

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ LÝ

PHƯƠNG PHÁP DƯỚI ĐẠO HÀM
CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG
VÀ CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIẢN

Chuyên Ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã Số: 60. 46. 0112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. PHẠM NGỌC ANH

Thái Nguyên - 2012

**Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên**

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

Phản biện 1:
.....

Phản biện 2:
.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:

Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên

Ngày tháng năm 2012

**Có thể tìm hiểu tại
Thư Viện Đại Học Thái Nguyên**

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	ii
Những kí hiệu và chữ viết tắt	iii
Mở đầu	1
Chương 1. Một số khái niệm cơ bản	3
1.1. Tập lồi	3
1.2. Hàm lồi	4
1.3. Ánh xạ không giãn	8
1.4. Bài toán cân bằng	12
1.5. Một số bổ đề cơ bản	15
Chương 2. Định lý hội tụ mạnh	18
2.1. Thuật toán và sự hội tụ	19
2.2. Các hệ quả	35
2.3. Một số ví dụ áp dụng	37
Chương 3. Các định lý hội tụ yếu	40
3.1. Thuật toán và sự hội tụ	41
3.2. Phương pháp tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ các ánh xạ không giãn	47
Kết luận	50
Tài liệu tham khảo	51

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với PGS. TS Phạm Ngọc Anh (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông), người thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trong Bộ môn Toán - Tin, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ Quốc tế, các bạn học viên lớp Cao học Toán K4C trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành khóa học cao học này.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng song luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy, cô giáo và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2012

Tác giả

Hoàng Thị Lý

Những ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	: Tập hợp số thực.
$\mathbb{R}^n$	: Không gian véc tơ thực n chiều.
$\mathbb{R}_+^n$	: Không gian véc tơ thực không âm n chiều.
$x \in D$	: x thuộc tập D .
$x \notin D$	: x không thuộc tập D .
$\forall x$	: Với mọi x .
$\exists x$	: Tồn tại x .
$\emptyset$	: Tập hợp rỗng.
$\cap$	: Phép giao các tập hợp.
$\cup$	: Phép hợp các tập hợp.
$x := y$	: x được định nghĩa bằng y .
$+\infty$	: Dương vô cùng.
$-\infty$	: Âm vô cùng.
$\overline{C}$	: Bao đóng của tập C .
$\langle x, y \rangle$	: Tích vô hướng của x và y .
$\partial f(x)$	: Dưới vi phân của f tại x .
$x_n \rightarrow x$	: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x .
$x_n \rightharpoonup x$	: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x .
$d(x, y)$	: Khoảng cách giữa x và y .
I	: Ánh xạ đồng nhất.
H	: Không gian Hilbert thực.

Mở đầu

Bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tìm điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn là một trong các lĩnh vực quan trọng của giải tích hiện đại và lý thuyết tối ưu. Trong những năm gần đây, việc nghiên cứu thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm các bài toán này là một đề tài hấp dẫn đối với rất nhiều các nhà khoa học trên thế giới. Trong luận văn này, ta sẽ trình bày phương pháp xấp xỉ dưới đạo hàm cho bài toán cân bằng và các ánh xạ không giãn. Luận văn gồm hai phần chính:

Phần thứ nhất trình bày thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn trong bài báo của R. Wangkeeree (2008), "*An Extragradient Approximation Method for Equilibrium Problems and Fixed Points Problems of Countable Families of Nonexpansive Mapping, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2008, Art. ID 134148, 17 PP, Doi: 10.1155/2008/134148*". Phương pháp giải của bài báo này đại diện cho một cách tiếp cận phổ biến nhất hiện nay. Trong đó, mỗi bước lặp chính của phương pháp lặp này là việc giải một bài toán cân bằng phụ đơn điệu mạnh, khi mà song hàm của bài toán cân bằng tương ứng là đơn điệu.

Phần thứ hai đề cập đến phương pháp lặp trong bài báo của P. N. Anh, L. B. Long, N. V. Quy and L. Q. Thuy (2012), "*Weak Convergence Theorems for an Infinite Family of Nonexpansive Mappings and Equilibrium Problems, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications, Vol. 7, PP. 113-127*". Trong bài báo này, bằng cách kết hợp giữa

phương pháp dưới đạo hàm cho bài toán cân bằng và các kỹ thuật điểm bất động, các tác giả đã đề xuất một thuật toán mới để tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn. Ở đây, mỗi bước lặp chính trong thuật toán đề xuất là việc giải một bài toán lồi mạnh với giả thiết giả đơn điệu và tính liên tục kiểu Lipschitz của hàm giá.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và các tài liệu tham khảo, các kết quả nghiên cứu trong luận văn được trình bày thành ba chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức về giải tích lồi, bài toán cân bằng, ánh xạ không giãn và các kiến thức bổ trợ. Chương 2 trình bày thuật toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn. Chương 3 trình bày sơ đồ lặp tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn dựa trên phương pháp dưới đạo hàm và các kỹ thuật điểm bất động.

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

Trong luận văn này, ta xét bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực H . Với mỗi véc tơ $x \in H$, chuẩn của x , kí hiệu là $\|x\|$, được xác định bởi:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Kí hiệu $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ là tập số thực mở rộng.

Sau đây, ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,... Các kiến thức này được lấy chủ yếu từ các tài liệu [4], [5].

1.1. Tập lồi

Định nghĩa 1.1. Cho C là một tập con khác rỗng của H . Tập C được gọi là lồi nếu

$$\forall a, b \in C, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow (1 - \lambda)a + \lambda b \in C.$$

Ví dụ 1.1. Các tập sau đây là các tập lồi:

1) Hình cầu $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|a - x\| \leq r\}$.

2) Các nửa không gian đóng

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq \alpha\}; \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \geq \alpha\},$$

hay các nửa không gian mở

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle < \alpha\}; \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle > \alpha\},$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. Một tập $C \subset H$ được gọi là nón nếu

$$\forall x \in C, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là nón lồi nếu nó đồng thời là một tập lồi. Như vậy, một tập con $C \subset H$ là nón lồi khi và chỉ khi nó có các tính chất sau:

$$(i) \quad \lambda C \subset C, \quad \forall \lambda > 0;$$

$$(ii) \quad C + C \subset C.$$

Ví dụ 1.2. Các tập sau đây là các nón lồi:

$$1) \quad R_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

$$2) \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \|x\| \leq y\}.$$

Trong phần này, tập $C \subset H$ luôn giả thiết là một tập lồi (nếu không giải thích gì thêm).

Định nghĩa 1.3. Cho $x^0 \in C$, nón pháp tuyến ngoài (hay nón pháp tuyến) của C tại x^0 , kí hiệu là $N_C(x^0)$, được định nghĩa bởi

$$N_C(x^0) := \{t \in H : \langle x - x^0, t \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

1.2. Hàm lồi

Định nghĩa 1.4. Cho hàm $f : C \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Khi đó, miền hữu hiệu của f , kí hiệu là $\text{dom} f$, được xác định bởi

$$\text{dom} f := \{x \in C : f(x) < +\infty\}.$$

Hàm f được gọi là chính thường nếu

$$\text{dom} f \neq \emptyset \text{ và } f(x) > -\infty, \quad \forall x \in C.$$

Định nghĩa 1.5. Cho hàm $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó, hàm f được gọi là

i) lồi trên C nếu $\forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y);$$

ii) lồi chặt trên C nếu $\forall x, y \in C, x \neq y, \lambda \in (0, 1)$, ta có

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y);$$

iii) tựa lồi trên C nếu $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, tập mức dưới

$$L_\alpha = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$$

là tập lồi.

Ví dụ 1.3. Cho C là một tập lồi, khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Hàm chỉ trên C

$$\delta_C(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x^0 \in C, \\ +\infty & \text{khi } x^0 \notin C, \end{cases}$$

là hàm lồi.

Định nghĩa 1.6. Cho $x^0 \in C$. Một hàm $f : C \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là

i) nửa liên tục dưới tại x^0 nếu

$$\liminf_{x \rightarrow x^0} f(x) \geq f(x^0);$$

ii) nửa liên tục trên tại x^0 nếu

$$\limsup_{x \rightarrow x^0} f(x) \leq f(x^0).$$

Nếu hàm f vừa nửa liên tục trên vừa nửa liên tục dưới tại x^0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Hàm f liên tục (nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới) trên C nếu nó liên tục (tương ứng: nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới) tại mọi điểm thuộc C .

Định nghĩa 1.7. Cho hàm lồi, chính thường $f : H \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, một véc tơ $p \in H$ được gọi là dưới đạo hàm của f tại $x^0 \in H$ nếu

$$\langle p, x - x^0 \rangle + f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in H.$$

Tập tất cả các dưới đạo hàm của f tại x^0 gọi là dưới vi phân của f tại x^0 và được ký hiệu là $\partial f(x^0)$. Như vậy

$$\partial f(x^0) := \{p \in H : f(x) - f(x^0) \geq \langle p, x - x^0 \rangle, \quad \forall x \in H\}.$$

Hàm f được gọi là khả dưới vi phân tại x^0 nếu $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

Ví dụ 1.4. Dưới vi phân của hàm $f(x) = \|x\|$ trong $\mathbb{R}^n$ là

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{p : \|p\| \leq 1\} & \text{khi } x = 0, \\ \{p : \|p\| = 1, \langle p, x \rangle = \|x\|\} & \text{khi } x \neq 0. \end{cases}$$

Chứng minh

Khi $x = 0$ thì $p \in \partial f(x) \Leftrightarrow \langle p, z \rangle \leq \|z\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \|p\| \leq 1$.

Khi $x \neq 0$, ta chứng minh $\partial f(x) = \{p : \|p\| = 1, \langle p, x \rangle = \|x\|\}$. Thật vậy, nếu $p \in \partial f(x)$ thì

$$\langle p, z - x \rangle \leq \|z\| - \|x\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Cho $z = 0$, ta được

$$\langle p, -x \rangle \leq -\|x\|,$$

tức là

$$\langle p, x \rangle \geq \|x\|.$$

Cho $z = 2x$, ta được

$$\langle p, x \rangle \leq \|x\|.$$

Suy ra

$$\langle p, x \rangle = \|x\|.$$

Hơn nữa

$$\langle p, (z + x) - x \rangle \leq \|z + x\| - \|x\|,$$

hay

$$\langle p, z \rangle \leq \|z\|.$$

Do vậy

$$\|p\| = 1.$$

Ngược lại, nếu $\|p\| = 1$, $\langle p, x \rangle = \|x\|$ thì

$$\langle p, z - x \rangle = \langle p, z \rangle - \langle p, x \rangle \leq \|z\| - \|x\|, \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Vậy $p \in \partial f(x)$.

