

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ TÂM

**TẬP HÚT LÙI ĐỐI VỚI MỘT LỚP
PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ TÂM

**TẬP HÚT LÙI ĐỐI VỚI MỘT LỚP
PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN**

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Đình Bình

Thái Nguyên, năm 2013

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của T.S Nguyễn Đình Bình. Các kết quả được phát biểu trong Luận văn là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Tác giả

Dương Thị Tâm

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Tiến sĩ Nguyễn Đình Bình, Bộ Khoa học và Công nghệ. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và lòng quý mến đối với thầy.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Khoa Sau đại học, Khoa Toán trường Đại học sư phạm- Đại học Thái Nguyên, Trung tâm học liệu - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình tác giả học tập tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K19 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn giúp tác giả hoàn thành luận văn này.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2013

Tác giả

Dương Thị Tâm

Mục lục

Mục lục	i
MỞ ĐẦU	1
1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	5
1.1 Các không gian hàm	5
1.2 Không gian hàm phụ thuộc thời gian	7
1.3 Tập hút toàn cục	7
1.3.1 Một số khái niệm	7
1.3.2 Tập hút toàn cục	9
1.3.3 Sự tồn tại tập hút toàn cục	11
1.4 Tập hút đều của quá trình đơn trị	13
1.5 Tập hút lùi (Pullback attractors)	15
1.5.1 Tập hút lùi đối với các tập bị chặn cố định	15
1.5.2 Tập hút lùi đối với họ các tập phụ thuộc thời gian	20
1.6 Một số bất đẳng thức thường dùng	24
2 SỰ TỒN TẠI DUY NHẤT NGHIỆM YẾU	26
2.1 Đặt bài toán	26
2.1.1 Các giả thiết của bài toán	26
2.1.2 Định nghĩa nghiệm yếu của bài toán	27
2.2 Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán	28
3 SỰ TỒN TẠI TẬP HÚT LÙI TRONG $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$	39
3.1 Sự tồn tại tập hút lùi trong $L^{2p-2}(\Omega)$	39
3.2 Sự tồn tại tập hút lùi trong $S_0^2(\Omega)$	48

KẾT LUẬN	49
TÀI LIỆU THAM KHẢO	50

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử phát triển và lý do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng tiến hóa phi tuyến xuất hiện nhiều trong các quá trình của vật lý, hóa học và sinh học, chẳng hạn các quá trình truyền nhiệt và khuếch tán, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các phản ứng hóa học, các mô hình quần thể trong sinh học,...Việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Chính vì vậy nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Các vấn đề đặt ra là nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán (sự tồn tại duy nhất nghiệm, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm theo dữ kiện đã cho) và các tính chất định tính của nghiệm (tính trơn, dáng điệu tiệm cận của nghiệm,...).

Sau khi nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán, việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian ra vô cùng rất quan trọng vì nó cho phép ta hiểu và dự đoán xu thế phát triển của hệ động lực trong tương lai, từ đó ta có thể có những điều chỉnh thích hợp để đạt được kết quả mong muốn. Về mặt toán học, điều này làm nảy sinh một hướng nghiên cứu mới, được phát triển mạnh mẽ trong khoảng ba thập kỉ gần đây là Lý thuyết các hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều. Lý thuyết này nằm ở giao của 3 chuyên ngành là Lý thuyết hệ động lực, Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và Lý thuyết phương trình vi phân thường (xem Bảng phân loại toán học năm 2010). Bài toán cơ bản của lý thuyết này là nghiên cứu sự tồn tại và các tính chất cơ bản của tập hút, chẳng hạn đánh giá số chiều fractal hoặc số chiều Hausdorff, sự phụ thuộc liên tục của tập hút theo tham biến,

tính trơn của tập hút, xác định các modes,... Tập hút toàn cục cổ điển là một tập compact, bất biến, hút tất cả các quỹ đạo của hệ và chứa đựng nhiều thông tin về dáng điệu tiệm cận của hệ. Cụ thể với mỗi quỹ đạo cho trước của hệ và một khoảng thời gian T tùy ý, ta đều tìm được một quỹ đạo nằm trên tập hút toàn cục mà dáng điệu khi thời gian đủ lớn của hai quỹ đạo này sai khác đủ nhỏ trên một khoảng có độ dài T . Tuy nhiên, tập hút toàn cục chỉ áp dụng cho các trường hợp ôtonôm, trong khi rất nhiều quá trình có ngoại lực phụ thuộc vào thời gian. Do đó cần phải mở rộng khái niệm tập hút cho các hệ động lực không ôtonôm. Việc mở rộng nghiên cứu về tập hút đã dẫn đến khái niệm tập hút đều cho trường hợp quỹ đạo nghiệm bị chặn khi thời gian t tiến ra vô hạn, và sau đó là khái niệm tập hút lùi cho trường hợp quỹ đạo nghiệm bất kì khi thời gian t tiến ra vô hạn.

Trong ba thập kỉ gần đây, nhiều nhà toán học đã nghiên cứu và thu được nhiều kết quả về lí thuyết tập hút đối với nhiều lớp phương trình vi phân đạo hàm riêng (xem, chẳng hạn, cuốn chuyên khảo [3] và bài tổng quan [2]). Một trong những lớp phương trình đạo hàm riêng được nghiên cứu nhiều nhất là lớp phương trình parabolic. Lớp phương trình này mô tả nhiều quá trình trong vật lí, hóa học và sinh học như quá trình truyền nhiệt, quá trình phản ứng khuếch tán, mô hình toán học trong sinh học quần thể,...

Sự tồn tại tập hút toàn cục đối với phương trình và hệ phương trình parabolic nửa tuyến tính không suy biến đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, trong cả miền bị chặn và không bị chặn (xem [7], [11]). Tính liên tục của tập hút toàn cục đối với các bài toán parabolic được nghiên cứu trong các công trình [2], [6], [7], [10]. Trong những năm gần đây, sự tồn tại tập hút lùi đã được chứng minh cho phương trình parabolic với điều kiện biên phi tuyến ([4], [5], [12]), phương trình parabolic với điều kiện biên động lực [13]. Cho đến nay, các kết quả về lí thuyết tập hút lùi đối với phương trình parabolic không suy biến rất phong phú và khá hoàn thiện. Tuy nhiên, các kết quả tương ứng trong trường hợp phương trình phi tuyến vẫn còn rất ít.

Việc nghiên cứu sự tồn tại và tính chất của tập hút đối với những lớp phương trình parabolic phi tuyến là những vấn đề thời sự, có ý nghĩa khoa học và hứa hẹn có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế.

Với những lí do ở trên, chúng tôi lựa chọn vấn đề chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu và chứng minh sự tồn tại tập hút lùi đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến làm nội dung nghiên cứu của Luận văn với tên gọi là "*Tập hút lùi đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến*".

2. Phương pháp nghiên cứu

- Chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu: sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với các bổ đề compact (thường được gọi là phương pháp compact trong tài liệu).

- Chứng minh sự tồn tại tập hút: sử dụng các phương pháp của lí thuyết hệ động lực vô hạn chiều, nói riêng là phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận.

3. Mục đích của luận văn

Trong luận văn này, tác giả nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu và sự tồn tại tập hút lùi đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến chứa toán tử Grushin trong miền bị chặn.

- Nghiên cứu bài toán:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - G_s u + f(u) = g(t, x), \quad (t, x) \in Q_{\tau, T} = (\tau, T] \times \Omega, \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (\tau, T], \\ u(x, \tau) = u_\tau(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

trong đó

$$G_s u = \Delta_{x_1} u + |x_1|^{2s} \Delta_{x_2} u, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}, s \geq 0,$$

là toán tử Grushin, $u_\tau \in L^2(\Omega)$.

Đối với bài toán này, chúng tôi nghiên cứu:

- Chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (2.1).
- Chứng minh sự tồn tại tập hút lồi trong không gian $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$.

4. Bố cục của Luận văn

Luận văn bao gồm: Mở đầu, ba chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Trình bày các khái niệm và kết quả tổng quát về tập hút lồi toàn cục, tập hút đều và tập hút lồi, các kết quả về không gian hàm và toán tử được sử dụng trong luận văn và một số kiến thức bổ trợ khác.

Chương 2. Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán.

Chương 3. Chứng minh sự tồn tại tập hút lồi trong $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Các không gian hàm

Trong luận văn này ta sử dụng một số không gian hàm sau:

- $L^p(\Omega)$ là không gian Banach bao gồm tất cả các hàm khả tích Lebesgue cấp p trên Ω với chuẩn được định nghĩa như sau

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Chú ý rằng $L^p(\Omega)$ là không gian Banach phản xạ khi $1 < p < +\infty$.

- $L^\infty(\Omega)$ là không gian Banach bao gồm tất cả các hàm đo được và bị chặn hầu khắp trên Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

- Giả sử: $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đo được Lebesgue, không âm và thỏa mãn các điều kiện sau:

Khi miền Ω bị chặn,

$(\mathcal{H}_\alpha)$ $\sigma \in L^1_{loc}(\Omega)$ và với $\alpha \in (0; 2)$, $\liminf_{x \rightarrow z} |x - z|^{-\alpha} \sigma(x) > 0 \forall z \in \overline{\Omega}$,

Khi miền Ω không bị chặn,

$(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^\infty)$ σ thỏa mãn điều kiện $(\mathcal{H}_\alpha)$ và $\liminf_{|x| \rightarrow z} |x|^{-\beta} \sigma(x) > 0$ với $\beta > 2$.

Khi đó ta định nghĩa không gian $S_0^1(\Omega)$ như là bổ sung đủ của $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ với chuẩn

$$\|u\|_{S_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} (|\nabla_{x_1} u|^2 + |x_1|^{2s} |\nabla_{x_2} u|^2) dx \right)^{1/2},$$

và tích vô hướng

$$((u, v)) := \left(\int_{\Omega} (\nabla_{x_1} u \nabla_{x_1} v + |x_1|^{2s} \nabla_{x_2} u \nabla_{x_2} v) dx \right)^{1/2}.$$

Những Bổ đề dưới đây xem trong [14].

Bổ đề 1.1.1. *Giả sử Ω là miền đóng bị chặn trong $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ ($N_1, N_2 \geq 0$). Khi đó các ánh xạ nhúng sau*

(i) $S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\Omega)$ liên tục,

(ii) $S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compact nếu $p \in [1, 2_s^*)$,

trong đó $2_s^* = \frac{2N(s)}{N(s) - 2}$, $N(s) = N_1 + (s + 1)N_2$.

• Ta định nghĩa không gian $S_0^2(\Omega)$ như bao đóng của $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ với chuẩn

$$\|u\|_{S_0^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|\Delta_{x_1} u|^2 + |x_1|^{2s} |\Delta_{x_2} u|^2) dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} (|G_s u|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Bổ đề sau được suy ra từ định nghĩa của $S_0^1(\Omega)$ và $S_0^2(\Omega)$:

Bổ đề 1.1.2. *Giả sử Ω là miền đóng bị chặn trong $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ ($N_1, N_2 \geq 0$) với biên trơn $\partial\Omega$. Khi đó $S_0^2(\Omega) \subset S_0^1(\Omega)$ liên tục.*

Ta đã biết (xem [6]) với toán tử $A = -G_s$, tồn tại $\{e_j\}_{j \geq 1}$ sao cho:

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad Ae_j = \lambda_j e_j, \quad j, k = 1, 2, \dots,$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lambda_j \rightarrow +\infty \text{ khi } j \rightarrow \infty,$$

và $\{e_j\}_{j \geq 1}$ là hệ trực chuẩn trong $L^2(\Omega)$.

1.2 Không gian hàm phụ thuộc thời gian

Trong luận văn này ta sử dụng các không gian hàm phụ thuộc thời gian sau:

Giả sử X là không gian Banach.

- $C([a, b]; X)$ là không gian Banach bao gồm tất cả các hàm $u : [a, b] \rightarrow X$ liên tục từ $[a, b]$ vào X với chuẩn

$$\|u\|_{C([a,b];X)} = \sup_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X.$$

- $L^p(a, b; X)$ là không gian Banach bao gồm tất cả các hàm $u : (a, b) \rightarrow X$ sao cho

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < +\infty.$$

1.3 Tập hút toàn cục

1.3.1 Một số khái niệm

Giả sử X là một không gian Banach, ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.3.1. Một nửa nhóm (liên tục) trên X là một họ các ánh xạ $S(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$ thỏa mãn

- (i) $S(0) = I, I$ là phép đồng nhất,
- (ii) $S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(t+s),$
- (iii) $S(t)u_0$ liên tục đối với $(t, u_0) \in [0; +\infty) \times X.$

Định nghĩa 1.3.2. Tập $Y \subset X$ được gọi là bất biến dương nếu $S(t)Y \subset Y, \forall t \geq 0.$

Tập $Y \subset X$ được gọi là bất biến âm nếu $S(t)Y \supset Y, \forall t \geq 0.$

Tập $Y \subset X$ được gọi là bất biến nếu $S(t)Y = Y, \forall t \geq 0.$

Ta giới thiệu các khái niệm về tính tiêu hao của nửa nhóm.

Định nghĩa 1.3.3. *Nửa nhóm $S(t)$ gọi là tiêu hao điểm (t.ư., tiêu hao bị chặn) nếu tồn tại một tập bị chặn $B_0 \subset X$ hút các điểm (t.ư., hút các tập bị chặn) của X .*

Nếu $S(t)$ là tiêu hao bị chặn thì tồn tại một tập $B_0 \subset X$ sao cho với mọi tập bị chặn $B \subset X$, tồn tại $T = T(B) \geq 0$ sao cho $S(t)B \subset B_0, \forall t \geq T$. Tập B_0 như vậy gọi là một *tập hấp thụ* đối với hệ động lực $(X, S(t))$.

Dễ thấy một hệ động lực tiêu hao bị chặn thì tiêu hao điểm. Điều ngược lại nói chung không đúng, nhưng nó đúng đối với các hệ động lực hữu hạn chiều.

