3. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn, thì bài toán giá trị biên (4)-(5) là thiết lập đúng đắn và nghiệm duy nhất của nó có dạng:

$$x = (I - G_N) R^N y + U_N(x_0, \ldots, x_{N-1}) \tag{22}$$

ở đây $x_{r_0+\cdots+r_{j-1}+m} = x_{jk,m}$ $(m = 1, \ldots, r_j;\ j = 0, \ldots, n-1)$.

Chứng minh: Viết $u = x - R^N y$, thì $D^N u = D^N x - D^N R^N y = D^N x - y = 0$ và do (15) ta có:

$$u_j = B_j u = B_j(x - R^N y) = B_j x - B_j R^N y = x_j - B_j R^N y$$

Theo định lý 2, bài toán (10)-(11) có nghiệm duy nhất là:

$$u = U_N(u_0, \ldots, u_{N-1}).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} x &= U_N(u_0, \ldots, u_{N-1}) + R^N y \\ &= U_N(x_0 - B_0 R^N y, \ldots, x_{N-1} - B_{N-1} R^N y) + R^N y \\ &= U_N(x_0, \ldots, x_{N-1}) - U_N(B_0 R^N y, \ldots, B_{N-1} R^N y) + R^N y \\ &= (I - G_N) R^N y + U_N(x_0, \ldots, x_{N-1}). \ \square \end{aligned}$$

Định lý 2 đã chỉ ra rằng bài toán (10)-(11) có nghiệm duy nhất nếu $V_N \neq 0$, khi đó ta đã xây dựng được toán tử Green đối với bài toán này. Điều kiện để $V_N \neq 0$ đã được Nguyễn Văn Mậu đưa ra dưới dạng (điều kiện cần và đủ) sau:

Định lý 5 [5]. Điều kiện cần và đủ để $V_N \neq 0$ là các toán tử $B_0, \ldots, B_{N-1}$ (xác định bởi công thức (15)) độc lập tuyến tính trên $\ker D^N$.

Hệ quả 4. Giả sử $D \in R(X)$; $F_0, \ldots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$-suy rộng, khi đó các điều kiện sau đây là tương đương

1. $V_N \neq 0$.
2. Bài toán giá trị biên (4)-(5) là thiết lập đúng đắn.
3. Các toán tử $B_0, \ldots, B_{N-1}$ độc lập tuyến tính trên $\ker D^N$.
4. Toán tử Green G_N đối với bài toán (10)-(11) là xác định được và tồn tại duy nhất $u \in \operatorname{dom} D^{N-1}$ sao cho $(I - G_N)u = 0$ và điều kiện (11) thỏa mãn (tức là $B_j u = u_j$, $j = 0, \ldots, N-1$, u_j được xác định bởi (13)).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. Przeworska-Rolewicz, Algebraic analysis, PWN-Polish Scientific Publishers, and D. Reidel Publ Company, Warszawa / Dordrecht / Landcaster / Tọkyo 1988.
2. D. Przeworska-Rolewicz, Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators, Demonstratio Math; 21 (1988), 1023-1044.
3. D. Przeworska-Rolewicz, Linear boundary value problems for right invertible operators, Preprint 413, Institute of Mathematics, Polish Acad. Sci., Warszawa 1988.
4. D. Przeworska-Rolewicz, Spaces of D-paraanalytic elements, Dissertationes Math. No 302, Warszawa 1990.
5. Nguyen Van Mau, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singular integral equations. Demonstratio Math. 23 (1990), 191-212.
6. Nguyen Van Mau, Boundary value problems and controllability of linear systems with right invertible operators, Dissertationes Math. CCC XVI, warazawa 1992.

7. Nguyen Van Mau and Pham Quang Hung, On a general classical interpolation problem, Journal of Science, special issue on Mathematics Mechanics and Informatics, Hanoi University, 1993, 2-6.

8. W. Z. Karwowski and D. Przeworska-Rolewicz, Green operators for linear boundary value problems with a right invertible operator D^N, Math. Nachr. 152 (1991), 21-34.

9. W. Z. Karwowski and D. Przeworska-Rolewicz, General linear boundary value problems for polynomials inversible operators, Demonstratio Math. 25 (1992), 325-340.

