ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Vân Anh

PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ PHI TUYẾN VỚI TOÁN TỬ m - ACCRETIVE TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

Thái Nguyên - 2013

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Phương trình với toán tử m-accretive **3**

1.1 Toán tử m-accretive 3

1.1.1 Toán tử accretive 3

1.1.2 Phương trình với toán tử accretive 7

1.1.3 Toán tử m-accretive 9

1.1.4 Phương trình với toán tử m-accretive 9

1.2 Bài toán đặt không chỉnh 13

1.2.1 Khái niệm về bài toán đặt không chỉnh 13

1.2.2 Ví dụ về bài toán đặt không chỉnh 15

2 Nghiệm xấp xỉ của phương trình với toán tử m-accretive **17**

2.1 Hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive với tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc . . 17

2.1.1 Sự hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh 17

2.1.2 Tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh 22

2.2 Hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive không cần tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc 24

2.2.1 Không gian Banach trơn và giới hạn Banach . . . 24

2.2.2 Sự hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh 27

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Kết luận **33**

Tài liệu tham khảo **34**

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của Cô trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Thị Vân Anh

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Bảng ký hiệu

X	Không gian Banach thực
X^*	Không gian liên hợp của X
ϕ	Tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	Với mọi x
$\exists x$	Tồn tại x
$\inf_{x \in X} F(x)$	Infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$
I	Ánh xạ đơn vị
J	Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J
A^*	Toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	Miền xác định của toán tử A
$x^k \to x$	Dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	Dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Mở đầu

Phương trình toán tử với toán tử accretive có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc nghiên cứu phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không gian L_p hay không gian Sobolev W_p^m.

Trong đề tài luận văn, chúng tôi nghiên cứu phương trình toán tử accretive dạng

$$A(x) = f, \tag{0.1}$$

ở đây A là một toán tử từ không gian Banach phản xạ thực X vào X, f là phần tử của X. Nếu không có thêm điều kiện cho toán tử A, chẳng hạn tính accretive đều hoặc accretive mạnh, thì phương trình toán tử (0.1) nói chung là một bài toán đặt không chỉnh, theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Để giải loại bài toán này, ta cần sử dụng các phương pháp giải ổn định. Trong [1] Alber và Ryazansteva đã nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov

$$A(x) + \alpha(x - x^+) = f_\delta, \tag{0.2}$$

để hiệu chỉnh phương trình toán tử (0.1), ở đây f_δ là xấp xỉ của f thỏa mãn $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, $\delta \to 0$, $x^+ \in X$ là một phần tử cho trước tùy ý, α là một tham số dương. Với điều kiện liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của không gian X, họ đã chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm x_α^δ của bài toán (0.2), và nghiệm này hội tụ mạnh đến nghiệm x^* của bài toán (0.1) khi α, $\delta/\alpha \to 0$.

Không cần đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

tắc J, tốc độ hội tụ của dãy nghiệm x_α^δ của phương trình hiệu chỉnh (0.2) được đánh giá với điều kiện (xem [5])

$$\|A(x)-A(y_*)-QA^{'}(y_*)^*J(x-y_*)\| \leq \tau\|A(x)-A(y_*)\|, \ \forall y \in X, \ (0.3)$$

ở đây τ là một hằng số dương, Q là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X^* và điều kiện trơn của nghiệm

$$x^+ - y_* = A^{'}(y_*)v, \tag{0.4}$$

với v là phần tử thuộc X, A' là đạo hàm Freéchet của A.

Chú ý rằng, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J có tính chất liên tục yếu theo dãy chỉ có ở một lớp không gian Banach rất hẹp (không gian l_p), đồng thời điều kiện trơn (0.4) của nghiệm cũng khó thực hiện được ở các bài toán thực tế. Để khắc phục những hạn chế này, năm 2012, Giáo sư Nguyễn Bường [3] đã đưa ra một phương pháp hiệu chỉnh mới cho phương trình (0.1). Ông đã chứng minh sự hội tụ mạnh của nghiệm hiệu chỉnh không cần tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J và đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh không cần các điều kiện (0.3) và (0.4).

Mục đích của đề tài luận văn là đọc hiểu, trình bày lại và làm chi tiết hơn kết quả trong bài báo [5], [3] và [4] về hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive (0.1) trong các trường hợp ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J có tính chất liên tục yếu theo dãy và J không cần tính chất liên tục yếu theo dãy.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về toán tử accretive, m-accretive, phương trình toán tử accretive, m-accretive, và bài toán đặt không chỉnh. Trong chương 2 chúng tôi trình bày một số kết quả mới của Nguyễn Bường và các cộng sự về hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive trong không gian Banach.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Chương 1

Phương trình với toán tử m-accretive

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về toán tử accretive, m-accretive, phương trình với toán tử m-accretive và bài toán đặt không chỉnh. Kiến thức của chương này được tập hợp từ tài liệu [1] và [2].

1.1 Toán tử m-accretive

1.1.1 Toán tử accretive

Cho X là một không gian Banach phản xạ thực, X^* là không gian liên hợp của X, X và X^* là các không gian lồi chặt. Ký hiệu 2^X là một họ các tập con khác rỗng của X. Cho $A : X \to X$ là một ánh xạ với miền xác định $D(A)$, gọi $N(A)$, $F(A)$ lần lượt là tập hợp các không điểm và điểm bất động của A, nghĩa là

$$N(A) = \{x \in D(A) : A(x) = 0\},$$
$$F(A) = \{x \in D(A) : A(x) = x\}.$$

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Định nghĩa 1.1. Ánh xạ $J : X \to 2^{X^*}$ (nói chung đa trị) được định nghĩa bởi:

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\| \|x\| ; \|x^*\| = \|x\|\},$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian X.

Tính đơn trị của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được cho trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử X là một không gian Banach. Khi đó,*

(i) $J(x)$ là tập lồi, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$, với mọi $\lambda > 0$;

(ii) $J(x)$ là ánh xạ đơn trị khi X^* là không gian lồi chặt. Trong trường hợp X là không gian Hilbert thì $J = I$-toán tử đơn vị trong X.

Không làm mất tính tổng quát, ta ký hiệu ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị bởi J. Trong luận văn này, chúng tôi xét ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J là đơn trị.

Định nghĩa 1.3. Ánh xạ đối ngẫu $J : X \to 2^{X^*}$ được gọi là liên tục yếu theo dãy (weak to weak continuous) nếu với bất kỳ dãy $x_n \subset D(J)$ sao cho $x_n \rightharpoonup x_0$ thì $Jx_n \rightharpoonup Jx_0$.

Định nghĩa 1.4. Toán tử $A : D(A) = X \to X$ được gọi là

(i) toán tử accretive nếu

$$\langle J(x-y), A(x) - A(y)\rangle \geq 0, \ \forall x, y \in D(A);$$

(ii) toán tử accretive chặt nếu dấu bằng ở bất đẳng thức trên chỉ đạt được khi $x = y$;

(iii) toán tử accretive đều nếu tồn tại một hàm tăng $\gamma(t)$, $t \geq 0$, $\gamma(0) = 0$ sao cho

$$\langle J(x-y), A(x) - A(y)\rangle \geq \gamma(\|x-y\|), \ \forall x, y \in D(A);$$

(iv) toán tử accretive mạnh nếu $\gamma(t) = ct^2$, $c \geq 0$;

(v) h-liên tục (hemicontinuous) tại điểm $x_0 \in D(A)$ nếu dãy $\{A(x_0 + t_n x)\}$ hội tụ yếu tới Ax_0 với mọi phần tử x sao cho $x_0 + t_n x \in D(A)$, $0 \leq t_n \leq t(x_0)$ và $t_n \to 0$, $n \to \infty$.

(vi) toán tử accretive A được gọi là bức (coercive) nếu

$$\langle J(x), A(x)\rangle \geq c\left(\|x\|\right).\|x\|, \ \forall x \in D\left(A\right);$$

trong đó $c(t) \to +\infty$ khi $t \to +\infty$.

Khái niệm toán tử accretive còn được mô tả dựa trên đồ thị $Gr(A)$ trong không gian tích $X \times X$.