Định nghĩa 1.8. Cho hàm $f : H \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $C \subset H$. Điểm $x^0 \in C \cap \text{dom} f$ được gọi là

(i) cực tiểu địa phương của $f(x)$ trên C nếu tồn tại lân cận $U(x^0)$ của x^0 sao cho $-\infty < f(x^0) \leq f(x)$, $\forall x \in C \cap U(x^0)$;

(ii) cực tiểu toàn cục của $f(x)$ trên C nếu $-\infty < f(x^0) \leq f(x)$, $\forall x \in C$. Tập tất cả các cực tiểu toàn cục của f trên C được kí hiệu là $\arg \min \{f(x) : x \in C\}$.

Mệnh đề 1.1. Cho C là một tập con lồi, khác rỗng của H và $f : H \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm lồi trên C . Khi đó, mọi cực tiểu địa phương của f trên C cũng là cực tiểu toàn cục.

Chứng minh

Giả sử $x^0 \in C$ là cực tiểu địa phương của f . Khi đó, tồn tại lân cận $U(x^0)$ của x^0 sao cho $-\infty < f(x^0) \leq f(x)$, $\forall x \in C \cap U(x^0)$. Với mọi $x \in C$, ta có $x_\lambda := (1 - \lambda)x^0 + \lambda x \in C \cap U(x^0)$, $(\lambda > 0)$ đủ nhỏ. Do đó $f(x^0) \leq f(x_\lambda) \leq (1 - \lambda)f(x^0) + \lambda f(x)$. Vì thế $f(x^0) \leq f(x)$, $\forall x \in C$. Vậy x^0 là cực tiểu toàn cục của $f(x)$ trên C .

Mệnh đề 1.2. [5] Cho C là một tập con lồi, khác rỗng của H và $x^0 \in C$. Hàm $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ lồi trên C . Khi đó

$$x^0 \in \arg \min \{f(x) : x \in C\} \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x^0) + N_C(x^0).$$

1.3. Ánh xạ không giãn

Định nghĩa 1.9. Cho C là tập con khác rỗng của H . Ánh xạ $S : C \rightarrow H$ được gọi là ánh xạ không giãn trên C nếu

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

Kí hiệu $F(S)$ là tập các điểm bất động của S .

Ví dụ 1.5. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H . Phép chiếu trực giao của H trên C tại $x \in H$, kí hiệu là $P_C(x)$, được định nghĩa bởi

$$P_C(x) = \arg \min \{\|x - y\| : y \in C\},$$

là một ánh xạ không giãn của H trên C .

Chú ý 1.1. Ánh xạ P_C thỏa mãn các tính chất sau:

$$\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in H, y \in C; \quad (1.1)$$

$$\|x - P_C(x)\|^2 + \|y - P_C(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2, \quad \forall x \in H, y \in C; \quad (1.2)$$

$$\langle x - y, P_C(x) - P_C(y) \rangle \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2, \quad \forall x, y \in H. \quad (1.3)$$

Mệnh đề 1.3. [1] Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $S : C \rightarrow H$ là ánh xạ không giãn trên C . Khi đó, với mỗi $u \in C$ và $t \in (0, 1)$, tồn tại duy nhất điểm $x_t \in C$ sao cho

$$x_t = (1 - t)u + S(x_t).$$

Nếu C bị chặn thì $x_t - S(x_t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow 1$.

Hệ quả 1.1. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng, bị chặn của H và $S : C \rightarrow H$ là ánh xạ không giãn trên C . Khi đó, tồn tại dãy $\{x_n\}$ trong C sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S(x_n)\| = 0.$$

Định nghĩa 1.10. Cho C là tập con khác rỗng của H . Khi đó, ánh xạ $S : C \rightarrow H$ được gọi là nửa đóng (demiclosed) tại $v \in H$ nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong C , ta luôn có

$$x_n \rightharpoonup u \in C \quad \text{và} \quad S(x_n) \rightarrow v \quad \text{kéo theo} \quad S(u) = v.$$

Bổ đề 1.1. Nếu một dãy $\{x_n\}$ trong H hội tụ yếu tới $x_0 \in H$ thì

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|, \quad \forall x \in H, x \neq x_0.$$

Chứng minh

Vì $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x_0 nên nó bị chặn. Do đó, các giới hạn trên đều tồn tại. Khi đó, với mọi $x \in H, x \neq x_0$, ta có

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= \|x_n - x_0 + x_0 - x\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x\|^2 + 2 \langle x_n - x_0, x_0 - x \rangle. \end{aligned}$$

Mặt khác, vì $2 \langle x_n - x_0, x_0 - x \rangle \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nên

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|.$$

Định lý 1.1. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $S : C \rightarrow H$ là ánh xạ không giãn trên C . Khi đó, ánh xạ $I - S$ là nửa đóng trên C .

Chứng minh

Lấy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \rightharpoonup x$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S(x_n) - y\| = 0, \forall y \in H$. Ta chứng minh $(I - S)(x) = y$. Thật vậy, giả sử $(I - S)(x) \neq y$. Vì

$$\|x_n - S(x) - y\| \leq \|x_n - S(x_n) - y\| + \|S(x_n) - S(x)\|,$$

nên suy ra

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S(x) - y\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|.$$

Theo bổ đề (1.1), ta lại có

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (S(x) + y)\|.$$

Điều này dẫn tới mâu thuẫn, kéo theo $(I - S)(x) = y$. Vậy ánh xạ $I - S$ nửa đóng.

Định lý 1.2. *Cho C là tập con bị chặn, lồi, đóng, khác rỗng của H và $S : C \rightarrow H$ là ánh xạ không giãn trên C . Khi đó $(I - S)(C)$ là tập đóng.*

Chứng minh

Giả sử $u \in \overline{(I - S)(C)}$. Khi đó, tồn tại dãy $\{x_n\}$ trong C sao cho $x_n - S(x_n) \rightarrow u$ khi $n \rightarrow \infty$. Vì C bị chặn trong H nên $\{x_n\}$ bị chặn trong C . Do đó, ta có thể giả sử rằng $x_n \rightarrow x \in C$. Theo định lý (1.1), ta có $(I - S)(x) = u$. Vậy $(I - S)(C)$ là tập đóng.

Định lý 1.3. *Cho C là tập con bị chặn, lồi, đóng, khác rỗng của H và $S : C \rightarrow H$ là ánh xạ không giãn trên C . Nếu $I - S$ đóng thì S có điểm cố định trong C .*

Chứng minh

Theo mệnh đề (1.3), với $t \in (0, 1)$, tồn tại duy nhất $x_t \in C$ sao cho $x_t - S(x_t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow 1$. Do đó $0 \in \overline{(I - S)(C)}$. Vì $I - S$ đóng nên tồn tại $v \in C$ sao cho $(I - S)(v) = 0$. Vậy S có điểm cố định trong C .

Định lý 1.4. *(Định lý Browder)*

Cho C là tập con bị chặn, lồi, đóng, khác rỗng của H . Khi đó, mỗi ánh xạ không giãn S trên C có một điểm bất động trong C .

Chứng minh

Theo định lý (1.2), ta có $(I - S)(C)$ là tập đóng. Khi đó, từ định lý (1.3) suy ra S có điểm bất động trong C .

Định nghĩa 1.11. Cho $A : C \rightarrow H$. Khi đó, ánh xạ A được gọi là

(i) giả đơn điệu trên C nếu

$$\langle A(v), u - v \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle A(u), u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in C;$$

(ii) đơn điệu trên C nếu

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in C;$$

(iii) đơn điệu mạnh trên C với $\eta > 0$ nếu

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq \eta \|u - v\|^2, \forall u, v \in C;$$

(iv) liên tục Lipschitz trên C với $L > 0$ nếu

$$\|A(u) - A(v)\| \leq L \|u - v\|, \forall u, v \in C.$$

Định nghĩa 1.12. Ánh xạ $T : C \rightarrow 2^H$ được gọi là đơn điệu trên C nếu

$$\forall x, y \in C, f \in T(x), g \in T(y) \Rightarrow \langle x - y, f - g \rangle \geq 0.$$

Ánh xạ $T : H \rightarrow C$ cực đại nếu đồ thị $G(T)$ của T không thực sự chứa trong đồ thị của bất kỳ ánh xạ đơn điệu nào khác. Ta có

Nếu $(x, f) \in H \times H, \langle x - y, f - g \rangle \geq 0, \forall (y, g) \in G(T)$ thì $f \in T(x)$.

Ví dụ 1.6. Cho $A : C \rightarrow H$ đơn điệu và liên tục L -Lipschitz trên C , ánh xạ $T : H \rightarrow 2^H$ được xác định bởi

$$T(v) = \begin{cases} A(v) + N_C(v) & \text{khi } v \in C, \\ \emptyset & \text{khi } v \notin C, \end{cases}$$

là đơn điệu cực đại và $0 \in T(v) \Leftrightarrow \langle A(v), u - v \rangle \geq 0, \forall u \in C$.

Bây giờ ta nhắc lại một số tính chất của song hàm trong không gian Hilbert thực H .

Định nghĩa 1.13. Cho C là tập con khác rỗng của H . Khi đó, song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là

i) đơn điệu trên C nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in C;$$

ii) đơn điệu chặt trên C nếu

$$f(x, y) + f(y, x) < 0, \quad \forall x, y \in C, x \neq y;$$

iii) đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\eta > 0$

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\eta \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

iv) giả đơn điệu trên C nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in C;$$

v) liên tục kiểu Lipschitz trên C với hệ số $c_1 > 0, c_2 > 0$ nếu

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2, \quad \forall x, y, z \in C.$$

1.4. Bài toán cân bằng

Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $\varphi(x, x) = 0, \quad \forall x \in C$. Khi đó, bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \varphi(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Kí hiệu tập các nghiệm của bài toán cân bằng là $EP(\varphi)$.

Chú ý 1.2. Cho ánh xạ $A : C \rightarrow H$. Ta định nghĩa

$$\varphi(x, y) := \langle A(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in C.$$

Khi đó, bài toán cân bằng trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân:

Tìm $x^* \in C$ sao cho $\langle A(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C$.