Bây giờ ta định nghĩa tính compact tiệm cận.

Định nghĩa 1.3.4. *Giả sử X là một không gian Banach. Nếu nhóm $S(t)$ gọi là compact tiệm cận nếu với mọi $t > 0$, $S(t)$ có biểu diễn dưới dạng*

$$S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t), \quad (1.1)$$

ở đó $S^{(1)}(t)$ và $S^{(2)}(t)$ thỏa mãn các tính chất sau:

1. với bất kì tập bị chặn $B \subset X$

$$r_B(t) = \sup_{y \in B} \|S^{(1)}(t)y\|_X \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow +\infty;$$

2. với bất kì tập bị chặn B trong X tồn tại t_0 sao cho tập hợp

$$[\gamma^{(2)}(t_0)B] = \left[\bigcup_{t \geq t_0} S^{(2)}tB \right] \quad (1.2)$$

là compact trong X , ở đây $[\gamma]$ là bao đóng của tập γ .

Một hệ động lực gọi là compact nếu nó là compact tiệm cận và ta có thể lấy $S^{(1)}(t) \equiv 0$ trong biểu diễn (1.1). Rõ ràng rằng bất kì hệ động lực tiêu hao hữu hạn chiều nào cũng là compact.

Dễ dàng thấy rằng điều kiện (1.2) được thỏa mãn nếu tồn tại một tập compact K trong X sao cho với bất kì tập bị chặn $B \subset X$, tồn tại $t_0(B)$

sao cho $S^{(2)}(t)B \subset K, \forall t \geq t_0(B)$. Nói riêng, một hệ tiêu hao là compact nếu nó có một tập hấp thụ compact.

Bổ đề sau đây rất hữu ích khi chứng minh tính compact tiệm cận.

Bổ đề 1.3.5. *Nửa nhóm $S(t)$ là compact tiệm cận nếu tồn tại một tập compact K sao cho*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)B, K) = 0,$$

với mọi tập B bị chặn trong X .

Chứng minh. Vì K là tập compact nên với mọi $t > 0$ và $u \in X$, tồn tại phần tử $v := S^{(2)}(t)u \in K$ sao cho

$$\text{dist}(S(t)u, K) = \|S(t)u - S^{(2)}(t)u\|.$$

Do đó nếu đặt $S^{(1)}(t)u = S(t)u - S^{(2)}(t)u$, dễ thấy sự phân tích (1.1) thỏa mãn tất cả các yêu cầu trong định nghĩa của tính compact tiệm cận. $\square$

Chú ý: Nếu X là không gian Banach lồi đều và nửa nhóm $S(t)$ có một tập hấp thụ bị chặn $\mathcal{B}$, thì ba điều kiện sau là tương đương:

- a) Nửa nhóm $S(t)$ là compact tiệm cận,
- b) Nửa nhóm $S(t)$ là thuộc lớp AK , tức là với mọi dãy bị chặn $\{x_k\}$ trong X và mọi dãy $t_k \rightarrow \infty$, $\{S(t_k)x_k\}_{k=1}^\infty$ là compact tương đối trong X ,
- c) Tồn tại một tập compact $K \subset X$ sao cho

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, K) \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow \infty.$$

1.3.2 Tập hút toàn cục

Tập hút toàn cục là đối tượng trung tâm của lý thuyết các hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều.

Định nghĩa 1.3.6. *Một tập con khác rỗng $\mathcal{A}$ của X gọi là một tập hút toàn cục đối với nửa nhóm $S(t)$ nếu:*

1. $\mathcal{A}$ là một tập đóng và bị chặn;

2. $\mathcal{A}$ là bất biến, tức là $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ với mọi $t > 0$;
3. $\mathcal{A}$ hút mọi tập con bị chặn B của X tức là

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)\mathcal{A}, B) = 0,$$

ở đó $\text{dist}(E, F) = \sup_{a \in E} \inf_{b \in F} d(a, b)$ là nửa khoảng cách Hausdorff giữa hai tập con E và F của X .

Các tính chất sau đây của tập hút toàn cục là hệ quả trực tiếp của định nghĩa.

Mệnh đề 1.3.7. *Giả sử $S(t)$ có một tập hút toàn cục $\mathcal{A}$. Khi đó:*

1. Nếu B là một tập con bị chặn bất biến của X thì $B \subset \mathcal{A}$ (tính cực đại);
2. Nếu B là một tập con đóng hút các tập bị chặn của X thì $\mathcal{A} \subset B$ (tính cực tiểu);
3. $\mathcal{A}$ là duy nhất.

Kết quả sau đây nói về cấu trúc của tập hút toàn cục.

Định lý 1.3.8. *(xem [9]) Giả sử hệ động lực $(X, S(t))$ có tập hút toàn cục $\mathcal{A}$. Khi đó mọi quỹ đạo đầy đủ bị chặn (nói riêng là các điểm dừng và các quỹ đạo tuần hoàn, nếu có) đều nằm trên $\mathcal{A}$. Hơn nữa, nếu $S(t)$ là đơn ánh trên $\mathcal{A}$ thì $\mathcal{A}$ là hợp của tất cả các quỹ đạo đầy đủ bị chặn.*

Các kết quả dưới đây chỉ ra rằng các hệ động lực “trên tập hút toàn cục” sẽ quyết định các dáng điệu tiệm cận có thể có của các quỹ đạo riêng lẻ, nghĩa là sau một khoảng thời gian đủ lớn, bất kỳ một quỹ đạo nào của phương trình gốc trông sẽ giống như một quỹ đạo nào đó trên tập hút trong một khoảng thời gian đủ dài.

Định lý 1.3.9. *(xem [9]) Giả sử hệ động lực $(X, S(t))$ có tập hút toàn cục $\mathcal{A}$. Cho trước một quỹ đạo $u(t) = S(t)u_0$, một sai số $\epsilon > 0$ và một khoảng thời gian $T > 0$. Khi đó tồn tại một thời điểm $\tau = \tau(\epsilon, T)$ và một điểm $v_0 \in \mathcal{A}$ sao cho*

$$\|u(\tau + t) - S(t)v_0\| \leq \epsilon \text{ với mọi } 0 \leq t \leq T.$$

Để xấp xỉ quỹ đạo đã chọn $u(t)$ trong một khoảng thời gian dài hơn, ta phải dùng nhiều quỹ đạo trên tập hút toàn cục $\mathcal{A}$. Mệnh đề sau đây là hệ quả trực tiếp của Định lý 1.3.9

Hệ quả 1.3.10. (xem [9]) Cho trước một quỹ đạo $u(t)$, tồn tại một dãy các sai số $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ với

$$\epsilon_n \rightarrow 0,$$

một dãy tăng các thời điểm $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ với

$$t_{n+1} - t_n \rightarrow \infty \text{ khi } n \rightarrow \infty,$$

và một dãy các điểm $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $v_n \in \mathcal{A}$ sao cho

$$\|u(t) - S(t - t_n)v_n\| \leq \epsilon_n \text{ với mọi } t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

Hơn nữa, bước nhảy $\|v_{n+1} - S(t_{n+1} - t_n)v_n\|$ dần tới 0 khi $n \rightarrow \infty$.

1.3.3 Sự tồn tại tập hút toàn cục

Kết quả sau đây là định lý cơ bản về sự tồn tại tập hút toàn cục.

Định lý 1.3.11. (xem [17] chương 1) Giả sử $S(t)$ là nửa nhóm liên tục trên không gian Banach X . Giả sử $S(t)$ là tiêu hao và compact tiệm cận. Nếu B là một tập hấp thụ bị chặn của $S(t)$ thì $\mathcal{A} = \omega(B)$ là một tập compact khác rỗng và là tập hút toàn cục đối với $S(t)$. Hơn nữa, tập hút toàn cục $\mathcal{A}$ là liên thông trong X .

Hệ quả sau đây thường được dùng để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục đối với phương trình parabolic trong miền bị chặn.

Hệ quả 1.3.12. (xem [9]) Nếu nửa nhóm $S(t)$ là tiêu hao và B là một tập hấp thụ compact thì $S(t)$ có một tập hút toàn cục compact liên thông $\mathcal{A} = \omega(B)$.

Bây giờ ta nhắc lại một vài khái niệm và kết quả trong [4] sẽ được sử dụng trong chương sau để chứng minh tính trơn của tập hút toàn cục bằng phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận.

Mệnh đề 1.3.13. Giả sử $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là một nửa nhóm trên $L^r(\Omega)$ và giả sử rằng $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $L^r(\Omega)$. Khi đó với bất kì $\epsilon > 0$ và bất kì tập con bị chặn $B \subset L^r(\Omega)$, tồn tại hai hằng số dương $T = T(B)$ và $M = M(\epsilon)$ sao cho

$$\text{mes}(\Omega(|S(t)u_0| \geq M)) \leq \epsilon,$$

với mọi $u_0 \in B$ và $t \geq T$, trong đó $\text{mes}(e)$ kí hiệu cho độ đo Lebesgue của $e \subset \Omega$ và $\Omega(|S(t)u_0| \geq M) := \{x \in \Omega / |S(t)u_0(x)| \geq M\}$.

Định nghĩa 1.3.14. Giả sử X là một không gian Banach. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ trên X được gọi là liên tục mạnh-yếu trên X nếu với bất kì $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X, x_n \rightarrow x$, và $t_n \geq 0, t_n \rightarrow t$, ta có $S(t_n)x_n \rightharpoonup S(t)x$ trong X .

Kết quả sau thường dùng để chứng minh một nửa nhóm là liên tục mạnh-yếu.

Bổ đề 1.3.15. Giả sử X, Y là hai không gian Banach và X^*, Y^* là các không gian đối ngẫu tương ứng. Ta cũng giả sử rằng X là một không gian con trù mật của Y , phép chiếu $i : X \rightarrow Y$ là liên tục và liên hợp của nó $i^* : Y^* \rightarrow X^*$ là phép chiếu trù mật. Giả sử $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là một nửa nhóm trên X và Y tương ứng, và giả thiết thêm $S(t)$ là liên tục hoặc liên tục yếu trên Y . Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là liên tục mạnh - yếu trên X nếu và chỉ nếu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ biến các tập con compact của $X \times \mathbb{R}^+$ thành các tập con bị chặn của X .

Định nghĩa 1.3.16. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ được gọi là thỏa mãn Điều kiện (C) trong X nếu và chỉ nếu với bất kì tập bị chặn B của X và bất kì $\epsilon > 0$, tồn tại một hằng số dương t_B và một không gian con hữu hạn chiều X_1 của X , sao cho tập $\{PS(t)x / x \in B, t \geq t_B\}$ bị chặn và

$$|(I - P)S(t)x| \leq \epsilon \text{ với bất kì } t \geq t_B \text{ và } x \in B,$$

trong đó $P : X \rightarrow X_1$ là phép chiếu chính tắc.

Các định lí sau thường dùng để chứng minh tính trơn của tập hút toàn cục, tức là chứng minh sự tồn tại của tập hút toàn cục trong các không gian “trơn hơn” không gian chứa điều kiện ban đầu.

Định lý 1.3.17. (xem [4]) Giả sử $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là một nửa nhóm liên tục mạnh-yếu trên $L^q(\Omega)$, và là liên tục hoặc liên tục yếu trên $L^r(\Omega)$ với mọi $r \leq q$, và có một tập hút toàn cục trong $L^r(\Omega)$. Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ có tập hút toàn cục trong $L^q(\Omega)$ nếu và chỉ nếu

- (i) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $L^q(\Omega)$,
- (ii) với bất kỳ $\epsilon > 0$ và bất kỳ một tập con bị chặn B của $L^q(\Omega)$, tồn tại các hằng số dương $M = M(\epsilon, B)$ và $T = T(\epsilon, B)$ sao cho

$$\int_{\Omega(|S(t)u_0| \geq M)} |S(t)u_0|^q < \epsilon, \quad (1.3)$$

với bất kỳ $u_0 \in B$ và $t \geq T$.

Định lý 1.3.18. (xem [4]) Giả sử X là không gian Banach và $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là một nửa nhóm liên tục mạnh-yếu trên X . Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ có một tập hút toàn cục trong X nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

- (i) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong X ,
- (ii) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ thỏa mãn Điều kiện (C) trong X .

1.4 Tập hút đều của quá trình đơn trị

Định nghĩa 1.4.1. Giả sử E là một không gian Banach phản xạ.

1. Một hàm $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; E)$ được gọi là bị chặn tịnh tiến nếu

$$\|\varphi\|_{L^2_b}^2 = \|\varphi\|_{L^2_b(\mathbb{R}; E)}^2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\varphi\|_E^2 ds < \infty.$$

2. Một hàm $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; E)$ được gọi là compact tịnh tiến nếu bao đóng của $\{\varphi(\cdot + h)/h \in \mathbb{R}\}$ là compact trong $L^2_{loc}(\mathbb{R}; E)$.
3. Một hàm $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; E)$ được gọi là chuẩn tắc tịnh tiến nếu với bất kỳ $\epsilon > 0$, tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+\eta} \|\varphi\|_E^2 ds < \epsilon.$$

Kí hiệu $L_b^2(\mathbb{R}; E)$, $L_c^2(\mathbb{R}; E)$ và $L_n^2(\mathbb{R}; E)$ tương ứng là tập tất cả các hàm bị chặn tịnh tiến, compact tịnh tiến và chuẩn tắc tịnh tiến trong $L_{loc}^2(\mathbb{R}; E)$. Ta có:

$$L_c^2(\mathbb{R}; E) \subset L_n^2(\mathbb{R}; E) \subset L_b^2(\mathbb{R}; E).$$

Gọi $\mathcal{H}_\omega(g)$ là bao đóng của tập $\{g(\cdot + h)/h \in \mathbb{R}\}$ trong $L_b^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ với tôpô yếu. Kết quả sau được chứng minh trong [18]

Bổ đề 1.4.2. [18, chương 5, Mệnh đề 4.2]

1. Với mọi $\sigma \in \mathcal{H}_\omega(g)$, $\|\sigma\|_{L_b^2}^2 \leq \|g\|_{L_b^2}^2$;
2. Nhóm chuyển dịch $\{T(h)\}$ là liên tục yếu trên $\mathcal{H}_\omega(g)$;
3. $T(h)\mathcal{H}_\omega(g) = \mathcal{H}_\omega(g)$ với $h \in \mathbb{R}$;
4. $\mathcal{H}_\omega(g)$ là compact yếu.