Định nghĩa 1.5. Toán tử $A : X \to X$ được gọi là

(i) toán tử accretive nếu

$$\langle J\left(x_1 - x_2\right), y_1 - y_2\rangle \geq 0,$$

với mọi x_1, $x_2 \in D\left(A\right)$, $y_1 \in A(x_1)$, $y_2 \in A(x_2)$;

(ii) accretive cực đại nếu nó là toán tử accretive và đồ thị của nó không thực sự chứa trong đồ thị của bất kì một toán tử accretive nào khác.

Mệnh đề 1.6. *Cho $A : X \to X$ là một toán tử. Khi đó các khẳng định sau là tương đương*

(i) *A là toán tử accretive.*

(ii) *Với mọi $\lambda > 0$ và $\forall x_1$, $x_2 \in D\left(A\right)$*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\|. \tag{1.1}$$

Chứng minh.

$i) \Rightarrow ii)$ Giả sử A là toán tử accretive, khi đó với mọi $\lambda > 0$, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$ ta có

$$\begin{aligned}\langle J\left(x_1 - x_2\right), x_1 - x_2 + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\rangle &= \langle J\left(x_1 - x_2\right), x_1 - x_2\rangle \\ &\quad + \lambda\left(J\left(x_1 - x_2\right), A(x_1) - A(x_2)\right) \\ &\geq \|x_1 - x_2\|^2\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức này và tính chất của J ta suy ra (1.1).

$ii) \Rightarrow i)$ Vì tính lồi của hàm $\|x\|^2$, ta có thể viết

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2 + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\|^2 \\ - 2\lambda\left\langle J\left(x_1 - x_2 + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\right), A(x_1) - A(x_2)\right\rangle \\ \geq 0.\end{aligned}$$

Từ (1.1) và bất đẳng thức cuối cùng suy ra

$$\left\langle J\left(x_1 - x_2 + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\right), A(x_1) - A(x_2)\right\rangle \geq 0.$$

Cho $\lambda \to 0$ và sử dụng tính h-liên tục của J ta suy ra A là toán tử accretive. □

Định nghĩa 1.7. Toán tử $A : X \to X^*$ được gọi là toán tử đơn điệu (monotone) nếu

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0, \ \forall x, y \in D(A);$$

Mệnh đề 1.8. *Cho $A : X \to X$ là toán tử từ không gian Hilbert X vào X Khi đó các khẳng định sau là tương đương*

(i) A là toán tử đơn điệu.

(ii) A là toán tử accretive.

Chứng minh.

$i) \Rightarrow ii)$ Với mọi $\lambda > 0$, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$, ta có

$$\begin{aligned}\|(x_1 - x_2) + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 \\ + 2\lambda\left\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\right\rangle \\ + \lambda^2\|A(x_1) - A(x_2)\|^2.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Vì A là toán tử đơn điệu nên $\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq 0$. Do đó từ (1.2) suy ra:

$$\|(x_1 - x_2) + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2, \ \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

Theo Mệnh đề 1.6 suy ra A là toán tử accretive.

$ii) \Rightarrow i)$ Vì A là toán tử accretive và theo (1.2) suy ra

$$2\lambda \langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\rangle + \lambda^2 \|A(x_1) - A(x_2)\|^2 \geq 0. \tag{1.3}$$

Chia cả hai vế của (1.3) cho λ rồi cho $\lambda \to 0^+$ ta được

$$\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq 0, \ \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

Vậy A là toán tử đơn điệu. □

Định nghĩa 1.9. Toán tử $A : X \to X$ được gọi là toán tử không giãn nếu

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in D(A)$$

Bổ đề 1.10. *Nếu $T : X \to X$ là toán tử không giãn thì $A = I - T$ là toán tử accretive.*

Chứng minh. Với mọi $x, y \in D(A)$ ta có

$$\begin{aligned}\langle J(x-y), A(x) - A(y)\rangle &= -\langle J(x-y), T(x) - T(y)\rangle + \langle J(x-y), x - y\rangle \\ &\geq \|x-y\|^2 - \|T(x) - T(y)\| \, \|x - y\| \\ &\geq \|x-y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Định lý 1.11. *Cho $A : X \to X$ là toán tử accretive, h-liên tục với $D(A) = X$. Khi đó A là toán tử accretive cực đại.*

1.1.2 Phương trình với toán tử accretive

Xét phương trình toán tử

$$A(x) = f \tag{1.4}$$

với $A : X \to X$ là một toán tử cho trước, $f \in X$.

Bổ đề 1.12. *Cho $A : X \to X$ là một toán tử accretive cực đại và cho $x_n \in D(A)$, $y_n \in Ax_n$. Giả sử rằng $x_n \to x$, $y_n \rightharpoonup y$ và ánh xạ đối ngẫu J là liên tục, hoặc $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \to y$ và J là liên tục yếu theo dãy. Khi đó $x \in D(A)$ và $y \in Ax$.*

Chứng minh.
Từ Định nghĩa 1.5, với A là accretive ta có bất đẳng thức

$$\langle J(x_n - u), y_n - v\rangle \geq 0, \ \forall u \in D(A), \ \forall v \in A(u).$$

Cho $n \to \infty$, với giả thiết của bổ đề, ta nhận được

$$\langle J(x - u), y - v\rangle \geq 0, \ \forall u \in D(A), \ \forall v \in A(u).$$

Do A là toán tử accretive cực đại nên suy ra được đồng thời $x \in D(A)$ và $y \in A(x)$. □

Định nghĩa 1.13. Không gian Banach X được gọi là có tính xấp xỉ nếu toán tử đơn vị trong X có thể xấp xỉ đều trên một tập con compact của X bởi một toán tử tuyến tính có hạng hữu hạn.

Định lý 1.14. *Cho X và X^* là các không gian Banach lồi chặt, X có tính xấp xỉ, $A : X \to X$ là toán tử accretive với $D(A) = X$, ánh xạ đối ngẫu J là liên tục yếu theo dãy. Nếu tồn tại số $r > 0$ sao cho với mọi x mà $\|x\| = r$ có một phần tử $y = A(x)$ sao cho $\langle J(x), A(x) - f\rangle \geq 0$ thì phương trình (1.4) có ít nhất một nghiệm $\overline{x}$ thỏa mãn $\|\overline{x}\| \leq r$.*

Chú ý 1.15.

- Tất cả các điều kiện nêu trong Định lý 1.14 đều thỏa mãn trong không gian Banach $X = l^p, p > 1$.

- Nếu toán tử A trong Định lý 1.14 là accretive chặt thì phương trình toán tử (1.4) có nghiệm duy nhất.

1.1.3 Toán tử m-accretive

Định nghĩa 1.16. Toán tử accretive $A : X \to X$ được gọi là m-accretive nếu $R(A + \alpha I) = A$ với mọi $\alpha > 0$, I là toán tử đơn vị trong X.

Bổ đề 1.17. *Nếu toán tử A là m-accretive thì nó là toán tử accretive cực đại.*

Chứng minh.
Theo Định nghĩa 1.16 ta có $R(A+I) = X$. Vì $A+I$ là toán tử accretive mạnh, nên tồn tại duy nhất một cặp $(x, y) \in GrA$ mà $y + x = f$ với mỗi $f \in X$. Theo Bổ đề Zorn thì $\overline{A}$ là một toán tử accretive cực đại suy rộng của toán tử A. Do đó tồn tại cặp (x, y) thuộc đồ thị của $\overline{A}$ nhưng không thuộc đồ thị của A. Điều này mâu thuẫn với tính duy nhất nghiệm của phương trình $\overline{A}(x) + x = f$. Vậy $\overline{A} = A$. □

1.1.4 Phương trình với toán tử m-accretive

Xét phương trình toán tử

$$A(x) = f$$

với $A : X \to X$ là một toán tử cho trước, $f \in X$.

Định nghĩa 1.18. Toán tử $T : X \to Y$ được gọi là liên tục Lipschitz nếu tồn tại một hằng số $L > 0$ sao cho

$$||T(x) - T(y)|| \leq L\,||x - y||$$

với mọi $x, y \in X$.

Nếu hằng số Lipschitz $L < 1$ thì T là toán tử co.

Định lý 1.19. *Cho $A : X \to X$ là một toán tử bức và m-accretive. Khi đó: $\overline{R(A)} = X$.*

Chứng minh.