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân này là $VI(A, C)$. Ta thấy

$$u \in VI(A, C) \Leftrightarrow u = P_C(u - \lambda Au), \text{ với } \lambda > 0. \quad (1.4)$$

Ví dụ 1.7. Bài toán cân bằng Nash

Giả sử có n công ty cùng sản xuất một loại sản phẩm và x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là sản lượng hàng hóa mà công ty i sản xuất. Giá cả p_i của mỗi công ty i phụ thuộc vào tổng số lượng sản phẩm của tất cả các công ty $\sigma_x = \sum_{i=1}^n x_i$. Ký hiệu $h_i(x_i)$ là chi phí của công ty i khi sản xuất lượng hàng hóa x_i . Giả sử hàm lợi nhuận của hãng i được cho bởi

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := x_i p_i(\sigma_x) - h_i(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Gọi $C_i := \{x_i \in \mathbb{R} \mid x_i \geq 0\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) là tập các chiến lược của công ty i . Điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in C := C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$, được gọi là điểm cân bằng Nash nếu

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*),$$

$$\forall y_i \in C_i, (i = 1, 2, \dots, n).$$

Về mặt kinh tế, điểm cân bằng Nash nói lên rằng bất kỳ một công ty nào có mức sản lượng hàng hóa lệch khỏi điểm cân bằng Nash, trong khi các công ty khác vẫn giữ nguyên sản lượng tại điểm cân bằng thì đều không đạt được mức lợi nhuận tối đa. Nếu ta đặt

$$\theta(x, y) := - \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

và

$$\varphi(x, y) := \theta(x, y) - \theta(x, x).$$

Khi đó, bài toán tìm điểm cân bằng Nash trở thành bài toán cân bằng sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \varphi(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C.$$

Định lý sau khẳng định sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng.

Định lý 1.5. [3] Cho C là tập con, lồi, đóng, khác rỗng của một không gian Banach, $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm sao cho $\varphi(., y)$ nửa liên tục trên với mọi $y \in C$ và $\varphi(x, .)$ là tựa lồi với mọi $x \in C$. Giả sử ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) Tập C đóng, bị chặn;

(ii) Tồn tại tập con M khác rỗng, bị chặn của C sao cho $\forall x \in C \setminus M, \exists y \in M$ để $\varphi(x, y) < 0$.

Khi đó, bài toán cân bằng có nghiệm.

Mệnh đề sau chỉ ra tính chất tập nghiệm của bài toán cân bằng.

Mệnh đề 1.4. [3] Cho C là tập con, lồi, đóng, khác rỗng của một không gian Banach, song hàm $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(i) Nếu φ đơn điệu chặt thì bài toán cân bằng có nhiều nhất một nghiệm;

(ii) Nếu $\varphi(., y)$ nửa liên tục trên với mọi $y \in C$, $\varphi(x, .)$ lồi chặt, nửa liên tục dưới với mọi $x \in C$ và φ đơn điệu mạnh thì bài toán cân bằng có duy nhất nghiệm.

Chứng minh

(i) Giả sử x, y là hai nghiệm của bài toán cân bằng và $x \neq y$. Khi đó

$$\varphi(x, y) \geq 0, \varphi(y, x) \geq 0.$$

Vì φ đơn điệu chặt nên

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, x) < 0.$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy bài toán cân bằng có nhiều nhất một nghiệm.

(ii) Lấy $x \in C$ bất kỳ. Vì $\varphi(x, \cdot)$ lồi, nửa liên tục dưới nên tồn tại một số $\beta > -\infty$ sao cho

$$\varphi(x, w) \geq \beta, \quad \forall w \in B(x, 1) \cap C.$$

Cho $y \in C \setminus B(x, 1)$ tùy ý, và đặt

$$\lambda = \frac{1}{\|x - y\|}.$$

Khi đó

$$w = \lambda y + (1 - \lambda)x \in B(x, 1) \cap C.$$

Vì $\varphi(x, \cdot)$ lồi nên ta có

$$\beta \leq \varphi(x, w) \leq \frac{\varphi(x, y)}{\|x - y\|}.$$

Sử dụng tính đơn điệu mạnh với hệ số $\tau > 0$ của φ , ta nhận được

$$\begin{aligned} \varphi(y, x) &\leq -\beta \|x - y\| - \tau \|x - y\|^2 \\ &= -\|x - y\| (\beta + \tau \|x - y\|) < 0, \end{aligned}$$

với $\|x - y\| > -\frac{\beta}{\tau}$. Khi đó, các giả thiết của định lý (1.5)–(ii) được thỏa mãn, trong đó $M = C \cap B(x, \beta')$, $\beta' > \max\left(1, -\frac{\beta}{\tau}\right)$. Vậy (ii) được chứng minh.

1.5. Một số bổ đề cơ bản

Phần này sẽ trình bày một số bổ đề cơ bản (xem [2, 6]) làm cơ sở để chứng minh định lý hội tụ mạnh và định lý hội tụ yếu trong chương 2 và chương 3.

Bổ đề 1.2. Với mọi $x, y, z \in H$ và $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 &= \alpha \|x\|^2 + \beta \|y\|^2 + \gamma \|z\|^2 \\ &\quad - \alpha\beta \|x - y\|^2 - \alpha\gamma \|x - z\|^2 - \beta\gamma \|y - z\|^2. \end{aligned}$$

Bổ đề 1.3. Cho $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ là các dãy bị chặn trong H và dãy $\{\beta_n\} \subset [0, 1]$ thỏa mãn $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$. Giả sử $x_{n+1} = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n x_n, \forall n \geq 1$ và $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0$.

Bổ đề 1.4. Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy các số thực không âm sao cho

$$a_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) a_n + \delta_n, \forall n \geq 1,$$

với $\{\alpha_n\} \subset (0, 1), \{\delta_n\} \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n}{\alpha_n} \leq 0$ hoặc $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$.

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bổ đề 1.5. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $\{S_n\}$ là dãy các ánh xạ từ C vào chính nó. Giả sử

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup (\|S_{n+1}(z) - S_n(z)\| : z \in C) < \infty.$$

Khi đó, với mỗi $y \in C$, dãy $\{S_n(y)\}$ hội tụ mạnh tới một điểm của C . Hơn nữa, nếu ánh xạ $S : C \rightarrow C$ được xác định bởi

$$S(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(y), \forall y \in C,$$

thì $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|S(z) - S_n(z)\| : z \in C) = 0$.

Bổ đề 1.6. Cho $\{\delta_n\}$ là dãy các số thực sao cho $\{\delta_n\} \subset [\alpha, \beta] \subset (0, 1), c > 0$ và $\{x_n\}, \{y_n\}$ là các dãy trong H thỏa mãn

$$\begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq c, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq c, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n x_n + (1 - \delta_n) y_n\| = c. \end{cases}$$

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Bổ đề 1.7. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $S : C \rightarrow C$ là ánh xạ không giãn. Nếu $F(S) \neq \emptyset$ thì ánh xạ $I - S$ nửa đóng; tức là, nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $\bar{x} \in C$ và dãy $\{(I - S)(x_n)\}$ hội tụ mạnh tới $\bar{y}$ thì $(I - S)(\bar{x}) = \bar{y}$ với I là ánh xạ đồng nhất trong H .

Bổ đề 1.8. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H . Giả sử với mọi $u \in C$, dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$\|x_{n+1} - u\| \leq \|x_n - u\|, \quad \forall n \geq 0.$$

Khi đó, dãy $\{P_C(x_n)\}$ hội tụ mạnh tới $\bar{x} \in C$.

Kết luận chương

Trong chương này, chúng ta đã nhắc lại các kết quả quan trọng của giải tích lồi: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân, cực trị,... Đồng thời, trình bày khái niệm, các tính chất của ánh xạ không giãn; khái niệm, tính chất tập nghiệm, sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng và một số bổ đề cơ bản.

Chương 2

Định lý hội tụ mạnh

Trong những năm gần đây, phương pháp dưới đạo hàm luôn là một đề tài thu hút được sự quan tâm của rất nhiều các nhà khoa học trong và ngoài nước. Năm 2007, Yao cùng một nhóm các tác giả đã đề xuất thuật toán tìm một phần tử chung của tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một ánh xạ không giãn $VI(A, C) \cap F(S)$ ($A : C \rightarrow H$ đơn điệu và liên tục Lipschitz,) trong "*An extragradient method for fixed point problems and variational inequality problems, Vol.2007, Art. ID38752, 12PP, (2007)*":

$$\begin{cases} x_1 = u \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A(x_n)), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(x_n - \lambda_n A(y_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Cũng trong thời gian này, S. Takahashi và W. Takahashi đã giới thiệu sơ đồ lặp tìm một phần tử chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một ánh xạ không giãn $EP(\varphi) \cap F(S)$ trong "*Viscosity approximation method for equilibrium problems and fixed points in Hilbert spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.331, PP.506-515, (2007)*":

$$\begin{cases} x = x_1 \in C, \\ \varphi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) S(u_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó, $f : C \rightarrow C$ là ánh xạ co.

Tiếp theo, Aoyama đưa ra thuật toán tìm điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn $\cap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ trong "*Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings*

in a Banach spaces, *Nonlinear Analysis, Vol.67, PP.2350-2360, (2007)*"
 như sau:

$$\begin{cases} x_1 = u \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kết hợp ý tưởng của Yao, S. Takahashi, W. Takahashi và Aoyama, R. Wangkeeree cùng một nhóm các tác giả đã đề xuất sơ đồ lặp tìm một điểm chung của $\cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi)$ trong [6].

2.1. Thuật toán và sự hội tụ

Trong chương này, ta luôn giả thiết như sau:

Giả thiết 1. Song hàm $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ luôn được giả thiết là thỏa mãn các điều kiện:

- (A1) $\varphi(x, x) = 0, \quad \forall x \in C;$
- (A2) φ đơn điệu, tức là $\varphi(x, y) + \varphi(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in C;$
- (A3) Với mỗi $x, y, z \in C, \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(tz + (1-t)x, y) \leq \varphi(x, y);$
- (A4) Với mỗi $x \in C, y \mapsto \varphi(x, y)$ lồi và nửa liên tục dưới.

Giả thiết 2. Ánh xạ $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ co.

Giả thiết 3. Ánh xạ $A : C \rightarrow H$ liên tục L-Lipschitz, đơn điệu.
 $S_n : C \rightarrow C, n = 1, 2, \dots$ là các ánh xạ không giãn sao cho

$$\cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi) \neq \emptyset.$$

Khi đó, sơ đồ lặp tìm một điểm chung của $\cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi)$ được phát biểu trong [6] như sau:

Thuật toán 2.1.

