

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Cao Luận

TÍNH HYPERBOLIC CỦA CÁC MIỀN LỖI KHÔNG BỊ CHẶN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Cao Luận

TÍNH HYPERBOLIC CỦA CÁC MIỀN LỖI KHÔNG BỊ CHẶN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số : 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Phạm Việt Đức

Thái Nguyên, 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi với sự hướng dẫn của PGS. TS. Phạm Việt Đức.

Các số liệu và trích dẫn liên quan đã nêu trong Luận văn này là hoàn toàn trung thực, chưa có trong bất kỳ một công trình của tác giả nào khác.

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Việt Đức - Trường ĐHSP - Đại học Thái Nguyên. Với lòng kính trọng tôi xin được biết ơn sâu sắc tới thầy.

Nhân dịp này tôi cũng xin được chân thành cảm ơn các thầy, cô đã tận tình giảng dạy, chỉ bảo tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tại Trường ĐHSP – Đại học Thái Nguyên. Đồng thời tôi cũng xin cảm ơn Ban giám hiệu, Khoa Toán, Phòng Quản lý khoa học, Khoa Sau đại học Trường ĐHSP - Đại học Thái Nguyên, đã tạo điều kiện thuận lợi cho việc học tập và nghiên cứu của tôi.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp những người luôn động viên và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Do thời gian và khả năng còn hạn chế, nên chắc chắn luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp từ các thầy cô và các bạn.

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2013

Nguyễn Cao Luận

MỤC LỤC

	Trang
MỞ ĐẦU	1
Chương 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.....	2
1.1 Giải khoảng cách Kobayashi	2
1.2 Giải khoảng cách Caratheodory	2
1.3 Một số tính chất	3
1.4 Hàm Lempert	9
1.5 Hàm đo điều hòa dưới	9
1.6 Metric Bergman	10
1.7 Không gian phức hyperbolic	13
Chương 2: TÍNH HYPERBOLIC TRONG NHỮNG MIỀN LỒI KHÔNG BỊ CHẶN.....	21
2.1. Một số kết quả ban đầu	21
2.2. Tính hyperbolic trong những miền lồi không bị chặn.....	31
2.3. Ứng dụng.....	40
KẾT LUẬN	42
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	43

MỞ ĐẦU

Việc nghiên cứu các tính chất của không gian phức hyperbolic đã được nghiên cứu từ lâu bởi nhiều nhà toán học trên thế giới. Đối với tính hyperbolic của các miền lồi không bị chặn cũng đã có một số kết quả được công bố. Năm 2009, F. Bracci và A. Saracco [5] đã chứng minh được 11 điều kiện tương đương với tính hyperbolic theo nghĩa Kobayashi trên miền lồi không bị chặn. Nội dung chính của luận văn này là trình bày chi tiết kết quả nói trên. Luận văn gồm hai chương:

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ sở liên quan chặt chẽ đến nội dung chính của luận văn, như :các giả khoảng cách bất biến và các không gian phức hyperbolic theo nghĩa Kobayashi, Brody và Caratheodory.

Chương 2 trình bày những kết quả về tính hyperbolic của các miền lồi không bị chặn. Cụ thể, nội dung chính của chương là trình bày chứng minh định lý 11 điều kiện tương đương với tính hyperbolic trong miền lồi không bị chặn của $\mathbb{C}^N$. Cuối cùng là một số hệ quả ứng dụng của định lý chính.

CHƯƠNG 1.

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Giả khoảng cách Kobayashi

1.1.1. Trên đĩa đơn vị mở $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, khoảng cách Bergman-Poincaré cho bởi

$$\rho(0, z) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \forall z \in \Delta.$$

1.1.2. Giả sử X là một không gian phức, p và q là hai điểm tùy ý của X . Ta gọi một dãy chuyển chỉnh hình γ nối p với q trong X là tập hợp

$$\{a_1, \dots, a_n \in \Delta; f_1, \dots, f_n \in \text{Hol}(\Delta, X)\}$$

sao cho :

$$f_1(0) = p, f_i(a_i) = f_{i+1}(0), f_n(a_n) = q, \forall i = \overline{1, n-1},$$

trong đó, $\text{Hol}(\Delta, X)$ là không gian các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào X được trang bị tôpô compact-mở.

Đặt $L_\gamma = \sum_{i=1}^n \rho(0, a_i)$ và định nghĩa: $d_X(p, q) = \inf L_\gamma$, trong đó infimum lấy

theo tất cả các dãy chuyển chỉnh hình γ nối p với q trong X .

Hàm $d_X : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ được gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức X .

Dễ thấy d_X thỏa mãn các tiên đề về giả khoảng cách. Đặc biệt, trên Δ thì giả khoảng cách Kobayashi trùng với khoảng cách Bergman-Poincaré, $d_\Delta = \rho$.

1.2. Giả khoảng cách Caratheodory

Cho X là một không gian phức, $\text{Hol}(X, \Delta)$ là tập hợp các ánh xạ chỉnh hình $f : X \rightarrow \Delta$. Giả khoảng cách Caratheodory c_X được xác định trên X bởi công thức:

$$c_X(p, q) = \sup_f \rho(f(p), f(q)), \text{ với } p, q \in X$$

trong đó supremum được lấy theo toàn bộ $f \in \text{Hol}(X, \Delta)$.

1.3. Một số tính chất

1.3.1. Mệnh đề. Nếu X và Y là hai không gian phức thì mỗi ánh xạ chỉnh hình $f : X \rightarrow Y$ có tính chất giảm khoảng cách:

$$\begin{aligned} c_Y(f(p), f(q)) &\leq c_X(p, q) \\ d_Y(f(p), f(q)) &\leq d_X(p, q), \forall f \in \text{Hol}(X, Y), p, q \in X. \end{aligned}$$

Chứng minh: Vì $g : X \rightarrow \Delta$ và $h : Y \rightarrow \Delta$ là các ánh xạ chỉnh hình nên $h \circ f : X \rightarrow \Delta$ cũng là ánh xạ chỉnh hình. Do đó, với hai điểm $p, q \in X$ luôn có:

$$\begin{aligned} c_X(p, q) &= \sup \{ \rho(g(p), g(q)) \}, g \in \text{Hol}(X, \Delta); \\ c_Y(f(p), f(q)) &= \sup \{ \rho(h \circ f(p), h \circ f(q)) \}, h \circ f \in \text{Hol}(X, \Delta). \end{aligned}$$

Theo Bổ đề Schwarz ta có:

$$\rho(h \circ f(p), h \circ f(q)) \leq \rho(f(p), f(q))$$

suy ra

$$\sup \{ \rho(f(p), f(q)) \} \geq \sup \{ \rho(h \circ f(p), h \circ f(q)) \}.$$

$$\text{Tức là : } c_X(p, q) \geq c_Y(f(p), f(q)).$$

Tính chất giảm khoảng cách của giả khoảng cách Kobayashi là hiển nhiên vì nếu α là dây chuyền chỉnh hình nối hai điểm p và q trong X thì $f \circ \alpha$ cũng là dây chuyền chỉnh hình nối $f(p), f(q)$ trong Y . $\square$

Hơn nữa d_X còn là giả khoảng cách lớn nhất trên X thỏa mãn mọi ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta \rightarrow X$ là giảm khoảng cách.

Từ mệnh đề ta có hệ quả: *Mỗi song chỉnh hình $f : X \rightarrow Y$ giữa các không gian phức là một đẳng cự.*

Tức là

$$\begin{aligned}c_X(p, q) &= c_Y(f(p), f(q)); \\ d_X(p, q) &= d_Y(f(p), f(q)), \quad \forall p, q \in X.\end{aligned}$$

1.3.2. Mệnh đề. Cho không gian phức X , ta có

$$d_X(p, q) \geq c_X(p, q), \quad p, q \in X.$$

Chứng minh. Như trong định nghĩa $d_X(p, q)$, chọn $p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$ của X , các điểm $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ của Δ và các ánh xạ chỉnh hình $f_1, f_2, \dots, f_k$ trong $Hol(\Delta, X)$ thỏa mãn

$$f_i(a_i) = p_{i-1}, f_i(b_i) = p_i.$$

Cho f là một ánh xạ chỉnh hình từ X vào Δ . Khi đó

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \rho(a_i, b_i) &\geq \sum_{i=1}^k \rho(f \circ f_i(a_i), f \circ f_i(b_i)) \\ &\geq \rho(f \circ f_1(a_1), f \circ f_k(b_k)) \\ &= \rho(f(p), f(q)).\end{aligned}$$

Trong đó bất đẳng thức thứ nhất được suy ra từ bổ đề Schwarz và bất đẳng thức thứ hai là hệ quả của bất đẳng thức tam giác.

Do đó

$$d_X(p, q) = \inf \sum_{i=1}^k \rho(a_i, b_i) \geq \sup \rho(f(p), f(q)) = c_X(p, q). \quad \square$$

1.3.3. Mệnh đề. Cho Δ là đĩa đơn vị mở trong $\mathbb{C}$, ta có : $d_\Delta = c_\Delta = \rho$.

Chứng minh. Từ bổ đề Schwarz-Pick ta thấy : ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta \rightarrow \Delta$ là giảm khoảng cách đối với khoảng cách Poincaré ρ .

