ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN THÌN

SỰ DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM PHÂN HÌNH VỚI ĐA THỨC SAI PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN THÌN

SỰ DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM PHÂN HÌNH VỚI ĐA THỨC SAI PHÂN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60. 46. 01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
T.S Hà Trần Phương

Thái Nguyên – Năm 2012

Mục lục

Mở đầu

1. Mục đích và lý do chọn luận văn

Năm 1926, Nevanlinna chứng minh Định lý năm điểm về sự xác định duy nhất của các hàm phân hình: hai hàm phân hình f và g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ bằng nhau tại năm điểm phân biệt thì $f \equiv g$. Kết quả của Nevanlinna cho thấy một hàm phân hình được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược không kể bội của năm giá trị phân biệt. Công trình này của ông được xem là khởi nguồn cho các công trình nghiên cứu về sự xác định duy nhất của hàm hay ánh xạ phân hình. Về sau, hướng nghiên cứu này thu hút được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước: M. Ru, F. Fujimoto, C. C. Yang, D. D. Thai, H. H. Khoai, T. T. H. An, ...

Thời gian gần đây, R. G. Halburd và R. J. Korhonen (2006, [10]), Y. M. Chiang và S. J. Feng (2008, [13]) đã nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân. Những kết quả của họ giúp chúng ta nghiên cứu sự duy nhất của hàm phân hình, hàm nguyên với đa thức sai phân, nghiên cứu phương trình sai phân.... Năm 2011, K. Liu, X. Liu và T. B. Cao ([8, 7]) đã chứng minh một số kết quả về sự duy nhất của các hàm phân hình, hàm nguyên và đa thức sai phân, về nghiệm của phương trình sai phân. Với mong muốn tiếp cận hướng nghiên cứu này tôi đã chọn luận văn: **"Sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân"**. Mục đích chính của luận văn là tiếp tục nghiên cứu vấn đề của K. Liu, X. Liu và T. B. Cao.

2. Nội dung nghiên cứu

Luận văn nghiên cứu sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân, nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình sai phân.

3. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu cơ bản: Đọc bài báo của các tác giả theo hướng nghiên cứu, từ đó tìm ra những ý tưởng mới để nghiên cứu.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Kiến thức cơ sở, trình bày những kiến cơ sở, cần thiết cho chứng minh kết quả trong chương hai: lý thuyết Nevanlinna, lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân.

Chương 2: Sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân. Trong chương này chúng tôi chứng minh một số kết quả về sự duy nhất của hàm phần hình với đa thức sai phân và sự tồn tại nghiệm của phương trình sai phân.

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên, ĐHSP Hà Nội, Viện Toán học. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn tận tình của thầy giáo TS. Hà Trần Phương. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, tới các thầy cô giáo đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua. Xin cảm ơn gia đình và các bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ, động viên tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2012

Nguyễn Văn Thìn

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong phần này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở trong Lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình.

1.1 Các hàm Nevanlinna

Với một $0 < R \leqslant \infty$, ta kí hiệu

$$D(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

Cho f là hàm phân hình trên đĩa $D(R)$ và $r < R$, ký hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm của f kể cả bội trong đĩa đóng $\overline{D}(r)$. Khi đó *hàm đếm tại cực điểm* của f, ký hiệu $N(r, f)$, được xác định như sau:

$$N(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r,$$

trong đó $n(0, f) = \liminf\limits_{t \longrightarrow 0} n(t, f)$. Hàm *xấp xỉ* $m(r, f)$ của hàm f được xác định như sau:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

trong đó $\log^+(x) = \max\{\log x, 0\}$, với $x > 0$. Hàm *đặc trưng Nevanlinna* của f, ký hiệu là $T(r, f)$, được xác định bởi:

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Với mỗi $a \in \mathbb{C}$, ký hiệu $n(r, \frac{1}{f-a})$ là số các a-điểm của f kể cả bội trong đĩa đóng $\overline{D}(r)$. Khi đó *hàm đếm tại các a-điểm* của f, ký hiệu $N(r, \frac{1}{f-a})$, được xác định như sau:

$$N(r, \frac{1}{f-a}) = \int\limits_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f-a}) - n(0, \frac{1}{f-a})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f-a}) \log r,$$

trong đó $n(0, \frac{1}{f-a}) = \liminf\limits_{t \longrightarrow 0} n(t, \frac{1}{f-a})$. Từ định nghĩa hàm xấp xỉ, ta có

$$m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta$$

và

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = m(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-a}).$$

Một số tính chất của các hàm Nevanlinna

1. $m(r, \sum\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n m(r, f_k) + \log n;$
2. $m(r, \prod\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n m(r, f_k);$
3. $N(r, \sum\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n N(r, f_k);$
4. $N(r, \prod\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n N(r, f_k);$
5. $T(r, \sum\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n T(r, f_k) + \log n;$
6. $T(r, \prod\limits_{k=1}^n f_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n T(r, f_k).$

1.2 Các định lý cơ bản

Định lý 1.1 (Định lý cơ bản thứ nhất). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\overline{D}(r)$, khi đó ta có*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng bị chặn.

Định lý 1.2 (Định lý cơ bản thứ hai). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a_1, ..., a_q$ là các số phức phân biệt, khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta có bất đẳng thức*

$$\begin{aligned}(q-1)T(r, f) + N_{ram}(r, f) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N(r, \frac{1}{f-a_j}) + N(r, f) \\ + (1+\varepsilon)\log^+(\log T(r, f)) + \log T(r, f) + O(1)\end{aligned}$$

đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn. Trong đó

$$N_{ram}(r, f) = N(r, \frac{1}{f'}) + 2N(r, f) - N(r, f').$$

Dễ chứng minh được $N_{ram}(r, f) \geqslant 0$.

Hệ quả 1.3. *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a_1, ..., a_q$ là các số phức phân biệt, khi đó ta có bất đẳng thức*

$$(q-1)T(r, f) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_j}) + \overline{N}(r, f) - N_0(r, \frac{1}{f'}) + S(r, f)$$

đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn, $S(r, f) = o(T(r, f))$ khi $r \longrightarrow \infty$ và $N_0(r, \frac{1}{f'})$ là hàm đếm tại không điểm của f' mà không là không điểm của $\prod_{j=1}^{n}(f - a_j)$.

Hàm phân hình $a(z)$ được gọi là hàm *đủ nhỏ* của hàm phân hình $f(z)$ nếu $T(r,a) = S(r,f)$. Trong đó $S(r,f) = o(T(r,f))$ khi $r \longrightarrow \infty$, ngoài một tập có độ đo hữu hạn.

Năm 2004, K. Yamanoi ([6]) đã tổng quát định lý cơ bản thứ hai cho hàm đủ nhỏ. Kết quả của tác giả như sau:

Định lý 1.4 ([6]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a_1(z), \ldots, a_q(z)$ là các hàm phân hình đủ nhỏ của f. Khi đó ta có bất đẳng thức sau*

$$(q-2)T(r,f) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_j}) + S(r,f).$$

1.3 Lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân

Cho f là một hàm phân hình, *bậc* của f, ký hiệu là $\rho(f)$, được xác định bởi

$$\rho(f) = \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Nếu $\rho(f) < +\infty$ thì ta nói f có bậc hữu hạn.

Hàm phân hình $f(z)$ trên $\mathbb{C}$ được gọi là *tuần hoàn* với chu kỳ $c \in \mathbb{C}$ nếu đẳng thức $f(z+c) = f(z)$ đúng với mọi $z \in \mathbb{C}$. Cho f là hàm phân hình, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số, toán tử sai phân của f ký hiệu là

$$\Delta_c f = f(z+c) - f(z).$$

Gần đây, R. G. Halburd, R. J. Korhonen, Y. M. Chang, S. J. Fang, ... đã nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân và đạt được một số kết quả sau:

Định lý 1.5 ([10]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng với bậc hữu hạn,*

$c \in \mathbb{C}$. Khi đó đẳng thức

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = S(r, f)$$

đúng với r đủ lớn ngoài một tập E có độ đo logarithmic hữu hạn $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$.

Lưu ý rằng điều kiện f là hàm phân hình với bậc hữu hạn là không thể bỏ qua. Ta xét ví dụ sau ([12]): Xét hàm $g(z) = e^{e^z}$ với $c = 1$. Khi đó

$$m(r, \frac{g(z+c)}{g(z)}) = (e-1)m(r, g) = (e-1)T(r, g)$$
$$\sim (e-1)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}} = O(T(r, g)).$$

Định lý 1.6 ([13]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$. Khi đó*

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + S(r, f).$$

Định lý 1.7 ([10]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng với bậc hữu hạn sao cho $\Delta_c f \not\equiv 0$, $c \in \mathbb{C}$. Cho $q \geqslant 2$, và $a_1(z), ..., a_q(z)$ là các phân hình đủ nhỏ tuần hoàn với chu kỳ c. Khi đó ta có*

$$m(r, f) + \sum_{k=1}^{q} m(r, \frac{1}{f - a_k}) \leqslant 2T(r, f) - N_{pair}(r, f) + S(r, f),$$

trong đó

$$N_{pair}(r, f) = 2N(r, f) - N(r, \Delta_c(f)) + N(r, \frac{1}{\Delta_c f})$$

và bất đẳng thức trên đúng với r đủ lớn ngoài một tập E có độ đo logarithmic hữu hạn.

Chương 2

Sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân

2.1 Một số khái niệm

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày một số khái niệm cần dùng trong chứng minh các kết quả.

Cho f là hàm phân hình xác định trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Ký hiệu $S(r, f)$ là đại lượng thỏa mãn $S(r, f) = o(T(r, f))$ với r đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo hữu hạn. Với $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ký hiệu $E_{m)}(a; f)$ là tập tất cả các a- điểm của f với bội không vượt quá m, mỗi a- điểm được tính với số lần bằng bội của nó. Tức là

$$E_{m)}(a; f) = \{(z, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^* : \operatorname{ord}_{f-a}(z) = n \leqslant m\}.$$

Ta cũng ký hiệu $\overline{E}_{m)}(a; f)$ là tập tất cả các a- điểm phân biệt của f với bội không vượt quá m, tức là

$$\overline{E}_{m)}(a; f) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{ord}_{f-a}(z) \leqslant m\}.$$

Cho f, g là các hàm phân hình và $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nếu các nghiệm của phương trình $f - a = 0$ và $g - a = 0$ là trùng nhau kể cả bội (không kể bội) thì ta nói f và g *chung nhau giá trị a-CM (tương ứng $a-$IM)*.