Bước 0. Lấy $x_1 \in H$, các dãy $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subseteq [0, 1], \{\lambda_n\} \subseteq (0, 1)$

và $\{r_n\} \subseteq (0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$(C1) \quad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1;$$

$$(C2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty;$$

$$(C3) \quad 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1;$$

$$(C4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0;$$

$$(C5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty.$$

Bước 1. Xác định u_n, y_n sao cho

$$\begin{cases} \varphi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)). \end{cases}$$

Bước 2. Xác định

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S_n P_C(u_n - \lambda_n A(y_n)), \quad n \geq 1.$$

Bước 3. Gán $n := n + 1$ và quay trở lại bước 1.

Để chứng minh sự hội tụ của thuật toán, ta nhắc lại một số bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. [6] Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và song hàm $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $(A_1) - (A_4)$. Khi đó, với $r > 0$ và $x \in H$, tồn tại duy nhất $z \in C$ sao cho

$$\varphi(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Bổ đề 2.2. [6] Giả sử $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $(A_1) - (A_4)$. Với $r > 0$ và $x \in H$, ánh xạ $T_r : H \rightarrow C$ được định nghĩa bởi

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : \varphi(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \right\}, \quad \forall x \in H.$$

Khi đó, ta có

- (i) T_r đơn trị;
- (ii) $\|T_r(x) - T_r(y)\|^2 \leq \langle T_r(x) - T_r(y), x - y \rangle, \forall x, y \in H$;
- (iii) $F(T_r) = EP(\varphi)$;
- (iv) $EP(\varphi)$ đóng và lồi.

Định lý sau đây chứng minh sự hội tụ của thuật toán (2.1.)

Định lý 2.1. Cho C là tập con lồi, đóng của H . Song hàm $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $(A_1) - (A_4)$, $f : C \rightarrow C$ là ánh xạ co, $A : C \rightarrow H$ là ánh xạ liên tục L -Lipschitz, đơn điệu và $\{S_n\}$ là dãy các ánh xạ không giãn từ C vào chính nó sao cho $\cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi) \neq \emptyset$. Các dãy $\{x_n\}, \{u_n\}$ và $\{y_n\}$ được sinh bởi

$$\begin{cases} x_1 = x \in C \text{ tùy ý,} \\ \varphi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S_n P_C(u_n - \lambda_n A(y_n)), \forall n \geq 1, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subseteq [0, 1], \{\lambda_n\} \subseteq (0, 1)$ và $\{r_n\} \subseteq (0, \infty)$ thỏa mãn các ràng buộc $(C1) - (C5)$.

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} \sup(\|S_{n+1}(z) - S_n(z)\| : z \in B) < \infty$ với B là tập con bị chặn bất kỳ của C . Ánh xạ $S : C \rightarrow C$ định nghĩa bởi $S(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(y)$, $\forall y \in C$ và $F(S) = \cap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{u_n\}$ và $\{y_n\}$ cùng hội tụ mạnh tới một điểm $q \in F(S) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi)$, với $q = P_{\cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi)} f(q)$.

Chứng minh

Đặt $Q = P_{\cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi)}$. Vì Q là ánh xạ không giãn và f co với hệ số co $\alpha \in [0, 1)$, nên ta có

$$\|Qf(x) - Qf(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \forall x, y \in C.$$

Do đó $Qf : C \rightarrow C$ là ánh xạ co, nên tồn tại duy nhất $q \in C$ sao cho $q = Qf(q)$.

Bước 1. Chứng minh các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}, \{u_n\}, \{S_n(t_n)\}, \{A(u_n)\}, \{A(y_n)\}$ và $\{f(x_n)\}$ bị chặn. Thật vậy, đặt

$$t_n = P_C(u_n - \lambda_n A(y_n)), \quad \forall n \geq 1.$$

Lấy

$$x^* \in \cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi).$$

Từ (1.4), ta có

$$x^* \in VI(A, C) \Rightarrow x^* = P_C(x^* - \lambda_n A(x^*)).$$

Từ (1.2), ta có

$$\begin{aligned} \|(u_n - \lambda_n A(y_n)) - P_C(u_n - \lambda_n A(y_n))\|^2 + \|x^* - P_C(u_n - \lambda_n A(y_n))\|^2 \\ \leq \|(u_n - \lambda_n A(y_n)) - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\|^2 &\leq \|u_n - \lambda_n A(y_n) - x^*\|^2 - \|u_n - \lambda_n A(y_n) - t_n\|^2 \\ &= \|u_n - x^*\|^2 - 2\lambda_n \langle A(y_n), u_n - x^* \rangle + \lambda_n^2 \|A(y_n)\|^2 \\ &\quad - \|u_n - t_n\|^2 + 2\lambda_n \langle A(y_n), u_n - t_n \rangle - \lambda_n^2 \|A(y_n)\|^2 \quad (2.1) \\ &= \|u_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n \langle A(y_n), x^* - t_n \rangle - \|u_n - t_n\|^2 \\ &= \|u_n - x^*\|^2 - \|u_n - t_n\|^2 + 2\lambda_n \langle A(y_n) - A(x^*), x^* - y_n \rangle \\ &\quad + 2\lambda_n \langle A(x^*), x^* - y_n \rangle + 2\lambda_n \langle A(y_n), y_n - t_n \rangle. \end{aligned}$$

Vì A đơn điệu nên

$$\langle A(y_n) - A(x^*), x^* - y_n \rangle \leq 0. \quad (2.2)$$

Mặt khác, do $x^* \in VI(A, C)$ nên ta có

$$\langle A(x^*), x^* - y_n \rangle \leq 0. \quad (2.3)$$

Từ (2.1), (2.2) và (2.3) suy ra

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &\leq \|u_n - x^*\|^2 - \|u_n - t_n\|^2 + 2\lambda_n \langle A(y_n), y_n - t_n \rangle \\
&= \|u_n - x^*\|^2 - \|(u_n - y_n) + (y_n - t_n)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_n \langle A(y_n), y_n - t_n \rangle \\
&= \|u_n - x^*\|^2 - \|u_n - y_n\|^2 - 2 \langle u_n - y_n, y_n - t_n \rangle \\
&\quad - \|y_n - t_n\|^2 + 2\lambda_n \langle A(y_n), y_n - t_n \rangle \\
&= \|u_n - x^*\|^2 - \|u_n - y_n\|^2 - \|y_n - t_n\|^2 \\
&\quad + 2 \langle u_n - \lambda_n A(y_n) - y_n, t_n - y_n \rangle. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Vì $y_n = P_C(u_n - \lambda_n A(u_n))$ nên theo (1.1), ta có

$$\langle (u_n - \lambda_n A(u_n)) - P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)), t_n - P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)) \rangle \leq 0,$$

hay

$$\langle u_n - \lambda_n A(u_n) - y_n, t_n - y_n \rangle \leq 0. \tag{2.5}$$

Sử dụng tính chất liên tục L -Lipschitz của A và (2.5), ta được

$$\begin{aligned}
\langle u_n - \lambda_n A(y_n) - y_n, t_n - y_n \rangle &= \langle u_n - \lambda_n A(u_n) - y_n, t_n - y_n \rangle \\
&\quad + \langle \lambda_n A(u_n) - \lambda_n A(y_n), t_n - y_n \rangle \\
&\leq \langle \lambda_n A(u_n) - \lambda_n A(y_n), t_n - y_n \rangle \\
&\leq \lambda_n \|A(u_n) - A(y_n)\| \|t_n - y_n\| \\
&\leq \lambda_n L \|u_n - y_n\| \|t_n - y_n\|. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Do đó, từ (2.4) và (2.6) suy ra

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &\leq \|u_n - x^*\|^2 - \|u_n - y_n\|^2 - \|y_n - t_n\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_n L \|u_n - y_n\| \|t_n - y_n\| \\
&\leq \|u_n - x^*\|^2 - \|u_n - y_n\|^2 - \|y_n - t_n\|^2 \\
&\quad + \lambda_n L \left(\|u_n - y_n\|^2 + \|y_n - t_n\|^2 \right) \\
&\leq \|u_n - x^*\|^2 + (\lambda_n L - 1) \|u_n - y_n\|^2 \\
&\quad + (\lambda_n L - 1) \|y_n - t_n\|^2. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Vì $\lambda_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), nên $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 \neq 0$ sao cho $\lambda_n L - 1 \leq -\frac{1}{3}$ khi $n \geq N_0$. Vì thế, từ (2.7), ta có

$$\|t_n - x^*\|^2 \leq \|u_n - x^*\|^2. \quad (2.8)$$

Mặt khác, vì T_{r_n} là ánh xạ không giãn nên

$$\|u_n - x^*\| = \|T_{r_n}(x_n) - T_{r_n}(x^*)\| \leq \|x_n - x^*\|,$$

và do đó

$$\|t_n - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2. \quad (2.9)$$

Kết hợp (2.1), (C1), $x^* \in F(S)$ và (2.9), ta thu được

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|\alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S_n(t_n) - x^*\| \\ &\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\| + \beta_n \|x_n - x^*\| + \gamma_n \|S_n(t_n) - x^*\| \\ &\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\| + \beta_n \|x_n - x^*\| + \gamma_n \|t_n - x^*\| \\ &\leq \alpha_n \|f(x_n) - f(x^*)\| + \alpha_n \|f(x^*) - x^*\| \\ &\quad + \beta_n \|x_n - x^*\| + \gamma_n \|x_n - x^*\|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vì f co với hệ số co là α nên từ (2.10), ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq (1 - \alpha_n(1 - \alpha)) \|x_n - x^*\| + \alpha_n \|f(x^*) - x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n(1 - \alpha)) \|x_n - x^*\| + \alpha_n(1 - \alpha) \frac{\|f(x^*) - x^*\|}{(1 - \alpha)}. \end{aligned}$$

Bằng phép quy nạp, ta suy ra

$$\|x_n - x^*\| \leq \max \left\{ \|x_1 - x^*\|, \frac{\|f(x^*) - x^*\|}{(1 - \alpha)} \right\}, n \geq N_0.$$

Vậy dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Do đó, các dãy $\{t_n\}$, $\{u_n\}$, $\{S_n(t_n)\}$, $\{A(u_n)\}$ và

$\{f(x_n)\}$ cũng bị chặn. Mặt khác, vì

$$\begin{aligned}
\|y_n - x^*\|^2 &= \|P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)) - P_C(x^* - \lambda_n A(x^*))\|^2 \\
&\leq \|u_n - \lambda_n A(u_n) - (x^* - \lambda_n A(x^*))\|^2 \\
&\leq \|u_n - x^*\|^2 - 2\lambda_n \langle A(u_n) - A(x^*), u_n - x^* \rangle \\
&\quad + \lambda_n^2 \|A(u_n) - A(x^*)\|^2 \\
&\leq (1 + \lambda_n^2 L) \|u_n - x^*\|^2.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\{y_n\}$ bị chặn, kéo theo $\{A(y_n)\}$ cũng bị chặn.