Từ định nghĩa về tính m-accretive của A, dẫn tới với $y_1, y_2 \in X$ tồn tại x_1 và $x_2 \in X$ sao cho

$$y_1 \in (A + \alpha I)x_1 \text{ và } y_2 \in (A + \alpha I)x_2.$$

Áp dụng Mệnh đề 1.6 cho A, chúng ta có thể viết với bất kỳ $\eta > 0$

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2 + \eta(y_1 - y_2)\| \|(1 + \alpha\mu)(x_1 - x_2) + \eta(y_1 - \alpha x_1) - (y_2 - \alpha x_2)\| \\ \geq (1 + \alpha\eta) \|x_1 - x_2\| .\end{aligned}$$

Do đó ánh xạ

$$C = (I + \eta(A + \alpha I))^{-1}$$

thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hằng số Lipschitz $L = (1 + \alpha\eta)^{-1} < 1$. Vì thế toán tử C là co. Suy ra tồn tại điểm bất động x_α là nghiệm của phương trình

$$x = (I + \eta(A + \alpha I))^{-1}x.$$

Kéo theo $y_\alpha = -\alpha x \in A(x_\alpha)$.

Vì A là toán tử accretive, nên với $\beta > \alpha$

$$\begin{aligned}\alpha \|x_\alpha - x_\beta\| \geq \alpha \langle J(x_\alpha - x_\beta), x_\alpha - x_\beta\rangle \\ - \langle J(x_\alpha - x_\beta), \alpha x_\alpha - \beta x_\beta\rangle .\end{aligned}$$

Hay

$$(\beta - \alpha) \langle J(x_\alpha - x_\beta), x_\beta\rangle \geq (\beta - \alpha) \|x_\alpha - x_\beta\| \|x_\beta\| .$$

Từ đây ta nhận được

$$\alpha \|x_\alpha - x_\beta\| \leq (\beta - \alpha) \|x_\beta\| .$$

Suy ra $\alpha \|x_\alpha\| \leq \beta \|x_\beta\|$. Do đó, dãy $\{\alpha x_\alpha\}$ bị chặn khi $\alpha \to 0$. Khi đó

$$\langle Jx_\alpha, y_\alpha\rangle = -\alpha\|x_\alpha\|^2$$

và A là toán tử bức, kéo theo sự bị chặn của dãy $\{x_\alpha\}$. Vậy nên, $\alpha x_\alpha \to \theta_X$ khi $\alpha \to 0$ với $\theta_X \in \overline{R(A)}$, ở đây θ_X ký hiệu phần tử không trong X. Bây giờ, chúng ta lựa chọn một phần tử tùy ý $f \in X$ và áp dụng những chứng minh trên biến đổi toán tử $A - f$. Cuối cùng, ta thu được $\theta_X \in \overline{R(A)} - f$, do đó $f \in \overline{R(A)}$ với mọi $f \in X$. Định lý được chứng minh. □

Định nghĩa 1.20. Toán tử $T : X \to 2^{X^*}$ được gọi là bị chặn địa phương tại một điểm $x \in X$ nếu tồn tại một lân cận $M = M(x)$ của x sao cho tập hợp

$$T(M) = \{y | y \in T(x), x \in M \cap D(T)\}$$

bị chặn trong X^*.

Định lý 1.21. *Nếu toán tử $A : X \to X$ là m-accretive, ánh xạ đối ngẫu J là liên tục yếu theo dãy, A^{-1} là bị chặn địa phương, thì: $R(A) = X$.*

Chứng minh.
Ta sẽ chứng minh $R(A)$ là tập hợp vừa đóng và vừa mở và khi đó sẽ suy ra được điều cần chứng minh.

Cho $f_n \in R(A)$ và $f_n \to f$, $n = 1, 2, ...$ Khi đó $x_n \in A^{-1} f_n$ là bị chặn trong X, tức là tồn tại $c > 0$ sao cho: $\|x_n\| \leq c$ với mọi $n > 0$. Suy ra $x_n \rightharpoonup \overline{x} \in X$. Theo Bổ đề **??** toán tử A là accretive cực đại, khi đó $f \in A\overline{x}$. Như vậy, tập hợp $R(A)$ là tập đóng.

Tiếp theo, ta chứng minh $R(A)$ là tập mở. Cho $(x, f) \in GrA$. Vì A^{-1} là bị chặn địa phương, nên tồn tại $r > 0$ sao cho tập hợp $\{x | u \in \mathrm{Ax}\}$ là bị chặn trong X nếu $\|u - f\| \leq r$. Lấy $g \in B\left(f, \frac{r}{2}\right)$ và rõ ràng $g \in R(A)$. Vì A là m-accretive, phương trình:

$$A(y) + \alpha(y - x) = g$$

có một nghiệm x_α, tức là tồn tại $g_\alpha \in A(x_\alpha)$ thỏa mãn

$$g_\alpha + \alpha(x_\alpha - x) = g. \tag{1.5}$$

Do tính accretive của A suy ra

$$\langle J(x_\alpha - x), g - \alpha(x_\alpha - x) - f\rangle \geq 0.$$

Từ đó ta có

$$\alpha \|x_\alpha - x\| \leq \|g - f\| \leq \frac{r}{2}.$$

Theo (1.5) có thể suy ra

$$\|g_\alpha - g\| = \alpha \|x_\alpha - x\| \leq \frac{r}{2}. \tag{1.6}$$

Từ đó ta có được

$$\|g_\alpha - f\| \leq \|g_\alpha - g\| + \|g_\alpha - f\| \leq r.$$

Tính bị chặn của dãy $\{x_\alpha\}$ (với $\alpha > 0$ đủ nhỏ) suy ra từ sự bị chặn địa phương của A^{-1}. Khi đó $x_\alpha \rightharpoonup \overline{x} \in X$ với $\alpha \to 0$. Cuối cùng, theo (1.6), chúng ta suy ra $g_\alpha \to g$. Do đó $g \in R(A)$ (xem Bổ đề 1.12). □

Định lý 1.22. *Với các điều kiện ở Định lý 1.21, nếu ánh xạ đối ngẫu J là liên tục yếu theo dãy, thì $R(A) = X$.*

Chứng minh.
Toán tử bức A có nghịch đảo bị chặn. Vì thế, điều cần chứng minh được suy ra từ Định lý 1.21. □

Định lý 1.23. *Giả sử toán tử $A : X \to X$ là m-accretive và ánh xạ đối ngẫu J thỏa mãn điều kiện Lipschitz-Holder:*

$$\|J(x) - J(y)\|_* \leq c\|x - y\|^\gamma,\ c > 0,\ 0 < y \leq 1. \tag{1.7}$$

Khi đó $\overline{R(A)}$ là tập lồi trong X.

Chứng minh.
Giả sử $x_\alpha \in D(A)$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$A(x) + \alpha x = x^0,\ x^0 \in X,\ \alpha > 0.$$

Khi đó có một phần tử $y_\alpha \in A(x_\alpha)$ sao cho $y_\alpha + \alpha x_\alpha = x^0$ hoặc

$$J((y_\alpha) - x^0) = -\alpha J x_\alpha \tag{1.8}$$

Lấy $(u, v) \in GrA$. Sử dụng (1.7), ta có thể viết

$$\begin{aligned}
\left\|y_\alpha - x^0\right\|^2 &= \left\langle J(y_\alpha - x^0), y_\alpha - x^0 \right\rangle \\
&= \left\langle J(y_\alpha - x^0), y_\alpha - v \right\rangle + \left\langle J(y_\alpha - x^0), v - x^0 \right\rangle \\
&= \alpha \left\langle J(x_\alpha), v - y_\alpha \right\rangle + \left\langle J(y_\alpha - x^0), v - x^0 \right\rangle \\
&= \alpha \left\langle J(x_\alpha - u), v - y_\alpha \right\rangle + \alpha \left\langle J(x_\alpha) - J(x_\alpha - u), v - y_\alpha \right\rangle \\
&\quad + \left\langle J(y_\alpha - x^0), v - x^0 \right\rangle .
\end{aligned}$$

Thay vào (1.7) và sử dụng tính chất accretive của toán tử A ta có

$$\left\|y_\alpha - x^0\right\|^2 \leq c\alpha \|u\|^\gamma \|v - y_\alpha\| + \left\langle J(y_\alpha - x^0), v - x^0 \right\rangle , \tag{1.9}$$

hay

$$\left\|y_\alpha - x^0\right\|^2 \leq c\alpha \|u\|^\gamma \|v - y_\alpha\| + \left\|y_\alpha - x^0\right\| \left\|v - x^0\right\| .$$

Từ đây suy ra dãy $\{y_\alpha\}$ là bị chặn, và dãy $\{J(y_\alpha - x^0)\}$ cũng là dãy bị chặn. Giả sử $J(y_\alpha - x^0) \rightharpoonup z \in X^*$ khi $\alpha \to 0$. Từ (1.9) ta có

$$\limsup_{\alpha \to \infty} \left\|y_\alpha - x^0\right\| \leq \left\langle z, v - x^0 \right\rangle , \ \forall v \in R(A).$$

□

Hệ quả 1.24. *Nếu toán tử A^{-1} là m-accretive và ánh xạ đối ngẫu J thỏa mãn điều kiện Lipschitz-Holder thì tập $\overline{D(A)}$ là tập lồi.*

1.2 Bài toán đặt không chỉnh

1.2.1 Khái niệm về bài toán đặt không chỉnh

Chúng ta xét một bài toán ở dạng phương trình toán tử (1.4) với $A : X \to Y$ là một toán tử từ không gian Banach X vào không gian Banach Y, f là phần tử thuộc Y. Sau đây là một định nghĩa của Hadamard.