Cho m là số nguyên dương, $a \in \mathbb{C}$, f và g là các hàm phân hình sao cho

$$E_{m)}(a;f) = E_{m)}(a;g).$$

Kí hiệu $\overline{E}_{f,g}(a)$ là tập các $a-$điểm chung phân biệt của f và g, tức là

$$\overline{E}_{f,g}(a) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) - a = g(z) - a = 0\}.$$

Và kí hiệu

$$\overline{n}_L(r,a;f) = \{z \in \overline{E}_{f,g}(a) : |z| \leqslant r, \operatorname{ord}_{f-a}(z) > \operatorname{ord}_{g-a}(z) > m\};$$
$$\overline{n}_L(r,a;g) = \{z \in \overline{E}_{f,g}(a) : |z| \leqslant r, \operatorname{ord}_{g-a}(z) > \operatorname{ord}_{f-a}(z) > m\};$$
$$\overline{n}_{f>m+1}(r,a;g) = \{z \in \overline{E}_{f,g}(a) : |z| \leqslant r, \operatorname{ord}_{f-a}(z) > \operatorname{ord}_{g-a}(z) = m+1\};$$
$$\overline{n}_{g>m+1}(r,a;f) = \{z \in \overline{E}_{f,g}(a) : |z| \leqslant r, \operatorname{ord}_{g-a}(z) > \operatorname{ord}_{f-a}(z) = m+1\}.$$

Các hàm đếm xác định như sau

$$\overline{N}_L(r,a;f) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}_L(t,a;f) - \overline{n}_L(0,a;f)}{t} dt + \overline{n}_L(0,a;f)\log r;$$
$$\overline{N}_L(r,a;g) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}_L(t,a;g) - \overline{n}_L(0,a;g)}{t} dt + \overline{n}_L(0,a;g)\log r;$$
$$\overline{N}_{f>m+1}(r,a;g) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}_{f>m+1}(r,a;g) - \overline{n}_{f>m+1}(0,a;g)}{t} dt + \overline{n}_{f>m+1}(0,a;g)\log r;$$
$$\overline{N}_{g>m+1}(r,a;f) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}_{g>m+1}(r,a;f) - \overline{n}_{g>m+1}(0,a;f)}{t} dt + \overline{n}_{g>m+1}(0,a;f)\log r.$$

trong đó $\overline{n}_L(0,a;f) = \liminf\limits_{t\longrightarrow 0} \overline{n}_L(t,a;f)$, $\overline{n}_L(0,a;g) = \liminf\limits_{t\longrightarrow 0} \overline{n}_L(t,a;g)$.
Ta cũng kí hiệu

$$\overline{N}_L(r,\frac{1}{f-a}) = \overline{N}_L(r,a;f); \quad \overline{N}_L(r,\frac{1}{g-a}) = \overline{N}_L(r,a;g);$$
$$\overline{N}_{f>m+1}(r,\frac{1}{g-a}) = \overline{N}_{f>m+1}(r,a;g); \quad \overline{N}_{g>m+1}(r,\frac{1}{f-a}) = \overline{N}_{g>m+1}(r,a;f).$$

Kí hiệu

$$\overline{n}_E^{(m+1}(r,a;f)=\{z\in\overline{E}_{f,g}(a):|z|\leqslant r,\mathrm{ord}_{f-a}(z)=\mathrm{ord}_{g-a}(z)\geqslant m+1\}$$

và

$$\overline{N}_E^{(m+1}(r,a;f)=\int\limits_0^r\frac{\overline{n}_E^{(m+1}(t,a;f)-\overline{n}_E^{(m+1}(0,a;f)}{t}dt+\overline{n}_E^{(m+1}(0,a;f)\log r.$$

Kí hiệu

$$\overline{n}_{f\geqslant m+1}(r,a;f|g\neq a)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r,\mathrm{ord}_{f-a}(z)>m,\mathrm{ord}_{g-a}(z)=0\};$$

$$\overline{n}_{g\geqslant m+1}(r,a;g|f\neq a)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r,\mathrm{ord}_{g-a}(z)>m,\mathrm{ord}_{f-a}(z)=0\}$$

và

$$\begin{aligned}\overline{N}_{f\geqslant m+1}(r,a;f|g\neq a)&=\int\limits_0^r\frac{\overline{n}_{f\geqslant m+1}(t,a;f|g\neq a)-\overline{n}_{f\geqslant m+1}(0,a;f|g\neq a)}{t}dt\\&\quad+\overline{n}_{f\geqslant m+1}(0,a;f|g\neq a)\log r;\\ \overline{N}_{g\geqslant m+1}(r,a;g|f\neq a)&=\int\limits_0^r\frac{\overline{n}_{g\geqslant m+1}(t,a;g|f\neq a)-\overline{n}_{g\geqslant m+1}(0,a;g|f\neq a)}{t}dt\\&\quad+\overline{n}_{g\geqslant m+1}(0,a;g|f\neq a)\log r.\end{aligned}$$

Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, $a\in\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ và m là một số nguyên dương. Ký hiệu $\overline{n}_{(m}(r,a;f)$ là số các $a-$điểm không kể bội của f trong đĩa $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r\}$ với bội ít nhất bằng m, $\overline{n}_{m)}(r,a;f)$ là số các $a-$điểm không kể bội của f trong đĩa $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r\}$ với bội không vượt quá m. Các hàm đếm được xác định bởi:

$$\overline{N}_{(m}(r,a;f)=\int\limits_0^r\frac{\overline{n}_{(m}(r,a;f)-\overline{n}_{(m}(0,a;f)}{t}dt+\overline{n}_{(m}(0,a;f)\log r$$

$$\overline{N}_{m)}(r,a;f)=\int\limits_0^r\frac{\overline{n}_{m)}(r,a;f)-\overline{n}_{m)}(0,a;f)}{t}dt+\overline{n}_{m)}(0,a;f)\log r.$$

Ta cũng kí hiệu

$$\overline{N}_{(m}(r, \frac{1}{f-a}) = \overline{N}_{(m}(r, a; f),\ \overline{N}_{m)}(r, \frac{1}{f-a}) = \overline{N}_{m)}(r, a; f).$$

Khi $a = \infty$, ta viết $\overline{n}_{(m}(r, f)$, $\overline{N}_{(m}(r, f)$, $\overline{n}_{m)}(r, f)$, $\overline{N}_{m)}(r, f)$ lần lượt thay cho $\overline{n}_{(m}(r, \infty; f)$, $\overline{N}_{(m}(r, \infty; f)$, $\overline{n}_{m)}(r, \infty; f)$, $\overline{N}_{m)}(r, \infty; f)$.

Cho $k \geqslant 2$ là số nguyên dương, ký hiệu

$$N_k(r, \frac{1}{f-a}) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) + \overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{f-a}) + \cdots + \overline{N}_{(k}(r, \frac{1}{f-a}).$$
$$N_k(r, f) = \overline{N}(r, f) + \overline{N}_{(2}(r, f) + \cdots + \overline{N}_{(k}(r, f).$$

Ta kí hiệu các số khuyết

$$\Theta(\infty, f) = 1 - \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)};\ \Theta(0, f) = 1 - \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, 1/f)}{T(r, f)};$$
$$\Theta_c(\infty, f) = 1 - \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, f(z+c))}{T(r, f)},$$

trong đó $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác 0.

2.2 Sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân

Trong phần này chúng tôi phát biểu và chứng minh một số kết quả mới về sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân. Để chứng minh các định lý, ta cần một số bổ đề sau:

Bổ đề 2.1 ([13]). *Cho f là hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là số phức khác không. Khi đó ta có*

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + S(r, f).$$

Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng. Đặt

$$H = \frac{f''}{f'} - 2\frac{f'}{f-1} - \frac{g''}{g'} + 2\frac{g'}{g-1}.$$

Bổ đề 2.2. *Nếu $H \not\equiv 0$ và f, g chung nhau $1-CM$ khi đó*

$$T(r,f) \leqslant N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g}) + S(r),$$
$$T(r,g) \leqslant N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g}) + S(r),$$

trong đó $S(r) = S(r,f) + S(r,g)$.

Chứng minh. Theo Định lý cơ bản thứ hai ta có:

$$T(r,f) \leqslant \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{f-1}) - N_0(r,\frac{1}{f'}) + S(r). \quad (2.1)$$

Điều kiện f, g chung nhau $1-$CM kéo theo

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\frac{1}{f-1}) &= \overline{N}_{1)}(r,\frac{1}{f-1}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f-1})\\ &= \overline{N}_{1)}(r,\frac{1}{f-1}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g-1}). \quad (2.2)\end{aligned}$$

Ta biết rằng nếu z_0 là không điểm đơn của $f-1$ và $g-1$ thì $H(z_0)=0$. Do vậy

$$\begin{aligned}N_{1)}(r,\frac{1}{f-1}) = N_{1)}(r,\frac{1}{g-1}) &\leqslant N(r,\frac{1}{H}) \leqslant T(r,H) + O(1)\\ &\leqslant N(r,H) + S(r,f) + S(r,g). \quad (2.3)\end{aligned}$$

Chúng ta thấy cực điểm của H chỉ có thể xảy ra tại:

i. Không điểm bội của f và g;

ii. Cực điểm bội của f và g;

iii. Không điểm của f' mà không là không điểm của $f(f-1)$, không điểm của g' mà không là không điểm của $g(g-1)$.

Do đó tất cả các cực điểm của H đều là cực điểm đơn, nên ta có

$$\begin{aligned}N(r,H) \leqslant\ & \overline{N}_{(2}(r,f) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,g)\\ &+ \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g}) + \overline{N}_0(r,\frac{1}{f'}) + \overline{N}_0(r,\frac{1}{g'}), \quad (2.4)\end{aligned}$$

trong đó $\overline{N}_0(r, \frac{1}{f'})$ là hàm đếm không kể bội tại không điểm của f' mà không là không điểm của $f(f-1)$, $\overline{N}_0(r, \frac{1}{g'})$ là hàm đếm không kể bội tại không điểm của g' mà không là không điểm của $g(g-1)$.