Bước 2. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$. Thật vậy, với mọi $x, y \in C$, ta có

$$\begin{aligned}
\|(I - \lambda_n A)(x) - (I - \lambda_n A)(y)\|^2 &= \|(x - y) - \lambda_n (A(x) - A(y))\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2\lambda_n \langle x - y, A(x) - A(y) \rangle \\
&\quad + \lambda_n^2 \|A(x) - A(y)\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 + \lambda_n^2 L^2 \|x - y\|^2 \\
&= (1 + \lambda_n^2 L^2) \|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

kéo theo

$$\|(I - \lambda_n A)(x) - (I - \lambda_n A)(y)\| \leq (1 + \lambda_n L) \|x - y\|.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
\|t_{n+1} - t_n\| &= \|P_C(u_{n+1} - \lambda_{n+1} A(y_{n+1})) - P_C(u_n - \lambda_n A(y_n))\| \\
&\leq \|(u_{n+1} - \lambda_{n+1} A(y_{n+1})) - (u_n - \lambda_n A(y_n))\| \\
&= \|(u_{n+1} - \lambda_{n+1} A(u_{n+1})) - (u_n - \lambda_{n+1} A(u_n))\| \\
&\quad + \lambda_{n+1} \|A(u_{n+1}) - A(y_{n+1}) - A(u_n)\| + \lambda_n \|A(y_n)\| \\
&\leq \|(u_{n+1} - \lambda_{n+1} A(u_{n+1})) - (u_n - \lambda_{n+1} A(u_n))\| \\
&\quad + \lambda_{n+1} (\|A(u_{n+1})\| + \|A(y_{n+1})\| + \|A(u_n)\|) + \lambda_n \|A(y_n)\| \\
&\leq (1 + \lambda_{n+1} L) \|u_{n+1} - u_n\| + \lambda_n \|A(y_n)\| \\
&\quad + \lambda_{n+1} (\|A(u_{n+1})\| + \|A(y_{n+1})\| + \|A(u_n)\|).
\end{aligned}$$

Đặt

$$\mu_n = \lambda_n \|A(y_n)\| + \lambda_{n+1} (\|A(u_{n+1})\| + \|A(y_{n+1})\| + \|A(u_n)\|).$$

Khi đó

$$\|t_{n+1} - t_n\| \leq (1 + \lambda_{n+1}L) \|u_{n+1} - u_n\| + \mu_n. \quad (2.11)$$

Mặt khác, vì

$$u_n = T_{r_n}(x_n),$$

và

$$u_{n+1} = T_{r_{n+1}}(x_{n+1}),$$

nên ta có

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|T_{r_{n+1}}(x_{n+1}) - T_{r_n}(x_n)\| \leq \|x_{n+1} - x_n\|. \quad (2.12)$$

Từ (2.11) và (2.12) suy ra

$$\|t_{n+1} - t_n\| \leq (1 + \lambda_{n+1}L) \|x_{n+1} - x_n\| + \mu_n. \quad (2.13)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|S_{n+1}(t_{n+1}) - S_n(t_n)\| &\leq \|S_{n+1}(t_{n+1}) - S_{n+1}(t_n)\| + \|S_{n+1}(t_n) - S_n(t_n)\| \\ &\leq \|t_{n+1} - t_n\| + \|S_{n+1}(t_n) - S_n(t_n)\| \\ &\leq (1 + \lambda_{n+1}L) \|x_{n+1} - x_n\| + \mu_n \\ &\quad + \|S_{n+1}(t_n) - S_n(t_n)\|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Đặt

$$z_n = \frac{\alpha_n f(x_n) + \gamma_n S_n(t_n)}{1 - \beta_n}.$$

Ta có

$$x_{n+1} = (1 - \beta_n) z_n + \beta_n x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì thế

$$\begin{aligned}
& \|z_{n+1} - z_n\| \\
&= \left\| \frac{\alpha_{n+1}f(x_{n+1}) + \gamma_{n+1}S_{n+1}(t_{n+1})}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n f(x_n) + \gamma_n S_n(t_n)}{1 - \beta_n} \right\| \\
&= \left\| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} f(x_{n+1}) + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} [S_{n+1}(t_{n+1}) - S_n(t_n)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} f(x_n) - \left(1 - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n}\right) S_n(t_n) + \left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}}\right) S_n(t_n) \right\| \\
&\leq \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|f(x_{n+1}) - S_n(t_n)\| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \|S_n(t_n) - f(x_n)\| \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|S_{n+1}(t_{n+1}) - S_n(t_n)\|. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Từ (2.14) và (2.15) suy ra

$$\begin{aligned}
& \|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|f(x_{n+1}) - S_n(t_n)\| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \|S_n(t_n) - f(x_n)\| \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} (1 + \lambda_{n+1}L) \|x_{n+1} - x_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \mu_n + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|S_{n+1}(t_n) - S_n(t_n)\| \\
&\leq \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|f(x_{n+1}) - S_n(t_n)\| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \|S_n(t_n) - f(x_n)\| \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \lambda_{n+1}L \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \mu_n \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \sup \{\|S_{n+1}(t) - S_n(t)\| : t \in \{t_n\}\}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.16) với (C1)-(C5) và

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\|S_{n+1}(t) - S_n(t)\| : t \in \{t_n\}\} = 0,$$

ta được

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0.$$

Do đó, theo bổ đề (1.3), ta có $\|z_n - x_n\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \|z_n - x_n\| = 0. \quad (2.17)$$

Theo (2.12) và (2.13), ta cũng có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_{n+1} - t_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0. \quad (2.18)$$

Mặt khác, vì

$$\begin{aligned} & \|y_{n+1} - y_n\| \\ &= \|P_C(u_{n+1} - \lambda_{n+1}A(u_{n+1})) - P_C(u_n - \lambda_n A(u_n))\| \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n - \lambda_{n+1}A(u_{n+1}) + \lambda_n A(u_n)\| \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\| + \|-\lambda_{n+1}A(u_{n+1}) + \lambda_{n+1}A(u_n) - \lambda_{n+1}A(u_n) + \lambda_n A(u_n)\| \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\| + \lambda_{n+1} \|A(u_n) - A(u_{n+1})\| + (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \|A(u_n)\|, \end{aligned}$$

nên theo (2.18) và (C4), ta suy ra $\|y_{n+1} - y_n\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Bước 3. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - x_n\| = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S(t_n) - t_n\| = 0$. Thật vậy, giả sử $x^* \in \cap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \cap VI(AC) \cap EP(\varphi)$, ta có

$$\begin{aligned} \|u_n - x^*\|^2 &= \|T_{r_n}(x_n) - T_{r_n}(x^*)\| \\ &\leq \langle T_{r_n}(x_n) - T_{r_n}(x^*), x_n - x^* \rangle = \langle u_n - x^*, x_n - x^* \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|u_n - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2 \right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\|u_n - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2. \quad (2.19)$$

Kết hợp (2.8) và (2.19) với bổ đề (1.2), ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|\alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S_n(t_n) - x^*\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\|^2 + \beta_n \|x_n - x^*\|^2 + \gamma_n \|S_n(t_n) - x^*\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\|^2 + \beta_n \|x_n - x^*\|^2 + \gamma_n \|u_n - x^*\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\|^2 + \beta_n \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + \gamma_n \left(\|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2 \right) \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\|^2 + (1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\|^2 - \gamma_n \|x_n - u_n\|^2,
\end{aligned}$$

và do vậy

$$\begin{aligned}
&\gamma_n \|x_n - u_n\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - x^*\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\| (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|). \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Từ (C2), (2.17) và (2.20), ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0. \quad (2.21)$$

Theo (1.2), ta có

$$\begin{aligned}
&\|u_n - \lambda_n A(u_n) - P_C(u_n - \lambda_n A(u_n))\|^2 + \|x_n - P_C(u_n - \lambda_n A(u_n))\|^2 \\
&\leq \|u_n - \lambda_n A(u_n) - x_n\|^2.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\|x_n - P_C(u_n - \lambda_n A(u_n))\|^2 \leq \|u_n - \lambda_n A(u_n) - x_n\|^2,$$

tức là

$$\|x_n - P_C(u_n - \lambda_n A(u_n))\| \leq \|u_n - \lambda_n A(u_n) - x_n\|.$$

Kết hợp điều này với (2.21) và (C4), ta thu được

$$\begin{aligned}
\|y_n - x_n\| &= \|P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)) - x_n\| \\
&\leq \|u_n - x_n\| + \lambda_n \|A(u_n)\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Hơn nữa, do

$$\begin{aligned}\|y_n - t_n\| &= \|P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)) - P_C(u_n - \lambda_n A(y_n))\| \\ &\leq \lambda_n \|A(u_n) - A(y_n)\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty,\end{aligned}\quad (2.23)$$

nên

$$\|t_n - x_n\| \leq \|t_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Mặt khác, vì

$$\begin{aligned}\|S_n y_n - x_{n+1}\| &\leq \|S_n(y_n) - S_n(t_n)\| + \|S_n(t_n) - x_{n+1}\| \\ &\leq \|y_n - t_n\| + \alpha_n \|S_n(t_n) - f(x_n)\| + \beta_n \|S_n(t_n) - x_n\| \\ &\leq \|y_n - t_n\| + \alpha_n \|S_n(t_n) - f(x_n)\| \\ &\quad + \beta_n \|S_n(t_n) - S_n(x_n)\| + \beta_n \|S_n(x_n) - x_n\| \\ &\leq \|y_n - t_n\| + \alpha_n \|S_n(t_n) - f(x_n)\| \\ &\quad + \beta_n \|t_n - x_n\| + \beta_n \|S_n(x_n) - x_n\|.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\|S_n x_n - x_n\| &\leq \|S_n(x_n) - S_n(y_n)\| + \|S_n(y_n) - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - t_n\| + \alpha_n \|S_n(t_n) - f(x_n)\| \\ &\quad + \beta_n \|t_n - x_n\| + \beta_n \|S_n(x_n) - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Vì thế

$$\begin{aligned}(1 - \beta_n) \|S_n(x_n) - x_n\| &\leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - t_n\| + \alpha_n \|S_n(t_n) - f(x_n)\| \\ &\quad + \beta_n \|t_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Kết hợp điều đó với (2.17), (2.22), (2.23), (2.24) và (C2), ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x_n) - x_n\| = 0. \quad (2.28)$$