GREEN OPERATOR FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM INDUCED BY RIGHT INVERTIBLE OPERATOR D^N

Pham Quang Hung

Faculty of Mathematics, Mechanics and Informatics Hanoi University

Green operator for linear boundary value problems with a right invertible operator D^N was found by Karwowski and Przeworska-Rolewicz in 1991. The authors based on the property $c(R)$ of a given system of initial operators. In this paper we construct Green operator for the case of generalized property $c(R)$ and show that the general solution of boundary value problem induced by D^N can be obtained by means of Green operator.

TIÊU CHUẨN VOLTERRA ĐỐI VỚI NGHỊCH ĐẢO PHẢI CỦA MỘT LỚP TOÁN TỬ TRONG KHÔNG GIAN RỜI RẠC

Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Văn Mậu
Khoa Toán, Cơ, Tin học - ĐHTH Hà Nội

Trong bài này, đưa ra tiêu chuẩn để nghịch đảo phải của các toán tử dạng

$$D_\alpha x = (\alpha_n x_{n+1}) \quad \text{và} \quad D_p x = (x_{n+1} - p x_n)$$

là một toán tử Volterra. Từ đó mô tả tường minh lớp nghịch đảo phải Volterra trong không gian rời rạc.

1. Ký hiệu $X = (c)$ là không gian các dãy số $x = (x_n)_{n=0}^{\alpha}$ trên trường $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathbf{C}$ hoặc $\mathcal{F} = \mathbf{R}$) với các phép cộng và nhân với đại lượng vô hướng theo định nghĩa thông thường. Gọi $L(X)$ là tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong X và $L_0(X) = \{A \in L(X),\ \text{do}\, mA = X\}$. Tập tất cả các toán tử khả nghịch phải thuộc $L(X)$ được ký hiệu là $R(X)$. Nếu tồn tại $R_0 \in L_0(X)$ sao cho $DR = I$ thì ta viết $D \in R_0(X)$. Tập tất cả các nghịch đảo phải của $D \in R(X)$ ký hiệu bởi R_D.

Ứng với mỗi $R \in R_D$ của $D \in R(X)$, ký hiệu $\mathcal{F}_D$ là tập hợp tất cả các toán tử ban đầu của D và $F_R \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu tương ứng với $R \in R_D$.

Nếu $B \in L_0(X)$ sao cho $\exists (I + \lambda B)^{-1}\ \forall \lambda \in \mathcal{F}$ thì B được gọi là toán tử Volterra. Tập tất cả các toán tử Volterra trong $L_0(X)$ được ký hiệu bởi $V(X)$.

Giả sử $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ là dãy số trong cho trước, $\alpha_j \neq 0\ \forall j = 0, 1, 2, \dots$

Xét toán tử $D_\alpha : X \to X$ xác định theo công thức:

$$D_\alpha x = y; \quad y_n = \alpha_n x_{n+1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Khi đó $D_\alpha \in L_0(X)$ và $\ker D = \operatorname{lin} e$ với $e = (1, 0, 0, \dots)$.

Xét toán tử $R_0 : X \to X$ xác định bởi:

$$R_0 x = \left(0, \frac{x_0}{\alpha_0}, \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots\right) \tag{2}$$

Dễ dàng kiểm chứng $R_0 \in L_0(X)$ và $D_\alpha R_0 = I$, trong đó I là toán tử đơn vị.

Vì $\dim \ker D_\alpha = 1$ nên $D_\alpha \in R_0(X)$ và D_α không khả nghịch

Bổ đề 1: R_0 là toán tử Volterra.

Chứng minh: Thật vậy, với R_0 dạng (3) thì phương trình:

$$(I - \lambda R_0)x = y, \quad y \in X$$

luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo hệ thức truy hồi

$$x_0 = y_0$$
$$x_n = \lambda \frac{x_{n-1}}{\alpha_{n-1}} + y_n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Vậy $R_0 \in V(X)$.

Bổ đề 2 [1] (xem [2] - [3]). Mọi nghịch đảo phải của D_α đều biểu diễn được dưới dạng

$$R_A = R_0 + F_0 A, \quad A \in L_0(X) \tag{3}$$

trong đó $F_0 = I - R_0 D_\alpha \in \mathcal{F}_D$.

Bổ đề 3. Với mỗi $c \in \mathcal{F}$, ký hiệu

$$X_c = \Big\{(c, x_1, x_2, \dots);\ x_j \in \mathcal{F}; \quad j = 1, 2, \dots\Big\}$$

Khi đó $\forall A \in L_0(X)$ sao cho $\operatorname{Im} A \subset X_c$ thì $R_A = R_0 + F_0 A$ là toán tử Volterra.