Kết hợp các bất đẳng thức (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4), ta có

$$\begin{aligned} T(r,f) \leqslant N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,g) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g-1}) \\ + \overline{N}_0(r,\frac{1}{g'}) + S(r,f) + S(r,g). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Từ định nghĩa của $\overline{N}_0(r, \frac{1}{g'})$, ta có

$$\overline{N}_0(r,\frac{1}{g'}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g-1}) + N_{(2}(r,\frac{1}{g}) - \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g}) \leqslant N(r,\frac{1}{g'}).$$

Theo định lý cơ bản thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned} N(r,\frac{1}{g'}) - N(r,\frac{1}{g}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g}) &= N(r,\frac{g}{g'}) \leqslant T(r,\frac{g}{g'}) \\ &= T(r,\frac{g'}{g}) + O(1) = N(r,\frac{g'}{g}) + S(r,g) \\ &\leqslant \overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g}) + S(r,g), \end{aligned}$$

kéo theo

$$N(r,\frac{1}{g'}) \leqslant \overline{N}(r,g) + N(r,\frac{1}{g}) + S(r,g).$$

Bởi vậy

$$\overline{N}_0(r,\frac{1}{g'}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g-1}) \leqslant \overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g}) + S(r,g). \tag{2.6}$$

Kết hợp (2.5) và (2.6), chúng ta có

$$T(r,f) \leqslant N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g}) + S(r).$$

Tương tự chúng ta có

$$T(r,g) \leqslant N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g}) + S(r).$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.3 ([1]). *Nếu* $H \not\equiv 0$, f *và* g *chung nhau giá trị* $1 - IM$, *khi đó*

$$\begin{aligned}T(r,f) \leqslant &\big(N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g})\big)\\ &+ 2\big(\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f})\big) + \overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})\\ &+ S(r,f) + S(r,g);\\ T(r,g) \leqslant &\big(N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g})\big)\\ &+ 2\big(\overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})\big) + \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f})\\ &+ S(r,f) + S(r,g).\end{aligned}$$

Bổ đề 2.4. *Nếu* $H \not\equiv 0$, $E_{1)}(1;f) = E_{1)}(1;g)$ *khi đó*

$$\begin{aligned}T(r,f) \leqslant &\big(N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g})\big)\\ &+ 2\big(\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f})\big) + S(r,f) + S(r,g);\\ T(r,g) \leqslant &\big(N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g})\big)\\ &+ 2\big(\overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})\big) + S(r,f) + S(r,g).\end{aligned}$$

Chứng minh. Theo Định lý cơ bản thứ hai ta có:

$$\begin{aligned}T(r,f) &\leqslant \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{f-1}) - N_0(r,\frac{1}{f'}) + S(r);\\ T(r,g) &\leqslant \overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g-1}) - N_0(r,\frac{1}{g'}) + S(r).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dễ thấy cực điểm của H chỉ có thể xảy ra tại:

i. Không điểm bội của f và g;

ii. Cực điểm bội của f và g;

iii. Không điểm của $f-1$ và $g-1$ với bội khác nhau;

iv. Không điểm của $f-1$ nhưng không là không điểm của $g-1$ và ngược lại;

v. Không điểm của f' mà không là không điểm của $f(f-1)$, không điểm của g' mà không là không điểm của $g(g-1)$.

Do đó tất cả các cực điểm của H đều là cực điểm đơn. Điều đó kéo theo

$$\begin{aligned}N(r,H) \leqslant\ & \overline{N}_{(2}(r,f) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,g) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g})\\ & + \overline{N}_L(r,\frac{1}{f-1}) + \overline{N}_L(r,\frac{1}{g-1}) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,\frac{1}{g-1}|f\neq 1)\\ & + \overline{N}_{f\geqslant 2}(r,\frac{1}{f-1}|g\neq 1) + \overline{N}_0(r,\frac{1}{f'}) + \overline{N}_0(r,\frac{1}{g'}). \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned}2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f\neq 1)\\ - \overline{N}_{f>2}(r,1;g) \leqslant N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g). \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Thật vậy, vì $E_{1)}(1;f) = E_{1)}(1;g)$ nên 1-điểm đơn của f và g là trùng nhau. Gọi z_0 là 1-điểm của f với bội p và là 1-điểm của g với bội q. Nếu $q=2$ thì p có thể nhận các giá trị: (i) $p=2$, (ii) $p\geqslant 3$, (iii) $p=0$. Khi $p=2$ thì z_0 được tính 1 lần trong $2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f\neq 1) - \overline{N}_{f>2}(r,1;g)$ và z_0 cũng được tính 1 lần trong $N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g)$. Do đó bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

Khi $p\geqslant 3$ thì z_0 được tính 1 lần trong $2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f\neq 1) - \overline{N}_{f>2}(r,1;g)$, z_0 được tính 1 lần trong $N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g)$. Do đó bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

Khi $p=0$ thì z_0 được tính 1 lần trong $2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f\neq 1) - \overline{N}_{f>2}(r,1;g)$, z_0 được tính 1 lần trong $N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g)$. Do đó bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

Nếu $q=3$ thì p có thể nhận các giá trị: (i) $p=2$, (ii) $p=3$, (iii) $p\geqslant 4$, (iv) $p=0$. Khi $p=2$ thì z_0 được tính 2 lần trong $2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f\neq 1) - \overline{N}_{f>2}(r,1;g)$, z_0 được tính 2 lần trong $N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g)$. Do đó bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

Khi $p = 3$ thì z_0 được tính 1 lần trong $2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f \neq 1) - \overline{N}_{f>2}(r,1;g)$, z_0 được tính 2 lần trong $N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g)$. Do đó bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

Khi $p \geqslant 4$ thì z_0 được tính 2 lần trong $2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f \neq 1) - \overline{N}_{f>2}(r,1;g)$, z_0 được tính 2 lần trong $N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g)$. Do đó bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

Khi $p = 0$ thì z_0 được tính 1 lần trong $2\overline{N}_L(r,1;f) + 2\overline{N}_L(r,1;g) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;f) + \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,1;g|f \neq 1) - \overline{N}_{f>2}(r,1;g)$, z_0 được tính 2 lần trong $N(r,1;g) - \overline{N}(r,1;g)$. Do đó bất đẳng thức đúng trong trường hợp này.

Tương tự ta cũng có bất đẳng thức với $q \geqslant 4$. Do đó bất đẳng thức (2.9) đúng trong mọi trường hợp. Hơn nữa, chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\begin{aligned} 2\overline{N}_L(r,1;g) + 2\overline{N}_L(r,1;f) + \overline{N}_E^{(2}(r,1;g) + \overline{N}_{f\geqslant 2}(r,1;f|g \neq 1) \\ - \overline{N}_{g>2}(r,1;f) \leqslant N(r,1;f) - \overline{N}(r,1;f). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Từ các bất đẳng thức (2.9) và (2.10) ta có

$$\begin{aligned} &\overline{N}(r,\frac{1}{g-1}) + \overline{N}(r,\frac{1}{f-1}) \\ &\quad \leqslant N_{1)}(r,\frac{1}{f-1}) + \overline{N}_E^{(2}(r,\frac{1}{f-1}) + \overline{N}_L(r,\frac{1}{f-1}) \\ &\qquad + \overline{N}_{f>2}(r,\frac{1}{g-1}) + \overline{N}_L(r,\frac{1}{g-1}) + \overline{N}_{f\geqslant 2}(r,\frac{1}{f-1}|g \neq 1) \\ &\qquad + N(r,\frac{1}{g-1}) - 2\overline{N}_L(r,\frac{1}{g-1}) - 2\overline{N}_L(r,\frac{1}{f-1}) \\ &\qquad - \overline{N}_E^{(2}(r,\frac{1}{f-1}) - \overline{N}_{g\geqslant 2}(r,\frac{1}{g-1}|f \neq 1). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Do không điểm đơn của $f-1$ và $g-1$ là không điểm của H nên ta có

$$N_{1)}(r,\frac{1}{f-1}) \leqslant N(r,\frac{1}{H}) \leqslant T(r,\frac{1}{H}) \leqslant N(r,H) + S(r,f) + S(r,g).$$

Nên (2.11) trở thành

$$\begin{aligned}
&\overline{N}(r, \frac{1}{g-1}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f-1}) \\
&\qquad \leqslant \overline{N}_{(2}(r, f) + \overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r, g) + \overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{g}) \\
&\qquad\quad + 2\overline{N}_{f\geqslant 2}(r, \frac{1}{f-1}|g \neq 1) + \overline{N}_{f>2}(r, \frac{1}{g-1}) + T(r, g) \\
&\qquad\quad - m(r, \frac{1}{g-1}) + \overline{N}_0(r, \frac{1}{f'}) + \overline{N}_0(r, \frac{1}{g'}) + S(r). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.7) và (2.12) ta có

$$\begin{aligned}
&T(r, f) + T(r, g) \\
&\qquad \leqslant \overline{N}_{(2}(r, f) + \overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r, g) + \overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{g}) \\
&\qquad\quad + 2\overline{N}_{f\geqslant 2}(r, \frac{1}{f-1}|g \neq 1) + \overline{N}_{f>2}(r, \frac{1}{g-1}) \\
&\qquad\quad + T(r, g) - m(r, \frac{1}{g-1}) + S(r). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức sau đã được chứng minh trong [2]:

$$\begin{aligned}
&2\overline{N}_{f\geqslant 2}(r, \frac{1}{f-1}|g \neq 1) + \overline{N}_{f>2}(r, \frac{1}{g-1}) \\
&\qquad\qquad \leqslant 2(\overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, \frac{1}{f})) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Do đó (2.13) trở thành

$$\begin{aligned}
T(r, f) \leqslant\ & N_2(r, f) + N_2(r, \frac{1}{f}) + N_2(r, g) + N_2(r, \frac{1}{g}) \\
&+ 2(\overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, \frac{1}{f})) + S(r).
\end{aligned}$$

Tương tự ta chứng minh được bất đẳng thức còn lại. □

Bổ đề 2.5 ([5]). *Nếu* $H \not\equiv 0$, $E_{2)}(1; f) = E_{2)}(1; g)$ *thì*

$$\begin{aligned}
T(r, f) + T(r, g) \leqslant\ & 2\big(N_2(r, f) + N_2(r, \frac{1}{f}) + N_2(r, g) + N_2(r, \frac{1}{g})\big) \\
&+ \frac{1}{2}\big(\overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, g) + \overline{N}(r, \frac{1}{g})\big) + S(r).
\end{aligned}$$

Bổ đề 2.6 ([4]). *Nếu* $H \equiv 0$ *và*

$$\limsup_{r\notin I,\ r\longrightarrow\infty} \frac{\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,1/f)+\overline{N}(r,g)+\overline{N}(r,1/g)}{T(r)} < 1,$$

trong đó $T(r) = \max\{T(r,f), T(r,g)\}$, *thì* $f \equiv g$ *hoặc* $fg = 1$. I *là một tập có độ đo hữu hạn.*

Bổ đề 2.7 ([11]). *Nếu* f *là hàm phân hình khác hằng và* k *là số nguyên dương thì*

$$N_2(r,\frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant N_{k+2}(r,\frac{1}{f}) + k\overline{N}(r,f) + S(r,f);$$
$$N_2(r,\frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant N_{k+2}(r,\frac{1}{f}) + T(r,f^{(k)}) - T(r,f) + S(r,f).$$

Bổ đề 2.8 ([9]). *Cho* f *là hàm phân hình khác hằng,* k,p *là các số nguyên dương, khi đó*

$$N_p(r,\frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant N_{k+p}(r,\frac{1}{f}) + k\overline{N}(r,f) + S(r,f);$$
$$N_1(r,\frac{1}{f^{(k)}}) = \overline{N}_1(r,\frac{1}{f^{(k)}}).$$

Bổ đề 2.9 ([12]). *Cho* f *là hàm phân hình khác hằng,* k *là số nguyên dương và* c *là số phức khác không. Khi đó*

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leqslant \overline{N}(r,f) + N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}-c}) - N(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}) + S(r,f) \\ &\leqslant \overline{N}(r,f) + N_{k+1}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}-c}) - N_0(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}) + S(r,f), \end{aligned}$$

trong đó $N_0(r,\frac{1}{f^{(k+1)}})$ *là hàm đếm tại không điểm của* $f^{(k+1)} = 0$, *nhưng không là không điểm của* $f(f^{(k)}-c)$.