Từ (2.24) và (2.28) suy ra

$$\begin{aligned}\|S_n t_n - t_n\| &\leq \|S_n(t_n) - S_n(x_n)\| + \|S_n(x_n) - x_n\| + \|x_n - t_n\| \\ &\leq 2\|t_n - x_n\| + \|S_n(x_n) - x_n\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Áp dụng bổ đề (1.5) và (2.29), ta được

$$\begin{aligned}\|S(t_n) - t_n\| &\leq \|S(t_n) - S_n(t_n)\| + \|S_n(t_n) - t_n\| \\ &\leq \sup\{\|S(t) - S_n(t)\| : t \in \{t_n\}\} + \|S_n(t_n) - t_n\| \\ &\rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Từ (2.24) và (2.30), ta có

$$\|x_n - S(t_n)\| \leq \|x_n - t_n\| + \|t_n - S(t_n)\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Bước 4. Chứng minh $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\langle f(q) - q, x_n - q \rangle \leq 0)$. Thật vậy, giả sử $\{t_{n_i}\}$ là một dãy con của $\{t_n\}$ sao cho

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(q) - q, S(t_n) - q \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(q) - q, S(t_{n_i}) - q \rangle. \quad (2.31)$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\{t_{n_i}\}$ hội tụ yếu tới $z \in C$. Vì $\|S(t_n) - t_n\| \rightarrow 0$ nên $S(t_{n_i})$ cũng hội tụ yếu tới z . Ta sẽ chứng minh

$$z \in F(S) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi).$$

Trước hết, ta chứng minh $z \in EP(\varphi)$. Vì

$$u_n = T_{r_n}(x_n),$$

và

$$\varphi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Từ đó, theo (A2), ta suy ra

$$\frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq \varphi(y, u_n),$$

kéo theo

$$\left\langle y - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \right\rangle \geq \varphi(y, u_{n_i}).$$

Do $\|u_n - x_n\| \rightarrow 0$, $\|x_n - S(t_n)\| \rightarrow 0$ và $\|S(t_n) - t_n\| \rightarrow 0$, nên $u_{n_i} \rightharpoonup z$. Khi đó, từ (A4) suy ra

$$\varphi(y, z) \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

Với $0 < t \leq 1$ và $y \in C$, ta đặt $y_t = ty + (1-t)z$. Vì $y \in C$, $z \in C$ và tập C lồi nên $y_t \in C$. Do vậy $\varphi(y_t, z) \leq 0$. Khi đó, theo (A1) và (A4), ta có

$$0 = \varphi(y_t, y_t) \leq t\varphi(y_t, y) + (1-t)\varphi(y_t, z) \leq t\varphi(y_t, y), \quad (2.32)$$

kéo theo

$$\varphi(y_t, y) \geq 0.$$

Vì thế, từ (A3) suy ra $\varphi(z, y) \geq 0$, $\forall y \in C$. Vậy $z \in EP(\varphi)$.

Tiếp theo, ta chứng minh $z \in F(S)$. Giả sử $z \notin F(S) \Rightarrow z \neq S(z)$. Vì $t_{n_i} \rightharpoonup z$ nên theo bổ đề (1.1), ta có

$$\begin{aligned} \liminf_{i \rightarrow \infty} \|t_{n_i} - z\| &< \liminf_{i \rightarrow \infty} \|t_{n_i} - S(z)\| \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \|t_{n_i} - S(t_{n_i}) + S(t_{n_i}) - S(z)\| \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} (\|t_{n_i} - S(t_{n_i})\| + \|S(t_{n_i}) - S(z)\|) \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|S(t_{n_i}) - S(z)\| \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|t_{n_i} - z\|. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy $z \in F(S)$.

Cuối cùng, ta phải chứng minh $z \in VI(A, C)$. Cho

$$T(v) = \begin{cases} A(v) + N_C(v) & \text{khi } v \in C, \\ \emptyset & \text{khi } v \notin C. \end{cases}$$

Khi đó T đơn điệu cực đại. Lấy $(v, w) \in G(T)$. Vì $w - A(v) \in N_C(v)$ và $t_n \in C$, nên ta có

$$\langle v - t_n, w - A(v) \rangle \geq 0.$$

Mặt khác, do

$$t_n = P_C(u_n - \lambda_n A(y_n)),$$

nên theo (1.1), ta suy ra

$$\langle v - t_n, t_n - (u_n - \lambda_n A(y_n)) \rangle \geq 0,$$

tức là

$$\left\langle v - t_n, \frac{t_n - u_n}{\lambda_n} + A(y_n) \right\rangle \geq 0.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \langle v - t_{n_i}, w \rangle &\geq \langle v - t_{n_i}, A(v) \rangle \\ &\geq \langle v - t_{n_i}, A(v) \rangle - \left\langle v - t_{n_i}, \frac{t_{n_i} - u_{n_i}}{\lambda_{n_i}} + A(y_{n_i}) \right\rangle \\ &= \left\langle v - t_{n_i}, A(v) - A(y_{n_i}) - \frac{t_{n_i} - u_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \right\rangle \\ &= \langle v - t_{n_i}, A(v) - A(t_{n_i}) \rangle + \langle v - t_{n_i}, A(t_{n_i}) - A(y_{n_i}) \rangle \\ &\quad - \left\langle v - t_{n_i}, \frac{t_{n_i} - u_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \right\rangle \\ &\geq \langle v - t_{n_i}, A(t_{n_i}) - A(y_{n_i}) \rangle - \left\langle v - t_{n_i}, \frac{t_{n_i} - u_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Mặt khác, vì $\|t_{n_i} - y_{n_i}\| \rightarrow 0$, $\|t_{n_i} - u_{n_i}\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ và A liên tục Lipschitz nên từ (2.33) suy ra

$$\langle v - z, w \rangle \geq 0.$$

Hơn nữa, vì T đơn điệu cực đại nên

$$z \in T^{-1}(0).$$

Do đó

$$z \in VI(A, C).$$

Vậy

$$z \in F(S) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi).$$

Theo (1.1), ta có

$$\langle f(q) - q, z - q \rangle \leq 0.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(q) - q, x_n - q \rangle &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(q) - q, S(t_n) - q \rangle \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(q) - q, S(t_{n_i}) - q \rangle \\ &= \langle f(q) - q, z - q \rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Bước 5. Chứng minh $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| = 0 \right)$. Thật vậy, vì

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &= \langle \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S_n(t_n) - q, x_{n+1} - q \rangle \\ &= \alpha_n \langle f(x_n) - q, x_{n+1} - q \rangle + \beta_n \langle x_n - q, x_{n+1} - q \rangle \\ &\quad + \gamma_n \langle S_n(t_n) - q, x_{n+1} - q \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \beta_n \left(\|x_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma_n \left(\|t_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2 \right) \\ &\quad + \alpha_n \langle f(x_n) - f(q), x_{n+1} - q \rangle + \alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} (1 - \alpha_n) \left(\|x_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_n \left(\|f(x_n) - f(q)\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2 \right) \\ &\quad + \alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} (1 - \alpha_n (1 - \alpha^2)) \|x_n - q\|^2 + \frac{1}{2} (1 - \alpha_n) \|x_{n+1} - q\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_n \|x_{n+1} - q\|^2 + \alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle, \end{aligned} \quad (2.34)$$

nên

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leq (1 - \alpha_n (1 - \alpha^2)) \|x_n - q\|^2 + 2\alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle. \quad (2.35)$$

Đặt $\delta_n = 2\alpha_n \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle$. Khi đó

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leq (1 - \alpha_n (1 - \alpha^2)) \|x_n - q\|^2 + \delta_n. \quad (2.36)$$

Theo (C2), ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha^2) = (1 - \alpha^2) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

và

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n}{\alpha_n (1 - \alpha^2)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \langle f(q) - q, x_{n+1} - q \rangle}{1 - \alpha^2} \leq 0.$$

Sử dụng bổ đề (1.4) và (2.36), ta suy ra $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới q . Do đó, các dãy $\{u_n\}$ và $\{y_n\}$ cũng hội tụ mạnh tới q .

Từ định lý hội tụ mạnh trên, ta nhận được một số kết quả quan trọng sau đây.

2.2. Các hệ quả

Hệ quả 2.1. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H . Song hàm $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn (A1) – (A4), $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ co, ánh xạ $A : C \rightarrow H$ đơn điệu, liên tục L -Lipschitz và $\{\beta_n^k\}$ là một họ các số không âm với $n, k \in \mathbb{N}$ và $k \leq n$ sao cho

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_n^k = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^k > 0, \quad \text{với mỗi } k \in \mathbb{N};$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n |\beta_{n+1}^k - \beta_n^k| < \infty.$

Gọi $\{T_k\}$ là dãy các ánh xạ không giãn từ C vào chính nó thỏa mãn $\cap_{k=1}^{\infty} F(T_k) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi) \neq \emptyset$. Các dãy $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ và $\{y_n\}$ được sinh bởi

$$\begin{cases} x_1 = x \in C \text{ tùy ý,} \\ \varphi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n A(u_n)), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n \sum_{k=1}^n \beta_n^k T_k P_C(u_n - \lambda_n A(y_n)), \quad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

với $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subseteq [0, 1]$, $\{\lambda_n\} \subseteq (0, 1)$ và $\{r_n\} \subseteq (0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- (C1) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$;
- (C2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (C3) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$;
- (C4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$;
- (C5) $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$.

Khi đó, các dãy $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ và $\{y_n\}$ cùng hội tụ mạnh tới một điểm $q \in \cap_{k=1}^{\infty} F(T_k) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi)$, trong đó

$$q = P_{\cap_{k=1}^{\infty} F(T_k) \cap VI(A, C) \cap EP(\varphi)} f(q).$$

Trong định lý (2.1), nếu đặt $S_n \equiv S$ và $f := u$ thì ta sẽ thu được hệ quả sau:

Hệ quả 2.2. Cho C là tập con lồi, đóng của H . Cho $A : C \rightarrow H$ là ánh xạ đơn điệu, liên tục L -Lipschitz và S là ánh xạ không giãn từ C vào chính nó sao cho $F(S) \cap VI(A, C) \neq \emptyset$. Các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ được sinh bởi

$$\begin{cases} x_1 = u \in C \text{ tùy ý,} \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A(x_n)), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(x_n - \lambda_n A(y_n)), \quad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ và $\{\lambda_n\} \subseteq [0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$(C1) \quad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1;$$

$$(C2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty;$$

$$(C3) \quad 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1;$$

$$(C4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $P_{F(S) \cap VI(A, C)}(u)$.