Định nghĩa 1.25. Cho A là một toán tử từ không gian X vào không gian Y. Bài toán (1.4) được gọi là bài toán đặt chỉnh *(well-posed)* nếu

(i) phương trình $A(x) = f$ có nghiệm với mọi $f \in Y$;

(ii) nghiệm này duy nhất;

(iii) nghiệm phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.

Nếu ít nhất một trong các điều kiện trên không thỏa mãn thì bài toán (1.4) được gọi là bài toán đặt không chỉnh *(ill-posed)*.

Đối với các bài toán phi tuyến thì điều kiện thứ hai hầu như không thỏa mãn. Do vậy, hầu hết các bài toán phi tuyến đều là bài toán đặt không chỉnh. Hơn nữa điều kiện cuối cùng cũng khó thực hiện được, vì vậy ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 1.26. Cho A là một toán tử từ không gian X vào không gian Y. Bài toán (1.4) được gọi là bài toán đặt không chỉnh nếu nghiệm của bài toán này không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.

Bài toán tìm nghiệm x phụ thuộc vào dữ kiện f, nghĩa là $x = R(f)$, được gọi là ổn định trên cặp không gian (X, Y) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho từ $\rho_Y(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ cho ta $\rho_Y(x_1, x_2) \leq \varepsilon$, ở đây $x_i = R(f_i),\ x_i \in X,\ f_i \in Y,\ i = 1, 2$.

Một bài toán có thể đặt chỉnh trên cặp không gian này nhưng lại đặt không chỉnh trên cặp không gian khác.

Trong nhiều ứng dụng thì vế phải của (1.4) thường được cho bởi đo đạc, nghĩa là thay cho giá trị chính xác f, ta chỉ biết xấp xỉ f_δ của nó thỏa mãn $\|f_\delta - f\| \leq \delta$. Giả sử x_δ là nghiệm của (1.4) với f thay bởi f_δ (giả thiết rằng nghiệm tồn tại). Khi $\delta \to 0$ thì $f_\delta \to f$ nhưng với bài toán đặt không chỉnh thì x_δ nói chung không hội tụ đến x.

1.2.2 Ví dụ về bài toán đặt không chỉnh

Xét phương trình toán tử (1.4) với A là một ma trận vuông cấp $M = 6$ được xác định bởi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1.0001 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$$

và vế phải

$$f = \begin{pmatrix} 6 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$$

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$$

Nếu

$$A = A_{h1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1.0001 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

và vế phải

$$f = f_{\delta 1} = \begin{pmatrix} 6 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 & 6 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$$

thì phương trình có vô số nghiệm.

Nếu

$$A = A_{h2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1.0001 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

và vế phải

$$f = f_{\delta 2} = \begin{pmatrix} 6 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 & 6.0001 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$$

thì phương trình vô nghiệm.

Từ ví dụ trên ta có thể thấy, một thay đổi nhỏ trong dữ kiện ban đầu đã dẫn đến thay đổi lớn của nghiệm. Vậy ví dụ trên là một bài toán đặt không chỉnh.

Vì tính không duy nhất của nghiệm của bài toán (1.4) nên người ta thường có một tiêu chuẩn cho sự lựa chọn của nghiệm. Ta sẽ sử dụng nghiệm x_0 có x_*-chuẩn nhỏ nhất, nghĩa là ta tìm nghiệm thỏa mãn

$$A(x_0) = f,$$

và

$$\|x_0 - x_*\| = \min\{\|x - x_*\| : A(x) = f\}.$$

Bằng cách chọn x_* ta có thể có được nghiệm mà ta muốn xấp xỉ.

Chương 2

Nghiệm xấp xỉ của phương trình với toán tử m-accretive

2.1 Hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive với tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc

2.1.1 Sự hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh

Trong mục này chúng tôi trình bày phương pháp hiệu chỉnh cho phương trình toán tử

$$A(x) = f \tag{2.1}$$

ở đây $A : X \to X$ là toán tử m-accretive có miền xác định $D(A) = X$, trong đó X là không gian Banach có tính chất xấp xỉ, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : X \to 2^{X^*}$ là liên tục yếu theo dãy trên X.

Chú ý rằng, nếu toán tử A không có tính chất accretive đều hoặc accretive mạnh thì bài toán (2.1) nói chung là bài toán đặt không chỉnh. Giả thiết rằng tập nghiệm S của bài toán (2.1) khác rỗng, khi đó S là một tập đóng và lồi trong X.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Giả sử cả toán tử A và vế phải f của phương trình (2.1) đều được cho xấp xỉ bởi (A_h, f_δ) thỏa mãn:

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta, \tag{2.2}$$

và

$$\|A(x) - A_h(x)\| \leq g\left(\|x\|\right) h, \ \forall x \in X, \tag{2.3}$$

ở đây $A_h : X \to X$ là toán tử m-accretive với mọi $h > 0$ và $g(t)$ là một hàm liên tục không âm với mọi $t \geq 0$.

Xét phương trình hiệu chỉnh

$$A_h(x) + \alpha x = f_\delta. \tag{2.4}$$

Sự hội tụ của nghiệm của bài toán (2.4) đến nghiệm của bài toán (2.1) với toán tử m-accretive được cho bởi định lý sau.

Định lý 2.1. *Giả sử X là một không gian Banach phản xạ thực có tính xấp xỉ, X^* là không gian liên hợp của X, X và X^* là các không gian lồi chặt, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : X \to 2^{X^*}$ là liên tục yếu theo dãy trên X, A, A_h là các toán tử m-accretive, h-liên tục với $D(A) = D(A_h) = X$ và f, $f_\delta \in X$ thỏa mãn các điều kiện (2.2), (2.3). Khi đó*

(i) Bài toán (2.4) có nghiệm duy nhất với mỗi $h > 0$, $\delta > 0$ và $\alpha > 0$;

(ii) Nếu $\dfrac{\delta + h}{\alpha} \to 0$ và $\alpha \to 0$ thì nghiệm x_α^τ, $\tau = (h, \delta)$ của phương trình hiệu chỉnh (2.4) hội tụ mạnh đến nghiệm $\overline{x}_0 \in S$ với $\overline{x}_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2.1) thỏa mãn

$$\langle J(\overline{x}_0 - x_0), \overline{x}_0 \rangle \leq 0, \ \forall x_0 \in S. \tag{2.5}$$

Chứng minh.