Năm 2011, K. Liu, X. L. Liu và T. B. Cao ([8]) đã chứng minh những kết quả sau:

Định lý 2.10 ([8]). *Cho f và g là các hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in C$ là số phức khác không và $n \in N$. Nếu $n \geqslant 14$, $f^n(z)f(z+c)$ và $g^n(z)g(z+c)$ chung nhau giá trị $1 - CM$, khi đó $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, trong đó $t^{n+1} = 1$.*

Định lý 2.11 ([8]). *Với các điều kiện như Định lý 2.10 và nếu $n \geqslant 26$, $f^n(z)f(z+c)$ và $g^n(z)g(z+c)$ chung nhau giá trị $1 - IM$, thì ta có $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, trong đó $t^{n+1} = 1$.*

Các kết quả sau của chúng tôi là tổng quát của hai định lý trên

Định lý 2.12. *Cho f and g là các hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác không, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $f^n(z)f^m(z+c)$ và $g^n(z)g^m(z+c)$ chung nhau $1-CM$. Khi đó có các khẳng định sau:*

1. *Nếu $m = 1$, $n > \max\{9, 13 - 2(\Theta(\infty, f) + \Theta(\infty, g) + \Theta(0, f) + \Theta(0, g))\}$ thì $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, trong đó $t^{n+1} = 1$.*

2. *Nếu $m \geq 2$, $n > \max\{8 + m, 16 + m - 2(\Theta(\infty, f) + \Theta(\infty, g) + \Theta(0, f) + \Theta(0, g) + \Theta_c(\infty, f) + \Theta_c(\infty, g))\}$ thì $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, trong đó $t^{n+m} = 1$.*

Chứng minh. Đặt

$$F(z) = f^n(z)f^m(z+c), \quad G(z) = g^n(z)g^m(z+c)$$

và

$$h = \frac{F''}{F'} - 2\frac{F'}{F-1} - \frac{G''}{G'} + 2\frac{G'}{G-1}.$$

Ta xem xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: $m = 1$.

Nếu $h \not\equiv 0$, theo Bổ đề 2.2 ta có

$$\begin{aligned} T(r, F) \leqslant N_2(r, F) + N_2(r, \frac{1}{F}) + N_2(r, G) \\ + N_2(r, \frac{1}{G}) + S(r, F) + S(r, G); \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$T(r,G) \leqslant N_2(r,F) + N_2(r,\frac{1}{F}) + N_2(r,G) \\ + N_2(r,\frac{1}{G}) + S(r,F) + S(r,G). \quad (2.15)$$

Bởi cách xác định F and G, ta có

$$T(r,F) \geqslant (n-m)T(r,f) + S(r,f);$$

$$T(r,G) \geqslant (n-m)T(r,g) + S(r,g);$$

$$T(r,F) \leqslant (n+m)T(r,f) + S(r,f);$$

$$T(r,G) \leqslant (n+m)T(r,g) + S(r,g).$$

Khi đó

$$S(r,F) = S(r,f), S(r,G) = S(r,g).$$

Dễ thấy

$$N_2(r, f^n(z)f(z+c)) \leqslant 2\overline{N}(r,f) + N(r, f(z+c)); \quad (2.16)$$

$$N_2(r, \frac{1}{f^n(z)f(z+c)}) \leqslant 2\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{f(z+c)}). \quad (2.17)$$

Tương tự

$$N_2(r, g^n(z)g(z+c)) \leqslant 2\overline{N}(r,g) + N(r, g(z+c)); \quad (2.18)$$

$$N_2(r, \frac{1}{g^n(z)g(z+c)}) \leqslant 2\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + N(r, \frac{1}{g(z+c)}). \quad (2.19)$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.14)-(2.19) ta có

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,f) &\leqslant T(r,F) + S(r,f) \\ &\leqslant 2\overline{N}(r,f) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + 2\overline{N}(r,g) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{g}) \\ &\quad + 2(T(r,f) + T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g) \\ &\leqslant (6 - 2(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f)))T(r,f) \\ &\quad + (6 - 2(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g)))T(r,g) + S(r).\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,f) \leqslant &(12-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,f)+\Theta(0,g)))T(r)\\ &+S(r). \end{aligned}\tag{2.20}$$

Trong đó

$$T(r)=\max(T(r,f),T(r,g)),\quad S(r)=o(T(r)).$$

Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,g) \leqslant &(12-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,f)+\Theta(0,g)))T(r)\\ &+S(r). \end{aligned}\tag{2.21}$$

Kết hợp (2.20) và (2.21) ta có

$$\begin{aligned}(n-1)T(r) \leqslant &(12-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,f)+\Theta(0,g)))T(r)\\ &+S(r). \end{aligned}$$

Mâu thuẫn với

$$n>\max\{9,13-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g))\}.$$

Từ Bổ đề 2.6, ta có

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{G})\\ &\qquad \leqslant 4(T(r,f)+T(r,g))+S(r)\leqslant 8T(r)+S(r).\end{aligned}$$

Vì

$$(n-1)T(r)+S(r)\leqslant \max(T(r,F),T(r,G)),$$

và $S(r)=o(T(r))$, khi $r\longrightarrow\infty$ ngoài một tập có độ đo hữu hạn nên ta có

$$\begin{aligned}&\limsup_{r\notin I,\ r\longrightarrow\infty}\frac{\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,1/F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,1/G)}{\max(T(r,F),T(r,G))}\\ &\qquad\leqslant \limsup_{r\notin I,\ r\longrightarrow\infty}\frac{8T(r)+S(r)}{(n-1)T(r)+S(r)}=\frac{8}{n-1}<1.\end{aligned}$$

Vì

$$n > \max\{9, 13 - 2(\Theta(\infty, f) + \Theta(0, f) + \Theta(\infty, g) + \Theta(0, g))\}.$$

Nên theo Bổ đề 2.6, $F \equiv G$, hoặc $FG \equiv 1$.

Nếu $F \equiv G$, khi đó $f^n(z)f(z+c) = g^n(z)g(z+c)$. Đặt $h = \dfrac{f}{g}$, nếu h không là hàm hằng, ta có

$$h^n(z) = \frac{1}{h(z+c)}.$$

Theo Bổ đề 2.1 ta có

$$nT(r, h) = T(r, h) + S(r, h),$$

mâu thuẫn với

$$n > \max\{\ 9, 13 - 2(\Theta(\infty, f) + \Theta(0, f) + \Theta(\infty, g) + \Theta(0, g))\}\ .$$

Do đó h phải là hàm hằng, suy ra $f \equiv tg,\ t^{n+1} = 1$. Nếu $FG \equiv 1$, khi đó $f^n(z)f(z+c).g^n(z)g(z+c) = 1$, đặt $H = fg$. Ta thu được

$$H^n(z) = \frac{1}{H(z+c)}$$

Lý luận tương tự như trên, ta có

$$fg \equiv t,\ t^{n+1} = 1.$$

Trường hợp 2. $m \geqslant 2$, Bởi cách xác định của F,G, ta nhận được

$$N_2(r, \frac{1}{f^n(z)f^m(z+c)}) \leqslant 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + 2\overline{N}(r, \frac{1}{f(z+c)}); \tag{2.22}$$

$$N_2(r, f^n(z)f^m(z+c)) \leqslant 2\overline{N}(r, f) + 2\overline{N}(r, f(z+c)). \tag{2.23}$$

Tương tự

$$N_2(r, \frac{1}{g^n(z)g^m(z+c)}) \leqslant 2\overline{N}(r, \frac{1}{g}) + 2\overline{N}(r, \frac{1}{g(z+c)}); \tag{2.24}$$

$$N_2(r, g^n(z)g^m(z+c)) \leqslant 2\overline{N}(r,g) + 2\overline{N}(r, g(z+c)). \qquad (2.25)$$

Từ (2.14), (2.15), kết hợp với các bất đẳng thức (2.22)-(2.25), ta có

$$\begin{aligned}(n-m)T(r,f) &\leqslant T(r,F) + S(r,f)\\ &\leqslant 2(\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g}))\\ &\quad + 2(\overline{N}(r,f(z+c)) + \overline{N}(r,g(z+c)))\\ &\quad + 2T(r,f) + 2T(r,g) + S(r,f) + S(r,g)\\ &\leqslant (8 - 2(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f) + \Theta_c(\infty,f)))T(r,f)\\ &\quad + (8 - 2(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g) + \Theta_c(\infty,g)))T(r,g) + S(r).\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}(n-m)T(r,f) &\leqslant (16 - 2(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f) + \Theta_c(\infty,f)))T(r)\\ &\quad - 2(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g) + \Theta_c(\infty,g))T(r) + S(r).\end{aligned} \qquad (2.26)$$

Tương tự

$$\begin{aligned}(n-m)T(r,g) &\leqslant (16 - 2(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f) + \Theta_c(\infty,f)))T(r)\\ &\quad - 2(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g) + \Theta_c(\infty,g))T(r) + S(r).\end{aligned} \qquad (2.27)$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(n-m)T(r) &\leqslant (16 - 2(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f) + \Theta_c(\infty,f)))T(r)\\ &\quad - 2(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g) + \Theta_c(\infty,g))T(r) + S(r).\end{aligned}$$