Hơn nữa, từ định nghĩa của các giả khoảng cách Caratheodory và Kobayashi với cách lập luận tương tự như trong phần chứng minh Mệnh đề 1.3.2, ta cũng thu được:

$$d_\Delta(p, q) \geq \rho(p, q) \geq c_\Delta(p, q), \quad p, q \in \Delta.$$

Sử dụng phép biến đổi đồng nhất của Δ ta thu được đẳng thức

$$d_{\Delta}(p, q) = c_{\Delta}(p, q) = \rho(p, q), \quad p, q \in \Delta. \quad \square$$

1.3.4. Mệnh đề. Cho X là không gian phức.

a) Nếu δ_X là một giả khoảng cách như sau

$$\delta_X(p, q) \geq \rho(f(p), f(q)) \quad \forall f \in \text{Hol}(X, \Delta); p, q \in X$$

thì

$$c_X(p, q) \leq \delta_X(p, q) \quad \forall p, q \in X.$$

b) Nếu δ_X là một giả khoảng cách trên X thỏa mãn

$$\delta_X(f(a), f(b)) \leq \rho(a, b) \quad \forall f \in \text{Hol}(\Delta, X); a, b \in \Delta$$

thì

$$\delta_X(p, q) \leq d_X(p, q), \quad \forall p, q \in X.$$

Chứng minh. Phần a) là hiển nhiên. Ta đi chứng minh b).

Thật vậy, chọn $p_0, p_1, \dots, p_k, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, f_1, \dots, f_k$ như trong chứng minh mệnh đề 1.3.2. Khi đó

$$\begin{aligned} \delta_X(p, q) &\leq \sum_{i=1}^k \delta_X(p_{i-1}, p_i) = \sum_{i=1}^k \delta_X(f_i(a_i), f_i(b_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \rho(a_i, b_i). \end{aligned}$$

$$\text{Vì thế, } \delta_X(p, q) \leq \inf \sum_{i=1}^k \rho(a_i, b_i) = d_X(p, q). \quad \square$$

1.3.5. Mệnh đề. Giả sử X và Y là hai không gian phức. Với $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ ta có

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) = \max(d_X(x, x'), d_Y(y, y')) \quad (1)$$

$$\max\{c_X(x, x'), c_Y(y, y')\} \leq c_{X \times Y}((x, y), (x', y')) \leq c_X(x, x') + c_Y(y, y') \quad (2)$$

Chứng minh. Vì phép chiếu $\pi: X \times Y \rightarrow X$ là chỉnh hình và tính giảm khoảng cách, ta có

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) \geq d_X(x, x').$$

Tương tự

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) \geq d_Y(y, y').$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $d_X(x, x') \geq d_Y(y, y')$. Nên ta chỉ còn phải chứng minh $d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) \leq d_X(x, x')$.

Lấy một dây chuyền α các đĩa chỉnh hình có độ dài $l(\alpha)$ từ x' tới x trong X , ta xây dựng một dây chuyền γ các đĩa chỉnh hình có độ dài $l(\gamma)$ từ (x, y) tới (x', y') trong $X \times Y$ sao cho $l(\gamma) \leq l(\alpha)$. Theo giả thiết, có một dây chuyền β các đĩa chỉnh hình có độ dài $l(\beta)$ từ y tới y' trong Y sao cho $l(\beta) \leq l(\alpha)$. Lấy α và β như sau:

$$\alpha: \{x = x_0, \dots, x_k = x' \in X; a_1, a'_1, \dots, a_k, a'_k \in \Delta; f_1, \dots, f_k \in \text{Hol}(\Delta, X)\}$$

$$\beta: \{y = y_0, \dots, y_m = y' \in Y; b_1, b'_1, \dots, b_m, b'_m \in \Delta; g_1, \dots, g_m \in \text{Hol}(\Delta, Y)\}.$$

Ta có thể giả sử $k = m$ và $\rho(a_i, a'_i) \geq \rho(b_i, b'_i), \forall i = 1, \dots, k$ bằng cách làm mịn các dây chuyền trên như sau:

Lấy a''_i là một điểm trên đường trắc địa từ a_i tới a'_i sao cho

$$\rho(a_i, a'_i) = \rho(a_i, a''_i) + \rho(a''_i, a'_i).$$

Lấy $x'_i = f_i(a''_i)$. Ta nhận được một dây chuyền α' từ x tới x' gồm có $k+1$ đĩa chỉnh hình:

$$\alpha': \begin{cases} x = x_0, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_i, \dots, x_k = x' \in X; \\ a_1, a'_1, \dots, a_i, a''_i, a'_i, \dots, a_k, a'_k \in \Delta; \\ f_1, \dots, f_i, f_i, \dots, f_k \in \text{Hol}(\Delta, X). \end{cases}$$

Lặp lại quá trình trên sau một số hữu hạn lần và được kết quả là dây chuyền α' là sự làm mịn của dây chuyền α với $l(\alpha) = l(\alpha')$.

Ta có thể giả sử $k = m$ và $\rho(a_i, a'_i) \geq \rho(b_i, b'_i)$. Bằng cách hợp thành f_i và g_i với các đẳng cấu thích hợp của Δ , ta có thể giả sử rằng $a_i = b_i = 0$ và a'_i, b'_i là các số thực dương. Khi đó $0 < b'_i \leq a'_i < 1$. Lấy $\varphi_i : \Delta \rightarrow \Delta$ là phép nhân với b'_i / a'_i . Ta định nghĩa ánh xạ chỉnh hình $h_i : \Delta \rightarrow X \times Y$ bởi

$$h_i(z) = [f_i(z), g_i(\varphi_i(z))] , \quad z \in \Delta .$$

Lấy γ là dây chuyền từ (x, y) tới (x', y') bao gồm

$$(x, y) = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) = (x', y') \in X \times Y;$$

$$0, a'_i, \dots, 0, a'_k \in \Delta; \quad h_1, \dots, h_k \in Hol(\Delta, X \times Y).$$

Vậy γ có được các tính chất được yêu cầu, (1) được chứng minh.

Chứng minh (2): Bất đẳng thức thứ nhất được chứng minh tương tự như (1). Để chứng minh bất đẳng thức thứ hai, trước tiên, do tính chất giảm khoảng cách của các ánh xạ chỉnh hình

$$x \in X \mapsto (x, y) \in X \times Y \quad \text{và} \quad (x, y) \in X \times Y \mapsto x \in X ,$$

nên ta có:

$$c_{X \times Y}((x, y), (x', y)) = c_X(x, x')$$

và

$$\begin{aligned} c_{X \times Y}((x, y), (x', y')) &\leq c_{X \times Y}((x, y), (x', y)) + c_{X \times Y}((x', y), (x', y')) \\ &= c_X(x, x') + c_Y(y, y'). \end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh. □

Trong trường hợp tổng quát ta cũng có:

Với một đa đĩa $\Delta^n = \Delta \times \dots \times \Delta$, ta có

$$d_{\Delta^n}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i \{d_{\Delta}(x_i, y_i)\} \quad (1')$$

$$c_{\Delta^n}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i \{c_{\Delta}(x_i, y_i)\}. \quad (2')$$

1.3.6. Mệnh đề. Với một không gian phức X , cả c_X và d_X đều liên tục trên $X \times X$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.3.2 ta chỉ cần chứng minh d_X là hàm liên tục. Để chứng minh tính liên tục của d_X tại $(p, q) \in X \times X$, lấy $\{(p_n, q_n)\}$ là một dãy trong $X \times X$ mà hội tụ về (p, q) trong tôpô của không gian phức $X \times X$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$|d_X(p_n, q_n) - d_X(p, q)| \leq d_X(p_n, p) + d_X(q_n, q).$$

Ta chứng minh $d_X(p_n, p) \rightarrow 0$ khi $p_n \rightarrow p$. Lấy U là một lân cận của p . Do $d_X \leq d_U$ trong U (theo Mệnh đề 1.3.1) nên ta chỉ cần chứng minh $d_U(p_n, p) \rightarrow 0$ khi $p_n \rightarrow p$ trong U .

Nếu p không là điểm chính quy của X , thì ta có thể giả sử U là một đa đĩa Δ^n . Do đó theo công thức (1') ta có điều phải chứng minh.

Nếu p là điểm kì dị và giả sử có một số dương δ sao cho $d_U(p_n, p) \geq \delta$ với mọi n . Lấy $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$ là một phép giải kì dị và $\{q_n\}$ là một dãy trong $\tilde{U}$ sao cho $\pi(q_n) = p_n$. Vì π là ánh xạ riêng, bằng cách lấy dãy con ta có thể giả sử $\{q_n\}$ hội tụ về một điểm $q \in \tilde{U}$. Do tính liên tục nên ta có $\pi(q) = p$. Lấy V là một đa đĩa lân cận của q trong $\tilde{U}$. Do $\pi: V \rightarrow U$ làm giảm khoảng cách và d_V liên tục nên ta có

$$d_U(p_n, p) = d_U(\pi(q_n), \pi(q)) \leq d_V(q_n, q) \rightarrow 0, \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Điều này mâu thuẫn với điều giả sử. Vậy mệnh đề được chứng minh. $\square$

1.4. Hàm Lempert

Cho một không gian phức X và đĩa đơn vị mở Δ trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Khi đó, hàm Lempert δ_X được xác định bởi

$$\delta_X(z, w) = \inf \{ \rho(0, t) : t \in [0, 1), \exists \varphi \in \text{Hol}(\Delta, X) : \varphi(0) = z, \varphi(t) = w \},$$

với ρ là khoảng cách Poincaré trong Δ .