(i) Vì A_h là toán tử accretive, nên

$$\begin{aligned}\langle J(x), A_h(x)+\alpha x\rangle &= \langle J(x), A_h(x)-A_h(\theta_X)+A_h(\theta_X)+\alpha x\rangle \\ &= \langle J(x-\theta_X), A_h(x)-A_h(\theta_X)\rangle \\ &\quad + \langle J(x), A_h(\theta_X)\rangle + \langle J(x), \alpha x\rangle \\ &\geq -\|x\|\,\|A_h(\theta_X)\| + \alpha\|x\|^2.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Từ (2.6) suy ra toán tử $T = A_h + \alpha I$ cũng là toán tử accretive và có tính chất bức. Khi đó theo Định lý 1.14 phương trình (2.4) có một nghiệm x_α^τ, $\tau = (\delta, h)$ với mọi $\alpha > 0$. Mặt khác cũng từ (2.6) ta suy ra $A_h + \alpha I$ là toán tử accretive mạnh, nên theo Chú ý 1.15 suy ra nghiệm x_α^τ là duy nhất và

$$A_h(x_\alpha^\tau) + \alpha x_\alpha^\tau = f_\delta. \tag{2.7}$$

(ii) Ta thấy phần tử $\overline{x}_0$ thỏa mãn (2.5) là duy nhất. Thật vậy, giả sử tồn tại $\overline{x}_{00}$, $\overline{x}_0 \neq \overline{x}_{00}$ và

$$\langle J(\overline{x}_{00} - x_0), \overline{x}_{00}\rangle \leq 0, \ \forall x_0 \in S_0. \tag{2.8}$$

Trong (2.5) ta chọn $\overline{x}_{00} = x_0$ ta được

$$\langle J(\overline{x}_0 - \overline{x}_{00}), \overline{x}_0\rangle \leq 0. \tag{2.9}$$

Trong (2.8) ta chọn $\overline{x}_0 = x_0$ ta được

$$\langle J(\overline{x}_{00} - \overline{x}_0), \overline{x}_{00}\rangle \leq 0. \tag{2.10}$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức (2.9) và (2.10) ta được

$$0 \geq \langle J\left(\overline{x}_0 - \overline{x}_{00}\right), \overline{x}_0 - \overline{x}_{00}\rangle = \|\overline{x}_0 - \overline{x}_{00}\|^2 \geq 0.$$

Hay $\overline{x}_0 = \overline{x}_{00}$.

Vậy $\overline{x}_0$ thỏa mãn (2.5) là duy nhất.

Lấy tùy ý $x_0 \in S$. Từ (2.1) và (2.7) ta nhận được

$$\begin{aligned}\langle J(x_\alpha^\tau - x_0), A_h(x_\alpha^\tau) - A(x_0)\rangle + \alpha\langle J(x_\alpha^\tau - x_0), x_\alpha^\tau - x_0\rangle \\ = \langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), f_\delta - \alpha x_\alpha^\tau - f\rangle \\ + \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_\alpha^\tau - x_0\right\rangle \\ = \langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), f_\delta - f\rangle - \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_0\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Sử dụng tính chất accretive của A_h và (2.2), (2.3) ta nhận được

$$\begin{aligned}\langle J(x_\alpha^\tau - x_0)\ A_h(x_\alpha^\tau) - A(x_0)\rangle + \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_\alpha^\tau - x_0\right\rangle \\ = \left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), A_h(x_\alpha^\tau) - A_h(x_0)\right\rangle \\ + \left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), A_h(x_0) - A(x_0)\right\rangle \\ + \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_\alpha^\tau - x_0\right\rangle \\ \geq \alpha\|x_\alpha^\tau - x_0\|^2 - \|x_\alpha^\tau - x_0\| g\left(\|x_0\|\right) h,\end{aligned} \tag{2.12}$$

và

$$\begin{aligned}\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), f_\delta - f\right\rangle - \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_0\right\rangle \\ \leq \delta\left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\| + \alpha\left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\|\left\|x_0\right\|.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Kết hợp (2.11), (2.12) và (2.13) ta được

$$\begin{aligned}\alpha\|x_\alpha^\tau - x_0\|^2 - hg\left(\|x_0\|\right)\|x_\alpha^\tau - x_0\| \\ \leq \delta\left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\| + \alpha\left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\|\left\|x_0\right\|,\ \forall\alpha > 0.\end{aligned}$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức trên cho $\alpha\left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\|$ ta được

$$\|x_\alpha^\tau - x_0\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + \frac{h}{\alpha}g\left(\|x_0\|\right) + \|x_0\|,\ \forall\alpha > 0,$$

hay

$$\|x_\alpha^\tau\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + d\frac{h}{\alpha}g\left(\|x_0\|\right) + 2\|x_0\|. \tag{2.14}$$

Từ (2.14) ta suy ra dãy $\{x_\alpha^\tau\}$ bị chặn trong không gian Banach phản xạ X. Do đó tồn tại một dãy con của dãy $\{x_\alpha^\tau\}$ hội tụ yếu đến một phần

tử $\overline{x}$ của X. Không giảm tính tổng quát ta có thể coi $\{x_\alpha^\tau\} \rightharpoonup \overline{x}$ khi $\alpha \to 0$, $\dfrac{\delta + h}{\alpha} \to 0$.

Sử dụng tính chất accretive của toán tử A_h, với mọi $h > 0$, từ (2.7) ta có

$$\begin{aligned} &\langle J(x - x_\alpha^\tau)\,,\, A_h(x) - A_h(x_\alpha^\tau)\rangle \\ &\qquad = \langle J\left(x - x_\alpha^\tau\right), A_h(x) + \alpha x_\alpha^\tau - f_\delta\rangle \\ &\qquad \geq 0,\ \forall x \in X. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Vì J có tính chất liên tục yếu theo dãy, nên trong (2.15) cho $\alpha \to 0$ ta được

$$\langle x - \overline{x}, A(x) - f\rangle \geq 0,\ \forall x \in X. \tag{2.16}$$

Mặt khác theo giả thiết, A là toán tử m-accretive nên nó là toán tử accretive cực đại. Khi đó từ (2.16) ta suy ra $f = A\overline{x}$ hay $\overline{x} \in S$.

Từ (2.11) với $x_0 = \overline{x}$, ta có

$$\begin{aligned} &\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), A_h(x_\alpha^\tau) - A(x_0)\rangle + \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_\alpha^\tau - x_0\right\rangle \\ &\qquad = \left\langle J\left(x_\alpha^\tau - \overline{x}\right), A_h(x_\alpha^\tau) - A(\overline{x})\right\rangle \\ &\qquad\quad + \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - \overline{x}\right), x_\alpha^\tau - \overline{x}\right\rangle \\ &\qquad \geq -g\left(\|\overline{x}\|\right) h\left\|x_\alpha^\tau - \overline{x}\right\| + \alpha\|x_\alpha^\tau - \overline{x}\|^2, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), f_\delta - f\right\rangle - \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_0\right\rangle \\ &\qquad = \left\langle J\left(x_\alpha^\tau - \overline{x}\right), f_\delta - \alpha x_\alpha^\tau - f\right\rangle \\ &\qquad\quad + \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - \overline{x}\right), x_\alpha^\tau - \overline{x}\right\rangle \\ &\qquad \leq -\delta\left\|x_\alpha^\tau - \overline{x}\right\| - \alpha\left\langle J\left(x_\alpha^\tau - \overline{x}\right), \overline{x}\right\rangle. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\tau - \overline{x}\|^2 \leq \frac{\delta}{\alpha}\left\|x_\alpha^\tau - \overline{x}\right\| + \frac{h}{\alpha} g\left(\|\overline{x}\|\right)\left\|x_\alpha^\tau - \overline{x}\right\| \\ - \left\langle J\left(x_\alpha^\tau - \overline{x}\right), \overline{x}\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Suy ra dãy $\{x_\alpha^\tau\}$ bị chặn và hội tụ yếu về $\overline{x} \in S$. Từ (2.17) ta cũng suy ra $\{x_\alpha^\tau\}$ hội tụ theo chuẩn về $\overline{x}$ khi $\alpha \to 0$, $\dfrac{\delta + h}{\alpha} \to 0$. Vậy $\{x_\alpha^\tau\}$ hội tụ mạnh về $\overline{x}$ khi $\alpha \to 0$, $\dfrac{\delta + h}{\alpha} \to 0$. Mặt khác từ (2.11) ta có

$$\begin{aligned}
&\langle J(x_\alpha^\tau - x_0), A_h(x_\alpha^\tau) - A(x_0)\rangle + \alpha\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_\alpha^\tau\rangle = \langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), f_\delta - f\rangle \\
&\quad \Leftrightarrow g\left(\|x_0\|\right) h \left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\| + \alpha \left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_\alpha^\tau\right\rangle \leq \delta \left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\| \\
&\quad \Leftrightarrow \left\langle J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right), x_\alpha^\tau\right\rangle \leq \left(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{h}{\alpha} g\left(\|x_0\|\right)\right) \left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\|, \ x_0 \in S.
\end{aligned}$$

Cho $\alpha \to 0$, $\dfrac{\delta + h}{\alpha} \to 0$, từ bất đẳng thức trên suy ra

$$\left\langle J\left(\overline{x} - x_0\right), \overline{x}\right\rangle \leq 0, \ \forall x_0 \in S.$$