Mâu thuẫn với

$$\begin{aligned}n > \max\{8+m, 16+m - 2(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f) + \Theta_c(\infty,f) + \Theta(\infty,g)\\ + \Theta(0,g) + \Theta_c(\infty,g))\}.\end{aligned}$$

Nên $h \equiv 0$, theo Bổ đề 2.6, ta có

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{G})\\&\qquad\leqslant 4(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g)\leqslant 8T(r)+S(r).\end{aligned}$$

Vì

$$(n-m)\max T(r)+S(r)\leqslant \max\{T(r,F),T(r,G)\},$$

nên

$$\begin{aligned}&\limsup_{r\notin I,\ r\longrightarrow\infty}\frac{\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,1/F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,1/G)}{\max(T(r,F),T(r,G))}\\&\qquad\leqslant \limsup_{r\notin I,\ r\longrightarrow\infty}\frac{8T(r)+S(r)}{(n-m)T(r)+S(r)}=\frac{8}{n-m}<1.\end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned}n>\max\{8+m,&16+m-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta_c(\infty,f)\\&+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)+\Theta_c(\infty,g))\}.\end{aligned}$$

Suy ra $F\equiv G$, hoặc $FG\equiv 1$. Nếu $F\equiv G$, khi đó

$$f^n(z)f^m(z+c)=g^n(z)g^m(z+c),$$

do đó $f\equiv tg,\ t^{n+m}=1$. Nếu $FG\equiv 1$, ta nhận được

$$f^n(z)f^m(z+c).g^n(z)g^m(z+c)=1.$$

Đặt $H=fg$, ta có

$$H^n(z)=\frac{1}{H^m(z+c)}.$$

Lý luận tương tự như Trường hợp 1, ta nhận được

$$fg\equiv t,t^{n+m}=1.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 2.13. *Cho f and g là các hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác không, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $f^n(z)f^m(z+c)$ và $g^n(z)g^m(z+c)$ chung nhau $1-IM$. Đặt:*

$$\begin{aligned}\Theta_{1,f,g}(\infty,0,c) =& 3(\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,f)+\Theta(0,g))\\ &+\Theta_c(\infty,f)+\Theta_c(\infty,g)+\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}\\ &+\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}+\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{2,f,g}(\infty,0,c) =& 3(\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,f)+\Theta(0,g)\\ &+\Theta_c(\infty,f)+\Theta_c(\infty,g))+\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}\\ &+\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}+\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\}.\end{aligned}$$

Khi đó ta có các khẳng định sau

1. *Nếu $m = 1$ và $n > \max\{9, 25 - \Theta_{1,f,g}(\infty, 0, c)\}$ thì $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, trong đó $t^{n+1} = 1$.*

2. *Nếu $m \geq 2$ và $n > \max\{8+m, 28+m-\Theta_{2,f,g}(\infty, 0, c)\}$ thì $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, trong đó $t^{n+m} = 1$.*

Chứng minh. Đặt

$$F(z) = f^n(z)f^m(z+c), \quad G(z) = g^n(z)g^m(z+c)$$

và

$$h = \frac{F''}{F'} - 2\frac{F'}{F-1} - \frac{G''}{G'} + 2\frac{G'}{G-1}.$$

Nếu $h \not\equiv 0$. Chúng ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. $m = 1$, Theo Bổ đề 2.3, ta có

$$\begin{aligned}T(r,F) \leqslant& N_2(r,F)+N_2(r,\frac{1}{F})+N_2(r,G)+N_2(r,\frac{1}{G})+2\overline{N}(r,F)\\ &+2\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{G})+S(r,f)+S(r,g);\end{aligned}$$

$$T(r,G) \leqslant N_2(r,F) + N_2(r,\frac{1}{F} + N_2(r,G) + N_2(r,\frac{1}{G}) + 2\overline{N}(r,G)$$
$$+ 2\overline{N}(r,\frac{1}{G}) + \overline{N}(r,F) + \overline{N}(r,\frac{1}{F}) + S(r,f) + S(r,g).$$

Lý luận như Định lý 2.12, ta nhận được

$$\begin{aligned}
T(r,F) \leqslant\ & 2\overline{N}(r,f) + N(r,f(z+c) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{f(z+c)}) \\
& + 2\overline{N}(r,f) + 2\overline{N}(r,f(z+c) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{f(z+c)}) \\
& + 2\overline{N}(r,g) + N(r,g(z+c) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + N(r,\frac{1}{g(z+c)}) \\
& + \overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,g(z+c) + \overline{N}(r,\frac{1}{g}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g(z+c)}) \\
\leqslant\ & 4(\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f})) + 2\overline{N}(r,f(z+c)) + 4T(r,f) \\
& + 3(\overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})) + \overline{N}(r,g(z+c)) + 3T(r,g) + S(r).
\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
(n-1)T(r,f) &\leqslant T(r,F) + S(r,f) \\
&\leqslant (14 - 4(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f)) - 2\Theta_c(\infty,f))T(r,f) \\
&\quad + (10 - 3(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g)) - \Theta_c(\infty,g))T(r,g) + S(r) \\
&\leqslant (14 - 4(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f)) - 2\Theta_c(\infty,f))T(r) \\
&\quad + (10 - 3(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g)) - \Theta_c(\infty,g))T(r) + S(r) \\
&\leqslant (24 - 3(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f) + \Theta(\infty,g) + \Theta(0,g)))T(r) \\
&\quad - (\Theta_c(\infty,f) + \Theta_c(\infty,g))T(r) - \min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}T(r) \\
&\quad - (\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\} + \min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\})T(r) + S(r).
\end{aligned}$$

Tương tự

$$
\begin{aligned}
&(n{-}1)T(r,g)\\
&\quad\leqslant(24-3(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)))T(r)\\
&\qquad-(\Theta_c(\infty,f)+\Theta_c(\infty,g))T(r)-\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}T(r)\\
&\qquad-(\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}+\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\})T(r)+S(r).
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
&(n{-}1)T(r)\\
&\quad\leqslant(24-3(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)))T(r)\\
&\qquad-(\Theta_c(\infty,f)+\Theta_c(\infty,g))T(r)-\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}T(r)\\
&\qquad-(\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}+\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\})T(r)+S(r).
\end{aligned}
$$

Mâu thuẫn với

$$
\begin{aligned}
n>\max\{9{,}25&-3(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g))\\
&-(\Theta_c(\infty,f)+\Theta_c(\infty,g))-\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}\\
&-\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}-\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\}\}.
\end{aligned}
$$

Nên $h\equiv 0$, lý luận tương tự như Định lý 2.12, ta nhận được điều cần chứng minh.

Trường hợp 2. $m\geqslant 2$. Lý luận như Trường hợp 2 của Định lý 2.12, ta có

$$
\begin{aligned}
T(r,F)\leqslant\ & 2\overline{N}(r,f)+2\overline{N}(r,f(z+c))+2\overline{N}(r,\frac{1}{f})+2\overline{N}(r,\frac{1}{f(z+c)})\\
&+2\overline{N}(r,f)+2\overline{N}(r,f(z+c))+2\overline{N}(r,\frac{1}{f})+2\overline{N}(r,\frac{1}{f(z+c)})\\
&+2\overline{N}(r,g)+2\overline{N}(r,g(z+c))+2\overline{N}(r,\frac{1}{g})+2\overline{N}(r,\frac{1}{g(z+c)})\\
&+\overline{N}(r,g)+\overline{N}(r,g(z+c))+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g(z+c)})
\end{aligned}
$$

$$\leqslant 4(\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,f(z+c)))+4T(r,f)$$
$$+3(\overline{N}(r,g)+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,g(z+c)))+3T(r,g)+S(r).$$

Như vậy ta nhận được

$$\begin{aligned}(n-m)T(r,f) &\leqslant T(r,F)+S(r,f)\\ &\leqslant (16-4(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta_c(\infty,f)))T(r,f)\\ &\quad +(12-3(\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)+\Theta_c(\infty,g)))T(r,g)+S(r).\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}(n-m)T(r,g) &\leqslant T(r,G)+S(r,g)\\ &\leqslant (16-4(\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)+\Theta_c(\infty,g)))T(r,g)\\ &\quad +(12-3(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta_c(\infty,f)))T(r,f)+S(r).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}&(n-m)T(r)\\ &\leqslant(28-3(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)+\Theta_c(\infty,f)\\ &\quad +\Theta_c(\infty,g))-\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}-\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}\\ &\quad -\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\})T(r)+S(r).\end{aligned}$$

Mâu thuẫn với

$$\begin{aligned}n>\max\{8+m,&28+m-3(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)\\ &+\Theta_c(\infty,f)+\Theta_c(\infty,g))-\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}\\ &-\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}-\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\}\}.\end{aligned}$$

Do vậy $h\equiv 0$. Lý luận tương tự như Định lý 2.12 ta nhận được điều cần chứng minh. □

Nhận xét. Chú ý rằng, khi f hoặc g là hàm phân hình thực sự (có cực điểm) và $\Theta(\infty, f) > 0$ hoặc $\Theta(\infty, g) > 0$. Nên trong trường hợp $m = 1$, Định lý 2.12 của chúng tôi mạnh hơn Định lý 2.10. Hơn nữa, Định lý 2.12 giải quyết thêm trường hợp $m \geqslant 2$. Tương tự, Định lý 2.13 của chúng tôi mạnh hơn Định lý 2.11.

Năm 2011, K. Liu, X. L. Liu và T. B. Cao chứng minh

Định lý 2.14 ([7]). *Cho f và g là các hàm nguyên siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác không, $n \in \mathbb{N}$, k là các số nguyên dương, $n \geqslant 2k+6$. Nếu $(f^n(z)f(z+c))^{(k)}, (g^n(z)g(z+c))^{(k)}$ chung nhau $1-CM$, thì $f = tg$ mà $t^{n+1} = 1$ hoặc $f(z) = c_1e^{\alpha z}, g(z) = c_2e^{-\alpha z}$, trong đó α, c_1, c_2 là các hằng số thỏa mãn $(-1)^k(c_1.c_2)^n[(n+1)\alpha]^{2k} = 1$.*

Định lý 2.15 ([8]). *Cho f là hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là số phức khác không và $\alpha(z)$ là hàm đủ nhỏ của f. Nếu $n \geqslant 6$, khi đó phương trình $f^n(z)f(z+c) - \alpha(z) = 0$ có vô hạn nghiệm.*

Định lý 2.16 ([8]). *Cho f là hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là số phức khác không và $\alpha(z)$ là hàm đủ nhỏ của f. Nếu $n \geqslant 7$, khi đó phương trình $f^n(z)(f(z+c)-f(z))-\alpha(z) = 0$ có vô hạn nghiệm.*

Trong phần này chúng tôi chứng minh một số kết quả mới liên quan tới đạo hàm và đa thức sai phân.