1.5. Hàm đa điều hòa dưới

+ Giả sử D là miền trong C . Một C^2 -hàm h xác định trên D được gọi là điều hòa nếu

$$\Delta_h := 4 \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \text{ trên } D.$$

+ Hàm $u: D \rightarrow [-\infty, \infty)$ được gọi là *điều hòa dưới* trong miền D nếu u thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) u là nửa liên tục trên trong D , tức là tập $\{z \in D; u(z) < s\}$ là tập mở đối với mỗi số thực s ;

ii) Với mỗi tập con mở compact tương đối trong G của D và mọi hàm $h: G \rightarrow \mathbb{R}$ là điều hòa trong G và liên tục trong $\bar{G}$ ta có: nếu $u \leq h$ trên ∂G thì $u \leq h$ trên G .

Ta có tiêu chuẩn điều hòa dưới sau:

Để hàm u nửa liên tục trên trong miền D là điều hòa dưới trong D , cần và đủ là với mỗi điểm $z \in D$, tồn tại $r_0(z) > 0$ sao cho

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it}) dt, \text{ với mọi } r < r_0(z).$$

+ Giả sử G là một tập con mở trong C^n . Một hàm $\varphi: G \rightarrow [-\infty, \infty)$ được gọi là *đa điều hòa dưới* nếu

i) φ là nửa liên tục trên và φ không đồng nhất với $-\infty$ chỉ trên thành phần liên thông của G ;

ii) Với mỗi $z_0 \in G$ và $a \in C^n$ mà $a \neq 0$, và với mỗi ánh xạ $\tau: C \rightarrow C^n$, $\tau(z) = z_0 + az$, hàm $\varphi \circ \tau$ trên mỗi thành phần liên thông của $\tau^{-1}(G)$ (là các miền trong C) hoặc bằng $-\infty$ hoặc là điều hòa dưới.

+ Trong các không gian phức bất kỳ ta có định nghĩa:

Giả sử X là một không gian phức. Một hàm đa điều hòa dưới trên X là một hàm $\varphi: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ thỏa mãn tính chất sau:

Với mỗi $x \in X$ tồn tại một lân cận mở U của x sao cho với một ánh xạ song chỉnh hình $h: U \rightarrow V$ lên một không gian phức con đóng V của một miền $G \subset \mathbb{C}^m$ nào đó và một hàm đa điều hòa dưới $\bar{\varphi}: G \rightarrow [-\infty, \infty)$ sao cho $\varphi|_U = \bar{\varphi} \circ h$.

Tập các hàm đa điều hòa dưới trên X kí hiệu là $psh(X)$.

Ngoài ra, Narasimhan và Fornaess đã chứng minh rằng: một hàm nửa liên tục trên $\varphi: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ trên không gian phức X là đa điều hòa dưới trên X khi và chỉ khi $\varphi \circ f$ là điều hòa dưới hoặc đồng nhất bằng $-\infty$ trên đĩa đơn vị Δ trong $\mathbb{C}$ với mọi ánh xạ chỉnh hình $f: \Delta \rightarrow X$.

1.6. Metric Bergman

1.6.1. Định nghĩa. Cho X là không gian phức. Lấy $\{e_j\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian các hàm chỉnh hình bình phương khả tích trên X .

Khi đó, ta định nghĩa hàm $l_X(z, \bar{w}) := \sum_{j=0}^{\infty} e_j(z) \bar{e}_j(\bar{w})$, với $z, w \in X$.

Nếu $l_X(z, \bar{z}) > 0$ ta có thể xác định dạng đối xứng

$$b_X := 2 \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k \text{ với } h_{jk} = \frac{\partial^2 \log l_X(z, \bar{z})}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}.$$

Ta có b_X là một dạng Hermitian nửa xác định dương, và gọi là giả metric Bergman trên X . Nếu b_X xác định dương khắp nơi, ta nói rằng X chứa metric Bergman b_X .

Ví dụ, C^k , $k \geq 1$ không chứa những hàm chỉnh hình bình phương khả tích, do đó $l_{C^k} \equiv 0$ và C^k không chứa metric Bergman.

1.6.2. Mệnh đề. [11, Mệnh đề 4.10.17]. *Giả sử X và Y là các không gian phức. Khi đó ta có công thức tích*

$$l_{X \times Y} = l_X \cdot l_Y; \quad b_{X \times Y} = b_X + b_Y.$$

1.6.3. Định nghĩa.

(1) Một không gian phức X được gọi là hyperbolic Caratheodory (hay C-hyperbolic), nếu c_X là khoảng cách và sinh ra tôpô của không gian phức X .

(2) Một không gian C-hyperbolic X được gọi là đầy (đầy chặt) nếu X là đầy Cauchy đối với c_X (nếu mọi cầu đóng đối với c_X là compact).

(3) Cho một miền $D \subset \mathbb{C}^n$, và một điểm biên $x_0 \in \partial D$, một hàm chỉnh hình xác định trong một lân cận của bao đóng $\bar{D}$ được gọi là một hàm peak (peak yếu) đối với D tại x_0 nếu $|f(x)| < |f(x_0)|, \forall x \in \bar{X} - \{x_0\}$ (tương ứng, $|f(x)| < |f(x_0)|, \forall x \in D$).

(4) Một hàm peak (peak yếu) địa phương đối với miền $D \subset \mathbb{C}^n$ tại x_0 được xác định bởi một hàm peak (peak yếu) đối với $D \cap B(x_0, r)$ tại x_0 , trong đó $B(x_0, r)$ là một hình cầu mở tâm x_0 , bán kính r .

1.6.4. Hệ quả. [11, Hệ quả 4.10.19]. *Cho X là một không gian phức với $l_X(z, \bar{z}) > 0$ khắp nơi.*

(1) *Nếu nó là hyperbolic Caratheodory, thì nó chứa metric Bergman b_X .*

(2) *Nếu nó là hyperbolic Caratheodory và đầy chặt đối với c_X , thì nó đầy đối với metric Bergman b_X .*

1.6.5. Hệ quả. [11, Hệ quả 4.10.20]. *Nếu $D \subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn sao cho có một hàm peak yếu đối với D tại mỗi điểm của biên, thì nó là đầy đối với metric Bergman b_D của nó.*

Đặc biệt, mỗi miền lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là đầy đối với metric Bergman của nó.

Chứng minh. Để chứng minh hệ quả này ta cần các định lý và hệ quả sau:

1.6.5.1. Định lý. Nếu $D \subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn sao cho có một hàm peak yếu đối với D tại mỗi điểm của ∂D , thì nó là C -hyperbolic và đầy chặt đối với c_D .

Chứng minh. Với mỗi điểm biên $x \in D$, chọn một hàm peak yếu f_x sao cho $|f_x(x)| = 1$ (và $|f_x(x')| < 1, \forall x' \in D$). Gọi F là họ các hàm peak như vậy. Khi đó $F \subset Hol(D, \Delta)$.

Cho $o \in D$ và $a > 0$, ta sẽ chỉ ra rằng hình cầu đóng $K(o, a) = \{x \in D; c_D(o, x) \leq a\}$ là compact.

Thật vậy, chọn một số dương $b < 1$ sao cho

$$\{z \in \Delta; \rho(f(o), z) \leq a, f \in F\} \subset \{z \in \Delta; |z| \leq b\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} K(o, a) &= \{x \in D; \rho(f(o), f(x)) \leq a, f \in Hol(D, \Delta)\} \\ &\subset \{x \in D; \rho(f(o), f(x)) \leq a, f \in F\} \\ &\subset \{x \in D; |f(x)| \leq b, f \in F\}. \end{aligned}$$

Tập cuối cùng là compact, vì mỗi điểm biên x_0 của D có một lân cận không giao với tập $\{x \in D; |f_{x_0}(x)| \leq b\}$. Vì vậy $K(o, a)$ là compact. $\square$

1.6.5.2. Hệ quả. Mỗi miền lồi bị chặn $D \subset \mathbb{C}^n$ là C -hyperbolic và là đầy chặt đối với c_D .

Chứng minh. Với mỗi $x_0 \in \partial D$ có một hàm tuyến tính phức $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho $\operatorname{Re}(\varphi(x)) < \operatorname{Re}(\varphi(x_0)), \forall x \in D$. Khi đó $f = e^\varphi$ là một hàm peak yếu đối với D tại x_0 . $\square$

Từ Định lý 1.6.5.1 và Hệ quả 1.6.5.2 suy ra Hệ quả 1.6.5 được chứng minh. $\square$

1.7. Không gian phức hyperbolic

1.7.1. Định nghĩa. Một không gian phức X được gọi là hyperbolic nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên X , tức là:

$$d_X(p, q) = 0 \Leftrightarrow p \equiv q.$$

- Một không gian phức X được gọi là hyperbolic đầy nếu nó là hyperbolic và đầy đối với khoảng cách Kobayashi trên nó.

1.7.2. Tính chất

- *Tính hyperbolic của không gian phức là bất biến song chỉnh hình.*

- *Nếu X là hyperbolic và compact, thì X là hyperbolic đầy.*

Giả sử X là không gian phức và Y là một tập con tùy ý, $r > 0$.