Điều đó có nghĩa là $\overline{x} = \overline{x}_0$. Vậy dãy $\{x_\alpha^\tau\}$ hội tụ mạnh đến $\overline{x}_0$ khi $\alpha \to 0$, $\dfrac{\delta + h}{\alpha} \to 0$. □

2.1.2 Tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh

Bây giờ ta nghiên cứu tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh trong trường hợp tổng quát khi vế phải f được cho xấp xỉ f_δ và toán tử A và được cho xấp xỉ bởi A_h. Ta xét phương trình hiệu chỉnh ở dạng

$$A_h\left(x\right) + \alpha\left(x - x_*\right) = f_\delta, \tag{2.18}$$

ở đây $\alpha > 0$ là tham số hiệu chỉnh, x^* là phần tử cho trước và toán tử $A_h : X \to X$ là toán tử m-accretive thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned}
&\left\|A_h\left(y\right) - A_h\left(x_0\right) - QA_h'\left(x_0\right) J\left(y - x_0\right)\right\| \\
&\qquad \leq \tau \left\|A\left(y\right) - A\left(x_0\right)\right\|, \forall y \in X,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ở đây $\tau > 0$ là một hằng số và Q là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X^*.

Định lý 2.2. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) A_h khả vi Fréchet thỏa mãn (2.19),

(ii) Tồn tại phần tử $z_h \in X$ *sao cho* $A_h'(x_0)\, z_h = x_* - x_0$,

(iii) Tham số hiệu chỉnh α *được chọn sao cho*

$$\alpha \sim (\delta + h)^{\theta}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Khi đó

$$\|x_\alpha^\tau - x_0\| = O\left((\delta + h)^{\mu}\right), \ \mu = \min\left(1 - \theta, \frac{\theta}{2}\right)$$

Chứng minh.

Từ định nghĩa của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J, (2.1), (2.18), tính chất m-accretive của toán tử A và điều kiện (ii) của định lý ta có

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\tau - x_0\|^2 &\le \frac{1}{\alpha}\left\langle f_\delta - A_h\left(x_\alpha^\tau\right) J\left(x_\alpha^\tau - x_0\right)\right\rangle \\ &\qquad + \left\langle \left(x_0 - x_*\right), J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\rangle \\ &\le \frac{1}{\alpha}\left(\delta + hg\left(\|x_0\|\right)\right)\|x_\alpha^\tau - x_0\| \\ &\qquad + \left\langle z_h, A_h'(x_0) J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Mặt khác,

$$\left|\left\langle z_h, A_h'(x_0) J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\rangle\right| \le \|z_h\| \left\|A_h'(x_0) J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\|,$$

ở đây

$$\begin{aligned} \left\|A_h'(x_0) J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\| &\le \left\|A_h\left(x_\alpha^\tau\right) - A_h\left(x_0\right)\right\| \\ &\qquad + \widetilde{\tau}\left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\| \left\|QA_h'(x_0) J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\| \\ &\le \left\|A_h\left(x_\alpha^\tau\right) - f_\delta\right\| + \delta + hg\left(\|x_0\|\right) \\ &\qquad + \widetilde{\tau}\left\|x_\alpha^\tau - x_0\right\| \left\|QA_h'(x_0) J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\|. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} &\left\|A_h'(x_0) J\left(x_0 - x_\alpha^\tau\right)\right\| \\ &\quad \le \frac{1}{1 - \tau\left(\|x_0 - x_*\| + \delta_1^{1-\theta}\right)}\left(\alpha\left\|x_\alpha^\tau - x_*\right\| + \delta + hg\left(\|x_0\|\right)\right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Từ (2.20), sự bị chặn của dãy $\{x_\alpha^\tau\}$ khi $\alpha, \dfrac{\delta}{\alpha} \to 0$ và điều kiện $\alpha \sim (\delta + h)^\theta$, $0 < \theta < 1$, ta suy ra

$$\|x_\alpha^\tau - x_0\|^2 \leq c_1(\delta + h)^{1-\theta} \|x_\alpha^\tau - x_0\| + c_2(\delta + h)^\theta,$$

trong đó c_i là các hằng số dương. Sử dụng hệ thức

$$a, b, c \geq 0,\ p > q,\ a^p \leq ba^q + c \Rightarrow a^p = O\left(b^{p(p-q)} + c\right)$$

ta thu được

$$\|x_\alpha^\tau - x_0\| = O\left((\delta + h)^\mu\right),\ \mu = \min\left(1 - \theta, \frac{\theta}{2}\right).$$

Định lý được chứng minh. □

2.2 Hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive không cần tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc

Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J có tính chất liên tục yếu theo dãy chỉ có ở một lớp không gian Banach rất hẹp (không gian l_p), nên không thể áp dụng phương trình toán tử m-accretive trong trường hợp này giải quyết những bài toán trong không gian hàm. Để khắc phục hạn chế này, năm 2012, Giáo sư Nguyễn Bường và các cộng sự đã đưa ra một phương pháp hiệu chỉnh mới cho phương trình toán tử m-accretive. Sự hội tụ mạnh của nghiệm hiệu chỉnh được chứng minh không cần tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J. Các kết quả trình bày trong mục này được tham khảo từ tài liệu [4].

2.2.1 Không gian Banach trơn và giới hạn Banach

Ký hiệu $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của X.

Định nghĩa 2.3. Không gian Banach X được gọi là

(i) có chuẩn khả vi Gâteaux (hoặc không gian trơn) nếu giới hạn

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

tồn tại với mỗi x, $y\in S_X$,

(ii) có chuẩn khả vi Gâteaux đều nếu giới hạn đạt được là đều với $x\in S_X$.

Định nghĩa 2.4. Không gian Banach X được gọi là không gian lồi chặt, nếu với mọi $x,y\in S_X$, $x\neq y$, ta có

$$\|(1-\lambda)x+\lambda y\|<1,\ \forall\lambda\in(0,1).$$

Không gian Banach X lồi chặt nếu mặt cầu đơn vị trong X là lồi chặt, nghĩa là với mọi $x,y\in S_X$, $\|x\|=\|y\|=1$, $x\neq y$ ta có $\|x+y\|<2$.

Mệnh đề 2.5. *Cho X là không gian Banach. Khi đó, nếu X có chuẩn khả vi Gâteaux thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J là đơn trị và nếu chuẩn của X là khả vi Gâteaux đều thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J là liên tục đều * yếu trên mỗi tập con bị chặn của X.*

Cho μ là một hàm tuyến tính liên tục trên l^∞ và giả sử $a=(a_1,a_2,\ldots)\in l^\infty$. Ta viết $\mu_k(a_k)$ thay cho $\mu((a_1,a_2,\ldots))$.

Định nghĩa 2.6. Cho X là một không gian Banach, μ được gọi là một giới hạn Banach nếu μ thỏa mãn điều kiện

$$\|\mu\|=\mu_k(1)=1 \text{ và } \mu_k(a_{k+1})=\mu_k(a_k),\ \forall a=(a_1,a_2,\ldots)\in l^\infty.$$

Với một giới hạn Banach μ ta biết rằng

$$\liminf_{k\to\infty}a_k\leq\mu_k(a_k)\leq\limsup_{k\to\infty}a_k,$$

với mọi $(a_1,a_2,\ldots)\in l^\infty$.

Định lý 2.7. *Nếu* $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^\infty$, $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l^\infty$ *và* $a_k \to c$, $(a_k - b_k \to 0)$ *khi* $k \to \infty$ *thì* $\mu_k(a_k) = \mu(a) = c$, $(\mu_k(a_k) = \mu_k(b_k))$.

Bổ đề 2.8. *Cho* C *là một tập con lồi của không gian Banach* X *có chuẩn là khả vi Gâteaux đều. Giả sử* $\{x_k\}$ *là một dãy con bị chặn của* X, *và* z *là một phần tử của* C, μ *là một giới hạn Banach. Khi đó,*

$$\mu_k \|x_k - z\|^2 = \min_{u \in C} \mu_k \|x_k - u\|^2,$$

nếu và chỉ nếu

$$\mu_k \langle u - z, J(x_k - z) \rangle \leq 0$$

với mọi $u \in C$.