Định lý 2.17. *Cho f và g là các hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác không, $n \in \mathbb{N}$, k là các số nguyên dương. Nếu một trong các điều kiện sau đúng:*

1. *$n \geqslant 10k+24$ và $E_{1)}(1; (f^n(z)f(z+c))^{(k)}) = E_{1)}(1; (g^n(z)g(z+c))^{(k)})$;*
2. *$n \geqslant \dfrac{11}{2}k+17$ và $E_{2)}(1; (f^n(z)f(z+c))^{(k)}) = E_{2)}(1; (g^n(z)g(z+c))^{(k)})$;*
3. *$n \geqslant 4k+15$ và $(f^n(z)f(z+c))^{(k)}$, $(g^n(z)g(z+c))^{(k)}$ chung nhau $1-CM$;*

4. $n \geqslant 13k + 27$ *và* $(f^n(z)f(z+c))^{(k)}$,$(g^n(z)g(z+c))^{(k)}$ *chung nhau* $1 - IM$,

khi đó $f = tg$ *hoặc* $(f^n(z)f(z+c))^{(k)}.(g^n(z)g(z+c))^{(k)} = 1$, *trong đó* $t^{n+1} = 1$.

Chứng minh. Trước tiên chúng ta chứng minh Khẳng định 1. Đặt

$$F(z) = f^n(z)f(z+c), \quad G(z) = g^n(z)g(z+c).$$

Từ giả thiết suy ra $E_{1)}(1; F^{(k)}) = E_{1)}(1; G^{(k)})$. Đặt

$$H = \frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}} - 2\frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)} - 1} - \frac{G^{(k+2)}}{G^{(k+1)}} + 2\frac{G^{(k+1)}}{G^{(k)} - 1}.$$

Nếu $H \not\equiv 0$, từ Bổ đề 2.4, ta có

$$\begin{aligned}
&T(r, F^{(k)}) + T(r, G^{(k)})\\
&\quad \leqslant 2\big(N_2(r, F^{(k)}) + N_2(r, \frac{1}{F^{(k)}}) + N_2(r, G^{(k)}) + N_2(r, \frac{1}{G^{(k)}})\big)\\
&\quad\quad + 2\big(\overline{N}(r, F^{(k)}) + \overline{N}(r, \frac{1}{F^{(k)}}) + \overline{N}(r, G^{(k)}) + \overline{N}(r, \frac{1}{G^{(k)}})\big)\\
&\quad\quad + S(r, F^{(k)}) + S(r, G^{(k)}).
\end{aligned}$$

Từ Bổ đề 2.7 và 2.8 ta có

$$\begin{aligned}
&T(r,F) + T(r,G)\\
&\quad \leqslant 2N_2(r, F^{(k)}) + 2N_2(r, G^{(k)}) + k\overline{N}(r, F) + 2N_{k+2}(r, \frac{1}{F})\\
&\quad + 2\overline{N}(r, F^{(k)}) + 2k\overline{N}(r, F) + 2N_{k+1}(r, \frac{1}{F}) + k\overline{N}(r, G)\\
&\quad + 2N_{k+2}(r, \frac{1}{G}) + 2\overline{N}(r, G^{(k)}) + 2k\overline{N}(r, G) + 2N_{k+1}(r, \frac{1}{G})\\
&\quad + S(r, F^{(k)}) + S(r, G^{(k)}) + S(r, F) + S(r, G).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Từ Bổ đề 2.1, ta có

$$S(r, F^{(k)}) = S(r, F) = S(r, f); \quad S(r, G^{(k)}) = S(r, G) = S(r, g).$$

Do vậy, (2.28) trở thành

$$\begin{aligned} T(r,F)+T(r,G) \leqslant &(3k+6)\overline{N}(r,F)+2N_{k+2}(r,\frac{1}{F})+2N_{k+1}(r,\frac{1}{F}) \\ &+(3k+6)\overline{N}(r,G)+2N_{k+2}(r,\frac{1}{G})+2N_{k+1}(r,\frac{1}{G}) \\ &+S(r,f)+S(r,g). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Sử dụng Bổ đề 2.1, ta có

$$T(r,f^n(z)f(z+c)) \geq (n-1)T(r,f(z))+S(r,f). \tag{2.30}$$

Từ cách xác định F, ta có

$$\begin{aligned} N_{k+2}(r,\frac{1}{F}) &= N_{k+2}(r,\frac{1}{f^n(z)f(z+c)}) \\ &\leqslant (k+2)\overline{N}(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f(z+c)})+S(r,f); \qquad (2.31) \\ N_{k+1}(r,\frac{1}{F}) &= N_{k+1}(r,\frac{1}{f^n(z)f(z+c)}) \\ &\leqslant (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f(z+c)})+S(r,f); \qquad (2.32) \\ \overline{N}(r,F) &\leqslant \overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,f(z+c)). \qquad (2.33) \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} N_{k+2}(r,\frac{1}{G}) &= N_{k+2}(r,\frac{1}{g^n(z)g(z+c)}) \\ &\leqslant (k+2)\overline{N}(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g(z+c)})+S(r,g); \qquad (2.34) \\ N_{k+1}(r,\frac{1}{G}) &= N_{k+1}(r,\frac{1}{g^n(z)g(z+c)}) \\ &\leqslant (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g(z+c)})+S(r,g); \qquad (2.35) \\ \overline{N}(r,G) &\leqslant \overline{N}(r,g)+\overline{N}(r,g(z+c)). \qquad (2.36) \end{aligned}$$

Từ (2.29)-(2.36), ta có

$$(n-(10k+23))(T(r,f)+T(r,g)) \leqslant S(r,f)+S(r,g).$$

Mâu thuẫn với $n \geq 10k + 24$. Do vậy $H \equiv 0$. Suy ra

$$\frac{1}{F^{(k)} - 1} = \frac{a}{G^{(k)} - 1} + b, \tag{2.37}$$

Trong đó a, b là các hằng số phức, $a \neq 0$. Từ (2.37), ta có

$$F^{(k)} = \frac{(b+1)G^{(k)} + a - b - 1}{bG^{(k)} + a - b}; \quad G^{(k)} = \frac{(b-a)F^{(k)} + a - b - 1}{bF^{(k)} - (b+1)}. \tag{2.38}$$

Chúng ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $b \neq 0$, $a = b$, $b = -1$. Khi đó $F^{(k)}.G^{(k)} = 1$. Do vậy

$$(f^n(z)f(z+c))^{(k)}(g^n(z)g(z+c))^{(k)} = 1.$$

Nếu $b \neq 0$, $a = b$, $b \neq -1$, từ (2.38), ta có

$$\frac{1}{F^{(k)}} = \frac{bG^{(k)}}{(b+1)G^{(k)} - 1}, \quad G^{(k)} = \frac{-1}{bF^{(k)} - (b+1)}. \tag{2.39}$$

Nên theo Bổ đề 2.8 ta có

$$\overline{N}(r, \frac{1}{F^{(k)}}) = \overline{N}(r, \frac{1}{G^{(k)} - \frac{1}{b+1}}) \leqslant k\overline{N}(r, F) + N_{k+1}(r, \frac{1}{F}) + S(r, f).$$

Từ Bổ đề 2.9, ta nhận được

$$\begin{aligned} T(r; F) &\leqslant \overline{N}(r, F) + N_{k+1}(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}(r, \frac{1}{F^{(k)} - \frac{b+1}{b}}) + S(r, f) \\ &\leqslant (k+4)T(r, g) + (3k+2)T(r, f) + S(r). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Từ (2.39) và Bổ đề 2.9, ta có

$$T(r, G) \leqslant (k+4)T(r, g) + (3k+2)T(r, f) + S(r). \tag{2.41}$$

Từ (2.40) và (2.41), ta có

$$(n - (4k+7))(T(r, f) + T(r, g)) \leqslant S(r, f) + S(r, g),$$

Mâu thuẫn với $n \geq 10k + 24$.

Trường hợp 2: $b \neq 0$, $a \neq b$, $b = -1$. Từ (2.38), ta có

$$F^{(k)} = \frac{a}{-G^{(k)} + a + 1}, \quad \frac{1}{G^{(k)}} = \frac{-F^{(k)}}{-(a+1)F^{(k)} + a}.$$

Nếu $b \neq 0$, $a \neq b$, $b \neq -1$. Từ (2.38), ta có

$$F^{(k)} - (1 + \frac{1}{b}) = \frac{-a}{b^2(G^{(k)} + \dfrac{a-b}{b})}, \quad G^{(k)} = \frac{(b-a)F^{(k)} + a - b - 1}{bF^{(k)} - (b+1)}$$

Lý luận như trường hợp, ta suy ra mâu thuẫn.

Trường hợp 3: $b = 0$. Khi đó

$$F^{(k)} = \frac{1}{a}G^{(k)} + 1 - \frac{1}{a} \tag{2.42}$$

$$F = \frac{1}{a}G + Q(z). \tag{2.43}$$

Từ (2.43), ta có

$$S(r, F) = S(r, G) = S(r, f) = S(r, g)$$

Dễ thấy

$$T(r, g) \leqslant \frac{n+1}{n-1}T(r, f) + S(r, f).$$

Nếu $Q(z) \not\equiv 0$. Theo Định lý cơ bản thứ hai cho hàm đủ nhỏ, ta có

$$T(r, F) \leqslant N(r, F) + N(r, \frac{1}{F}) + N(r, \frac{1}{F - Q}) + S(r, F)$$

Do vậy

$$(n-1)T(r, f) \leqslant (4 + 2\frac{n+1}{n-1})T(r, f) + S(r, f)$$

Mâu thuẫn với $n \geq 10k + 24$. Do đó $Q \equiv 0$, nên $F = \dfrac{1}{a}G$. Suy ra

$$F^{(k)} = \frac{1}{a}G^{(k)}.$$

Từ (2.42), ta có $1 - \dfrac{1}{a} = 0$, nên $a = 1$, kéo theo $F \equiv G$. Nên ta nhận được

$$f^n(z)f(z+c) = g^n(z)g(z+c). \qquad (2.44)$$

Đặt $h = \dfrac{f}{g}$. Nếu h không là hàm hằng thì $h^n(z) = \dfrac{1}{h(z+c)}$. Sử dụng Bổ đề 2.1, ta có

$$nT(r,h) = T(r,h) + S(r,h).$$

Mâu thuẫn với $n \geq 10k + 24$, nên h là hàm hằng. Khi đó $f = tg$, trong đó $t^{n+1} = 1$. Khẳng định 1 được chứng minh hoàn toàn.