Đặt

$$U(Y, r) = \{x \in X \mid \exists y \in Y, d_X(x, y) < r\}.$$

Nói cách khác, $U(Y, r)$ là tập các điểm trong X thỏa mãn khoảng cách tới một điểm nào đó của Y nhỏ hơn r .

1.7.3. Mệnh đề. *Giả sử X là không gian phức hyperbolic liên thông. Khi đó X là hyperbolic đầy nếu và chỉ nếu với mọi $x \in X$ và mọi $r > 0$, hình cầu đóng $\bar{B}(x, r)$ là compact.*

Để chứng minh mệnh đề trên ta cần các bổ đề sau:

1.7.3.1. Bổ đề. *Giả sử X là không gian phức, $a \in X$ và $r, r' > 0$. Khi đó*

$$U[U(a, r), r'] = U(a, r + r').$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $U[U(a, r), r'] \subset U(a, r + r')$.

Lấy $x \in U[U(a, r), r']$, theo định nghĩa tập U , có điểm $y \in U(a, r)$ sao cho

$$d_X(x, a) \leq d_X(x, y) + d_X(y, a) < r' + r.$$

Do đó, $x \in U(a, r + r')$.

Ngược lại, với bất kỳ $x \in U(a, r + r')$, lấy $\varepsilon > 0$ sao cho

$$d_X(a, x) < r + r' - 3\varepsilon.$$

Tồn tại dây chuyền chỉnh hình trong X nối a với x , gọi đường nối $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ là ảnh của dây chuyền đó trong X , thỏa mãn

$$d_X(a, x) \leq \text{tổng Kobayashi} < d_X(a, x) + \varepsilon.$$

Gọi j là số lớn nhất sao cho độ dài của đường nối $L\{\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}\} < r - \varepsilon$. Chia cung γ_j thành hai cung γ'_j và γ''_j bởi điểm x_j trên γ_j sao cho

$$L\{\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma'_j\} = r - \varepsilon.$$

Khi đó, $d_X(a, x_j) < r$, tức là $x_j \in U(a, r)$. Xét đường nối

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma'_j, \gamma''_j, \dots, \gamma_m\}$$

ta có

$$d_X(x_j, x) \leq d_X(a, x) + \varepsilon - (r - \varepsilon) < r + r' - 3\varepsilon + 2\varepsilon - r = r' - \varepsilon.$$

Vậy tồn tại $x_j \in U(a, r)$ sao cho $d_X(x_j, x) < r'$. Từ đó $x \in U[U(a, r), r']$.

Bổ đề được chứng minh. $\square$

1.7.3.2. Bổ đề. Giả sử X là không gian phức compact địa phương với hàm khoảng cách d thỏa mãn đẳng thức

$$U[U(a; r); r'] = U(a; r + r'),$$

với mọi $a \in X$ và với mọi $r, r' > 0$. Khi đó với $a \in X$ và $r > 0$, nếu tồn tại $s > 0$ sao cho $\overline{U}(a, s)$ là compact với mỗi $x \in U(a, r)$ thì $\overline{U}(a, r)$ là compact.

Chứng minh. Vì X là compact địa phương nên có $t > 0$ sao cho $t < r$ và $\overline{U}(a, t)$ là compact. Ta chỉ cần chứng minh $\overline{U}(a, t + (s/2))$ là compact.

Lấy $\{x_n\}$ là một dãy trong $\overline{U}(a, t + (s/2))$. Ta chứng minh $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ. Theo giả thiết, với mỗi n tồn tại điểm $y_n \in \overline{U}(a, t)$ sao cho

$$d(x_n, y_n) < \frac{3}{4}s.$$

Vì $\overline{U}(a, t)$ là compact, bằng cách lấy dãy con nếu cần ta có thể giả thiết $\{y_n\}$ hội tụ tới $y \in \overline{U}(a, t)$. Khi đó $\overline{U}(y, s)$ chứa x_n với n đủ lớn. Vì $\overline{U}(y, s)$ là compact theo giả thiết, nên dãy $\{x_n\} \rightarrow x \in \overline{U}(y, s)$. Rõ ràng $x \in \overline{U}(a, t + (s/2))$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

1.7.3.3. Bổ đề. Giả sử X là không gian compact địa phương với hàm khoảng cách d thỏa mãn đẳng thức

$$U[U(a, r), r'] = U(a, r + r'),$$

với mọi $a \in X$ và với mọi $r, r' > 0$. Khi đó X là đầy đối với hàm khoảng cách d nếu và chỉ nếu bao đóng $\overline{U}(x, r)$ là compact với mọi $x \in X$ và với mọi số dương r .

Chứng minh. Nếu mọi hình cầu đóng $\overline{U}(a, r)$ là compact với mọi $a \in X$, thì hiển nhiên X là đầy. Thật vậy, giả sử $\{x_n\}$ là dãy Côsi trong X , khi đó $\{x_n\}$ bị chặn, do đó tồn tại $r > 0$, $x \in X$ sao cho $\{x_n\} \subset \overline{U}(x, r)$. Theo giả thiết $\overline{U}(x, r)$ là compact, nên tồn tại dãy con

$$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, \quad \{x_{n_k}\} \rightarrow y \in \overline{U}(x, r).$$

Mà $\{x_n\}$ là dãy cơ bản nên $\{x_n\} \rightarrow y \in X$. Vậy X là đầy.

Ngược lại, giả sử X là đầy. Theo Bổ đề 1.7.3.2, ta chỉ cần chứng minh tồn tại số $s > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ hình cầu đóng $\overline{U}(x, s)$ là compact. Giả sử ngược lại, khi đó tồn tại $x_1 \in X$ sao cho $\overline{U}(x_1, 1/2)$ không là compact. Theo Bổ đề 1.7.3.2, tồn tại $x_2 \in \overline{U}(x_1, 1/2)$ sao cho $\overline{U}(x_2, 1/2^2)$ không là compact. Lập luận tương tự, tồn tại

$$x_n \in \overline{U}(x_{n-1}, 1/2^{n-1}) \text{ sao cho } \overline{U}(x_n, 1/2^n) \text{ không là compact. (*)}$$

Theo giả thiết, dãy Côsi $\{x_n\}$ hội tụ tới điểm x . Vì X là compact địa phương, tồn tại hình cầu đóng $\overline{U}(x, t)$ với $t > 0$ nào đó thỏa mãn $\overline{U}(x_n, 1/2^n)$ nằm trong $\overline{U}(x, t)$ với n đủ lớn, và do đó $\overline{U}(x_n, 1/2^n)$ là compact. Điều này mâu thuẫn với (*). Bổ đề được chứng minh. $\square$

Chứng minh Mệnh đề 1.7.3.

Suy ra từ Bổ đề 1.7.3.1 và Bổ đề 1.7.3.3. $\square$

1.7.4. Không gian hyperbolic Brody

1.7.4.1. Định nghĩa. Giả sử X là một không gian phức. Ta nói rằng X là hyperbolic Brody nếu mỗi ánh xạ chỉnh hình $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ đều là ánh xạ hằng.

1.7.4.2. Mệnh đề. Nếu X là không gian phức hyperbolic, thì mọi ánh xạ chỉnh hình $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ đều là ánh xạ hằng.

Chứng minh. Giả sử $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ là ánh xạ chỉnh hình. Theo tính giảm khoảng cách của d_X , với mọi $a, b \in \mathbb{C}$ ta có

$$d_X(f(a), f(b)) \leq d_{\mathbb{C}}(a, b) = 0.$$

Do đó, $f(a) = f(b)$ với mọi $a, b \in \mathbb{C}$. Vậy f là ánh xạ hằng. $\square$

Nhận xét: Từ Mệnh đề 1.7.4.2 ta thấy: Nếu X là hyperbolic (theo nghĩa Kobayashi) thì X là hyperbolic Brody.

1.7.4.3. Định nghĩa. Giả sử X là một không gian phức và E là hàm độ dài xác định trên X . Một ánh xạ chỉnh hình khác hằng $h: \mathbb{C} \rightarrow X$ thỏa mãn

$$h^*E^2 \leq c.dz d\bar{z},$$

với một hằng số $c > 0$ nào đó, được gọi là một đường thẳng affine phức.

1.7.4.4. Định lý Brody. [1] Giả sử X là một không gian phức compact. Nếu X không là hyperbolic thì tồn tại một đường thẳng phức $h: \mathbb{C} \rightarrow X$.