Ta sẽ sử dụng lý thuyết tập hút đều trong không gian kép đối với quá trình liên tục yếu và phương pháp ước lượng tiên nghiệm tiệm cận để nghiên cứu tính trơn của tập hút đều trong trường hợp này.

Bổ đề 1.4.3. Nếu $g \in L_n^2(\mathbb{R}; E)$ thì với mọi $\tau \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq \tau} \int_{\tau}^t e^{-\gamma(t-s)} \|\varphi\|_E^2 ds = 0 \text{ với mọi } \varphi \in \mathcal{H}_\omega(g).$$

Giả sử Σ là một tập tham số và X, Y là hai không gian Banach và Y nhúng liên tục vào X . Họ $\{U_\sigma(t, \tau)/t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$, $\sigma \in \Sigma$ được gọi là họ các quá trình trong X , nếu với mọi $\sigma \in \Sigma$, $\{U_\sigma(t, \tau)/t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ là một quá trình, nghĩa là, một họ các ánh xạ hai biến từ X vào X thỏa mãn

1. $U_\sigma(t, s)U_\sigma(s, \tau) = U_\sigma(t, \tau)$ với mọi $t \geq s \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}$,
2. $U_\sigma(\tau, \tau) = Id$, là ánh xạ đồng nhất với $\tau \in \mathbb{R}$.

trong đó Σ được gọi là không gian biểu trưng, $\sigma \in \Sigma$ được gọi là biểu trưng. Kí hiệu $\mathcal{B}(X)$ là tập tất cả các tập con bị chặn của X .

Định nghĩa 1.4.4. Một tập $B_0 \in \mathcal{B}(Y)$ được gọi là tập (X, Y) -hấp thụ đều của họ các quá trình $U_\sigma(t, \tau)_{\sigma \in \Sigma}$ nếu với mọi $\tau \in \mathbb{R}$ và mọi $B \in \mathcal{B}(X)$, tồn tại $t_0 = t_0(\tau, B) \geq \tau$ sao cho $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(t, \tau)B \subset B_0$ với mọi $t \geq t_0$.

Một tập $P \subset Y$ được gọi là tập (X, Y) -hút đều nếu với mọi $\tau \in \mathbb{R}$ cho trước và $B \in \mathcal{B}(X)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}_Y(U_\sigma(t, \tau)B, P) = 0$.

Định lý 1.4.5. (xem [8]) Giả sử $\{U_\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \Sigma}$ là họ các quá trình trên X thỏa mãn :

1. $U_\sigma(t + h, \tau + h) = U_{T(h)\sigma}(t, \tau)$, trong đó $\{T(h)/h \geq 0\}$ là một họ các toán tử trên Σ và thỏa mãn $T(h)\Sigma = \Sigma$ với mọi $h \in \mathbb{R}^+$,
2. Σ là tập compact yếu và $\{U_\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \Sigma}$ là $(X \times \Sigma, Y)$ -liên tục yếu, nghĩa là, với mọi $t \geq \tau$ cho trước, $\tau \in \mathbb{R}$, ánh xạ $(u, r) \mapsto U_\sigma(t, \tau)u$ là liên tục yếu từ $X \times \Sigma$ vào Y ,
3. $\{U_\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \Sigma}$ là (X, Y) -compact tiệm cận đều, nghĩa là, nó có một tập (X, Y) -compact đều. Khi đó họ $\{U_\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \Sigma}$ có một tập (X, Y) -hút đều $\mathcal{A}_\Sigma$ compact trong Y và hút mọi tập bị chặn trong X theo tôpô trong Y . Hơn nữa

$$\mathcal{A}_\Sigma = \omega_{\tau, \sigma}(B_0) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \overline{\bigcup_{s \geq t} U_\sigma(s, \tau)B_0},$$

trong đó B_0 là tập (X, Y) -hấp thụ bị chặn của $\{U_\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \Sigma}$.

1.5 Tập hút lùi (Pullback attractors)

1.5.1 Tập hút lùi đối với các tập bị chặn cố định

Ta sẽ kí hiệu $\mathcal{P}(X)$ là họ tất cả các tập con không rỗng của X và xét một họ các tập không rỗng $\hat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Định nghĩa 1.5.1. Ta nói rằng quá trình U là $\hat{D}_0$ -compact tiệm cận nếu với bất kì $t \in \mathbb{R}$ và bất kì dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và $x_n \in D_0(\tau_n)$, dãy $U(t, \tau_n)x_n$ với $\tau_n \leq t$, là compact tương đối trong X .

Kí hiệu

$$\Lambda(\hat{D}_0, t) = \bigcap_{s \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau) D_0(\tau)}^X, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Mệnh đề 1.5.2. (xem [1]) Nếu quá trình $U(t, \tau)$ là $\hat{D}_0$ -compact tiệm cận, thì tập $\Lambda(\hat{D}_0, t)$ xác định bởi (1.4) là tập con không rỗng compact của X với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Cố định một giá trị $t \in \mathbb{R}$.

Lấy một dãy tùy ý $\tau_n \rightarrow -\infty$ và với mỗi $\tau_n \leq t$ chọn $x_n \in D_0(\tau_n)$, thì từ dãy $U(t, \tau_n)x_n$ ta có thể trích ra một dãy con hội tụ $U(t, \tau_{n_j})x_{n_j} \rightarrow y$ trong X . Do đó, ta có $y \in \Lambda(\hat{D}_0, t)$ và tập $\Lambda(\hat{D}_0, t)$ là không rỗng.

Ta biết rằng $\Lambda(\hat{D}_0, t)$ là tập đóng và để chứng minh nó là compact ta chỉ cần chứng minh rằng với bất kì một dãy cho trước $\{y_n\} \subset \Lambda(\hat{D}_0, t)$, ta có thể trích ra một dãy con hội tụ. Đầu tiên, quan sát rằng $y_n \in \Lambda(\hat{D}_0, t)$ thì tồn tại $\tau_n \leq t - n$ và $x_n \in D_0(\tau_n)$ sao cho

$$d(y_n, U(t, \tau_n)x_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Do U là $\hat{D}_0$ -compact tiệm cận, nên ta có thể trích từ $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ một dãy con hội tụ trong X . Do đó, rõ ràng dãy con tương ứng của $\{y_n\}$ cũng sẽ hội tụ trong X tới cùng một điểm. □

Định nghĩa sau có chứa yêu cầu tối thiểu về tính liên tục đối với một quá trình trong khi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nó.

Định nghĩa 1.5.3. Ta nói rằng quá trình U là liên tục mạnh-yếu nếu với bất kì cặp $t \geq \tau \in \mathbb{R}$, ánh xạ $U(t, \tau)$ là liên tục từ X với tôpô mạnh vào X với tôpô yếu.

Mệnh đề 1.5.4. (xem [1]) Giả sử rằng quá trình U là $\hat{D}_0$ -compact tiệm cận và liên tục mạnh-yếu. Khi đó họ các tập $\{\Lambda(\hat{D}_0, t) : t \in \mathbb{R}\}$, xác định bởi (1.4), là bất biến đối với U , nghĩa là,

$$U(t, \tau)\Lambda(\hat{D}_0, \tau) = \Lambda(\hat{D}_0, t) \quad \forall \tau \leq t.$$

Chứng minh. Cố định cặp giá trị $\tau \leq t$.

Nếu $y \in \Lambda(\hat{D}_0, \tau)$, thì tồn tại các dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và $x_n \in D_0(\tau_n)$, sao cho $U(\tau, \tau_n)x_n \rightarrow y$ trong X khi $n \rightarrow +\infty$. Khi đó

$$U(t, \tau_n)x_n = U(t, \tau)U(\tau, \tau_n)x_n \rightarrow U(t, \tau)y \text{ yếu trong } X.$$

Mặt khác, từ dãy $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ ta có thể trích ra một dãy con hội tụ mạnh trong X , vì tính duy nhất của giới hạn nên giới hạn đó phải là $U(t, \tau)y$. Điều này suy ra $U(t, \tau)y \in \Lambda(\hat{D}_0, t)$

Vậy $U(t, \tau)\Lambda(\hat{D}_0, \tau) \subset \Lambda(\hat{D}_0, t)$.

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, ta xét một phần tử $z \in \Lambda(\hat{D}_0, t)$. Khi đó tồn tại hai dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và $x_n \in D_0(\tau_n)$, sao cho $U(t, \tau_n)x_n \rightarrow z$ trong X khi $n \rightarrow +\infty$. Với mỗi $\tau_n \leq t$, đẳng thức sau là đúng

$$U(t, \tau_n)x_n = U(t, \tau)U(\tau, \tau_n)x_n. \quad (1.5)$$

Do U là $\hat{D}_0$ -compact tiệm cận, ta có thể trích ra một dãy con $\{U(\tau, \tau_{n_j})x_{n_j}\}$ hội tụ trong X đến một điểm y và hiển nhiên $y \in \Lambda(\hat{D}_0, \tau)$. Theo (1.5) và U là liên tục mạnh-yếu, ta có $U(t, \tau_{n_j})x_{n_j} \rightarrow U(t, \tau)y$, vì vậy $z = U(t, \tau)y$. Điều này chứng minh bao hàm thức ngược lại, $\Lambda(\hat{D}_0, t) \subset U(t, \tau)\Lambda(\hat{D}_0, \tau)$. $\square$

Định nghĩa 1.5.5. Ta nói rằng họ các tập $\hat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ là tập hấp thụ lùi đối với quá trình U nếu với mọi $t \in \mathbb{R}$ và mọi tập con bị chặn B của X , tồn tại một $\tau(t, B) \leq t$ sao cho

$$U(t, \tau)B \subset D_0(t) \text{ với mọi } \tau \leq \tau(t, B).$$

Mệnh đề 1.5.6. (xem [1]) Nếu họ các tập $\hat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ là hấp thụ lùi đối với quá trình U và quá trình U là $\hat{D}_0$ -compact tiệm cận, thì với mọi $t \in \mathbb{R}$ mọi tập bị chặn B của X , ta có

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, \tau)B, \Lambda(\hat{D}_0, t)) = 0. \quad (1.6)$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho (1.6) không đúng. Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ và hai dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và $\{x_n\} \subset B$ sao cho

$$d(U(t, \tau_n)x_n, \Lambda(\hat{D}_0, t)) \geq \epsilon \quad \forall n \geq 1. \quad (1.7)$$

Với mỗi số nguyên $k \geq 1$, định nghĩa $t_k = t - k$. Do $\hat{D}_0$ hấp thụ lùi, nên với mỗi $k \geq 1$, tồn tại một giá trị τ_{n_k} trong dãy $\{\tau_n\}$ sao cho

$$\tau_{n_k} \leq t_k \text{ và } U(t_k, \tau_{n_k})B \subset D_0(t_k).$$

Đặc biệt

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_{n_k} = -\infty \text{ và } y_k := U(t_k, \tau_{n_k})x_{n_k} \in D_0(t_k).$$

Do đó, dãy

$$U(t, t_k)y_k = U(t, \tau_{n_k})x_{n_k}$$

là compact tương đối và tồn tại một dãy con (τ_{n_j}, x_{n_j}) lấy từ dãy (τ_{n_k}, x_{n_k}) và một điểm $z \in X$ sao cho

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} U(t, t_j)y_j = \lim_{j \rightarrow +\infty} U(t, \tau_{n_j})x_{n_j} = z.$$

Do $U(t, t_j)y_j$ hội tụ đến z nên $z \in \Lambda(\hat{D}_0, t)$ và vì vậy $U(t, \tau_{n_j})x_{n_j}$ hội tụ đến z . Điều này mâu thuẫn với (1.7)

□

Như một hệ quả của các kết quả nêu trên, ta thiết lập một điều kiện đủ để khẳng định sự tồn tại tập hút toàn cục $\mathcal{A}_{CDF}(t)$.

Định lý 1.5.7. (xem [1]) *Giả sử rằng $U(t, s) : X \rightarrow X$ là liên tục với $s \leq t$. Với $t \in \mathbb{R}$ cho trước, giả sử rằng tồn tại một tập hút compact $K(t)$. Khi đó tập*

$$\mathcal{A}_{CDF}(t) = \overline{\bigcup_{B \text{ bị chặn}} \Lambda(B, t)}^X, \quad (1.8)$$

là tập con không rỗng compact của $K(t)$. Nó hút tất cả các tập bị chặn từ $-\infty$ với mọi $B \subset X$:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, s)B, \mathcal{A}_{CDF}(t)) = 0.$$

Hơn nữa, nó là tập đóng nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này: nếu $\tilde{A}(t)$ là tập đóng mà hút tất cả các tập bị chặn từ $-\infty$ thì $\mathcal{A}_{CDF}(t) \subset \tilde{A}(t)$. Cuối cùng $\mathcal{A}_{CDF}(\tau)$ cũng hoàn toàn xác định với mọi $\tau > t$ và thỏa mãn tính chất bất biến

$$U(\tau, r)\mathcal{A}_{CDF}(r) = \mathcal{A}_{CDF}(\tau), \quad \forall \tau \geq r \geq t.$$

Với lí do này, ta nói rằng $\mathcal{A}_{CDF}(t)$ là tập hút toàn cục của hệ động lực $U(t, s)$ tại thời điểm t .

Điều thú vị ở đây là điều kiện của chúng ta trên họ $\hat{D}_0$ không yêu cầu tính compact hay tính bị chặn mà chỉ yêu cầu trên họ $\{K(t)\}$.