2.3. Một số ví dụ áp dụng

Trong phần này, ta sẽ đưa ra một số ví dụ để minh họa cụ thể cho định lý hội tụ mạnh (2.1) với giả thiết các ánh xạ không giãn là ánh xạ đồng nhất.

Ví dụ 2.1. Lấy $H = \mathbb{R}$, $C = [-1, 6]$, $f(x) = \frac{x+2}{2}$, $A(x) = 2x$ và

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{100n}, \quad \beta_n = \frac{1}{100n} + \frac{1}{2}, \quad \gamma_n = \frac{-2}{100n} + \frac{1}{2}, \\ r_n = \frac{n}{n+1}, \quad \lambda_n = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Đặt $\varphi(x, y) = y^2 + xy - 2x^2$. Ta có

$$\begin{aligned} & \varphi(u, y) + \frac{1}{r} \langle y - u, u - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \\ \Leftrightarrow & y^2 + uy - 2u^2 + \frac{1}{r} (y - u)(u - x) \geq 0, \quad \forall y \in C \\ \Leftrightarrow & ry^2 + (ru + u - x)y - 2ru^2 - u(u - x) \geq 0, \quad \forall y \in C \\ \Leftrightarrow & \Delta(y) = (ru + u - x)^2 - 4r(-2ru^2 - u^2 + ux) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2(3ru + u)x + (3r + 1)^2 u^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x = (3r + 1)u. \end{aligned}$$

Khi đó, thuật toán (2.1) trở thành

$$\begin{cases} x_0 = -1, \\ u_n = \frac{x_n}{3r_n+1} = \frac{n+1}{4n+1}x_n, \\ y_n = \arg \min \left\{ \left| \left(1 - \frac{2}{n}\right) u_n - y \right| : y \in C \right\}, \\ t_n = \arg \min \left\{ \left| u_n - \frac{2}{n}y_n - t \right| : t \in C \right\}, \\ x_{n+1} = \left(\frac{3}{200n} + \frac{1}{2}\right) x_n + \left(\frac{-2}{100n} + \frac{1}{2}\right) t_n + \frac{1}{100n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Ví dụ 2.2. Lấy $H = \mathbb{R}$, $C = [0, 6]$, $A(x) = 2x + 1$, $f(x) = \frac{x}{2}$ và

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{n+3}, \beta_n = \frac{n+7}{4(n+3)}, \gamma_n = \frac{3n+1}{4(n+3)}, \\ r_n = \frac{n}{n+2}, \lambda_n = \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

Đặt $\varphi(x, y) = y^2 - x^2$. Ta có

$$\begin{aligned} & \varphi(u, y) + \frac{1}{r} \langle y - u, u - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \\ \Leftrightarrow & y^2 - u^2 + \frac{1}{r} (y - u)(u - x) \geq 0, \quad \forall y \in C \\ \Leftrightarrow & ry^2 + (u - x)y - ru^2 - u^2 + ux, \quad \forall y \in C \\ \Leftrightarrow & \Delta(y) = (u - x)^2 + 4r(ru^2 + u^2 - ux) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x(1 + 2r)u + (1 + 2r)^2u^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & [x - (2r + 1)u]^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x = (2r + 1)u. \end{aligned}$$

Khi đó, thuật toán (2.1) trở thành

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ u_n = \frac{x_n}{2r_n+1} = \frac{n+2}{3n+2}x_n, \\ y_n = \arg \min \left\{ \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) u_n - \frac{1}{2n} - y \right| : y \in C \right\}, \\ t_n = \arg \min \left\{ \left| u_n - \frac{1}{n}y_n - \frac{1}{2n} - t \right| : t \in C \right\}, \\ x_{n+1} = \frac{n+9}{4(n+3)}x_n + \frac{3n+1}{4(n+3)}t_n. \end{cases}$$

Kết luận chương

Trong chương này, bằng phương pháp xấp xỉ dưới đạo hàm, ta đã chứng minh được các dãy lặp sinh bởi thuật toán (2.1.) cùng hội tụ mạnh tới một điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng với hàm giá đơn điệu, tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và liên tục Lipschitz, và tập các điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực.

Chương 3

Các định lý hội tụ yếu

Trong phần này, ta sẽ trình bày sơ đồ lặp để tìm một phần tử chung của tập nghiệm bài toán cân bằng với song hàm f liên tục kiểu *Lipchitz*, giả đơn điệu và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn (xem [2]). Bài toán được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap EP(f), \quad (3.1)$$

trong đó, song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ và các ánh xạ không giãn $S_n : C \rightarrow C$ ($n = 1, 2, \dots$) thỏa mãn các điều kiện sau:

(A1) f liên tục kiểu *Lipchitz* trên C ;

(A2) f giả đơn điệu trên C ;

(A3) f liên tục yếu trên C ;

(A4) $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap EP(f) \neq \emptyset$;

(A5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sup \{\|S_{n+1}(x) - S_n(x)\| : x \in D\} < \infty$ với D là một

tập con bị chặn bất kỳ trong C .

Rất nhiều các nhà nghiên cứu đã đưa ra các phương pháp để giải bài toán (3.1). Những phương pháp này đòi hỏi phải giải bài toán cân bằng với song hàm *đơn điệu mạnh* hoặc *đơn điệu* và *liên tục kiểu Lipchitz*. Để giảm bớt giả thiết cho song hàm, P. N. Anh cùng một nhóm các tác giả đã đề xuất một thuật toán mới trong [2] được trình bày sau đây.

3.1. Thuật toán và sự hội tụ

Thuật toán 3.1.

Bước 0. Cho $x^0 \in C$, các dãy λ_n và α_n thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} \{\alpha_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1), \\ \{\lambda_n\} \subset [a, b] \text{ với } a, b \in (0, \frac{1}{L}), \text{ trong đó } L := \max \{2c_1, 2c_2\}. \end{cases}$$

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch bậc hai lùi mạnh:

$$\begin{cases} y_n := \arg \min \left\{ \lambda_n f(x_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 : y \in C \right\}, \\ t_n := \arg \min \left\{ \lambda_n f(y_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 : y \in C \right\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Bước 2. Tính

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n(t_n). \quad (3.3)$$

Bước 3. Gán $n := n + 1$ và quay trở lại bước 1.

Để chứng minh sự hội tụ của thuật toán, ta nhắc lại các bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. [2] Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H , song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là giả đơn điệu và liên tục kiểu Lipschitz. Với mỗi $x \in C$, hàm $f(x, \cdot)$ lồi và khả vi phân trên C . Giả sử các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}, \{t_n\}$ được sinh bởi (3.2) và điểm $x^* \in EP(f)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 - (1 - 2\lambda_n c_1) \|x_n - y_n\|^2 \\ &\quad - (1 - 2\lambda_n c_2) \|y_n - t_n\|^2, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Kĩ thuật sử dụng để giải bài toán (3.1) là sự kết hợp của phương pháp dưới đạo hàm và phương pháp điểm bất động. Ta sẽ chỉ ra rằng các dãy lặp sinh bởi thuật toán (3.1) cùng hội tụ yếu tới một phần tử chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực H .

Định lý 3.1. Giả sử các giả thiết (A1) - (A5) được thỏa mãn và $\{\lambda_n\}, \{\alpha_n\}$ là hai dãy sao cho

$$\begin{cases} \{\alpha_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1), \\ \{\lambda_n\} \subset [a, b] \text{ với } a, b \in (0, \frac{1}{L}), \text{ trong đó } L := \max\{2c_1, 2c_2\}. \end{cases}$$

Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{t_n\}$ sinh bởi (3.2) và (3.3) cùng hội tụ yếu tới $x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap EP(f)$, trong đó

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap EP(f)}(x_n).$$

Chứng minh

Giả sử $x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap EP(f)$. Từ (3.3), ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n(t_n) - \alpha_n x^* - (1 - \alpha_n) S_n(x^*)\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - x^*\| + (1 - \alpha_n) \|S_n(t_n) - S_n(x^*)\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - x^*\| + (1 - \alpha_n) \|t_n - x^*\|. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| - \|x_n - x^*\| &\leq (1 - \alpha_n) (\|t_n - x^*\| - \|x_n - x^*\|) \\ &\leq \|t_n - x^*\| - \|x_n - x^*\| \end{aligned}$$

Do đó

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|t_n - x^*\| \quad (3.4)$$

Từ bổ đề (3.1) suy ra

$$\|t_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|. \quad (3.5)$$

Từ (3.4) và (3.5), ta thu được

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|t_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|, \quad (3.6)$$

và do đó tồn tại

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|. \quad (3.7)$$

Vì vậy $\{x_n\}$ bị chặn. Khi đó, tồn tại dãy con $\{x_{n_j}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_j} \rightarrow \bar{x}$ khi $j \rightarrow \infty$.

Bước 1

Chúng minh $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i)$.

Kết hợp bổ đề (3.1) với (3.6) và (3.7), ta có

$$\begin{aligned} (1-d)(1-2bc_1)\|x_n - y_n\|^2 &\leq (1-d)(1-2\lambda_n c_1)\|x_n - y_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|t_n - x^*\|^2 \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\ &\rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (3.8)$$

Một cách tương tự, ta cũng có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - t_n\| = 0.$$

Mặt khác, vì

$$\|x_n - t_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - t_n\|,$$

nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - t_n\| = 0. \quad (3.9)$$

Vì $x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap EP(f)$, nên theo (3.6) suy ra

$$\begin{aligned} \|S_n(t_n) - x^*\| &= \|S_n(t_n) - S(x^*)\| \\ &\leq \|t_n - x^*\| \\ &\leq \|x_n - x^*\|, \end{aligned}$$

và do đó, từ (3.7), ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_n(t_n) - x^*\| \leq c.$$

Từ (3.3) và (3.7) suy ra

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n (x_n - x^*) + (1 - \alpha_n) (S_n(t_n) - x^*)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n(t_n) - (\alpha_n x^* + (1 - \alpha_n) S_n(x^*))\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x^*\| = c. \end{aligned}$$

Theo bổ đề (1.6), ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(t_n) - x_n\| = 0. \quad (3.10)$$

Kết hợp (3.7) với (3.9) suy ra dãy $\{t_n\}$ bị chặn. Theo giả thiết (A5), ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup \{\|S_{n+1}(x) - S_n(x)\| : x \in \{t_n\}\} < \infty.$$

Giả sử ánh xạ $S : C \rightarrow C$ được định nghĩa bởi

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad \forall x \in C \text{ và } F(S) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i). \quad (3.11)$$

Khi đó, sử dụng bổ đề (1.5), (3.9) và (3.10), ta được

$$\begin{aligned} & \|S(x_n) - x_n\| \\ & \leq \|S(x_n) - S(t_n)\| + \|S(t_n) - S_n(t_n)\| + \|S_n(t_n) - x_n\| \\ & \leq \|x_n - t_n\| + \sup \{\|S(x) - S_n(x)\| : x \in \{t_n\}\} + \|S_n(t_n) - x_n\| \\ & \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Khi đó, theo bổ đề (1.7) và do dãy $\{x_{n_j}\}$ hội tụ yếu tới $\bar{x}$ nên $\bar{x} \in F(S)$, tức là

$$\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i).$$

Bước 2

Giả sử $x_{n_j} \rightharpoonup \bar{x}$ ($j \rightarrow \infty$), ta chứng minh $\bar{x} \in EP(f)$.