Chứng minh: Thật vậy, khi $\operatorname{Im} A \subset X_c$ thì $\forall x \in X$, $\exists y = (c, y_1, y_2, \dots) \in X_c$ sao cho $Ax = y$. Khi đó

$$\begin{aligned} F_0 Ax &= (I - R_0 D_\alpha) y = \\ &= (c, y_1, y_2, \dots) - R_0(\alpha_0 y_1, \alpha_1 y_2, \alpha_2 y_3, \dots) \\ &= (c, y_1, y_2, \dots) - (0, y_1, y_2, \dots) = (c, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Suy ra

$$R_A x = R_0 X + (c, 0, 0, \dots) = \Big(c, \frac{x_0}{\alpha_0}, \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots\Big).$$

Phương trình

$$(I - \lambda R_A) x = v, \quad v \in X$$

luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo công thức

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 + c \\ x_n &= u_n + \lambda \frac{x_{n-1}}{n-1}\ ;\ n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Vậy $R_A \in V(X)$.

Bổ đề 4. Giả sử $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ và $A \in L_0(X)$ sao cho $\exists v$, $v \in X$ để $A(u - v) \notin \operatorname{Im} R_0$ thì R_A xác định theo công thức (3) không là toán tử Volterra.

Chứng minh: Theo giả thiết, $\exists m \in \mathbf{N}$, $c, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbf{C}$ sao cho $\forall x \in X$:

$$Ax = (y_0, y_1, y_2, \dots); \quad y_0 = c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j; \quad \beta_m \neq 0.$$

Khi đó $F_0 Ax = \Big(c + \sum\limits_{j=0}^{m} \beta_j x_j, 0, 0, \dots\Big)$ và

$$R_A x = (R_0 - F_0 A) x = \Big(c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j,\ \frac{x_0}{\alpha_0}, \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots\Big)$$

Xét phương trình

$$(I + \lambda R_A) x = v, \quad v \in X.$$

$$\longleftrightarrow \Big(x_0 + c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j, \frac{x_0}{\alpha_0} + x_1, \frac{x_1}{\alpha_1} + x_2, \dots\Big) = (v_0, v_1, v_2, \dots)$$

So sánh m tọa độ đầu tiên, ta được hệ tuyến tính:

$$
\begin{aligned}
&x_0 + \lambda \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j = v_0 - c \\
&\frac{\lambda}{\alpha_0} x_0 + x_1 = v_1 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\lambda}{\alpha_{m-1}} x_{m-1} + x_m = v_m
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ma trận của hệ (4) có dạng:

$$
B = \begin{pmatrix}
1+\beta_0\lambda & \beta_1\lambda & \beta_2\lambda & \dots & \beta_m\lambda \\
\frac{1}{\alpha_0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \frac{1}{\alpha_1}\lambda & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
$$

Ký hiệu $P(\lambda) := \det B$. Khi đó

$$
P(\lambda) = \frac{(-1)^m \beta_m}{\alpha_0 \dots \alpha_{m-1}} \lambda^{m+1} + \dots + 1 \tag{5}
$$

Do vậy, trong $\mathbf{C}$, $P(\lambda)$ có ít nhất một nghiệm. Nếu $P(\lambda_0) = 0$ thì hệ (4) không có nghiệm hoặc có nghiệm không duy nhất. Ứng với $\lambda = \lambda_0$ phương trình $(I + \lambda R_A)x = v$ không có nghiệm hoặc có nghiệm không duy nhất. Vậy

$$R_A \notin V(X)$$

Ta có thể phát triển các kết quả của Bổ đề 3 và 4 dưới dạng sau:

Định lý 1. a) Với $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ và $A \in L_0(X)$ thì R_A dạng (3) là toán tử Volterra khi và chỉ khi $\exists c \in \mathbf{C}$ sao cho $\operatorname{Im} A \subset X_c$ với

$$X_c = \{x \in X \ : \ x_0 = c\}$$

b) Với $\mathcal{F} = R$ thì R_A dạng (3) là toán tử Volterra khi và chỉ khi hoặc $\operatorname{Im} A \subset X_c$ hoặc đa thức $P(\lambda) := \det B$ (B là ma trận của hệ (4)) không có nghiệm thực.