Nhận xét 1.5.8. Định lí 1.5.7 cũng có thể đạt được dưới giả thiết tính liên tục mạnh-yếu của quá trình thay cho tính liên tục, nếu yêu cầu sự tồn tại của họ $\{K(t)\}$ với mỗi $K(t)$ là tập hút (lùi) compact tại thời điểm t . Thật vậy, sự tổng quát này có thể chứng minh tương tự như các Mệnh đề 1.5.2, 1.5.4 và 1.5.6.

Chỉ có một sự khác biệt ở đây là giả thiết về sự tồn tại tập hút compact $K(t)$ tại một thời điểm đơn t là đủ - kết hợp với tính liên tục của cả quá trình - để khẳng định về sự tồn tại của các tập hút compact với tất cả tương lai: đó là lấy $K(r) = U(r, t)K(t)$ với $r \geq t$. Với một quá trình liên tục mạnh-yếu thì điều này không còn đúng. Nhưng thực tế ta đã có một họ các tập hút compact rồi: $\{\Lambda(\hat{D}_0, r) : r \in \mathbb{R}\}$.

Hệ quả 1.5.9. Xét một họ $\hat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ là tập con không rỗng của X và một quá trình U là $\hat{D}_0$ -compact tiệm cận và liên tục mạnh-yếu và giả sử rằng $\hat{D}_0$ là hấp thụ lùi đối với U . Khi đó, tồn tại tập hút $\mathcal{A}_{CDF}(t) = \{\mathcal{A}_{CDF}(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Hơn nữa, mối quan hệ sau là đúng:

$$\mathcal{A}_{CDF}(t) \subset \Lambda(\hat{D}_0, t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Nhận xét 1.5.10. Tính chất của $\Lambda(\hat{D}_0, t)$ chứng minh trong các Mệnh đề 1.5.2, 1.5.4 và 1.5.6 chỉ ra rằng nó là một tập hút. Tuy nhiên, do tính chất của tập hấp thụ lùi chỉ đúng cho các tập bị chặn nên nhiều nhất ta có thể mong chờ $\{\Lambda(\hat{D}_0, t)\}$ là một tập hút của các tập bị chặn cố định. Nhưng $\mathcal{A}_{CDF}$ đã là họ nhỏ nhất có tính chất như vậy. Do đó, điều tốt nhất có thể mong chờ ở (1.9) là ta không chỉ có bao hàm thức mà có một đẳng thức.

Mệnh đề 1.5.11. (xem [1]) Dưới các giả thiết của Hệ quả 1.5.9, nếu tồn tại một giá trị $T \in \mathbb{R}$ sao cho $\cup_{t \leq T} D_0(t)$ là bị chặn, thì $\mathcal{A}_{CDF}(t) = \Lambda(\hat{D}_0, t)$ với mọi $t \leq T$.

Chứng minh. Cố định $t \leq T$ bất kì. Theo Hệ quả 1.5.9 ta chỉ cần chứng minh bao hàm thức $\mathcal{A}_{CDF}(t) \supset \Lambda(\hat{D}_0, t)$.

Theo định nghĩa của $\Lambda(\hat{D}_0, t)$, công thức (1.4):

$$\Lambda(\hat{D}_0, t) := \bigcap_{s \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau) D_0(\tau)}^X \subset \bigcap_{s \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau) B_0}^X = \Lambda(B_0, t),$$

ở đây ta kí hiệu $B_0 = \cup_{\tau \leq T} D_0(\tau)$ là bị chặn theo giả thiết. Sử dụng (1.8) ta có điều phải chứng minh. $\square$

1.5.2 Tập hút lùi đối với họ các tập phụ thuộc thời gian

Cho trước $\mathcal{D}$ là một lớp không rỗng các tập hợp được tham số hóa theo thời gian $\hat{D} = \{D(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Định nghĩa 1.5.12. Quá trình U được gọi là $\mathcal{D}$ -compact tiệm cận lùi nếu với bất kì $t \in \mathbb{R}$, bất kì $\hat{D} \in \mathcal{D}$, bất kì dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và bất kì dãy $x_n \in D(\tau_n)$ dãy $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ là compact tương đối trong X .

Nhận xét 1.5.13. Khái niệm $\mathcal{D}$ -compact tiệm cận lùi theo nghĩa trong định nghĩa nêu trên ứng với một họ $(\mathcal{D})$, trong khi khái niệm $\hat{D}_0$ tiệm cận compact theo nghĩa của định nghĩa ở Mục 1.5.1 ứng với một họ đơn $(\hat{D}_0)$.

Định nghĩa 1.5.14. Ta nói rằng $\hat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ là tập $\mathcal{D}$ -hấp thụ lùi đối với quá trình U nếu với bất kì $t \in \mathbb{R}$ và bất kì $\hat{D} \in \mathcal{D}$, tồn tại một $\tau_0(t, \hat{D}) \leq t$ sao cho

$$U(t, \tau)D(\tau) \subset D_0(t) \text{ với mọi } \tau \leq \tau_0(t, \hat{D}).$$

Để chứng minh sự tồn tại của $\mathcal{D}$ -hút lùi, ta cần kết quả sau

Mệnh đề 1.5.15. Giả sử rằng quá trình U là liên tục mạnh-yếu, $\mathcal{D}$ -compact tiệm cận lùi. Với mỗi $\hat{D} \in \mathcal{D}$ tập $\Lambda(\hat{D}, t)$ xác định bởi (1.4) là tập con không rỗng compact của X , bất biến đối với U . Hơn nữa, nếu giả thiết thêm $\hat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ là một họ các tập $\mathcal{D}$ -hấp thụ lùi đối với U thì $\Lambda(\hat{D}_0, t)$ hút $\hat{D}$ theo nghĩa lùi, nghĩa là

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, \tau)D(\tau), (\hat{D}_0, t)) = 0, \quad \forall D \in \hat{D}. \quad (1.10)$$

Chứng minh. Cố định $\hat{D} \in \mathcal{D}$ và $t \in \mathbb{R}$. Nếu ta xét một dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và một dãy $x_n \in D(\tau_n)$ thì từ dãy $U(t, \tau_n)x_n$ ta có thể trích ra một dãy

con hội tụ $U(t, \tau_{n_j})x_{n_j} \rightarrow y$. Do đó, ta có $y \in \Lambda(\hat{D}, t)$ và tập $\Lambda(\hat{D}, t)$ là không rỗng.

Ta biết rằng $\Lambda(\hat{D}, t)$ là đóng và để chứng minh nó là compact ta chỉ cần chứng minh rằng với bất kì một dãy cho trước $\{y_n\} \subset \Lambda(\hat{D}, t)$, ta có thể trích ra một dãy con hội tụ. Đầu tiên, quan sát rằng $y_n \in \Lambda(\hat{D}, t)$ thì tồn tại $\tau_n \leq t - n$ và $x_n \in D(\tau_n)$ sao cho

$$d(y_n, U(t, \tau_n)x_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Do U là $\mathcal{D}$ -compact tiệm cận lùi, nên ta có thể trích từ $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ một dãy con hội tụ trong X . Do đó, rõ ràng dãy con tương ứng của $\{y_n\}$ cũng sẽ hội tụ trong X tới cùng một điểm.

Để chứng minh $\Lambda(\hat{D}, t)$ là bất biến đối với U , nghĩa là

$$U(t, \tau)\Lambda(\hat{D}, \tau) = \Lambda(\hat{D}, t), \quad \forall \tau \leq t,$$

ta cố định cặp giá trị $\tau < t$ và $\hat{D} \in \mathcal{D}$.

Nếu $y \in \Lambda(\hat{D}, \tau)$ thì tồn tại các dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và $x_n \in D(\tau_n)$, sao cho $U(\tau, \tau_n)x_n \rightarrow y$ trong X khi $n \rightarrow +\infty$. Khi đó,

$$U(t, \tau_n)x_n = U(t, \tau)U(\tau, \tau_n)x_n \rightarrow U(t, \tau)y \text{ yếu trong } X.$$

Mặt khác, từ dãy $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ có thể trích ra một dãy con hội tụ mạnh trong X , vì tính duy nhất của giới hạn nên giới hạn đó phải là $U(t, \tau)y$. Điều này suy ra $U(t, \tau)y \in \Lambda(\hat{D}, t)$. Ta đã chứng minh xong bao hàm thức $U(t, \tau)\Lambda(\hat{D}, \tau) \subset \Lambda(\hat{D}, t)$.

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, xét một phần tử $z \in \Lambda(\hat{D}, t)$. Khi đó tồn tại hai dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và $x_n \in D(\tau_n)$, sao cho $U(t, \tau_n)x_n \rightarrow z$ trong X khi $n \rightarrow +\infty$. Với mỗi $\tau_n \leq t$, đẳng thức sau là đúng

$$U(t, \tau_n)x_n = U(t, \tau)U(\tau, \tau_n)x_n. \quad (1.11)$$

Do U là $\mathcal{D}$ -compact tiệm cận lùi, ta có thể trích ra một dãy con $\{U(\tau, \tau_{n_j})x_{n_j}\}$ hội tụ trong X đến một điểm $y \in \Lambda(\hat{D}, t)$. Theo (1.11) và U là liên tục mạnh-yếu, ta có $U(t, \tau_{n_j})x_{n_j} \rightarrow U(t, \tau)y$, vì vậy $z = U(t, \tau)y$. Điều này chứng minh bao hàm thức ngược lại, $\Lambda(\hat{D}, t) \subset U(t, \tau)\Lambda(\hat{D}, t)$.

Ta chứng minh tính hút lùi bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $D \in \hat{D}$, $t \in \mathbb{R}$ sao cho (1.10) không đúng. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ và hai dãy $\tau_n \rightarrow -\infty$ và $\{x_n\} \subset D(\tau)$ sao cho

$$d(U(t, \tau_n)x_n, \Lambda(\hat{D}_0, t)) \geq \varepsilon, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.12)$$

Với mỗi số nguyên $k \geq 1$, định nghĩa $t_k = t - k$. Do $\hat{D}_0$ là tập $\mathcal{D}$ -hấp thụ lùi, nên với mỗi $k \geq 1$, tồn tại một giá trị riêng τ_{n_k} trong dãy $\{\tau_n\}$ sao cho

$$\tau_{n_k} \leq t_k \text{ và } U(t_k, \tau_{n_k})D(\tau_{n_k}) \subset D_0(t_k).$$

Đặc biệt,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_{n_k} = -\infty \text{ và } y_k := U(t_k, \tau_{n_k})x_{n_k} \in D_0(t_k).$$

Do đó, dãy

$$U(t, t_k)y_k = U(t, \tau_{n_k})x_{n_k}$$

là compact tương đối và tồn tại một dãy con (τ_{n_j}, x_{n_j}) lấy từ dãy (τ_{n_k}, x_{n_k}) và một điểm $z \in X$ sao cho

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} = U(t, t_j)y_j = \lim_{j \rightarrow +\infty} U(t, \tau_{n_j})x_{n_j} = z.$$

Do $U(t, t_j)y_j$ hội tụ đến z nên $z \in \Lambda(\hat{D}_0, t)$, vì vậy $U(t, \tau_{n_j})x_{n_j}$ hội tụ đến z . Điều này mâu thuẫn với (1.12). □

Kết quả dưới đây là nội dung chính của phần này.

Định lý 1.5.16. (xem [1]) Giả sử U là quá trình liên tục mạnh-yếu, $\mathcal{D}$ -compact tiệm cận lùi, $\hat{D}_0 = \{D_0(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ là một họ các tập $\mathcal{D}$ -hấp thụ lùi đối với U . Khi đó, họ $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$ xác định bởi

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) = \Lambda(\hat{D}_0, t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

có các tính chất sau:

- a) Tập $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$ là compact với bất kì $t \in \mathbb{R}$,
- b) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ là $\mathcal{D}$ -hút lùi, nghĩa là

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, \tau)D(\tau), \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)) = 0, \text{ với mọi } \hat{D} \in \mathcal{D},$$

c) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ là bất biến, nghĩa là

$$U(t, \tau)\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\tau) = \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t), \text{ với mọi } \tau \leq t,$$

d)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) = \overline{\bigcup_{\hat{D} \in \mathcal{D}} \Lambda(\hat{D}, t)}^X \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Họ $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$, được gọi là tập $\mathcal{D}$ -hút lùi toàn cục đối với quá trình U và là nhỏ nhất theo nghĩa nếu $\hat{C} = \{C(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$ là một họ các tập đóng sao cho

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, \tau)B(\tau), C(t)) = 0,$$

thì $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset C(t)$.

Nhận xét 1.5.17. Nếu ta giả sử rằng $D_0(t)$ là đóng với mọi $t \in \mathbb{R}$ và họ $\mathcal{D}$ là đóng đối với quan hệ bao hàm (nghĩa là nếu $\hat{D} \in \mathcal{D}$ và $\hat{D}' = \{D'(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(X)$ với $D'(t) \subset D(t)$ với mọi t , thì $\hat{D}' \in \mathcal{D}$), khi đó tập $\mathcal{D}$ -hút lùi $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ thuộc vào $\mathcal{D}$ và nó chỉ là một họ trong $\mathcal{D}$ thỏa mãn các tính chất (a)-(c) nói trên.

Các tính chất sau đây cho ta sự so sánh giữa hai tập hút lùi được giới thiệu ở trên.

Hệ quả 1.5.18. Dưới giả thiết của Định lý 1.5.16, nếu $\mathcal{A}$ chứa tất cả các tập bị chặn của X , thì cả hai tập hút $\mathcal{A}_{CDF}$ và $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ đều tồn tại và thỏa mãn quan hệ sau

$$\mathcal{A}_{CDF}(t) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t), \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}.$$

Hệ quả 1.5.19. Dưới giả thiết của Định lý 1.5.16, nếu $\mathcal{A}$ chứa tất cả các tập bị chặn của X và họ $\hat{D}_0$ thỏa mãn với $T \in \mathbb{R}$ nào đó mà $\cup_{t \leq T} D_0(t)$ bị chặn, thì $\mathcal{A}_{CDF}(t) = \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$ với mọi $t \leq T$.