Cho A là một toán tử m-accretive trong X và phần tử $f \in X$, bất kì ta có thể xác định một ánh xạ $u = T_f(x)$ bởi

$$A_f(u) + u = x, \ A_f(.) = A(.) - f, \tag{2.22}$$

với mọi $x \in X$. Do đó, A_f cũng là m-accretive.

Ánh xạ T_f có các tính chất sau

(1) $D(T_f) = X$,

(2) T_f là không giãn, tức là $\|T_f x - T_f y\| \leq \|x - y\|$,

(3) $F(T_f) = S$ trong đó $F(T_f)$ ký hiệu là tập các điểm bất động của T_f, tức là $F(T_f) = \{x \in X : x = T_f(x)\}$.

Định nghĩa 2.9. Toán tử $T : D(T) \subset X \to X$ được gọi là giả co nếu

$$\langle T(x) - T(y), J(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2,$$

với mọi $x, y \in D(T)$.

Bổ đề 2.10. *Nếu toán tử* $A : X \to X$ *là accretive thì* $T = I - A$ *là giả co.*

Chứng minh. Với mọi $x, y \in D(T)$, vì J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc nên

$$\langle x - y, J(x - y)\rangle = \|x - y\|^2,$$

và A là toán tử accretive nên :

$$\langle A(x) - A(y), J(x - y)\rangle \geq 0.$$

Suy ra :

$$\langle T(x) - T(y), J(x - y)\rangle \leq \|x - y\|^2.$$

Vậy T là giả co. □

Bổ đề 2.11. *Với bất kì toán tử accretive F tuyến tính, bị chặn trên một không gian Banach phản xạ X, ta đều có $\|F(F + \alpha I)^{-1}\| \leq 2$ với mọi $\alpha > 0$.*

2.2.2 Sự hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh

Cho X là một không gian Banach thực phản xạ, X^* là không gian liên hợp của X. Xét phương trình toán tử (2.1), trong đó $A : X \to X$ là một toán tử m-accretive, đơn trị trên X với $D(A) = X$.

Xét phương trình hiệu chỉnh

$$A(x) + \alpha(x - x^+) = f_\delta, \tag{2.23}$$

trong đó $\alpha > 0$ là tham số hiệu chỉnh, x^+ là một phần tử tùy ý của X, f_δ là một xấp xỉ của f thỏa mãn (2.2)

Sự hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh được chứng minh trong định lý sau.

Định lý 2.12. *Cho X là một không gian Banach thực phản xạ và lồi chặt với chuẩn khả vi Gâteaux đều và cho A là một toán tử m-accretive đơn trị trên X. Khi đó,*

i với mỗi $\alpha > 0$ và $f \in X$, phương trình

$$A(x) + \alpha(x - x^+) = f, \tag{2.24}$$

có duy nhất nghiệm x_α;

ii nếu tập nghiệm S của (2.1) khác rỗng thì dãy nghiệm $\{x_\alpha\}$ hội tụ mạnh đến một phần tử $y_* \in X$ thỏa mãn bất đẳng thức biến phân

$$y_* \in S: \quad \langle y_* - x^+, J(y_* - y)\rangle \leq 0, \ \forall y \in S. \tag{2.25}$$

Hơn nữa, ta có

$$\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\| \leq \frac{\delta}{\alpha}$$

trong đó x_α^δ là nghiệm duy nhất của (2.23), với mọi $\alpha > 0$ và $f_\delta \in X$.

Chứng minh. (i). Do A là toán tử m-accretive nên phương trình (2.24) có một nghiệm, ký hiệu là x_α. Ta sẽ chứng minh nghiệm này là duy nhất với mỗi $\alpha > 0$ và $f \in X$. Thật vậy, ta sẽ chứng minh toán tử $A + \alpha I$ là toán tử α-accretive mạnh. Với mọi $x, y \in X$, sử dụng tính chất accretive của toán tử A ta có

$$\begin{aligned}\langle (A+\alpha I)(x) - (A+\alpha I)(y), J(x-y)\rangle &\\ = \langle A(x) - A(y) + \alpha I(x) - \alpha I(y), J(x-y)\rangle &\\ = \langle A(x) - A(y), J(x-y)\rangle + \alpha\langle x-y, J(x-y)\rangle &\\ \geq \alpha\|x-y\|^2.&\end{aligned}$$

Vậy phương trình (2.24), với mỗi $\alpha > 0$ có duy nhất nghiệm x_α.

(ii) Bây giờ ta chỉ ra dãy nghiệm $\{x_\alpha\}$ bị chặn. Thật vậy, từ phương trình (2.1) và (2.24) ta có

$$\begin{aligned}&\langle A(x_\alpha) + \alpha(x_\alpha - x^+) - A(y), J(x_\alpha - y)\rangle = 0\\ \Leftrightarrow\ &\langle A(x_\alpha) - A(y), J(x_\alpha - y)\rangle + \alpha\langle (x_\alpha - x^+), J(x_\alpha - y)\rangle = 0\\ \Leftrightarrow\ &\langle A(x_\alpha) - A(y), J(x_\alpha - y)\rangle = \alpha\langle x^+ - y, J(x_\alpha - y)\rangle\\ &\qquad\qquad + \alpha\langle y - x_\alpha, J(x_\alpha - y)\rangle.\end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned}\alpha\langle x^+ - y, J(x_\alpha - y)\rangle = \alpha\langle x_\alpha - y, J(x_\alpha - y)\rangle&\\ + \langle A(x_\alpha) - A(y), J(x_\alpha - y)\rangle.&\end{aligned} \tag{2.26}$$

Do A là toán tử accretive và J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc nên từ (2.26) suy ra

$$\alpha\|x_\alpha - y\|^2 \leq \alpha\langle x^+ - y, J(x_\alpha - y)\rangle, \ \forall y \in S. \tag{2.27}$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức (2.27) cho α ta được

$$\|x_\alpha - y\|^2 \leq \langle x^+ - y, J(x_\alpha - y)\rangle, \ \forall y \in S. \tag{2.28}$$

Suy ra $\|x_\alpha - y\| \leq \|x^+ - y\|$. Có nghĩa là dãy $\{x_\alpha\}$ bị chặn trong không gian Banach phản xạ X.

Từ (2.24) ta có

$$\begin{aligned} 0 \leq \|A(x_\alpha) - f\| &= \alpha\|x_\alpha - x^+\| = \alpha\|x_\alpha - y + y - x^+\| \\ &\leq \alpha(\|x_\alpha - y\| + \|x^+ - y\|) \\ &\leq 2\alpha\|x^+ - y\|. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Suy ra

$$\lim_{\alpha\to 0}\|A(x_\alpha) - f\| = 0. \tag{2.30}$$

Xét ánh xạ $T^f := I - A_f$, trong đó A_f là toán tử m-accretive. Hiển nhiên, $p \in S$ nếu $p \in F(T^f)$. Hơn nữa, ánh xạ $2I - T^f$ có một nghịch đảo không giãn, ký hiệu bởi $\mathcal{A}$. Thực vậy, vì $2I - T^f = I + I - T^f = I + A_f$.

Từ (2.22) ta có

$$\mathcal{A} = T_f = (2I - T^f)^{-1} = (I + A_f)^{-1}.$$

Vì $\mathcal{A}$ là một toán tử không giãn, đơn trị nên

$$Fix(\mathcal{A}) = Fix(T_f) = S.$$

Ta có: $\forall x_\alpha^\delta \in S$ thì $x_\alpha^\delta \in Fix(T_f)$ thỏa mãn

$$x_\alpha^\delta - T^f(x_\alpha^\delta) = (2I - T^f)x_\alpha^\delta - x_\alpha^\delta = 0.$$

Vì $x_\alpha^\delta \in S$ là nghiệm của phương trình (2.1) nên $A(x_\alpha^\delta) - f = 0$. Từ đó suy ra

$$x_\alpha^\delta - T^f x_\alpha^\delta = (2I - T^f)x_\alpha^\delta - x_\alpha^\delta = A(x_\alpha^\delta) - f,$$

và

$$\mathcal{A}(2I - T^f)x_\alpha^\delta = (I + A_f)^{-1}(I + A_f)(x_\alpha^\delta) = x_\alpha^\delta.$$

Mặt khác $x_\alpha^\delta \in F(\mathcal{A})$ nên

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_\alpha^\delta - \mathcal{A}(x_\alpha^{\delta)}\| &= \|\mathcal{A}(2I - T^f)x_\alpha^\delta - \mathcal{A}(x_\alpha^\delta)\| \\ &\leq \|(2I - T_f)x_\alpha^\delta - x_\alpha^\delta\| \\ &= \|A(x_\alpha^\delta) - f\|. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Kết hợp (2.30) và (2.31) ta được

$$\|x_\alpha - \mathcal{A}(x_\alpha)\| \to 0 \text{ khi } \alpha \to 0.$$

Giả sử $\{x_k\}$ là dãy con bất kì của $\{x_\alpha\}$ với $\alpha_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Xét hàm

$$\varphi(x) = \mu_k\|x_k - x\|^2$$

với mọi $x \in X$. Ta thấy rằng $\varphi(x) \to \infty$ khi $\|x\| \to \infty$ và φ là liên tục và lồi. Từ đó, X là phản xạ nên tồn tại $\tilde{y} \in X$ sao cho $\varphi(\tilde{y}) = \min\limits_{x\in X} \varphi(x)$.