2. Bây giờ, ta chuyển sang xét lớp toán tử sai phân có trong $p \in \mathcal{F}$, $p \neq 0$:

$$D_p x = (x_{n+1} - p x_n).$$

Xét toán tử $R_p : X \to X$ xác định theo công thức

$$R_p x := (0, x_0, x_1 + p x_0, x_2 + p^2 x_0 + p x_1, \dots) \tag{6}$$

Dễ dàng kiểm tra trực tiếp các hệ thức sau:

$$
\begin{aligned}
&D_p R_p = I \\
&\operatorname{Ker} D_p = \operatorname{lin} e; \quad e = (1, p, p^2, p^3, \dots)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Vậy $D_p \in R_0(X)$ và $R_p \in R_{D_p}$.

Gọi $F_p \in D_p$ là toán tử ban đầu ứng với R_p. Khi đó

$$F_p x = (x_0, px_0, p^2 x_0, \dots).$$

Bổ đề 5. Toán tử R_p dạng (6) là toán tử Volterra.

Chứng minh. Thật vậy, phương trình

$$(I - \lambda R_p)x = y, \quad y \in X$$

luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo công thức truy hồi

$$\begin{aligned} &x_0 = y_0 \\ &x_n = y_n + \lambda(x_{n-1} + px_{n-2} + \dots + p^{n-1}x_0) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Vậy $R_p \in V(X)$.

Với mỗi $c \in \mathcal{F}$, ký hiệu

$$X_c = \{x \in X : x = (c, x_1, x_2, \dots)\}$$

Bổ đề 6. Với mỗi $A \in L_0(X)$ sao cho $\operatorname{Im} A \subset X_c$ với $c \in \mathcal{F}$ cho trước, thì toán tử $R_A = R_p + F_pA$ là toán tử Volterra.

Chứng minh: Với $c \in \mathcal{F}$ cho trước và $\forall Ax$ ta có:

$$\begin{aligned} F_pAx &= F_p(c, y_1, y_2, \dots) = (c, cp, cp^2, \dots) \\ R_Ax &= R_px + F_pAx = \\ &= (0, x_0, x_1 + px_0, x_2 + px_1 + p^2x_0, \dots) + (c, cp, co^2, \dots) = \\ &= (c, x_0 + cp, x_1 + px_0 + cp^2, \dots) \end{aligned}$$

Xét phương trình:

$$(I - \lambda R_A)x = v, \quad v \in X$$

$$\longleftrightarrow (x_0, x_1, x_2, \dots) - \lambda(c, x_0 + cp, x_1 + px_0 + cp^2, \dots) = (v_0, v_1, v_2, \dots)$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x_0 &= \lambda c + v_0 \\ x_n &= \lambda(x_{n-1} + px_{n-2} + \dots + p^{n-1}x_0 + p^n c) + v_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Vậy $R_A \in V(X)$.

Bổ đề 7. Xét $\mathcal{F} = \mathbf{C}$. Với $A \in L_0(X)$ sao cho $\exists u, v \in X$ để $A(u - v) \not\subset X_0$ thì $R_A := R_p + F_pA$ $V(X)$.

Chứng minh: Từ giả thiết, suy ra $\forall x \in X$, $\exists c, \beta_0, \beta_1, \dots \in \mathbf{C}$ sao cho

$$Ax = \left(c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_i, y_1, y_2, \dots\right); \quad \beta_m \neq 0.$$

Vậy

$$F_pAx = (y_0, py_0, p^2y_0, \dots), \quad y_0 = c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j$$

Xét phương trình $(I + \lambda R_A)x = v$, $v \in X$. Vì $R_A = R_p + F_pA$ nên

$$R_Ax = (y_0, x_0 + px_0, x_1 + px_0 + p^2 y_0, \dots)$$

với $y_0 = c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j$. Vậy

$$(I + \lambda R_A)x = v, \quad v \in X$$
$$\longleftrightarrow (x_0 + \lambda y_0, x_1 + \lambda(x_0 + py_0), \dots) = (v_0, v_1, \dots).$$

So sánh $m+1$ tọa độ đầu tiên, ta được hệ tuyến tính:

$$\begin{aligned}
&x_0 + \lambda \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j = v_0 - \lambda c \\
&x_1 + \lambda\Big(x_0 + p\sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j\Big) = v_1 - \lambda pc \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&x_m + \lambda\Big(x_{m-1} + px_{m-2} + \dots + p^{m-1}x_0 + p^m \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j\Big) = v_m - \lambda p^m c
\end{aligned} \tag{9}$$