Nhận xét 1.5.20. Khi $\mathcal{D}$ gồm tất cả các tập con bị chặn hằng của X , thì sự tồn tại của $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ suy ra sự tồn tại của $\mathcal{A}_{CDF}$ và cả hai là trùng nhau: $\mathcal{A}_{CDF}(t) = \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên, từ sự tồn tại của $\mathcal{A}_{CDF}$ không nhất thiết suy ra sự tồn tại của $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ xác định bởi (1.13), bởi vì nó có thể xảy ra trường hợp $\hat{D}_0 \notin \mathcal{D}$. Đây chính là tình huống xảy ra nhiều trong ứng dụng, ở đó các tập $D_0(t)$ phụ thuộc vào t .

1.6 Một số bất đẳng thức thường dùng

Chúng ta nhắc lại một số bất đẳng thức thường dùng: (xem [1])

Bổ đề 1.6.1. (Bất đẳng thức Holder) Giả thiết $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó nếu $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ thì ta có :

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Bổ đề 1.6.2. (Bất đẳng thức Young) Cho $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (a, b > 0).$$

Bổ đề 1.6.3. (Bất đẳng thức Cauchy)

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Trong luận văn thường xuyên sử dụng các bất đẳng thức Gronwall sau đây:

Bổ đề 1.6.4. (xem [1]) (Bất đẳng thức Gronwall) Giả sử $x(t)$ là một hàm liên tục tuyệt đối trên $[0; T]$ và thỏa mãn

$$\frac{dx}{dt} \leq g(t)x + h(t), \text{ với hầu khắp } t,$$

trong đó $g(t)$ và $h(t)$ là các hàm khả tích trên $[0; T]$. Khi đó

$$x(t) \leq x(0)e^{G(t)} + \int_0^t e^{G(t)-G(s)}h(s)ds,$$

với $0 \leq t \leq T$, trong đó

$$G(t) = \int_0^t g(r)dr.$$

Nói riêng, nếu a và b là các hằng số và

$$\frac{dx}{dt} \leq ax + b,$$

thì

$$x(t) \leq (x(0) + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a}.$$

Bổ đề 1.6.5. (Bất đẳng thức Gronwall đều) Giả sử x, a và b là các hàm dương thỏa mãn

$$\frac{dx}{dt} \leq ax + b$$

với

$$\int_t^{t+r} x(s)ds \leq X, \int_t^{t+r} a(s)ds \leq A \text{ và } \int_t^{t+r} b(s)ds \leq B$$

với $r > 0$ nào đó và với mọi $t \geq t_0$. Khi đó

$$x(t) \leq \left(\frac{X}{r} + B\right)e^A$$

với mọi $t \geq t_0 + r$.

Bổ đề 1.6.6. (Bất đẳng thức Poincare) Giả sử Ω là một tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $t > \tau$.

Khi đó, ta có bất đẳng thức sau:

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p.$$

Chương 2

SỰ TỒN TẠI DUY NHẤT NGHIỆM YẾU

2.1 Đặt bài toán

Trong chương này ta xét sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán đã nêu trong phần mở đầu:

$$\begin{cases} u_t - G_s u + f(u) = g(t, x), & (t, x) \in Q_{\tau, T} = (\tau, T] \times \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (\tau, T], \\ u(x, \tau) = u_\tau(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó

$$G_s u = \Delta_{x_1} u + |x_1|^{2s} \Delta_{x_2} u, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}, s \geq 0,$$

là toán tử Grushin, $u_\tau \in L^2(\Omega)$.

2.1.1 Các giả thiết của bài toán

Hàm f là phi tuyến, ngoại lực g thỏa mãn những điều kiện sau:

(H1) Hàm phi tuyến $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ thỏa mãn

$$f(u)u \geq C_1|u|^p - C_2, \quad p \geq 2, \quad (2.2)$$

$$|f'(u)| \leq C_3|u|^{p-2} + C_4, \quad (2.3)$$

$$f'(u) \geq -l, \quad (2.4)$$

trong đó $l, C_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ là những hằng số dương. Hệ thức (2.2) và (2.3) kéo theo:

$$\alpha_1|u|^p - \alpha_2 \leq F(u) \leq \alpha_3|u|^p + \alpha_4,$$

trong đó $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$ và $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ là những hằng số dương.

(H2) $g \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ thỏa mãn

$$\int_{-\infty}^t e^{\lambda_1 s} \left(\|g(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \leq +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

trong đó λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-G_s$ trong Ω với điều kiện biên thuần nhất Dirichlet.

2.1.2 Định nghĩa nghiệm yếu của bài toán

Ta kí hiệu:

$$X = L^2(\tau, T; S_0^2(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^{2p-2}(\Omega)).$$

$$X^* = L^2(\tau, T; S^{-2}(\Omega)) + L^{p'}(\tau, T; L^{2p'-2}(\Omega)).$$

Với p là số liên hợp của p' $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

Định nghĩa 2.1.1. Một hàm u được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (2.1) trên (τ, T) nếu và chỉ nếu $u \in X; \frac{\partial u}{\partial t} \in X^*, u|_{t=\tau} = u_\tau$ với $x \in \Omega$ hầu khắp nơi trong Ω và

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + \nabla_{x_1} u \nabla_{x_2} \varphi + |x_1|^{2s} \nabla_{x_2} u + \nabla_{x_2} \varphi + f(u) \varphi \right) dx dt \\ &= \int_{\tau}^T \int_{\Omega} g \varphi dx dt \quad \text{với mọi hàm thử } \varphi \in X. \end{aligned}$$

2.2 Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán

Trong luận văn này tác giả kí hiệu $|\cdot|_2$, $(\cdot, \cdot)$ lần lượt là chuẩn và tích vô hướng trong $L^2(\Omega)$; $|\cdot|_p$ là chuẩn trong $L^p(\Omega)$; $\|\cdot\|$, $((\cdot, \cdot))$ lần lượt là chuẩn và tích vô hướng trong $S_0^1(\Omega)$; $\|\cdot\|_E$ là chuẩn trong không gian Banach E và C là hằng số tùy ý.

Bổ đề 2.2.1. Nếu $u \in X$; $\frac{\partial u}{\partial t} \in X^*$ thì $u \in C([\tau, T]; L^2(\Omega))$.

Chứng minh. Giả sử dãy $u_n \in C^1([\tau, T]; S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega))$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ trong } X \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ trong } X^* \end{cases}$$

Khi đó $\forall t, t_0 \in [\tau, T]$, ta có:

$$\begin{aligned} & |u_n(t) - u_m(t)|_2^2 \\ &= |u_n(t_0) - u_m(t_0)|_2^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle u'_n(s) - u'_m(s), u_n(s) - u_m(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Chọn t_0 sao cho:

$$|u_n(t_0) - u_m(t_0)|_2^2 = \frac{1}{T - \tau} \int_{\tau}^T |u_n(t) - u_m(t)|_2^2 dt.$$

Đặt

$$\begin{aligned} X(t_1, t_2) &= L^2(t_1, t_2; S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)). \\ X^*(t_1, t_2) &= L^2(t_1, t_2; S^{-2}(\Omega) + L^{2p'-2}(\Omega)). \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_n(t) - u_m(t)|^2 dx &= \frac{1}{T - \tau} \int_{\Omega} \int_{\tau}^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \int_{t_0}^t (u'_n(s) - u'_m(s))(u_n(s) - u_m(s)) ds dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{T-\tau} \int_{\Omega} \int_{\tau}^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt dx \\
&+ 2 \|u'_n - u'_m\|_{X^*(t_0, t)} \|u_n - u_m\|_{X(t_0, t)} \\
&\leq \frac{1}{T-\tau} \int_{\Omega} \int_{\tau}^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt dx \\
&+ 2 \|u'_n - u'_m\|_{X^*(t, \tau)} \|u_n - u_m\|_{X(t, \tau)}.
\end{aligned}$$

Do đó $\{u_n\}$ là dãy Cauchy trong $C([\tau, T]; L^2(\Omega))$. Suy ra dãy $\{u_n\}$ hội tụ trong $C([\tau, T]; L^2(\Omega))$ tới một hàm $v \in C([\tau, T]; L^2(\Omega))$. Mặt khác, từ $u_n \rightarrow u$ trong X , $u_n(t) \rightarrow u(t) \in L^2(\Omega)$ với hầu khắp $t \in [\tau, T]$. Do đó ta thu được $u = v$ hầu khắp nơi. Điều đó chứng tỏ $u \in C([\tau, T]; L^2(\Omega))$ (nếu cần có thể chỉnh sửa giá trị trên một tập có độ đo 0).

Từ Bổ đề trên, suy ra điều kiện ban đầu của (2.1) là có nghĩa. □

Định lý 2.2.2. *Giả sử f và g thỏa mãn (H1) – (H2), $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $T > \tau$ và u_τ cho trước bài toán (2.1) có duy nhất một nghiệm yếu u trên (τ, T) .*

Chứng minh. (i) Sự tồn tại nghiệm.

Ta xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ $u_n(t)$ trong không gian hữu hạn chiều sinh bởi n véc tơ riêng đầu tiên $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ của toán tử $A = -G_s$:
 $u_n(t) = \sum_{j=1}^n u_{n_j}(t) e_j$ sao cho u_n thỏa mãn điều kiện sau

$$\begin{cases}
\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, e_j \rangle + \langle Au_n, e_j \rangle + \langle f(u_n), e_j \rangle = \langle g, e_j \rangle \\
(u_n(\tau), e_j) = (u_\tau, e_j) \quad j = 1, \dots, n
\end{cases}$$

Theo Định lý Penao, ta nhận được sự tồn tại của dãy nghiệm xấp xỉ $u_n(t)$.

Bây giờ ta sẽ xây dựng các ước lượng tiên nghiệm của u_n . Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}u_n + Au_n + f(u_n, t) = g(t, x) \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}u_n u_n + Au_n u_n + f(u_n, t)u_n = g(t, x)u_n \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}u_n^2 + Au_n^2 + f(u_n, t)u_n = g(t, x)u_n \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u_n|_2^2 + ||u_n||^2 + \int_{\Omega} f(u_n, t)u_n dx = \int_{\Omega} g(t, x)u_n dx.
\end{aligned}$$

Mặt khác, do điều kiện (H_1) , ta có

$$\begin{aligned}
& f(u_n, t)u_n \geq C_1|u_n|^p - C_2 \quad p \geq 2 \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} f(u_n, t)u_n dx \geq \int_{\Omega} C_1|u_n|^p dx - \int_{\Omega} C_2 dx \\
& \Rightarrow C_1|u_n|_p^p - C_2|\Omega| \leq \int_{\Omega} f(u_n, t)u_n dx \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u_n|_2^2 + ||u_n||^2 + C_1|u_n|_p^p - C_2|\Omega| \\
& \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u_n|_2^2 + ||u_n||^2 + \int_{\Omega} f(u_n, t)u_n dx.
\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u_n|_2^2 + ||u_n||^2 + C_1|u_n|_p^p - C_2|\Omega| \leq \int_{\Omega} g(t)u_n dx.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} g(t)u_n dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} g(t)\sqrt{\lambda_1} u_n dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{\frac{1}{\lambda_1} |g(t)|^2 \lambda_1 |u_n|^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |g(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \lambda_1 |u_n|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\lambda_1} |g(t)|_2^2 + \frac{\lambda_1}{2} |u_n|_2^2.
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n|_2^2 + ||u_n||^2 + C_1 |u_n|_p^p - C_2 |\Omega| &\leq \frac{1}{2\lambda_1} |g(t)|_2^2 + \frac{\lambda_1}{2} |u_n|_2^2 \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} |u_n|_2^2 + 2||u_n||^2 + 2C_1 |u_n|_p^p - 2C_2 |\Omega| &\leq \frac{1}{\lambda_1} |g(t)|_2^2 + \lambda_1 |u_n|_2^2 \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} |u_n|_2^2 + 2||u_n||^2 + 2C_1 |u_n|_p^p &\leq 2C_2 |\Omega| + \frac{1}{\lambda_1} |g(t)|_2^2 + \lambda_1 |u_n|_2^2.
\end{aligned}$$

Do bất đẳng thức Poincare: $||u_n||^2 \geq \lambda_1 |u_n|_2^2$, nên ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} |u_n|_2^2 + 2||u_n||^2 + 2C_1 |u_n|_p^p &\leq 2C_2 |\Omega| + \frac{1}{\lambda_1} |g(t)|_2^2 + ||u_n||^2 \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} |u_n|_2^2 + ||u_n||^2 + 2C_1 |u_n|_p^p &\leq 2C_2 |\Omega| + \frac{1}{\lambda_1} |g(t)|_2^2. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Từ đây nghiệm địa phương có thể thác triển lên $[\tau, +\infty)$.

Thật vậy từ (2.6), suy ra:

$$\frac{d}{dt} |u_n|_2^2 + ||u_n||^2 \leq 2C_2 |\Omega| + \frac{1}{\lambda_1} |g(t)|_2^2.$$

Lấy tích phân (2.6) trên $[\tau, t]$ $\tau < t \leq T$, ta có:

$$\int_{\tau}^t |u_n|_2^2 ds + \int_{\tau}^t ||u_n||^2 ds + 2C_1 \int_{\tau}^t |u_n|_p^p ds \leq \int_{\tau}^t 2C_2 ds + \frac{1}{\lambda_1} \int_{\tau}^t |g(s)|_2^2 ds$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |u_n(t)|_2^2 - |u_n(\tau)|_2^2 + \int_{\tau}^t ||u_n||^2 ds + 2C_1 \int_{\tau}^t |g(s)|_2^2 ds \\
&\leq 2 \int_{\tau}^t C_1 ds + \frac{1}{\lambda_1} \int_{\tau}^t |g(s)|_2^2 ds \\
&\Rightarrow |u_n(t)|_2^2 + \int_{\tau}^t ||u_n||^2 ds + 2C_1 \int_{\tau}^t |u_n|_p^p ds \\
&\leq |u_n(\tau)|_2^2 + 2 \int_{\tau}^t C_1 ds + \frac{1}{\lambda_1} \int_{\tau}^t |g(s)|_2^2 ds \\
&< C + 2 \int_{\tau}^t C_1 ds + \frac{1}{\lambda_1} \int_{\tau}^t |g(s)|_2^2 ds < C_0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Từ bất đẳng thức (2.7), ta suy ra

$\{u_n\}$ bị chặn trong $L^\infty(\tau, T; L^2(\Omega))$,

$\{u_n\}$ bị chặn trong $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$,

$\{u_n\}$ bị chặn trong $L^\infty(\tau, T; L^2(\Omega))$.