1.7.4.5. Hệ quả.[1] *Giả sử X là một không gian phức compact và một ánh xạ chỉnh hình khác hằng $f: \mathbb{C} \rightarrow X$. Khi đó, tồn tại một đường thẳng phức $h: \mathbb{C} \rightarrow X$ sao cho*

$$h(\mathbb{C}) \subset \overline{f(\mathbb{C})}.$$

1.7.4.6. Hệ quả.[1] *Giả sử X là một không gian phức compact, nếu X là hyperbolic Brody thì X là hyperbolic.*

1.7.5. Định nghĩa. Giả sử D là một miền trong không gian phức X .

i) Giả sử G là một miền khác D . Ta có nếu $\{\varphi_k\}$ là một dãy các ánh xạ chỉnh hình từ G đến D , thì dãy này được gọi là phân kì chặt (hay là phân kì compact) nếu với bất kỳ hai tập compact $K_1 \subset G$, $K_2 \subset D$ và $\#\{k \in \mathbb{N} : \varphi_k(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} < +\infty$.

ii) Một họ F các ánh xạ chỉnh hình từ G đến D được gọi là chuẩn tắc nếu mỗi dãy ánh xạ của F có một dãy con hoặc phân kì compact hoặc hội tụ đều trên các tập con compact.

iii) Miền D được gọi là taut nếu họ tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ đĩa đơn vị Δ tới D là chuẩn tắc.

iv) Miền D được gọi là taut địa phương tại một điểm $p \in \partial D$ nếu tồn tại một lân cận U của p sao cho $D \cap U$ là taut.

v) Họ hàm $Hol(\Delta, D)$ gọi là đồng liên tục nếu với mọi $p \in X$ và mọi lân cận U của p luôn luôn tồn tại số $r \in (0, 1)$ và lân cận $\tilde{U}$ của p , $\tilde{U} \subset U$ sao cho: nếu $f \in Hol(\Delta, X)$ mà $f(0) \in \tilde{U}$ thì $f(r\Delta) \subset U$.

vi) Miền (D, d_x) gọi là tight nếu họ hàm $Hol(\Delta, D)$ là họ đồng liên tục.

1.7.6. Định lý Kiernan.[10] *Cho D là một miền trong không gian phức X .*

i) *Mỗi miền taut trong X là miền hyperbolic;*

ii) *Mỗi miền hyperbolic đầy trong X cũng là miền taut;*

Để chứng minh định lý trên, ta đưa vào một số khái niệm sau:

Giả sử p và q là hai điểm phân biệt của miền D trong không gian phức X . Không mất tính tổng quát, ta giả sử $p = 0$ và

$$B = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid |\omega_1|^2 + \dots + |\omega_n|^2 < 1\}$$

là một lân cận của p trong D sao cho $q \notin B$;

$$B_s = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid |\omega_1|^2 + \dots + |\omega_n|^2 \leq s^2\};$$

$$V_s = \{p' \in D; \rho(p, p') < s\},$$

với ρ là một metric sinh ra tôpô của D ;

$$\Delta_\delta = \{z \in \Delta \mid |z|^2 < \delta < 1\}.$$

1.7.6.1. Định nghĩa. Một cặp thứ tự các số dương (r, δ) được gọi là có tính chất A nếu với mỗi ánh xạ chỉnh hình $f: \Delta \rightarrow D$ với $f(0) \in B_r$, ta có $f(\Delta_\delta) \subset B$.

1.7.6.2. Bổ đề. Nếu tồn tại cặp (r, δ) có tính chất A thì $d_D(p, q) > 0$.

Chứng minh.

Chọn hằng số $c > 0$ sao cho

$$d_\Delta(0, a) \geq c d_{\Delta_\delta}(0, a), \quad \forall a \in \Delta_{\delta/2} = \left\{z \in \Delta \mid |z| < \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Giả sử $\alpha: \{p = p_0, p_1, \dots, p_m = q; a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_m\}$ là một dây chuyền Kobayashi nối p với q . Theo giả thiết, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $a_1, \dots, a_k \in \Delta_{\delta/2}$; $p_0, p_1, \dots, p_{k-1} \in B_r$ và $p_k \in \partial B_r$, $f_1, \dots, f_l \in \text{Hol}(\Delta, D)$.

Khi đó:

$$|\alpha| \geq \sum_{i=1}^k d_\Delta(0, a_i) \geq c \sum_{i=1}^k d_{\Delta_\delta}(0, a_i) \geq c \sum_{i=1}^k d_B(p_{i-1}, p_i) \geq c d_B(0, p_k) = c',$$

trong đó $c' > 0$ là hằng số dương. Do đó $d_D(p, q) \geq c' > 0$.

Bổ đề được chứng minh. $\square$

1.7.6.3. Chứng minh định lý Kiernan.

i) Giả sử D không là hyperbolic. Khi đó tồn tại hai điểm phân biệt p, q sao cho $d_D(p, q) = 0$. Theo Bổ đề 1.7.6.2, cặp $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right)$ không thỏa mãn tính chất A với bất kì $n > 0$.

Do đó tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f_n: \Delta \rightarrow D$ mà $f_n(0) \in B_{1/2}$ và $f_n(\Delta_{1/2}) \not\subset B$. Dãy $\{f_i\}$ không có dãy con hoặc hội tụ đều trên các tập compact hoặc phân kì compact. Do đó D không là taut.

ii) Do tính giảm khoảng cách qua các ánh xạ chỉnh hình đối với khoảng cách Kobayashi trên D nên $Hol(\Delta, D)$ là đồng liên tục. Mặt khác D là hyperbolic đầy nên mỗi tập con bị chặn trong D là compact tương đối. Vì vậy $Hol(\Delta, D)$ là chuẩn tắc, do đó D là taut. $\square$

1.7.7. Định lý. Một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là taut địa phương thì là taut.

Chứng minh. Giả sử $D \subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn. Lấy Y là một hình cầu chứa $\overline{D}$ và $\{f_k\}$ là một dãy bất kì trong $Hol(\Delta, X)$. Giả sử rằng $\{f_k\}$ không phân kì compact. Khi đó tồn tại các tập compact $K \subset \Delta, L \subset D$ sao cho $f_{k_j}(K) \cap L \neq \emptyset$, với j đủ lớn.

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\{f_{k_j}\}$ có một dãy con hội tụ trong $Hol(\Delta, X)$.

Thật vậy, do Y là taut, lấy một dãy con, giả sử là $\{f_{k_j}\}$ hội tụ tới một ánh xạ $f \in Hol(\Delta, Y)$. Từ $f_{k_j}(K) \cap L \neq \emptyset$ với mọi j , nên ta có $f(K) \cap L \neq \emptyset$.

Ta phải chỉ ra rằng $f \in Hol(\Delta, D)$. Giả sử ngược lại. Khi đó tập con mở $f^{-1}(D)$ của Δ là khác biệt với Δ . Nó là khác rỗng bởi $f(K) \cap L \neq \emptyset$. Cho a là một điểm biên của $f^{-1}(D)$ trong Δ , và đặt $p = f(a)$. Ta có $p \notin D$.

Cho V là một lân cận của p trong Y sao cho $V \cap D$ là taut. Cho W là một lân cận của a trong Δ sao cho $f(\overline{W}) \subset V$. Bằng cách lấy dãy con chúng ta giả sử rằng: $f_{k_j}(\overline{W}) \subset V, \forall j$. Do $V \cap D$ là taut, nên $\{f_{k_j}\} \subset Hol(\Delta, V \cap D)$ là hoặc phân kì compact hoặc có một dãy con hội tụ. Do $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(a) = f(a) = p \notin D$, nên nó không thể có một dãy con hội tụ. Nó cũng không thể phân kì compact, vì với bất kì điểm $b \in W \cap f^{-1}(D)$, chúng ta có $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(b) = f(b) \in V \cap D$. Đây là sự mâu thuẫn. Và điều giả sử là sai. Vậy D là taut. □

CHƯƠNG 2.

TÍNH HYPERBOLIC CỦA CÁC MIỀN LỜI KHÔNG BỊ CHẶN

2.1. Một số kết quả ban đầu

2.1.1. Định nghĩa.

+ Một miền lời $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền mà với bất kỳ cặp $p, q \in D$ đoạn thẳng thực nối p và q được chứa trong D .

+ Miền D được gọi là *lồi chặt* nếu $tp + (1-t)q \in D$, với $t \in (0,1)$, $p \neq q$, $p, q \in D$.

+ Một miền *lồi* D được gọi là *lồi mạnh* nếu

(1) D có biên trơn lớp C^2 (hay là C^2 -biên trơn);

(2) Tồn tại một hàm r xác định trên D sao cho:

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k} (p) X_j X_k > 0, \quad p \in \partial D, \quad X \in T_D^\square(p)_*$$

trong đó $T_D^\square(p) = \left\{ X \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j} (p) X_j = 0 \right\}$ là không gian tiếp xúc thực

của miền D (có biên trơn lớp C^1) tại điểm $p \in \partial D$; $x_1, \dots, x_n$ là các tọa độ cơ

sở trong $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$; $z_1, \dots, z_n$ là các tọa độ cơ sở trong $\mathbb{C}^n$.

Chú ý rằng, D là *lồi mạnh* thì vừa là *lồi*, vừa là *lồi chặt* và D cũng là *lồi tuyến tính*.

+ Với bất kỳ điểm $p \in \partial D$ tồn tại ít nhất một siêu phẳng thực tách rời $H_p = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} L(z) = a\}$, với L là phiếm hàm tuyến tính phức và $a \in \mathbb{R}$ sao cho $p \in H_p$ và $D \cap H_p = \emptyset$. Một siêu phẳng H_p như vậy đôi khi còn được gọi là một siêu phẳng tiếp xúc với D tại p . Ta nói rằng k siêu phẳng tách rời $H_j = \{\operatorname{Re} L_j(z) = a_j\}$, $j = 1, \dots, k$, là độc lập tuyến tính nếu $L_1, \dots, L_k$ là các phiếm hàm độc lập tuyến tính.

2.1.2. Mệnh đề. Cho $D \subset \mathbb{C}^n$ là một miền.

(1) Giả sử $b_D(z, \bar{z}) > 0$ với mọi $z \in D$. Nếu C_D là khoảng cách và sinh ra tôpô của D , nếu các C_D -cầu là compact, thì D chứa metric Bergman b_D và nó là đầy đối với b_D .