Bằng cách sử dụng Bổ đề 2.5, và lý luận tương tự như chứng minh Khẳng định 1 ta chứng minh được Khẳng định 2. Bằng cách sử dụng Bổ đề 2.2 và lý luận tương tự như Khẳng định 1 ta chứng minh được Khẳng định 3. Bằng cách sử dụng Bổ đề 2.3 và lý luận tương tự như Khẳng định 1 ta chứng minh được Khẳng định 4. □

Định lý 2.18. *Cho f và g là các hàm nguyên siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác không, $n \in \mathbb{N}$, k là các số nguyên dương. Nếu một trong các điều kiện sau đúng:*
1) $n \geqslant 4k+10$ và $E_{1)}(1;(f^n(z)f(z+c))^{(k)}) = E_{1)}(1;(g^n(z)g(z+c))^{(k)})$;
2) $n \geqslant \dfrac{5}{2}k+7$ và $E_{2)}(1;(f^n(z)f(z+c))^{(k)}) = E_{2)}(1;(g^n(z)g(z+c))^{(k)})$,
khi đó $f = tg$, trong đó $t^{n+1} = 1$ hoặc $f(z) = c_1e^{\alpha z}, g(z) = c_2e^{-\alpha z}$, trong đó α, c_1, c_2 là các hằng số thỏa mãn $(-1)^k(c_1.c_2)^n[(n+1)\alpha]^{2k} = 1$.

Chứng minh. Ta chứng minh (1), (2) được chứng minh tương tự. Đặt

$$F(z) = f^n(z)f(z+c), \quad G(z) = g^n(z)g(z+c).$$

Từ giả thiết suy ra $E_{1)}(1;F^{(k)}) = E_{1)}(1;G^{(k)})$. Đặt

$$H = \frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}} - 2\frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1} - \frac{G^{(k+2)}}{G^{(k+1)}} + 2\frac{G^{(k+1)}}{G^{(k)}-1}.$$

Nếu $H \not\equiv 0$, do f là hàm nguyên nên

$$\begin{aligned} T(r, f^n(z)f(z+c)) &= m(r, f^n(z)f(z+c)) \\ &\leqslant m(r, f^n(z)) + m(r, f(z+c)) \\ &= (n+1)T(r,f) + S(r,f). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (n+1)T(r,f) &= (n+1)T(r, f(z+c)) + S(r,f) \\ &= T(r, f^{n+1}(z+c)) + S(r,f) \\ &= m(r, f^{n+1}(z+c)) + S(r,f) \\ &= m(r, f^n(z+c)f(z)\frac{f(z+c)}{f(z)}) \\ &\leqslant m(r, f^n(z+c)f(z)) + m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}) + S(r,f) \\ &= m(r, f^n(z+c)f(z)) + S(r,f) \\ &= m(r, f^n(z)f(z+c)(\frac{f(z+c)}{f(z)})^{n-1}) + S(r,f) \\ &\leqslant m(r, f^n(z)f(z+c)) + m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)})^{n-1}) + S(r,f) \\ &= T(r, f^n(z)f(z+c)) + S(r,f). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$T(r, f^n(z)f(z+c)) = (n+1)T(r,f) + S(r,f).$$

Khi đó lý luận tương tự như Định lý 2.17, (2.28) trở thành

$$\begin{aligned} T(r,F) + T(r,G) \leqslant\ & 2N_{k+2}(r, \frac{1}{F}) + 2N_{k+1}(r, \frac{1}{F}) + 2N_{k+2}(r, \frac{1}{G}) \\ & + 2N_{k+1}(r, \frac{1}{G}) + S(r,F) + S(r,G). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$(n - (4k+9))(T(r,f) + T(r,g)) \leqslant S(r,f) + S(r,g).$$

Mâu thuẫn với $n \geqslant 4k+10$. Do đó $H \equiv 0$. Lập luận tương tự như Định lý 2.17, ta có $f = tg$, trong đó $t^{n+1} = 1$, hoặc

$$(f^n(z)f(z+c))^{(k)}.(g^n(z)g(z+c))^{(k)} = 1.$$

Ta chứng minh nếu $(f^n(z)f(z+c))^{(k)}.(g^n(z)g(z+c))^{(k)} = 1$ thì f và g đều không có 0-điểm. Thật vậy nếu z_0 là không điểm của f bội p thì nó là không điểm của $(f^n(z)f(z+c))^{(k)}$ bội ít nhất $np-k>0$ nên nó là cực điểm của $(g^n(z)g(z+c))^{(k)}$, do vậy z_0 là cực điểm của g hoặc $g(z+c)$, mâu thuẫn với g là hàm nguyên. Do vậy f không có không điểm, tương tự g không có không điểm. Do vậy

$$f(z) = c_1e^{A(z)}, g(z) = c_2e^{B(z)}.$$

Do f, g có bậc hữu hạn nên $A(z)$ và $B(z)$ là các đa thức. Kết hợp điều kiện $(f^n(z)f(z+c))^{(k)}.(g^n(z)g(z+c))^{(k)} = 1$ ta suy ra $A(z)$ và $B(z)$ là các đa thức bậc nhất. Từ đó dễ dàng suy ra $f(z) = c_1e^{\alpha z}, g(z) = c_2e^{-\alpha z}$, trong đó α, c_1, c_2 thỏa mãn $(-1)^k(c_1.c_2)^n[(n+1)\alpha]^{2k} = 1$. Định lý được chứng minh. □

Định lý 2.19. *Cho f và g là các hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn thỏa mãn $E_{1)}(1;(f^n(z)f^m(z+c))) = E_{1)}(1;(g^n(z)g^m(z+c)))$, trong đó $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác không và $m, n \in \mathbb{N}^*$. Kí hiệu*

$$\begin{aligned}
\Theta_{1,f,g}(\infty,0,c) =& 2(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g))\\
&+2\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}+2\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}\\
&+\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\}.\\
\Theta_{2,f,g}(\infty,0,c) =& 2(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)\\
&+(\Theta_c(\infty,f)+(\Theta_c(\infty,g))+2\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}\\
&+2\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\}+2\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\}.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có các khẳng định sau:

1. *Nếu* $m = 1,\ n > \max\{9, 21 - \Theta_{1,f,g}(\infty, 0, c)\}$ *khi đó* $f \equiv tg$ *hoặc* $fg \equiv t$, *trong đó* $t^{n+1} = 1$.

2. *Nếu* $m \geq 2,\ n > \max\{8 + m, 24 + m - \Theta_{2,f,g}(\infty, 0, c)\}$ *khi đó* $f \equiv tg$ *hoặc* $fg \equiv t$, *trong đó* $t^{n+m} = 1$.

Chứng minh. Đặt

$$F(z) = f^n(z)f^m(z+c), \quad G(z) = g^n(z)g^m(z+c)$$

và

$$h = \frac{F''}{F'} - 2\frac{F'}{F-1} - \frac{G''}{G'} + 2\frac{G'}{G-1}.$$

1) Trường hợp $m = 1$. Lý luận tương tự như Định lý 2.13 và sử dụng Bổ đề 2.4, ta có

$$\begin{aligned}T(r,F) \leqslant\ & N_2(r,F) + N_2(r,\frac{1}{F}) + N_2(r,G) + N_2(r,\frac{1}{G})\\ & + 2(\overline{N}(r,F) + \overline{N}(r,\frac{1}{F})) + S(r,f) + S(r,g);\\ T(r,G) \leqslant\ & N_2(r,F) + N_2(r,\frac{1}{F}) + N_2(r,G) + N_2(r,\frac{1}{G})\\ & + 2(\overline{N}(r,G) + \overline{N}(r,\frac{1}{G})) + S(r,f) + S(r,g).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}T(r,F) \leqslant & 4(\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f})) + \overline{N}(r,f(z+c)) + 5T(r,f)\\ & + 2(\overline{N}(r,g) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})) + 2T(r,g) + S(r,f) + S(r,g).\end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,f) & \leqslant T(r,F) + S(r,f)\\ & \leqslant (14 - 4(\Theta(\infty,f) + \Theta(0,f)) - \Theta_c(\infty,f))T(r,f)\\ & \quad + (6 - 2(\Theta(\infty,g) + \Theta(0,g)))T(r,g) + S(r).\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,g) &\leqslant T(r,G)+S(r,g)\\ &\leqslant (14-4(\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g))-\Theta_c(\infty,g))T(r,g)\\ &\quad+(6-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)))T(r,f)+S(r).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}(n-1)T(r) \leqslant &(20-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g))\\ &-\min\{\Theta_c(\infty,f),\Theta_c(\infty,g)\}-2\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(\infty,g)\}\\ &-2\min\{\Theta(0,f),\Theta(0,g)\})T(r)+S(r).\end{aligned}$$

Mâu thuẫn với $n>\max\{9,21-\Theta_{1,f,g}(\infty,0,c)\}$. Kéo theo $h\equiv 0$, lý luận tương tự như Định lý 2.13, ta có điều cần chứng minh 1.