Thật vậy, vì y_n là nghiệm duy nhất của bài toán lồi mạnh

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 + \lambda_n f(x_n, y) : y \in C \right\},$$

nên theo mệnh đề (1.2) có

$$0 \in \partial_2 \left(\lambda_n f(x_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right) (y_n) + N_C(y_n).$$

Điều đó suy ra

$$0 = \lambda_n w + y_n - x_n + \bar{w},$$

trong đó $w \in \partial_2 f(x_n, y_n)$ và $\bar{w} \in N_C(y_n)$. Theo định nghĩa của nón pháp tuyến N_C , ta suy ra

$$\langle y_n - x_n, y - y_n \rangle \geq \lambda_n \langle w, y_n - y \rangle, \quad \forall y \in C. \quad (3.12)$$

Mặt khác, vì $f(x_n, \cdot)$ khả dưới vi phân trên C nên tồn tại $w \in \partial_2 f(x_n, y_n)$ sao cho

$$f(x_n, y) - f(x_n, y_n) \geq \langle w, y - y_n \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Kết hợp điều này với (3.12), ta thu được

$$\lambda_n (f(x_n, y) - f(x_n, y_n)) \geq \langle y_n - x_n, y_n - y \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Do vậy

$$\lambda_{n_j} (f(x_{n_j}, y) - f(x_{n_j}, y_{n_j})) \geq \langle y_{n_j} - x_{n_j}, y_{n_j} - y \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Khi đó, theo giả thiết $\{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset [0, \frac{1}{L}]$, (3.8), $x_{n_j} \rightharpoonup \bar{x}$ khi $j \rightarrow \infty$ và tính liên tục yếu của f , ta có $f(\bar{x}, y) \geq 0$, $\forall y \in C$. Vậy $\bar{x} \in EP(f)$.

Bước 3

Chứng minh các dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{t_n\}$ cùng hội tụ yếu tới x^ , trong đó*

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F(S) \cap EP(f)}(x_n).$$

Ở bước 1 và 2, ta đã chỉ ra được rằng mỗi điểm tụ yếu $\bar{x}$ của dãy $\{x_n\}$ đều thỏa mãn $\bar{x} \in F(S) \cap EP(f)$. Ta sẽ chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $\bar{x}$. Bây giờ, giả sử $\{x_{k_n}\}$ là một dãy con khác $\{x_{n_j}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{k_n} \rightharpoonup \tilde{x}$ khi $n \rightarrow \infty$, ta nhận được

$$\tilde{x} \in F(S) \cap EP(f),$$

trong đó S được định nghĩa bởi (3.11). Ta cần chứng tỏ $\tilde{x} = \bar{x}$. Thật vậy, nếu $\tilde{x} \neq \bar{x}$, sử dụng bổ đề (1.1) và (3.7), ta có

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - \bar{x}\| \\ &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - \tilde{x}\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{x}\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{k_n} - \tilde{x}\| \\ &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{k_n} - \bar{x}\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = c. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn. Suy ra $\tilde{x} = \bar{x}$. Vậy

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \in F(S) \cap EP(f) \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Kết hợp điều này với (3.8) và (3.9) suy ra $y_n \rightharpoonup \bar{x}, t_n \rightharpoonup \bar{x}$ khi $n \rightarrow \infty$.

Đặt

$$z_n = P_{F(S) \cap EP(f)}(x_n).$$

Khi đó, vì $\bar{x} \in F(S) \cap EP(f)$ nên theo (1.1), ta có

$$\langle \bar{x} - z_n, z_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Từ (3.6) suy ra

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\| \leq \|x_n - \bar{x}\|.$$

Kết hợp điều này với bổ đề (1.8), ta thu được dãy $\{z_n = P_{F(S) \cap EP(f)}(x_n)\}$ hội tụ mạnh tới $\bar{z} \in F(S) \cap EP(f)$. Do đó

$$\langle \bar{x} - \bar{z}, \bar{z} - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Vậy $\bar{x} = \bar{z}$, tức là $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F(S) \cap EP(f)}(x_n)$.

Như vậy, trong mỗi vòng lặp, ta chỉ phải giải bài toán lồi mạnh bậc hai (3.2) với song hàm f giả đơn điệu, liên tục kiểu *Lipchitz* và tính toán điểm lặp tiếp theo bằng sơ đồ lặp của *Mann* (3.3). Từ đó, ta sẽ tìm được một phần tử chung của tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn và tập nghiệm của bài toán cân bằng (3.1).

3.2. Phương pháp tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ các ánh xạ không giãn

Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và hàm $F : C \rightarrow H$. Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Kí hiệu tập nghiệm của bài toán này là $VI(F, C)$. Giả sử $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle$. Khi đó, bài toán (3.1) trở thành:

$$\text{Tìm } x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap VI(F, C), \quad (3.13)$$

trong đó, hàm F và các ánh xạ không giãn $S_n : C \rightarrow C$ ($n = 1, 2, \dots$) thỏa mãn các điều kiện sau:

(B1) F liên tục L-Lipchitz trên C ;

(B2) F giả đơn điệu trên C ;

(B3) $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap VI(F, C) \neq \emptyset$;

(B4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sup \{\|S_{n+1}(x) - S_n(x)\| : x \in D\} < \infty$, trong đó D

là một tập con bị chặn bất kỳ của C .

Với các giả thiết trên, sau đây ta sẽ đưa ra một thuật toán mới tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn.

Thuật toán 3.2.

Bước 0. Cho $x_0 = u \in C$, các dãy α_n và λ_n thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} \{\alpha_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1), \\ \{\lambda_n\} \subset [a, b] \text{ với } a, b \in (0, \frac{1}{L}), \text{ trong đó } L := \max \{2c_1, 2c_2\}. \end{cases}$$

Bước 1. Giải bài toán

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n F(x_n)), \\ t_n = P_C(x_n - \lambda_n F(y_n)). \end{cases} \quad (3.14)$$

Bước 2. Tính $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n(t_n)$.

Bước 3. Gán $n := n + 1$ và quay trở lại bước 1.

Định lý sau đây sẽ chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

Định lý 3.2. Giả sử các giả thiết (B1)-(B4) được thỏa mãn và $\{\alpha_n\}$, $\{\lambda_n\}$ là hai dãy sao cho

$$\begin{cases} \{\alpha_n\} \subset [c, d] \subset (0, 1), \\ \{\lambda_n\} \subset [a, b] \text{ với } a, b \in (0, \frac{1}{L}). \end{cases}$$

Khi đó, các dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{t_n\}$ được sinh bởi

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n F(x_n)), \\ t_n = P_C(x_n - \lambda_n F(y_n)), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n(t_n), \end{cases}$$

cùng hội tụ yếu tới $x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap VI(F, C)$, trong đó

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap VI(F, C)}(x_n).$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} y_n &= \arg \min \left\{ \lambda_n f(x_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 : y \in C \right\} \\ &= \arg \min \left\{ \lambda_n \langle F(x_n), y - x_n \rangle + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 : y \in C \right\} \\ &= P_C(x_n - \lambda_n F(x_n)). \end{aligned}$$

Một cách tương tự, ta cũng có

$$t_n = P_C(x_n - \lambda_n F(y_n))$$

Khi đó, theo định lý (3.1), ta suy ra các dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{t_n\}$ cùng hội tụ tới $x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap VI(F, C)$.

Kết luận chương

Trong chương này, ta đã trình bày cách kết hợp giữa phương pháp dưới đạo hàm cho bài toán cân bằng với các kỹ thuật điểm bất động để giải bài toán tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của các ánh xạ không giãn. Tại mỗi bước lặp chính, ta chỉ phải giải các bài toán lời mạnh với giả thiết giả đơn điệu và tính liên tục kiểu Lipchitz của hàm giá. Tiếp theo đó, bằng cách sử dụng kỹ thuật đường tìm kiểu Armijo, phương pháp dưới đạo hàm và các kỹ thuật điểm bất động, các tính chất hội tụ được thiết lập mà không cần tới tính liên tục kiểu Lipchitz của song hàm.

Kết luận

Bài toán cân bằng là một bài toán khá tổng quát và có thể được tiếp cận theo nhiều hướng khác nhau. Luận văn này trình bày phương pháp dưới đạo hàm để tìm một phần tử chung của bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và một họ đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực. Nội dung chính đã được trình bày trong luận văn bao gồm:

1. Nhắc lại một số khái niệm và tính chất trong giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân, cực trị,...
2. Phát biểu bài toán cân bằng, ví dụ minh họa và tính chất tập nghiệm của bài toán cân bằng.
3. Định nghĩa ánh xạ không giãn, ví dụ và một số tính chất của ánh xạ không giãn.
4. Trình bày phương pháp dưới đạo hàm tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn với định lý hội tụ mạnh.
5. Trình bày sự hội tụ yếu của thuật toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn.
6. Trình bày sự hội tụ yếu của thuật toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn.

Tài liệu tham khảo

- [1] R. P. Agrwal, D. O'Regen, D. R. Sabu (2000), *Fixed Point Theory for Lipschitzian - type Mappings with Application*, Springer, Vol. 6, Doi: 10.1007/978-0-387-75818-3.
- [2] P. N. Anh, L. B. Long, N. V. Quy and L. Q. Thuy (2012), *Weak Convergence Theorems for an Infinite Family of Nonexpansive Mappings and Equilibrium Problems*, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications, Vol. 7, PP. 113-127.
- [3] V. I. Konnov (2000), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer - Verlag, Berlin.
- [4] L. D. Muu (1998), *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [5] H. Tuy (1997), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.
- [6] R. Wangkeeree (2008), *An Extragradient Approximation Method for Equilibrium Problems and Fixed Points Problems of Countable Families of Nonexpansive Mapping*, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2008, Art. ID 134148, 17 PP, Doi: 10.1155/2008/134148.