Ma trận của hệ (9) có dạng

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\beta_0 & \lambda\beta_1 & \dots & \lambda\beta_m \\ \lambda(1 + p\beta_0) & 1 + \lambda p\beta_1 & \dots & \lambda p\beta_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda p^{m-1}(1 + p\beta_0) & \lambda p^{m-2}(1 + p\beta_1) & \dots & 1 + \lambda p^m \beta_m \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ký hiệu $Q(\lambda) = \det M$ thì $\deg Q(\lambda) = m + 1$ với hệ số cao nhất bằng $p^{m(m+1)/2}\beta_m \neq 0$. Do đó $\exists \lambda_0 \in \mathbf{C}$ để $Q(\lambda_0) = 0$, tức là $R_A \notin V(X)$.

Ta có thể phát biểu kết quả của bổ đề 6 và 7 dưới dạng sau đây.

Định lý 2. a) Với $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ và $A \in L_0(X)$ thì R_A là toán tử Volterra khi và chỉ khi $\exists c \in \mathcal{F}$ sao cho $\mathrm{Im}A \subset X_c$, trong đó X_c xác định theo (8).

b) Với $\mathcal{F} = \mathbf{R}$ và $A \in L_0(X)$ thì $R_A \in V(X)$ khi và chỉ khi hoặc $\exists c \in \mathbf{R}$ để $\mathrm{Im}A \subset X_c$ hoặc đa thức $Q(\lambda) = \det M$, trong đó M xác định theo (10), không có nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis. Warsaw - Dordrecht, 1988.
2. Nguyen Van Mau, Characterization of Volterra right in ve[illegible]es, Opuscula Math. 6 (1990), 21-37.
3. Nguyen Vu Luong, On a class of generalized difference operatora. Journal of Sci. 1993, 21-25.

CONDITIONS FOR HIGHT INVERSES OF A CLASS OF RIGHT INVERTIBLE OPERATORS IN DISCRETE SPACES TO BE VOLTERRA

Nguyen Vu Luong, Nguyen Van Mau

Faculty of Mathematics, Mechanics and Informatics Hanoi University

The paper deal with operators of the forms

$$D_\alpha x = (\alpha_n x_{n+1}) \quad \text{and} \quad D_p x = (x_{n+1} - px_n).$$

Operators D_α and D_p are considered in space X of all infinite sequences over a field $\mathcal{F}$ of scalars.

We find a general form of all right inverses and give a necessary and sufficient condition for a right inverse of D_α and D_p to be Volterra in the cases $\mathcal{F} = \mathbf{R}$ and $\mathcal{F} = \mathbf{C}$.

PHIẾU ĐĂNG KÝ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KH-CN

Tên đề tài	Phương pháp đại số trong giải tích đại số lồi Zac	
Mã số:	B93-05-72	
Cơ quan chủ trì đề tài Địa chỉ	Vụ khoa học kỹ thuật / Bộ GD và ĐT	Số điện thoại
Cơ quan quản lý đề tài Địa chỉ	Trg ĐHSP Hà Nội	Số điện thoại

Tổng kinh phí thực chi	8.700	x 1000 đ hoặc	USD
Trọng đó : - từ ngân sách nhà nước		x 1000 đ hoặc	USD
- kinh phí của Bộ (Tỉnh)	8.700	x 1000 đ hoặc	USD
- vay tín dụng		x 1000 đ hoặc	USD
- vốn tự có		x 1000 đ hoặc	USD
- thu hồi		x 1000 đ hoặc	USD

Thời gian nghiên cứu 24 tháng

40 trg

Thời gian bắt đầu ....01/03........./19 93

Thời gian kết thúc ....01/01........./19 95

Tên các cán bộ phối hợp nghiên cứu:

PTS Trần Huy Hổ

PGS PTS Nguyễn Thuỷ Thanh

NCS Nguyễn văn Lương

Nguyễn Minh Trân

Phạm Quang Hưng

Số đăng ký đề tài:	Số chứng nhận đăng ký kết quả nghiên cứu :	Bảo mật thông tin:
ngày	ngày	A - Phổ biến rộng rãi ... / B - Phổ biến hạn chế ... / C - Bảo mật ... /