2) Trường hợp $m\geqslant 2$. Lý luận tương tự như Định lý 2.13 và sử dụng Bổ đề 2.4, ta có

$$\begin{aligned}T(r,F) \leqslant\ & 4(\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,f(z+c)))+4T(r,f)\\ &+2(\overline{N}(r,g)+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,g(z+c)))+2T(r,g)+S(r).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}(n-m)T(r,f) &\leqslant T(r,F)+S(r,f)\\ &\leqslant (16-4(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta_c(\infty,f)))T(r,f)\\ &\quad+(8-2(\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)+\Theta_c(\infty,g)))T(r,g)+S(r).\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}(n-m)T(r,g) &\leqslant T(r,G)+S(r,g)\\ &\leqslant (16-4(\Theta(\infty,g)+\Theta(0,g)+\Theta_c(\infty,g)))T(r,g)\\ &\quad+(8-2(\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta_c(\infty,f)))T(r,f)+S(r).\end{aligned}$$

Điều đó kéo theo

$$
\begin{aligned}
&(n-m)T(r)\\
&\quad\leqslant (24 - 2(\Theta(\infty, f) + \Theta(0, f) + \Theta(\infty, g) + \Theta(0, g)\\
&\qquad + \Theta_c(\infty, f) + \Theta_c(\infty, g)) - 2\min\{\Theta_c(\infty, f), \Theta_c(\infty, g)\}\\
&\qquad - 2\min\{\Theta(\infty, f), \Theta(\infty, g)\} - 2\min\{\Theta(0, f), \Theta(0, g)\})T(r) + S(r).
\end{aligned}
$$

Mâu thuẫn với $n > \max\{8+m, 24+m-\Theta_{2,f,g}(\infty, 0, c)\}$. Do đó $h \equiv 0$, lý luận tương tự như Định lý 2.12, ta nhận được điều cần chứng minh. □

Lập luận và tính toán tương tự như Định lý 2.19 ta cũng có

Định lý 2.20. *Cho f và g là các hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn thỏa mãn $E_{2)}(1; (f^n(z)f^m(z+c))) = E_{2)}(1; (g^n(z)g^m(z+c)))$, trong đó $c \in \mathbb{C}$ là hằng số khác không và $m, n \in \mathbb{N}^*$. Kí hiệu*

$$
\begin{aligned}
\Theta_{1,f,g}(\infty, 0, c) =& \frac{9}{2}\min\{\Theta(\infty, f), \Theta(\infty, g)\} + \frac{9}{2}\min\{\Theta(0, f), \Theta(0, g)\}\\
&+ \frac{1}{2}\min\{\Theta_c(\infty, f), \Theta_c(\infty, g)\}.\\
\Theta_{2,f,g}(\infty, 0, c) =& \frac{9}{2}\min\{\Theta(\infty, f), \Theta(\infty, g)\} + \frac{9}{2}\min\{\Theta(0, f), \Theta(0, g)\}\\
&+ \frac{9}{2}\min\{\Theta_c(\infty, f), \Theta_c(\infty, g)\}.
\end{aligned}
$$

Khi đó chúng ta có các khẳng định sau:

1. *Nếu $m = 1$, $n > \max\{9, 15 - \Theta_{1,f,g}(\infty, 0, c)\}$ khi đó $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, mà $t^{n+1} = 1$.*

2. *Nếu $m \geq 2$, $n > \max\{8 + m, 18 + m - \Theta_{2,f,g}(\infty, 0, c)\}$ khi đó $f \equiv tg$ hoặc $fg \equiv t$, mà $t^{n+m} = 1$.*

Tiếp theo chúng tôi chứng minh các kết quả liên quan đến nghiệm của phương trình sai phân và đạo hàm của hàm phân hình.

Định lý 2.21. *Cho f là hàm phân hình siêu việt với bậc hữu hạn, $c \in \mathbb{C}$ là hằng số phức khác không, $n \in \mathbb{N}$, k, m là các số nguyên dương và $\alpha(z)$ là hàm đủ nhỏ của f. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

1. *Nếu $n \geqslant m + 2k + 8$ thì phương trình*

$$f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c) - f(z))^m - \alpha(z) = 0$$

có vô hạn nghiệm.

2. *Nếu $n \geqslant m + 5$ thì phương trình*

$$f^n(z)f^{(k)}(z)f^m(z+c) - \alpha(z) = 0$$

có vô hạn nghiệm.

3. *Nếu $n \geqslant 2k + 6$ thì phương trình*

$$f^n(z)f^{(k)}(z+c) - \alpha(z) = 0$$

có vô hạn nghiệm.

Chứng minh. 1. Đặt

$$G(z) = f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c) - f(z))^m - \alpha(z).$$

Khi đó

$$T(r, f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c) - f(z))^m) \leqslant T(r, G) + S(r, f).$$

Vì

$$\frac{1}{f^{n+m}}(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c) - f(z))^m}\left(\frac{(f(z+c) - f(z))}{f(z)}\right)^m.$$

Ta nhận được

$$\begin{aligned}(n+m)T(r,f) &= T(r, \frac{1}{f^{n+m}(z)}) + O(1)\\ &\leqslant T(r, f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c) - f(z))^m)\\ &\quad + T(r, (\frac{(f(z+c) - f(z))}{f(z)})^m) + T(r, f^{(k)}(z)) + S(r, f)\\ &\leqslant T(r, f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c) - f(z))^m) + (2m + k + 1)T(r, f).\end{aligned}$$

Theo Định lý cơ bản thứ hai cho hàm nhỏ ta có

$$\begin{aligned}
&T(r, f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c)-f(z))^m)\\
&\qquad\leqslant T(r,G)+S(r,f)\\
&\qquad\leqslant \overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,\frac{1}{G+\alpha})+S(r,f).
\end{aligned}$$

Từ cách xác định của G, ta có

$$\begin{aligned}
\overline{N}(r,G) &\leqslant 2T(r,f)+S(r,f)\\
\overline{N}(r,\frac{1}{G+\alpha}) &\leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}})+\overline{N}(\frac{1}{f(z+c)-f(z)})\\
&\leqslant T(r,f)+k\overline{N}(r,f)+N_{k+1}(r,\frac{1}{f})+2T(r,f)+S(r,f)\\
&\leqslant (k+4)T(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$(n-m-2k-7)T(r,f)\leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{G})+S(r,f).$$

Do $n\geqslant m+2k+8$, nên phương trình

$$f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c)-f(z))^m-\alpha(z)=0$$

có vô hạn nghiệm.

2) Đặt $G(z)=f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c))^m-\alpha(z)$, ta có

$$T(r,f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c))^m)\leqslant T(r,G)+S(r,f)$$

$$T(r,f^n(z)f^{(k)}(z))\leqslant T(r,G)+T(r,\frac{1}{f^m(z+c)})+S(r,f).$$

Kéo theo

$$T(r,G)\geqslant T(r,f^n(z)f^{(k)}(z))-mT(r,f)+S(r,f).$$

Dễ dàng chứng minh được

$$T(r,f^n(z)f^{(k)}(z))\geqslant (n-1)T(r,f)+N(r,f)+N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z)})+S(r,f).$$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}
nT(r,f) &= T(r,f^n) = m(r,f^n) + N(r,f^n)\\
&\leqslant N(r,f^n f^{(k)}) - N(r,f^{(k)}) + m(r,f^n f^{(k)}) + m(r,\frac{1}{f^{(k)}})\\
&= T(r,f^n f^{(k)}) - N(r,f^{(k)}) + T(r,\frac{1}{f^{(k)}}) - N(r,\frac{1}{f^{(k)}})\\
&= T(r,f^n f^{(k)}) - N(r,f^{(k)}) + T(r,f^{(k)}) - N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + O(1)\\
&= T(r,f^n f^{(k)}) - N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + m(r,f^{(k)}) + O(1)\\
&\leqslant T(r,f^n f^{(k)}) - N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + m(r,\frac{f^{(k)}}{f}) + m(r,f) + O(1)\\
&= T(r,f^n f^{(k)}) - N(r,f) - N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + T(r,f) + S(r,f).
\end{aligned}$$

Do đó

$$T(r,G) \geqslant (n-m-1)T(r,f) + N(r,f) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z)}) + S(r,f).$$

Theo Định lý cơ bản thứ hai ta có

$$T(r,G) \leqslant \overline{N}(r,G) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G+\alpha}) + S(r,f).$$

Lý luận tương tự như chứng minh của trường hợp 1, ta nhận được

$$\overline{N}(r,\frac{1}{G+\alpha}) \leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + \overline{N}(r,\frac{1}{f(z+c)}).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
&(n-m-1)T(r,f) + N(r,f) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z)})\\
&\qquad \leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,f(z+c) + N(r,\frac{1}{f(z+c)}) + N(r,f)\\
&\qquad\quad + N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z)}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + S(r,f)\\
&\qquad \leqslant 3T(r,f) + N(r,f) + N(r,\frac{1}{f^{(k)}}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + S(r,f).
\end{aligned}$$

Nên
$$(n-m-4)T(r,f) \leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + S(r,f).$$
Vì $n \geqslant m+5$, nên phương trình
$$f^n(z)f^{(k)}(z)(f(z+c))^m - \alpha(z) = 0$$
có vô hạn nghiệm.

3. Đặt $G(z) = f^n(z)f^{(k)}(z+c) - \alpha(z)$. Lý luận tương tự như 1, 2 ta chứng minh được 3. $\square$

Kết luận của luận văn

Luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

1) Trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản của lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình và cho toán tử sai phân.

2) Phát biểu và chứng minh một số kết quả mới về sự duy nhất của các hàm phân hình với đa thức sai phân và đạo hàm. Đó là các định lý 2.12, 2.13 và 2.17 - 2.21.

Tài liệu tham khảo

[1] A. Banerjee *Meromorphic functions sharing one value,* Int. J. math. math. sci, no 22, 3587-3598, 2005.

[2] A. Banerjee, *On the uniqueness of meromorphic functions that share two sets*, Georgian Mathematical Journal, Volume 15, Number 1, 21-38, 2008.

[3] C. C. Yang and X. Hua, *Uniqueness and value sharing of meromorphic functions*, Ann. acad. sci. fenn. math, 22, 395-406, 1997.

[4] H. X. Yi, *Meromorphic functions that share one or two values*, Complex variables theory appl. 28, 1-11, 1995.

[5] J. Li and L. Xie, *Uniqueness of meromorphic functions and differential polynomials*, Int. journal of math analysis. Vol 4, no 20, 953-965, 2010.

[6] K. Yamanoi, *The Second Main Theorem for small functions and related problems*, Acta Mathematica, 192, No. 2, pp 225-294, 2004.

[7] K. Liu, X. Liu and T. B. Cao, *Some results on zeros and uniqueness of difference-differential polynomials*, Appl. Math. J. Chinese Univ, 27(1), pp 94-104, 2012.

[8] K. Liu , X. Liu and T. B. Cao, *Value distributions and uniqueness of difference polynomials*, Advances in Difference Equations, volume 2011, pp 1-12, 2011.

[9] Q. Zhang, *Meromorphic function that share one small function with its derivative*, J. inequal. pure. appl. math, vol 6, issue 4, 2005.

[10] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, *Nevanlinna theory for difference operator*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, 3, 463-478, 2006.

[11] S. H. Lin and W. C. Lin, *Uniqueness of meromorphic functions concerning weakly weighted sharing*, Kodai Math. J, 29, pp 269-280, 2006.

[12] W. K. Hayman, *Meromorphic function*, The clarendon press. Oxford, 1964.

[13] Y. M. Chiang and S. J. Feng, *On the nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane*, Ramanujan journal, vol 16, no 1, pp 105-129, 2008.