Do điều kiện (H_1) $f(u)u \geq C_1|u|^p - C_2$ $p \geq 2$, nên nếu $u \leq M < 0$, thì:

$$\begin{aligned}
f(u, t)u &\leq C_1|u|^{p-1} - \frac{C_2}{u} \\
&\leq C_1|u|^{p-1} - \frac{C_2}{M} \\
&\leq C(|u|^p + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_{\Omega} |f(u_n, t)|^{p'} dx \leq C \int_{\Omega} (|u|^p + 1)^{p'} dx = C \int_{\Omega} \left(|u|^{p-1} + 1 \right)^{\frac{p}{p-1}} dx \\
&\Rightarrow \int_{\Omega} |f(u_n, t)|^{p'} dx \leq C \int_{\Omega} \left(|u|^p + 1 \right) dx \\
&\Rightarrow \int_{\Omega} |f(u_n, t)|_p^{p'} dx \leq C \int_{\Omega} \left(|u|^p + 1 \right) dx \\
&\Rightarrow \int_{\tau}^T |f(u_n, t)|_p^{p'} \leq C \int_{\tau}^T \int_{\Omega} \left(|u|^p + 1 \right) dx.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(u_n, t)$ bị chặn trong $L^{p'}(\tau, T; L^{p'}(\Omega))$ và do đó $f(u_n, t)$ hội tụ yếu đến η trong $L^{p'}(\tau, T; L^{p'}(\Omega))$.

Do đó, ta có

$$u_n \rightharpoonup u \text{ trong } L^2(\tau, T; S_0^2(\Omega)),$$

$$f(u_n, t) \rightharpoonup \eta \text{ trong } L^{p'}(\tau, T; L^{p'}(\Omega)),$$

$$Au_n \rightharpoonup Au \text{ trong } L^2(\tau, T; S^{-2}(\Omega)).$$

Bằng cách viết lại:

$$\frac{d}{dt}u_n = -Au_n - f(u_n, t) + g(t, x) \quad (2.8)$$

với $Au_n = -G_s u_n$.

Ta thấy $\left\{ \frac{du_n}{dt} \right\}$ bị chặn trong X^* nên suy ra $\left\{ \frac{du_n}{dt} \right\}$ cũng bị chặn trong $L^{p'}(\tau, T; S^{-2}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$.

Chú ý rằng $S_0^2(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \subset S^{-2}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$, nên áp dụng Bổ đề compact hóa [16] ta có thể giả sử rằng $u_n \rightarrow u$ (hội tụ mạnh) trong $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$. Do đó, $u_n \rightarrow u$ hầu khắp nơi trong $\Omega \times [\tau, T]$.

Vì f liên tục, nên suy ra $f(u_n, t) \rightarrow f(u, t)$ hầu khắp nơi trong $\Omega \times [\tau, T]$. Mặt khác, $f(u_n, t) \rightharpoonup \eta$ trong $L^{p'}(\tau, T; L^{p'}(\Omega))$, nên ta có $f(u_n, t) \rightarrow f(u, t)$ trong $L^{p'}(\tau, T; L^{p'}(\Omega))$.

Do đó, từ (2.8) ta có: $u' = -Au - f(u, t) + g$ trong X^* .

Từ Bổ đề 2.2.1, ta có $u \in C([\tau, T]; L^2(\Omega))$.

Chọn hàm thử $\varphi \in C^1([\tau, T]; S_0^2(\Omega) \cap L^2(\Omega))$, thì $\varphi(t) = 0$, và lấy tích phân theo t , ta có

$$\begin{aligned} & \left((u(T), \varphi(T)) - (u(\tau), \varphi(\tau)) \right) - \int_{\tau}^T (u, \varphi') dt \\ &= - \int_{\tau}^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx dt - \int_{\tau}^T \int_{\Omega} (f(u, t) - g) \varphi dx dt \\ &\Rightarrow - \int_{\tau}^T (u, \varphi') dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} (f(u, t) - g) \varphi dx dt \\ &= (u(\tau), \varphi(\tau)). \end{aligned}$$

Bằng cách áp dụng biến đổi tương tự đối với nghiệm xấp xỉ Galerkin, ta có

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau}^T (u_n, \varphi') dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} (f(u_n, t) - g) \varphi dx dt \\ &= (u_n(\tau), \varphi(\tau)). \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta có

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau}^T (u, \varphi') dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} (f(u, t) - g) \varphi dx dt \\ &= (u(\tau), \varphi(\tau)). \end{aligned}$$

Vì $u_n(\tau) \rightarrow u_{\tau}$ nên $u(\tau) = u_{\tau}$.

Vậy u là nghiệm yếu của bài toán (2.1).

(ii) Bây giờ ta chứng minh sự duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm.

Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm yếu của bài toán (2.1) với điều kiện ban đầu tương ứng là $u_1(t), u_2(t)$.

Từ (2.1) ta có $\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) + (Au_1 - Au_2) + f(u_1, t) - f(u_2, t) = 0$.

Do $(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geq \lambda_1 |u_1 - u_2|_2^2$ và sử dụng điều kiện $\frac{\partial f(u, t)}{\partial u} \geq -l$ với mọi $u \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |u_1 - u_2|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |u_1 - u_2|_2^2 + (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \\ &= -(f(u_1) - f(u_2), u_2) \\ &\leq -\frac{\partial f(u, t)}{\partial u} |u_1 - u_2|_2^2 \\ &\leq l |u_1 - u_2|_2^2. \end{aligned}$$

Áp dụng Bỏ đề Gronwall, ta có

$$|u_1(t) - u_2(t)|_2^2 \leq e^{2l(t-\tau)} |u_1(\tau) - u_2(\tau)|_2^2.$$

Từ đó suy ra tính duy nhất (nếu $u_1(\tau) = u_2(\tau)$) và phụ thuộc liên tục của nghiệm yếu.

□

Mệnh đề 2.2.3. *Giả sử f và g thỏa mãn $(H1) - (H2)$, $u(t)$ là một nghiệm yếu của bài toán số của bài toán đầu. Khi đó với $t > \tau$:*

$$||u||^2 + |u|_p^p \leq C \left(e^{-\lambda_1(t-\tau)} |u_\tau|_2^2 + 1 + e^{-\lambda_1 t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda_1 s} |g(s)|_2^2 ds \right) \quad (2.9)$$

trong đó C là hằng số dương.

Chứng minh. Nhân (2.1) với u sau đó lấy tích phân trên Ω , ta được

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|_2^2 + ||u||^2 + \int_{\Omega} f(u) u dx = \int_{\Omega} g(t) u dx \leq \frac{1}{\lambda_1} |g(t)|_2^2 + \frac{\lambda_1}{4} |u|_2^2.$$

Sử dụng giả thiết (H1) và bất đẳng thức $\|u\|^2 \geq \lambda_1 |u|_2^2$, ta có:

$$\frac{d}{dt} |u|_2^2 + \lambda_1 |u|_2^2 + C(\|u\|^2 + |u|_p^p) \leq C(1 + |g(t)|_2^2). \quad (2.10)$$

Đặt

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau.$$

Do (H1), ta có

$$\alpha_1 |u|^p - \alpha_2 \leq F(u) \leq \alpha_3 |u|^p + \alpha_4. \quad (2.11)$$

Nhân (2.10) với $e^{\lambda_1 t}$ và sử dụng (2.11), ta được

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda_1 t} |u(t)|_2^2) + C e^{\lambda_1 t} (\|u\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u, (t)) dx) \leq C e^{\lambda_1 t} (1 + |g(t)|_2^2). \quad (2.12)$$

Lấy tích phân (2.12) từ τ tới $s \in [\tau, t-1]$ và s tới $s+1$ tương ứng, ta được

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 s} |u(s)|_2^2 &\leq e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|_2^2 + C e^{\lambda_1 s} + C \int_{\tau}^s e^{\lambda_1 r} |g(r)|_2^2 dr, \quad \forall s \in [\tau, t-1], \\ C \int_s^{s+1} e^{\lambda_1 r} \left(\|u(r)\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u(x, r)) dx \right) dr \\ &\leq e^{\lambda_1 s} |u(s)|_2^2 + C \int_s^{s+1} e^{\lambda_1 r} \left(1 + |g(r)|_2^2 \right) dr \\ &\leq e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|_2^2 + C e^{\lambda_1 s} + C \int_{\tau}^s e^{\lambda_1 r} \left(1 + |g(r)|_2^2 \right) dr \\ &\quad + C e^{\lambda_1 (s+1)} + C \int_s^{s+1} e^{\lambda_1 r} |g(r)|_2^2 dr \\ &\leq C \left(e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|_2^2 + e^{\lambda_1 t} + \int_{\tau}^t e^{\lambda_1 r} |g(r)|_2^2 dr \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nhân (2.1) với u_t và lấy tích phân trên Ω , ta được

$$\begin{aligned} |u_t(s)|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\|u(r)\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u(x, s)) dx \right) &= \int_{\Omega} g(s) u_t(s) \\ &\leq \frac{1}{2} |g(s)|_2^2 + \frac{1}{2} |u_t(s)|_2^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 s} |u_t(s)|_2^2 + \frac{d}{ds} \left[e^{\lambda_1 s} \left(\|u(s)\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u(x, s)) dx \right) \right] \\ \leq \lambda_1 e^{\lambda_1 s} \left(\|u(s)\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u(x, s)) dx \right) + e^{\lambda_1 s} |g(s)|_2^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Kết hợp (2.13) và (2.14) và sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$e^{\lambda_1 t} \left(\|u(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u(x, s)) dx \right) \leq C \left(e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|^2 + e^{\lambda_1 t} + \int_{-\infty}^t e^{\lambda_1 s} |g(s)|_2^2 ds \right). \quad (2.15)$$

Sử dụng (H1) và $e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|_2^2 \rightarrow 0$ khi $\tau \rightarrow -\infty$, ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 2.2.4. *Giả sử rằng (H1), (H2) được thỏa mãn. Khi đó, với mọi $t \in \mathbb{R}$ và với mọi tập bị chặn $D \subset L^2(\Omega)$, tồn tại $\tau_0 \leq t - 1$ sao cho*

$$|u_t(t)|_2^2 \leq C \left(1 + e^{-\lambda_1 t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda_1 s} (|g(s)|_2^2 + |g'(s)|_2^2) ds \right),$$

với mọi $\tau \leq \tau_0$ và với mọi $u_{\tau} \in D$, trong đó $u_t(s) = (d/dt)(U(t, \tau)u_{\tau})|_{t=s}$.

Chứng minh. Lấy tích phân (2.14) từ r đến $r + 1$, $r \in [\tau, t - 1]$ và sử dụng (2.13) và (2.15), ta có

$$\begin{aligned}
\int_r^{r+1} e^{-\lambda_1 s} |u_t|_2^2 ds &\leq e^{-\lambda_1 r} \left(\|u(s)\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u(x, s)) dx \right) \\
&+ \lambda_1 \int_r^{r+1} e^{\lambda_1 s} \left(\|u(s)\|^2 + 2 \int_{\Omega} F(u(x, s)) dx \right) ds \\
&+ \int_r^{r+1} e^{\lambda_1 s} |g(s)|_2^2 ds \\
&\leq C \left(e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|_2^2 + e^{\lambda_1 t} + \int_{-\infty}^t e^{\lambda_1 s} |g(s)|_2^2 ds \right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Mặt khác, lấy vi phân (2.1) và kí hiệu $v = u_t$, ta có

$$v_t - G_s v + f'(u) v = g'(t). \tag{2.17}$$

Lấy tích vô hướng của (2.17) với v trong $L^2(\Omega)$, ta được

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v|_2^2 + \|v\|^2 + (f'(u) v, v) = (g'(t), v).$$

Sử dụng (2.4) và Bất đẳng thức Young, ta có

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda_1 t} |v|_2^2) + 2e^{\lambda_1 t} \|v\|^2 \leq C e^{\lambda_1 t} |v|_2^2 + C e^{\lambda_1 t} |g'(t)|_2^2. \tag{2.18}$$

Từ (2.18) và (2.16) và sử dụng Bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$e^{\lambda_1 t} |v(t)|_2^2 \leq C \left(e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|_2^2 + e^{\lambda_1 t} + \int_{-\infty}^t e^{\lambda_1 s} (|g(s)|_2^2 + |g'(s)|_2^2) ds \right). \tag{2.19}$$

Vì $e^{\lambda_1 \tau} |u_{\tau}|_2^2 \rightarrow 0$ khi $\tau \rightarrow -\infty$ nên ta được điều phải chứng minh. □

Chương 3

SỰ TỒN TẠI TẬP HÚT LÙI TRONG $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$

3.1 Sự tồn tại tập hút lùi trong $L^{2p-2}(\Omega)$

Trong phần này ta chứng minh tồn tại một tập hút lùi trong $L^{2p-2}(\Omega)$. Để chứng minh điều đó ta cần thêm một điều kiện của hàm g

$$\int_{-\infty}^t e^{\lambda_1 t} \|g'(t)\|_{L^m(\Omega)}^{m'} dt < +\infty, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

trong đó m, m' được định nghĩa như trong (3.7).

Bổ đề 3.1.1. Quá trình $\{U(t, \tau)\}$ được sinh bởi bài toán (2.1) có một tập hấp thụ lùi trong $L^{2p-2}(\Omega)$.