(2) Nếu D là một miền *lồi bị chặn* thì D chứa metric Bergman b_D và là đầy đối với metric Bergman b_D .

Chứng minh. Theo Định nghĩa metric Bergman ở mục 1.6, thì $b_D(z, \bar{z}) > 0$ khắp nơi kéo theo D chứa metric Bergman. Mặt khác D là hyperbolic –Caratheodory và đầy chặt đối với C_D , nên theo Hệ quả 1.6.4 ta suy ra nó là đầy đối với b_D . Vậy (1) được chứng minh.

Theo Hệ quả 1.6.5, thì (2) được chứng minh.

Mệnh đề được chứng minh. $\square$

2.1.3. Định lý. Giả sử $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền.

(1)(Kiernan) D là hyperbolic đầy $\Rightarrow D$ taut $\Rightarrow D$ hyperbolic.

(2)(Royden) Nếu D bị chặn thì D là hyperbolic.

(3)(Harris) Nếu D là miền lõi bị chặn thì D là hyperbolic đầy.

2.1.4. Định nghĩa. Giả sử D là một miền trong $\mathbb{C}^N$.

(i) Một hàm φ được gọi là peak đa điều hòa dưới địa phương tại một điểm p trong $\partial D \cup \{\infty\}$ nếu tồn tại một lân cận U của p sao cho φ là đa điều hòa dưới trên $U \cap D$, tức là liên tục trên $U \cap \overline{D}$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} \varphi(p) = 0 \\ \varphi(z) < 0, \forall z \in (U \cap \overline{D}). \end{cases}$$

(ii) Một hàm ψ được gọi là antipeak đa điều hòa dưới địa phương tại điểm p trong $\partial D \cup \{\infty\}$ nếu có một lân cận U của p sao cho ψ là đa điều hòa dưới trên $U \cap D$, tức là liên tục trên $U \cap \overline{D}$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} \psi(p) = -\infty \\ \psi(z) > -\infty, \forall z \in (U \cap \overline{D}) \setminus \{p\}. \end{cases}$$

2.1.5. Mệnh đề. Cho a là một điểm trong $\partial D \cup \{\infty\}$. Giả sử rằng tồn tại các hàm peak và antipeak đa điều hòa dưới địa phương tương ứng là φ, ψ tại

trên một lân cận U_p của p . Khi đó với mỗi lân cận U của p luôn tồn tại một lân cận $\tilde{U}$ của p sao cho mỗi đĩa giải tích trong D thỏa mãn

$$f(0) \in \tilde{U} \Rightarrow f(\Delta_{1/2}) \subset U,$$

trong đó $\Delta_{1/2} = \{z \in \Delta: |z| < 1/2\}$.

Chú ý: Mệnh đề này chỉ ra rằng mọi dãy hàm chỉnh hình $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in Hol(\Delta, D)$ thỏa mãn $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(0) = p$ thì f_j hội tụ đều đến p trên $\Delta_{\frac{1}{2}}$.

Chứng minh. Do φ là hàm peak đa điều hòa dưới địa phương tại p , nên tồn tại hai lân cận U và V của p ($\bar{U} \subset V \subset V_p$), U bị chặn và hai hằng số $c > c' > 0$ sao cho

$$\begin{cases} \inf_{z \in \bar{D} \cap \partial U} \varphi(z) = -c' \\ \sup_{z \in \bar{D} \cap \partial V} \varphi(z) = -c. \end{cases}$$

Do giả thiết φ là liên tục và $\bar{D} \cap \partial U$ là compact (vì U bị chặn và $\bar{D}$ đóng) nên ta định nghĩa được hàm $\tilde{\varphi}$ trên $\bar{D}$ như sau:

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi(z) & , \text{ nếu } z \in \bar{D} \cap U \\ \sup \left(\varphi(z), -\left(\frac{c+c'}{2}\right) \right) & , \text{ nếu } z \in \bar{D} \cap (V \setminus \bar{U}) \\ -\left(\frac{c+c'}{2}\right) & , \text{ nếu } z \in \bar{D} \setminus V. \end{cases}$$

Rõ ràng $\tilde{\varphi}(z)$ là một hàm peak đa điều hòa dưới, âm tại p .

Lấy f là một hàm chỉnh hình từ Δ vào D thế thì hàm $\tilde{\varphi} \circ f$ là điều hòa dưới trên Δ .

Giả sử rằng α là một số âm tùy ý sao cho $(\tilde{\varphi} \circ f)(0) > \alpha$ thì độ đo của tập hợp

$$E_\alpha = \left\{ \theta \in [0, 2\pi] : (\varphi \circ f)(e^{i\theta}) \geq 2\alpha \right\},$$

kí hiệu là $\text{mes}(E_\alpha)$, thỏa mãn

$$\text{mes}(E_\alpha) \geq \pi. \quad (1)$$

Thật vậy, giả sử $\text{mes}(E_\alpha) < \pi \Rightarrow \text{mes}(E_\alpha^\perp) \geq \pi$

(trong đó $E_\alpha^\perp$ là phần bù của E_α trong đoạn $[0, 2\pi]$. Tức là $E_\alpha^\perp = \left\{ \theta \in [0, 2\pi] : (\tilde{\varphi} \circ f)(e^{i\theta}) < 2\alpha \right\}$).

Khi đó, theo bất đẳng thức về giá trị trung bình (tích phân Poisson), có

$$\begin{aligned} \alpha < (\tilde{\varphi} \circ f)(0) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_\alpha} (\tilde{\varphi} \circ f)(re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_\alpha} (\tilde{\varphi} \circ f)(re^{i\theta}) d\theta \\ &< \int_{E_\alpha} (\tilde{\varphi} \circ f)(re^{i\theta}) d\theta + \frac{2\alpha}{2\pi} \text{mes} E_\alpha^\perp. \end{aligned}$$

$$\text{Do } \int_{E_\alpha} (\tilde{\varphi} \circ f)(re^{i\theta}) d\theta < 0 \text{ nên } \alpha < \frac{\alpha}{\pi} \text{mes} E_\alpha^\perp \Rightarrow \text{mes} E_\alpha^\perp < \pi. \quad \text{Mâu}$$

thuận. Vậy nên, ta có nếu $\alpha < \varphi \circ f(0)$ thì $\text{mes}(E_\alpha) \geq \pi$.

Bây giờ, ta lấy $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\begin{cases} \inf_{\bar{D} \cap \partial U} (\varphi + \varepsilon\psi) = -c_1 < 0 \\ \sup_{\bar{D} \cap \partial V} (\varphi + \varepsilon\psi) = -c_2 < -c_1. \end{cases}$$

Do $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$, $\varphi(z) < 0$, $\forall z \neq a$ và ε đủ nhỏ nên ta xác định được hàm

ρ trên $\bar{D}$ như sau:

$$\rho(z) = \begin{cases} (\varphi + \varepsilon\psi)(z) & , \text{ nếu } z \in \bar{D} \cap U \\ \sup \left((\varphi + \varepsilon\psi)(z), -\left(\frac{c_1 + c_2}{2} \right) \right) & , \text{ nếu } z \in \bar{D} \cap (V \setminus \bar{U}) \\ -\left(\frac{c_1 + c_2}{2} \right) & , \text{ nếu } z \in \bar{D} \setminus V. \end{cases}$$

Để thấy ρ là hàm đa điều hòa dưới liên tục, âm trên D và thỏa mãn $\rho^{-1}(-\infty) = \{p\}$.

Theo công thức tích phân Poinsson, với bất kỳ $\zeta \in \Delta_{1/2}$ ta có

$$\begin{aligned} (\rho \circ f)(\zeta) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\rho \circ f)(e^{i\theta}) \frac{1 - \frac{1}{4}}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\rho \circ f)(e^{i\theta}) \frac{3}{4|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \\ \Rightarrow (\rho \circ f)(\zeta) &\leq \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \circ f)(e^{i\theta})}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \leq \frac{3}{10\pi} \int_0^{2\pi} (\rho \circ f)(e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Do ϕ là hàm peak đa điều hòa dưới tại p và ρ thỏa mãn $\lim_{z \rightarrow a} \rho(z) = -\infty$ nên với mỗi $L < 0$ tồn tại hằng số $\alpha < 0$ sao cho $\forall z \in \bar{D}$ mà $\phi(z) \geq 2\alpha \Rightarrow \rho(z) < -L$.

Do ρ là hàm âm, nên từ (1) và (2) và với $\forall f \in Hol(\Delta, D), \forall \zeta \in \Delta_{1/2}$ ta có :

$$\phi(f(0)) > \alpha \Rightarrow (\rho \circ f)(\zeta) \leq -\frac{3}{10}L \quad (3)$$

Do $\rho^{-1}(-\infty) = \{p\}$ nên họ tập mở $\left\{U_n = \left\{z \in \bar{D} : \rho(z) < -\frac{3}{10}n\right\}\right\}_n$ là một cơ sở lân cận của p trong $\bar{D}$.