Đặt:$C^* := \{u \in X : \varphi(u) = \min\limits_{x\in E} \varphi(x)\} \neq \emptyset$.

Dễ dàng thấy rằng C^* là một tập con lồi đóng và bị chặn của X. Mặt khác, $\forall \tilde{y} \in C^*$, $x_k \in F(\mathcal{A})$ và từ $\|x_k - \mathcal{A}(x_k)\| \to 0$ ta có

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{A}\tilde{y}) = \mu_k\|x_k - \mathcal{A}(\tilde{y})\|^2 &= \mu_k\|\mathcal{A}(x_k) - \mathcal{A}(\tilde{y})\|^2 \\ &\leq \mu_k\|x_k - \tilde{y}\|^2 = \varphi(\tilde{y}), \end{aligned}$$

suy ra $\mathcal{A}C^* \subset C^*$, có nghĩa là C^* là bất biến đối với $\mathcal{A}$.

Bây giờ, ta chứng tỏ rằng C^* chứa một điểm bất động của $\mathcal{A}$. Do X là một không gian Banach phản xạ và lồi chặt nên tập con lồi và đóng bất kì trong X là một tập Chebyshev. Khi đó, với mỗi điểm $y \in F(\mathcal{A})$, tồn tại duy nhất $\tilde{y} \in C^*$ sao cho

$$\|y - \tilde{y}\| = \inf_{x\in C^*} \|y - x\|.$$

Vì $y \in F(\mathcal{A})$ nên $y = \mathcal{A}(y)$, $\forall y \in X$ và $\mathcal{A}\tilde{y} \in C^*$, $\forall \tilde{y} \in C^*$ ta có

$$\|y - \mathcal{A}(\tilde{y})\| = \|\mathcal{A}(y) - \mathcal{A}(\tilde{y})\| \leq \|y - \tilde{y}\|.$$

Do đó $\mathcal{A}(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Suy ra $\tilde{y} \in F(\mathcal{A})$. Vì vậy, tồn tại một điểm $\tilde{y} \in F(\mathcal{A}) \cap C^* = S \cap C^*$. Theo Bổ đề 2.8 ta có $\tilde{y}$ là một cực tiểu của $\varphi(x)$ trên X nếu và chỉ nếu

$$\mu_k \langle x - \tilde{y}, J(x_k - \tilde{y}) \rangle \leq 0, \ \forall x \in X. \tag{2.32}$$

Từ (2.28) thay $y = \tilde{y}$ và $x = x^+$ ta được

$$\langle x - \tilde{y}, J(x_k - \tilde{y}) \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \mu_k \langle x - \tilde{y}, J(x_k - \tilde{y}) \rangle \geq 0.$$

Kết hợp với (2.32) ta thu được

$$\mu_k \langle x - \tilde{y}, J(x_k - \tilde{y}) \rangle = 0.$$

Suy ra $\mu_k \|x_k - \tilde{y}\|^2 = 0$, do J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X. Do đó, tồn tại một dãy con $\{x_{k_i}\}$ của $\{x_k\}$ hội tụ mạnh đến $\tilde{y}$ khi $i \to \infty$. Hơn nữa, từ (2.28) và tính liên tục * yếu của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J trên các tập con bị chặn của X, ta thu được

$$\langle y - x^+, J(\tilde{y} - y) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in S. \tag{2.33}$$

Vì y và $\tilde{y}$ thuộc $F(\mathcal{A})$, do $F(\mathcal{A})$ là một tập con lồi và đóng nên $sy + (1-s)\tilde{y} \in F(\mathcal{A})$ với $s \in (0,1)$. Thay y trong (2.33) bằng $sy + (1-s)\tilde{y}$, với $s \in (0,1)$ và sử dụng tính chất $J(s(\tilde{y} - y)) = sJ(\tilde{y} - y)$ với $s > 0$ ta có

$$\begin{aligned}
&\langle sy + (1-s)\tilde{y} - x^+, J(\tilde{y} - (sy + (1-s)\tilde{y})) \rangle \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \langle sy + \tilde{y} - s\tilde{y} - x^+, J(s\tilde{y} - sy) \rangle \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \tilde{y} - x^+, J(s(\tilde{y} - y)) \rangle - s\langle \tilde{y} - y, J(s(\tilde{y} - y)) \rangle \leq 0 \\
&\Leftrightarrow s\langle \tilde{y} - x^+, J(\tilde{y} - y) \rangle \leq s^2 \langle \tilde{y} - y, J(\tilde{y} - y) \rangle, \ \forall y \in S.
\end{aligned}$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức trên cho s rồi cho $s \to 0$, ta thu được

$$\langle \tilde{y} - x^+, J(\tilde{y} - y)\rangle \leq 0 \quad \forall y \in S.$$

Kết hợp với (2.25) suy ra $\tilde{y} = y_*$.

Vì vậy, dãy nghiệm $\{x_\alpha\}$ hội tụ mạnh đến y_* khi $\alpha \to 0$.

Từ (2.23) và (2.24) ta có

$$\begin{aligned}
&\langle A(x_\alpha^\delta) + \alpha(x_\alpha^\delta - x^+) - f_\delta - A(x_\alpha) - \alpha(x_\alpha - x^+) + f, J(x_\alpha^\delta - x_\alpha)\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle A(x_\alpha^\delta) - A(x_\alpha), J(x_\alpha^\delta - x_\alpha)\rangle + \alpha\langle x_\alpha^\delta - x_\alpha, j(x_\alpha^\delta - x_\alpha)\rangle \\
&\qquad\qquad = \langle f_\delta - f, J(x_\alpha^\delta - x_\alpha)\rangle.
\end{aligned}$$

Do A là toán tử accretive và J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc nên

$$\alpha\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|^2 \leq \|f_\delta - f\|\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|.$$

Suy ra :

$$\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\| \leq \frac{\delta}{\alpha},$$

do $\|f_\delta - f\| \leq \delta$.

Định lý được chứng minh. □

Kết luận

Luận văn đã trình bày lại và làm chi tiết phương pháp hiệu chỉnh phương trình toán tử với toán tử m-accretive trong không gian Banach, trình bày các định lý về sự hội tụ và đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh trong các trường hợp ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc có tính chất liên tục yếu theo dãy và không có tính chất này.

Việc nghiên cứu tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh trong trường hợp cả toán tử A và vế phải f đều được cho xấp xỉ khi ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc không có tính chất liên tục yếu theo dãy, việc xấp xỉ hữu hạn chiều nghiệm hiệu chỉnh và tính toán ví dụ số minh họa cho tốc độ hội tụ của phương pháp là hướng nghiên cứu tiếp theo cho đề tài này.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Tài liệu tham khảo

[1] Ya. I. Alber and I. Ryazantseva *Nonlinear ill-posel problems of monotone type*, Springer, 2006.

[2] Ya. I. Alber, The solution by the regularization method of operator equations of the first kind with accretive operators, *Differential Equations*, **11**(1975), 1665–1670.

[3] Ng. Buong, Generalized discrepancy principle and ill-posed equations involving accretive operators, *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **9**(2004) (1), 73–78.

[4] Ng. Buong, On Nonlinear ill-posed equations involving accretive operators, *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **11**(2006) (1), 1–10.

[5] Ng. Buong and Ng. T. H. Phuong, Convergence rates in regularization for Nonlinear ill-posed equations involving m-accretive mappings in Banach spaces, *Applied Mathematical Sciences*, **6**(2012) (63), 3109–3117.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*