Chứng minh. Nhân (2.1) với $|u|^{p-2}u$ và lấy tích phân trên Ω , ta được

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t |u|^{p-2} u dx + (p-1) \int_{\Omega} \left(|\nabla_{x_1} u|^2 + |x_1|^{2s} |\nabla_{x_2} u|^2 \right) |u|^{p-2} dx \\ + \int_{\Omega} f(u) |u|^{p-2} u dx = \int_{\Omega} |g(t)| |u|^{p-2} u dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Từ (2.2) và $L^p(\Omega) \subset L^{p-2}(\Omega)$, ta có

$$\int_{\Omega} f(u)|u|^{p-2}u dx \geq \int_{\Omega} \left(C_1|u|^p - C_2 \right) |u|^{p-2}u dx \geq C_1 \|u\|_{L^{2p-2}(\Omega)}^{2p-2} - C_2 |u|_p^p.$$

Mặt khác, theo Bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_t |u|^{p-2}u dx \right| &\leq \frac{C_1}{4} \|u\|_{L^{2p-2}(\Omega)}^{2p-2} + \frac{1}{C_1} |u_t|_2^2, \\ \left| \int_{\Omega} g(t) |u|^{p-2}u dx \right| &\leq \frac{C_1}{4} \|u\|_{L^{2p-2}(\Omega)}^{2p-2} + \frac{1}{4} |g(t)|_2^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Kết hợp (3.2) và (3.3), ta có

$$\|u\|_{L^{2p-2}(\Omega)}^{2p-2} \leq C(|u_t|_2^2 + |u|_p^p + |g(t)|_2^2).$$

Áp dụng (2.9) và Bổ đề 2.2.4, ta kết luận tồn tại tập hấp thụ lồi trong $L^{2p-2}(\Omega)$ cho quá trình $U(t, \tau)$. □

Bổ đề 3.1.2. Với mọi $s \in \mathbb{R}$, mọi $2 \leq p < \infty$, và với mọi tập bị chặn $B \subset L^2(\Omega)$, tồn tại τ_0 sao cho

$$\int_{\Omega} |u_t(s)|^p dx \leq M, \quad \forall \tau \leq \tau_0, u_{\tau} \in B,$$

trong đó M phụ thuộc vào s , p không nằm trong B , và

$$u_t(s) = (d/dt)(U(t, \tau)u_{\tau})|_{t=s}.$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh Bổ đề bằng quy nạp.

Đặt $\beta = \frac{N(s)}{N(s)-2} > 1$ và kí hiệu $v = u_t$, ta chứng minh rằng: với $k = 0, 1, 2, \dots$, tồn tại τ_k và $M_k(s)$ sao cho

$$e^{\lambda_1 s} \int_{\Omega} |v(s)|^{2\beta^k} dx \leq M_k(s), \text{ với mọi } u_{\tau} \in B, \tau \leq \tau_k, \quad (P_k)$$

$$\int_s^{s+1} \left(e^{\lambda_1 r} \int_{\Omega} |v(s)|^{2\beta^{k+1}} dx \right)^{1/\beta} dr \leq M_k(s), \text{ với mọi } u_{\tau} \in B, \tau \leq \tau_k, \quad (Q_k)$$

trong đó τ_k phụ thuộc vào k và B và M_k chỉ phụ thuộc vào k .

Với $k=0$ ta có (P_0) từ (2.19). Lấy tích phân (2.18) và sử dụng $S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\beta}(\Omega)$ liên tục, ta có (Q_0) .

Giả sử (P_k) và (Q_k) thỏa mãn, ta chứng minh (P_{k+1}) (Q_{k+1}) đúng. Nhân (2.17) với $|v|^{2\beta^{k+1}-2}v$ và lấy tích phân trên Ω , ta có

$$\begin{aligned} C \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v|^{2\beta^{k+1}} dx + C \int_{\Omega} \left(|\nabla_{x_1} v|^2 + |x_1|^{2s} |\nabla_{x_2} v|^2 \right) |v|^{2\beta^{k+1}-2} dx \\ \leq l \int_{\Omega} |v|^{2\beta^{k+1}} dx + (g'(t), |v|^{2\beta^{k+1}-2}v). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sử dụng phép nhúng $S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\beta}(\Omega)$, ta được

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(|\nabla_{x_1} v|^2 + |x_1|^{2s} |\nabla_{x_2} v|^2 \right) |v|^{2\beta^{k+1}} dx &\geq \int_{\Omega} |v|^2 |v|^{2\beta^{k+1}-2} dx \\ &= \|v^{\beta^{k+1}}\|_{L^{2\beta}(\Omega)}^2 = \left(\int_{\Omega} |v|^{2\beta^{k+2}} dx \right)^{1/\beta}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Kết hợp Bất đẳng thức Holder và Bất đẳng thức Young, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g'(t) |v|^{2\beta^{k+1}-2} v dx &\leq \left(\int_{\Omega} |g'(t)|^m dx \right)^{1/m} \left(\int_{\Omega} |v|^{(2\beta^{k+1}-1)n} dx \right)^{1/n} \\ &\leq \frac{\left(\int_{\Omega} |g'(t)|^m dx \right)^{m'/m}}{m'} + \frac{\left(\int_{\Omega} |v|^{(2\beta^{k+1}-1)n} dx \right)^{n'/n}}{n'} \end{aligned} \quad (3.6)$$

trong đó $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{m'} + \frac{1}{n'} = 1$. Chọn n, n' sao cho

$$(2\beta^{k+1} - 1)n = 2\beta^{k+2}; \quad \frac{n'}{n} = \frac{1}{\beta}.$$

Do đó

$$n = \frac{2\beta^{k+2}}{2\beta^{k+1} - 1}; \quad n' = \frac{2\beta^{k+1}}{2\beta^{k+1} - 1}.$$

Do đó

$$m = \frac{n}{n-1} = \frac{2\beta^{k+1} - 1}{2\beta^{k+2} - 2\beta^{k+1} + 1}; \quad m' = 2\beta^{k+1}. \quad (3.7)$$

Từ (3.6), ta có

$$\int_{\Omega} g'(t) |v|^{2\beta^{k+1}-2} v dx \leq \frac{1}{m'} \|g'(t)\|_{L^m(\Omega)}^{m'} + \frac{1}{n'} \left(\int_{\Omega} |v|^{2\beta^{k+2}} dx \right)^{1/\beta}. \quad (3.8)$$

Áp dụng (3.5) và (3.6) vào (3.4), ta được

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(e^{\lambda_1 t} \int_{\Omega} |v|^{2\beta^{k+1}} dx \right) + C e^{\lambda_1 t} \left(\int_{\Omega} |v|^{2\beta^{k+2}} dx \right)^{1/\beta} \\ & \leq C e^{\lambda_1 t} \int_{\Omega} |v|^{2\beta^{k+1}} dx + C e^{\lambda_1 t} \|g'(t)\|_{L^m(\Omega)}^{m'}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Kết hợp (Q_k) và (3.9), sử dụng Bất đẳng thức Gronwall đều và sử dụng giả thiết (3.1), ta được (P_{k+1}) . Mặt khác lấy tích phân (3.9) từ t đến $t+1$, ta được (Q_{k+1}) . Vì $\beta > 1$, nên ta có $k \geq \log_{\beta} p/2$. Ta nhận được điều phải chứng minh. □

Ta sẽ sử dụng những Bổ đề sau:

Bổ đề 3.1.3. (xem [20]) Nếu tồn tại $\sigma > 0$ thỏa mãn $\int_{-\infty}^t e^{\sigma s} |\varphi(s)|^2 ds < \infty \forall t \in \mathbb{R}$, thì

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} |\varphi(s)|^2 ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Đặt $H_m = \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ trong $L^2(\Omega)$ và đặt $P_m : L^2(\Omega) \rightarrow H_m$ là phép chiếu trực giao trong đó $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ là véc tơ riêng của toán tử $A = -G_s$. Với mọi $u \in L^2(\Omega)$, ta có

$$u = P_m u + (I - P_m)u = u_1 + u_2.$$

Bổ đề 3.1.4. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, mọi $B \subset L^2(\Omega)$ và với mọi ε , tồn tại $\tau_0(t, B, \varepsilon)$ và $m_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(I - P_m) v|_2^2 < \varepsilon, \quad \forall \tau \leq \tau_0, \forall u_{\tau} \in B, m \geq m_0. \quad (3.10)$$

Chứng minh. Nhân (2.17) với $v_2 = (I - P_m)v$ và sau đó lấy tích phân trên Ω , sử dụng $|\nabla v_2|_2^2 \geq \lambda_m |v_2|_2^2$ và sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được:

$$\frac{d}{dt}|v_2|_2^2 + \lambda_m |v_2|_2^2 \leq C \int_{\Omega} |f'(u)v|^2 dx + C|g'(t)|_2^2. \quad (3.11)$$

Nhân (3.11) với $e^{\lambda_m t}$ và sử dụng giả thiết (2.3), ta được

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda_m t}|v_2|_2^2) \leq C e^{\lambda_m t} \int_{\Omega} |u|^{2(p-2)}|v|^2 dx + C e^{\lambda_m t}|g'(t)|_2^2. \quad (3.12)$$

Lấy tích phân (3.12) từ s tới t , ta được

$$\begin{aligned} e^{\lambda_m t}|v_2(t)|_2^2 & \leq e^{\lambda_m s}|v_2(s)|_2^2 + C \int_s^t e^{\lambda_m r} \int_{\Omega} |u|^{2(p-2)}|v|^2 dx dr + C \int_s^t e^{\lambda_m r}|g'(r)|_2^2 dr \\ & \leq e^{\lambda_m s}|v(s)|_2^2 + C \int_{-\infty}^t e^{\lambda_m r} \int_{\Omega} |u|^{2(p-2)}|v|^2 dx dr + C \int_{-\infty}^t e^{\lambda_m r}|g'(r)|_2^2 dr. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Lấy tích phân (3.13) theo s từ τ tới t , ta được

$$\begin{aligned} (t - \tau)e^{\lambda_m t}|v_2(t)|_2^2 & \leq \int_{\tau}^t e^{\lambda_m r}|v(r)|_2^2 dr \\ & + C(t - \tau) \int_{-\infty}^t e^{\lambda_m r} \int_{\Omega} |u|^{2(p-2)}|v|^2 dx dr \\ & + C(t - \tau) \int_{-\infty}^t e^{\lambda_m r}|g'(r)|_2^2 dr. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
|v_2(t)|_2^2 &\leq \frac{1}{t-\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_m(t-r)} |v(r)|_2^2 dr \\
&\quad + C \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_m(t-r)} \int_{\Omega} |u|^{2(p-2)} |v|^2 dx dr \\
&\quad + C \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_m(t-r)} |g'(r)|_2^2 dr.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Sử dụng Bổ đề 3.1.3 và do $\lambda_m \rightarrow +\infty$ khi $m \rightarrow +\infty$, tồn tại τ_1 và m_1 sao cho

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t-\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_m(t-r)} C \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_m(t-r)} |g'(r)|_2^2 dr &< \frac{\varepsilon}{3}, \\
|v(r)|_2^2 dr &< \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

với mọi $\tau \leq \tau_1$ và $m \geq m_1$.

Từ (3.14), sử dụng Bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_m(t-r)} \int_{\Omega} |u|^{2(p-2)} |v|^2 dx dr \\
&\leq \int_{-\infty}^t \left(\int_{\Omega} e^{\frac{(-p-1)(t-r)}{(p-2)\lambda_m}} |u|^{2p-2} dx \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_{\Omega} e^{-(p-1)\lambda_m(t-r)} |v|^{2p-2} dx \right)^{\frac{1}{p-1}} dr \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{(-p-1)(t-r)}{(p-2)\lambda_m}} \|u\|_{L^{2p-2}(\Omega)}^{2p-2} dr \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_{-\infty}^t e^{-(p-1)\lambda_m(t-r)} dr \int_{\Omega} |v|^{2p-2} dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Từ Bổ đề (3.1.3) - (3.1.7), ta thấy rằng tồn tại τ_2 và $m_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$C \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_m(t-r)} \int_{\Omega} |u|^{2(p-2)} |v|^2 dx dr < \frac{\varepsilon}{3}, \forall \tau \leq \tau_0, m \geq m_2. \tag{3.16}$$

Đặt $\tau_0 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ và $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$, từ (3.14) sử dụng (3.15) và (3.16), ta được (3.10). $\square$

Bổ đề 3.1.5. (xem [4]) Giả sử B là tập bị chặn trong $L^q(\Omega)$ ($q \geq 1$). Nếu B có một ε -net hữu hạn trong $L^q(\Omega)$, khi đó tồn tại một tập $M = M(B, \varepsilon)$ sao cho với mọi $u \in B$ ta có

$$\int_{\Omega(|u| \geq M)} |u|^q dx < \varepsilon.$$

Sử dụng các Bổ đề 3.1.4, 3.1.5 và 2.2.4 ta kết luận rằng tập $\{u_t(s) : s \leq t, u_\tau \in B\}$ có một ε -net hữu hạn trong $L^2(\Omega)$. Từ đó, ta có kết quả sau

Bổ đề 3.1.6. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, với mọi tập bị chặn $B \subset L^2(\Omega)$ và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\tau_0 \leq t$ và $M_0 > 0$ sao cho

$$\int_{\Omega(|u| \geq M)} |u_t(t)|^2 dx < \varepsilon, \quad \forall \tau < \tau_0, M > M_0, u_\tau \in B.$$

Bổ đề 3.1.7. (xem [4]). Với mọi $t \in \mathbb{R}$, với mọi tập bị chặn $B \subset L^2(\Omega)$ và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại τ_0 và $M_0 > 0$ sao cho

$$\text{mes}(\Omega(u(t) \geq M)) < \varepsilon, \quad \forall \tau \leq \tau_0, M \geq M_0, u_\tau \in B,$$

trong đó mes là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^N$ và $\Omega(u(t) \geq M) = \{x \in \Omega : u(t, x) \geq M\}$.