Vậy với mỗi số nguyên dương n tồn tại một hằng số $\alpha_n < 0$ sao cho

$$\tilde{\phi}(z) > 2\alpha_n \Rightarrow \rho(z) \leq -n.$$

Lấy U'_n là lân cận của p trong $\bar{D}$ xác định bởi :

$$U'_n = \{z \in \bar{D} : \tilde{\phi}(z) > \alpha_n\}.$$

Từ (3) suy ra $\forall n > 0$ có $f(0) \in U'_n \Rightarrow f(\Delta_{1/2}) \subset U_n$. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

2.1.6. Định nghĩa. Cho D là một miền trong C^n , ta ký hiệu

$$\text{Aut}(D) = \{f \in \text{Hol}(D, D) : f \text{ là song chỉnh hình}\}.$$

Thế thì $\text{Aut}(D)$ làm thành một nhóm với phép hợp thành hai ánh xạ. Ta gọi $\text{Aut}(D)$ là nhóm tự đẳng cấu của D .

Nếu Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$ thì với mọi $g \in \text{Aut}(\Delta)$ đều có thể viết được dưới dạng $g(z) = e^{i\theta} \frac{z - \xi}{z\bar{\xi} - 1}$ hoặc $g(z) = \frac{\xi - e^{i\theta}z}{1 - e^{i\theta}z\bar{\xi}}$ với $\theta \in [0, 2\pi]$, $\xi \in \Delta$ nào đó. Ta ký hiệu $g = g_{\xi, \theta}$.

2.1.7. Mệnh đề. Với bất kì tập compact tương đối $K \subset \Delta$ có một hằng số thực dương r_K sao cho $\forall g \in \text{Aut}(\Delta)$ thỏa mãn

$$g(0) \in K \Rightarrow B(g(0), r_K) \subset g(\Delta_{1/2}),$$

trong đó $B(g(0), r_K) = \{\lambda \in \Delta : |\lambda - g(0)| < r_K\}.$

Chứng minh. Cho $g \in K$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $g \in \text{Aut}(\Delta)$ ta luôn có với $\forall g \in \text{Aut}(\Delta)$ mà $g(0) = \zeta$ suy ra $g = g_{\zeta, \theta}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có} \quad |g_{\zeta, \theta}(\lambda) - g_{\zeta, \theta}(0)| &= \left| \frac{\zeta - e^{i\theta}\lambda - \zeta + |\zeta|^2 e^{i\theta}\lambda}{1 - e^{i\theta}\lambda\bar{\zeta}} \right| \\ &= \frac{|e^{i\theta}\lambda|(1 - |\zeta|^2)}{|1 - e^{i\theta}\lambda\bar{\zeta}|} \geq \frac{|\lambda|}{2}(1 - |\zeta|^2), \forall \lambda \in \Delta. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra} \quad \inf_{|\lambda| \geq \frac{1}{2}} |g_{\zeta, \theta}(\lambda) - g_{\zeta, \theta}(0)| \geq \inf_{|\lambda| \geq \frac{1}{2}} \frac{|\lambda|}{2}(1 - |\zeta|^2) = \frac{1}{4}(1 - |\zeta|^2), \forall \theta.$$

Đặt

$$r_K = \frac{1}{4} \min_{\zeta \in K} (1 - |\zeta|^2) \Rightarrow \inf_{|\lambda| \geq \frac{1}{2}} |g_{\zeta, \theta}(\lambda) - g_{\zeta, \theta}(0)| \geq r_K, \forall \theta, \zeta \in K \quad (*)$$

Khi đó, ta có $\forall \alpha \in B(g(0), r_K) = B(\zeta, r_K) \Rightarrow \alpha = g_{\zeta, \theta}(\lambda) = g(\lambda)$ (do g là song chỉnh hình). Từ đó ta có

$$|\alpha - g_{\zeta, \theta}(0)| < r_K \Rightarrow |g_{\zeta, \theta}(\lambda) - g_{\zeta, \theta}(0)| < r_K \Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{2}.$$

Do (*) ta có $\lambda \in \Delta_{1/2}$ thì $\alpha = g(\lambda) \in g(\Delta_{1/2})$.

Vậy $B(g(0), r_K) \subset g(\Delta_{1/2})$. □

Một lân cận của vô cực trong một miền không bị chặn D là một tập có chứa phần bù của một hình cầu đóng trong D . Nếu φ là một hàm định nghĩa trên D và c là một số phức, ta đặt $\varphi(\infty) = c$ nếu $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = c$.

Tính hyperbolic (đầy) là có liên quan mật thiết với sự tồn tại của các hàm peak tại mỗi điểm biên. Trong trường hợp D là một miền không bị chặn, H.Gaussier [7] đưa ra khái niệm các “hàm peak and antipeak” tại một điểm biên, như sau:

2.1.8. Định nghĩa. Giả sử $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền không bị chặn.

(i) Hàm $\varphi: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ được gọi là một *hàm peak* đa điều hòa dưới toàn cục tại vô cực nếu nó là đa điều hòa dưới trên D , tức là liên tục trên $\overline{D}$ (bao đóng trong $\mathbb{C}^N$) và thỏa mãn

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 0, \\ \varphi(z) < 0, \forall z \in \overline{D} \end{cases}$$

(ii) Một hàm $\varphi: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ được gọi là một *hàm antipeak* đa điều hòa dưới toàn cục tại vô cực nếu nó là đa điều hòa dưới trên D , tức là liên tục trên $\overline{D}$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = -\infty, \\ \varphi(z) > -\infty, \forall z \in \overline{D} \end{cases}$$

Để cho tiện, ta chỉ gọi đơn giản là các hàm peak và antipeak (theo nghĩa Gaussier) tại vô cực.

Gaussier [7] đã chứng minh được kết quả sau :

2.1.9. Định lý. *Giả sử $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền không bị chặn. Giả sử rằng D là taut địa phương tại mỗi điểm biên ∂D của D và tồn tại các hàm peak và antipeak đa điều hòa dưới tại vô cực. Khi đó D là taut.*

Chứng minh. Lấy một dãy bất kì các hàm chỉnh hình $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset Hol(\Delta, D)$. Ta chứng minh $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy hàm chuẩn tắc.

Trường hợp 1: Tồn tại $\xi \in \Delta$ và $\{f_{j_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_j\}_{j=1}^\infty$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(\xi) = \infty.$$

Đặt $E = \left\{ \lambda \in \Delta : \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{j_k}(\lambda)| = \infty \right\} \neq \emptyset$.

Với mỗi $\xi \in E$, theo Mệnh đề 2.1.5 ta có :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_{j_k} \circ g_{\xi, \theta}| = \infty \text{ hội tụ đều trên } \Delta_{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

Theo Mệnh đề 2.1.7, do tập $\{\xi\}$ là compact, nên tồn tại r_ξ sao cho :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \overline{f_{j_k}(B(\xi, r_g))} \right| = \infty.$$

Bởi vì $g_{\xi, \theta}(0) = \xi \in \{\xi\}$, nên cũng theo Mệnh đề 2.1.7, ta có:

$$B(\xi, r_g) \subset g_{\xi, \theta}(\Delta_{1/2}) \Rightarrow \overline{f_{j_k}(B(\xi, r_g))} \subseteq \overline{f_{j_k} \circ g_{\xi, \theta}(\Delta_{1/2})} \rightarrow \infty.$$

Vậy ta phải có: $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \overline{f_{j_k}(B(\xi, r_k))} \right| = \infty$. Do đó $B(\xi, r_k) \subset E$. Và E là tập mở.

Hơn nữa, ta lấy $\{\xi_n\} \subset E$ hội tụ tới $\xi \in \Delta$. Do $\{\xi_n, \xi\}$ là compact nên theo Mệnh đề 2.1.7 ta suy ra tồn tại $r > 0$ sao cho với mỗi số nguyên n ta có:

$$\begin{aligned} B(g_{\xi_n, \theta}(0), r) &= B(\xi_n, r) \subset g_{\xi_n, \theta}(\Delta_{1/2}) \\ \Rightarrow f_{j_k}(B(\xi_n, r)) &\subset f_{j_k} \circ g_{\xi_n, \theta}(\Delta_{1/2}) \rightarrow \infty, \text{ do } (*). \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_{j_k}| = \infty$ đều trên mỗi tập $B(\xi_n, r)$.

Theo định lý Montel, ta có: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(\xi) = \infty$. Vậy tập E đóng.

Do Δ liên thông, E là tập vừa đóng và vừa mở nên $E = \Delta$.

Do đó, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(\lambda) = \infty, \forall \lambda \in \Delta \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ là phân kì compact.

Trường hợp 2: Với mọi $\xi \in \Delta$, dãy $\{f_j(\xi)\}$ là tập compact tương đối trong C^n . Vậy nó bị chặn địa phương. Theo định lý Arzela-Ascoli ta suy ra $\{f_j(\xi)\}$ có một dãy con hội tụ đều trên các tập con compact tới hàm chỉnh hình $f \in Hol(\Delta, \bar{D})$, tức là $f_{j_k} \rightarrow f \in Hol(\Delta, \bar{D})$. Ta chứng minh $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ hoặc phân kì compact hoặc hội tụ đều trên các tập con compact.

Thật vậy, gọi $E = \{\lambda \in \Delta \mid f(\lambda) \in \partial\Delta \setminus \{\infty\}\}$. Rõ ràng E là tập đóng, do $\partial\Delta$ là đóng.

Giả sử $E \neq \emptyset$. Lấy $\lambda \in E \Rightarrow f(\lambda) \in \partial\Delta$. Do D là taut địa phương tại $f(\lambda)$, suy ra tồn tại lân cận V của $f(\lambda)$ sao cho $V \cap D$ là taut.