Bổ đề 3.1.8. (xem [5]) Giả sử $\{U(t, \tau)\}$ là quá trình liên tục mạnh-yếu trong $L^2(\Omega)$ và $L^q(\Omega)$, $q \geq 2$. Khi đó $\{U(t, \tau)\}$ là compact tiệm cận lùi trong $L^q(\Omega)$ nếu

(i) $\{U(t, \tau)\}$ là compact tiệm cận lùi trong $L^2(\Omega)$;

(ii) Với mọi $t \in \mathbb{R}$, với mọi tập bị chặn $D \subset L^2(\Omega)$ và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > 0$ và $\tau_0 \leq t$ sao cho

$$\sup_{\tau \leq \tau_0} \sup_{u_\tau \in D} \left(\int_{\Omega(|U(t, \tau)u_\tau| \geq M)} |U(t, \tau)u_\tau|^q dx \right) \leq C\varepsilon,$$

trong đó C không phụ thuộc vào M, τ, u_τ và ε .

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh sự tồn tại một tập hút lùi trong $L^{2p-2}(\Omega)$.

Định lý 3.1.9. *Giả sử (2.2) - (2.5), (3.1) được thỏa mãn. Khi đó quá trình $\{U(t, \tau)\}$ được sinh bởi bài toán (2.1) có một tập hút lùi $\mathcal{A}_{2p-2} = \{A_{2p-2}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ trong $L^{2p-2}(\Omega)$.*

Chứng minh. Do Bổ đề 3.1.8 và do $\{U(t, \tau)\}$ có một tập hấp thụ lùi trong $L^{2p-2}(\Omega)$, ta chỉ cần chứng minh: Với mọi $t \in \mathbb{R}$, với mọi $B \subset L^2(\Omega)$ và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\tau_2 \leq \tau$ và $M_2 > 0$ sao cho

$$\int_{\Omega(|u| \geq M)} |u|^{2p-2} dx \leq C\varepsilon, \quad \forall \tau \leq \tau_2, M \geq M_2, u_\tau \in B.$$

Nhân (2.1) với $(u - M)_+^{p-1}$ trong $L^2(\Omega)$, trong đó

$$(u - M)_+ = \begin{cases} u - M & \text{ khi } u \geq M, \\ 0 & \text{ khi } u < M. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_t (u - M)_+^{p-1} dx + (p-1) \int_{\Omega} \left(|\nabla_{x_1} u|^2 + |x_1|^{2s} |\nabla_{x_2} u|^2 \right) |u - M|_+^{p-2} dx \\ & + \int_{\Omega} f(u) (u - M)_+^{p-1} dx \\ & \leq \int_{\Omega} g(t) (u - M)_+^{p-1} dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Qua một số tính toán, ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(u) (u - M)_+^{p-1} dx \geq C \int_{\Omega(u \geq M)} |u|^{2p-2} dx + C \int_{\Omega(u \geq M)} |u|^p dx, \\ & - \int_{\Omega} u_t (u - M)_+^{p-1} dx \leq \frac{C}{4} \int_{\Omega(u \geq M)} |u|^{2p-2} dx + \frac{1}{C} \int_{\Omega(u \geq M)} |u_t|^2 dx, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} g(t)(u-M)_+^{p-1} dx \leq \frac{C}{4} \int_{\Omega(u \geq M)} |u|^{2p-2} dx + \frac{1}{C} \int_{\Omega(u \geq M)} |g(t)|^2 dx. \quad (3.18)$$

Từ (3.17) và (3.18), ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(u \geq M)} |u|^{2p-2} dx \\ & \leq C \left(\int_{\Omega(u \geq M)} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega(u \geq M)} |g(t)|^2 dx + C \int_{\Omega(u \geq M)} |u|^p dx \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Áp dụng Bổ đề 3.1.5 và 3.1.6 vào (3.19), ta thấy tồn tại τ_0 và M_0 sao cho

$$\int_{\Omega(u \geq M)} |u|^{2p-2} dx < \varepsilon, \quad \forall \tau \leq \tau_0, M \geq M_0.$$

Lặp lại các lập luận trên thay $(u-M)_+^{p-1}$ bằng $|(u+M)_-|^{p-2}(u+M)_-$, ta được

$$\int_{\Omega(u \leq -M)} |u|^{2p-2} dx < \varepsilon, \quad \tau \leq \tau_1, M \geq M_1,$$

với $\tau_1 \leq t$ và $M_1 < 0$, trong đó

$$(u+M)_- = \begin{cases} u+M & \text{ khi } u \leq -M, \\ 0 & \text{ khi } u > -M. \end{cases}$$

Đặt $\tau_2 = \min\{\tau_0, \tau_1\}$ và $M_2 = \max\{M_0, M_1\}$, ta có

$$\int_{\Omega(|u| \geq M_2)} |u|^{2p-2} dx < C\varepsilon, \quad \forall \tau \leq \tau_2, M \geq M_2.$$

Điều này đã hoàn thành việc chứng minh.

□

3.2 Sự tồn tại tập hút lùi trong $S_0^2(\Omega)$

Trong phần này ta sẽ đi chứng minh sự tồn tại của một tập hút lùi trong $S_0^2(\Omega)$.

Bổ đề 3.2.1. *Quá trình $\{U(t, \tau)\}$ được sinh bởi bài toán (2.1) có một tập hấp thụ lùi trong $S_0^2(\Omega)$.*

Chứng minh. Nhân (2.1) với $-G_s u$ sau đó sử dụng $f(0) = 0$, ta được

$$\|u\|_{S_0^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u_t G_s u dx - \int_{\Omega} f'(u) (|\nabla_{x_1} u|^2 + |x_1|^{2s} |\nabla_{x_2} u|^2) dx - \int_{\Omega} g(t) G_s u dx. \quad (3.21)$$

Sử dụng $f'(u) \geq -l$, sử dụng Bất đẳng thức Cauchy và lí luận như trong Bổ đề 3.1.1 từ (3.21), ta có

$$\|u\|_{S_0^2}^2 \leq 2 \left(|u|_2^2 + l \|u\|^2 + |g(t)|_2^2 \right).$$

Sử dụng (2.15), ta có điều phải chứng minh. □

Để chứng minh sự tồn tại của tập hút lùi trong $S_0^2(\Omega)$, ta sẽ thử "điều kiện (PDC)", được định nghĩa như sau

Định nghĩa 3.2.2. *Quá trình $\{U(t, \tau)\}$ thỏa mãn điều kiện (PDC) trong X nếu với mọi $t \in \mathbb{R}$ với mọi tập bị chặn $B \subset L^2(\Omega)$ và với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\tau_0 \leq t$ và một không gian con hữu hạn chiều X_1 của X sao cho*

(i) $P(\bigcup_{\tau \leq \tau_0} U(t, \tau)B)$ bị chặn trong X ;

(ii) $\|(I_X - P)U(t, \tau)u_{\tau}\|_X < \varepsilon$ với mọi $\tau \leq \tau_0$ và $u_{\tau} \in B$, trong đó $P: X \rightarrow X_1$ là phép chiếu chính tắc và I_X là phép đồng nhất.

Bổ đề 3.2.3. *(xem [19]) Nếu quá trình $\{U(t, \tau)\}$ thỏa mãn điều kiện (PDC) trong X thì nó là compact tiệm cận lùi trong X . Nếu X là lồi thì điều ngược lại là đúng.*

Giả sử $\kappa(A)$ là độ đo Kuratowski trong $L^2(\Omega)$ được định nghĩa bởi $\kappa(A) = \inf\{\delta > 0 / A \text{ có một phủ mở gồm những tập có đường kính } < \delta\}$.

Bổ đề 3.2.4. (xem [4]) Giả sử f thỏa mãn (2.2) và (2.4). Khi đó với mọi tập con $A \subset L^{2p-2}(\Omega)$, nếu $\kappa(A) < \varepsilon$ trong $L^{2p-2}(\Omega)$, thì

$$\kappa(f(A)) < C\varepsilon \text{ trong } L^2(\Omega),$$

trong đó $f(A) = \{f(u)/u \in A\}$ và hằng số C phụ thuộc vào chuẩn trong L^{2p-2} của A , độ đo Lebesgue của Ω và các hệ số trong (H_1) .

Định lý 3.2.5. Giả sử f thỏa mãn (2.2) - (2.4), g thỏa mãn (2.5) và (3.1). Khi đó quá trình $\{U(t, \tau)\}$ được sinh bởi bài toán (2.1) có một tập hút lùi $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ trong $S_0^2(\Omega)$.

Chứng minh. Ta xét một quỹ đạo nằm hoàn toàn trên tập hút lùi $\mathcal{A}_{2p-2}$ trong $L^{2p-2}(\Omega)$ cho $U(t, \tau)$, có nghĩa là $u(t) \in \mathcal{A}_{2p-2}(t)$ và $U(t, \tau)u_\tau = u(t)$ với mọi $t \geq \tau$. Đặt $A = -G_s$ và nhân (2.1) với $Au_2 = A(I - P_m)u = (I - P_m)Au$, ta có

$$(u_t, Au_2) + \|u_2\|_{S_0^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(u)Au_2 dx = (g(t), Au_2).$$

Sử dụng Bất đẳng thức Holder, ta được

$$\|u_2\|_{S_0^2(\Omega)}^2 \leq C \left(|(I - P_m)u_t|_2^2 + |(I - P_m)g(t)|_2^2 + \int_{\Omega} (f(u))^2 dx \right).$$

Sử dụng các Bổ đề 3.1.4 và 3.2.4 và $g \in C_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, ta thấy rằng $\{U(t, \tau)\}$ thỏa mãn điều kiện (PDC) trong $S_0^2(\Omega)$.

□

Từ Định lý 3.1.9 và 3.2.5, ta có định lý:

Định lý 3.2.6. Quá trình $\{U(t, \tau)\}$ được sinh bởi bài toán (2.1) có một tập hút lùi trong $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$.

KẾT LUẬN

Nội dung chính của luận văn là nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu và sự tồn tại tập hút lùi đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến. Những kết quả chính đã đạt được trong quá trình nghiên cứu bài toán (2.1) là:

1. Sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán.
2. Sự tồn tại tập hút lùi trong $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$.

Hướng nghiên cứu tiếp theo, tác giả dự định sẽ nghiên cứu một số tính chất của tập hút lùi đã được chứng minh tồn tại ở trên như tính trơn, tăng trưởng số mũ, số chiều,... của tập hút lùi.

Tài liệu tham khảo

- [1] Cung Thế Anh (2012), *Cơ sở lý thuyết hệ động lực vô hạn chiều*, Đại học sư phạm, Hà Nội.
- [2] A. V. Babin (2006), “Global Attractors in ADE”, Hasselblatt, B.(ed.) et al., *Handbook of dynamical systems*. Volume 1B. Amsterdam: Elsevier. 938-1085.
- [3] A.V. Babin and M.I. Vishik (1992), *Attractors of Evolution Equations* Transl. from the Russian by A.V. Babin, Studies in Mathematics and its Applications. 25 Amsterdam etc. North- Holland.x,532 p
- [4] C.-K. Zhong, M.-H. Yang, and C.-Y. Sun(2006), “The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations,” *Journal of Differential Equations*, vol. 223, no. 2, pp. 367–399.
- [5] C. T. Anh(2010), “Pullback attractors for non-autonomous parabolic equations involving Grushin operators,” *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2010, pp. 1- 14.
- [6] C. T. Anh, P. Q. Hung, T. D. Ke, and T .T. Phong(2008), “Global attractors for a semilinear parabolic equation involving Grushin operator”, *Electronic Journal of Differential Equations*, no. 32, pp. 1-11.
- [7] C. T. Anh and T.T Phong (2009),“Global attractors for a semilinear parabolic equations involving weighted p-Laplacian operators”, *Ann. Pol. Math.* 98, 251-271.

- [8] C. T. Anh and N.V. Quang (2011), “Uniform attractors for nonautonomous parabolic equation involving Grushin operator”, *Acta Math. Vietnam.* 36, no. 1, 19-33.
- [9] J. C. Robinson (2001), “Infinite-Dimensional Dynamical Systems”, *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [10] J. M. Arrieta, A.N. Carvalho and A. Rodríguez-Bernal (2000), “Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions”, *J. Differential Equations* 168, 533-559.
- [11] J. M. Arrieta, J.W. Cholewa, T. Dlotko and A. Rodríguez-Bernal (2004), “Asymptotic behavior and attractors for reaction diffusion equations in unbounded domains”, *Nonlinear Anal.* 56, 515; 554.
- [12] G. Łukaszewicz (2010), “On pullback attractors in L^p for nonautonomous reaction-diffusion equations,” *Nonlinear Analysis*, vol. 73, no. 2, pp. 350–357.
- [13] M. Anguiano, P. Marín-Rubio and J. Real (2011), “Pullback attractors for non-autonomous reaction-diffusion equations with dynamical boundary conditions,” *J. Math. Anal.* 383, no. 2, 608-618.
- [14] N. T. C. Thuy and N. M. Tri (2002), “Some existence and nonexistence results for boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators,” *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, no. 3, pp. 365–370.
- [15] N.D.Binh (2012), “Regularity and Exponential Growth of Pullback Attractors for Semilinear Parabolic Equations Involving the Grushin Operator,” *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012 (2012), Article ID 272145, 20 pages.
- [16] Q. Ma, S. Wang, and C. Zhong (2002), “Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications,” *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 51, no. 6, pp. 1541–1559.

- [17] R. Temam (1997), “Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics”, 2nd edition, *Springer-Verlag*.
- [18] V.V. Chepyzhov and M.I. Vishik (2002), “Attractors for Equations of Mathematical Physics”. *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, Vol. 49, *Amer. Math. Soc*, Providence, RI.
- [19] Y. Li and C. Zhong(2007), “Pullback attractors for the norm-to-weak continuous process and application to the nonautonomous reaction-diffusion equations,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 190, no. 2, pp. 1020–1029.
- [20] Y. Wang and C. Zhong(2008), “On the existence of pullback attractors for non-autonomous reaction-diffusion equations”, *Dynamical Systems*, vol. 23, no. 1, pp. 1–16.