Do $f_{j_k} \rightarrow f$ suy ra tồn tại lân cận U -mở của λ và V' của $f(\lambda)$, $V' \subset V$ sao cho $f_{j_k}(U) \subset D \cap V'$ với k đủ lớn, suy ra $f_{j_k}|_U : U \rightarrow D \cap V$ với $D \cap V$ là taut. Vậy $f(U) \subset \partial D$ do $f(\lambda) \in \partial D$.

Vậy U là mở trong E suy ra E là tập mở. Do Δ liên thông nên ta có $E = \Delta$.

Do đó $f(\Delta) \subset \partial D \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ là phân kì compact. Do vậy D là taut. Như vậy ta đã chứng minh xong định lý. $\square$

Rõ ràng một miền lồi là taut địa phương tại mỗi điểm biên, do đó tính taut được suy ra từ sự tồn tại của các hàm peak và antipeak tại vô cực.

2.1.10. Định lý. Nếu $D \subset C^n$ là một miền bị chặn sao cho có một hàm chỉnh hình, peak yếu địa phương tại mỗi điểm biên của D , thì D là taut.

Chứng minh. Theo Định lý 1.7.7, ta có thể giả sử rằng có một hàm chỉnh hình, peak yếu tại mỗi điểm biên của D . Do D bị chặn, nên mọi dãy con $\{h_k\} \subset Hol(\Delta, D)$ có một dãy con hội tụ tới ánh xạ $h \in Hol(\Delta, \mathbb{C}^n)$. Do vậy $h(\Delta) \subset \bar{D}$. Điều đó chứng tỏ hoặc $h(\Delta) \subset D$ hoặc $h(\Delta) \subset \partial D$.

Giả sử rằng có một điểm $z_0 \in \Delta$ sao cho $h(z_0) \in \partial D$. Cho f là một hàm peak yếu đối với D tại $h(z_0)$. Khi đó $f \circ h$ là hàm chỉnh hình trên Δ mà đạt được cực đại tại z_0 . Do đó, $f(h(z)) = f(h(z_0))$ trên Δ , điều đó kéo theo $h(\Delta) \cap D = \emptyset$. Do đó $h(\Delta) \subset \partial D$. Vậy D là taut. $\square$

2.1.11. Hệ quả. Mọi miền lồi bị chặn $D \subset \mathbb{C}^n$ đều là taut.

Chứng minh. Với mỗi $x \in \partial D$ có một phép biến đổi tuyến tính phức $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ sao cho

$$\operatorname{Re}(\varphi(z)) < \operatorname{Re}(\varphi(x)), \forall z \in D.$$

Khi đó $f = e^\varphi$ là một hàm peak yếu chỉnh hình tại x . Vậy theo Định lý 2.1.10, D là taut. $\square$

Nếu $f: D \rightarrow D$ là một hàm chỉnh hình, dãy lặp của nó $\{f^{ok}\}$ được xác định bằng phương pháp qui nạp như sau $f^{ok} := f^{o(k-1)} \circ f$. Nếu f có một điểm cố định $z_0 \in D$, thì $\{f^{ok}\}$ không phân kì compact. Mặt khác, tùy thuộc vào hình học của D , tồn tại hàm chỉnh hình f thỏa mãn $\{f^{ok}\}$ không phân kì compact nhưng f không có điểm bất động trong D . Kết quả sau được chứng minh bởi Abate [3]

2.1.12. Định lý. Giả sử $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền taut. Giả sử rằng $H^j(D; \mathbb{Q}) = 0$ với mọi $j > 0$ và $f : D \rightarrow D$ là ánh xạ chỉnh hình. Khi đó dãy lặp $\{f^{ok}\}$ phân kì compact nếu và chỉ nếu f không có các điểm tuần hoàn trong D .

Nếu D là miền lồi bị chặn thì dãy lặp $\{f^{ok}\}$ phân kì compact khi và chỉ khi f không có điểm bất động trong D .

2.2. Tính hyperbolic của các miền lồi không bị chặn

Nội dung chính của phần này là chứng minh định lý sau:

2.2.1. Định lý. Giả sử $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền lồi (có thể không bị chặn). Các điều kiện sau đây là tương đương:

- (1) D là song chỉnh hình với một miền bị chặn;
- (2) D là hyperbolic;
- (3) D là taut;
- (4) D là hyperbolic đầy;
- (5) D không chứa các đường cong nguyên khác hằng;
- (6) D không chứa các đường thẳng affine phức;
- (7) D có N siêu phẳng thực độc lập tuyến tính tách rời;
- (8) D có các hàm peak và anti-peak tại vô cực;
- (9) D có chứa metric Bergman b_D ;
- (10) D là đầy ứng với metric Bergman b_D ;
- (11) Với bất kì ánh xạ $f : D \rightarrow D$ chỉnh hình sao cho dãy lặp $\{f^{ok}\}$ không phân kì compact, tồn tại $z_0 \in D$ sao cho $f(z_0) = z_0$.

Để chứng minh định lý ta cần một số kết quả sau:

Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$, ta định nghĩa hàm Lempert δ_D được xác định bởi:

$$\delta_D(z, w) = \inf \{ \rho(0, t) : t \in (0, 1), \exists \varphi \in \text{Hol}(\Delta, D) : \varphi(0) = z, \varphi(t) = w \},$$

trong đó ρ là khoảng cách Poincaré trong Δ , $Hol(\Delta, D)$ là tập các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào D .

Nói chung hàm Lempert δ_D không phải là giả khoảng cách bởi vì nó không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Giả khoảng cách Kobayashi là một hàm con lớn nhất của δ_D mà thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Bổ đề sau đây là mở rộng một kết quả của Lempert [13] cho miền lồi không bị chặn :

2.2.2. Bổ đề. Cho $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền lồi (có thể không bị chặn). Khi đó $k_D = \delta_D = c_D$.

Chứng minh. Với D là miền lồi bị chặn thì bổ đề được chứng minh bởi Lempert [13].

Giả sử D không bị chặn. Lấy D_R là giao của D với hình cầu tâm là gốc tọa độ và bán kính $R > 0$. Với $R > 1$ tập D_R là một miền lồi bị chặn không rỗng.

Do đó $k_{D_R} = \delta_{D_R} = c_{D_R}$.

Bây giờ lấy $\{D_R\}$ là một dãy tăng các miền mà hợp của chúng là D . Khi đó, $\lim_{R \rightarrow \infty} k_{D_R} = k_D$, $\lim_{R \rightarrow \infty} c_{D_R} = c_D$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \delta_{D_R} = \delta_D$ ([9, Mệnh đề 2.5.1 và Mệnh đề 3.3.5]).

Như vậy $k_D = \delta_D = c_D$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

2.2.3. Mệnh đề. Cho $D \subset \mathbb{C}^N$ là miền lồi (có thể không bị chặn). Khi đó, các hình cầu Kobayashi trong D là lồi.

Chứng minh. Đối với trường hợp D bị chặn (xem [2, Mệnh đề 2.3.46]).

Đối với trường hợp D không bị chặn, lấy B_ε là hình cầu Kobayashi bán kính ε và tâm $z_0 \in D$.

Gọi D_R là giao của D với một hình cầu Euclide tâm là gốc tọa độ và bán kính $R > 0$. Giả sử B_ε^R là hình cầu Kobayashi trong D_R bán kính ε và tâm z_0 .

Khi đó, các tập lồi $B_\varepsilon^R \subset B_\varepsilon^{R+\delta} \subset B_\varepsilon$ với mọi $R > 1$, $\delta > 0$, và hợp lồi tăng của chúng $\bigcup_R B_\varepsilon^R = B_\varepsilon$, vì $\lim_{R \rightarrow \infty} k_{D_R} = k_D$.

Vậy mệnh đề được chứng minh. $\square$

2.2.4. Bổ đề. Cho $D \subset \mathbb{C}^N$ là miền lồi taut (có thể không bị chặn). Khi đó, với bất kì cặp $z, w \in D$ đều tồn tại ánh xạ $\varphi \in \text{Hol}(\Delta, D)$ sao cho:

$$\varphi(0) = z, \varphi(t) = w, t \in [0, 1) \text{ và } k_D(z, w) = \rho(0, t).$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2.2, ta có $k_D = \delta_D$, do đó tồn tại một dãy $\{\varphi_k\}$ các đĩa chỉnh hình và $t_k \in (0, 1)$ sao cho $\varphi_k(0) = z$ và $\varphi_k(t_k) = w$ và $k_D(z, w) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(0, t_k)$.

Do D là taut và $\varphi_k(0) = z$ với mọi k , chúng ta có thể giả sử rằng $\{\varphi_k\}$ hội tụ đều trên các tập con compact đến ánh xạ chỉnh hình $\varphi: \Delta \rightarrow D$, khi đó $\varphi(0) = z$.

Mặt khác, vì $k_D(z, w) < \infty$, nên tồn tại $t_0 < 1$ sao cho $t_k \leq t_0$ với mọi k . Bằng cách lấy dãy con, ta có thể giả sử rằng $t_k \rightarrow t \leq t_0$. Khi đó

$$k_D(z, w) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(0, t_k) = \rho(0, t).$$

Hơn nữa, $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t_k) = w$ và chúng ta có điều cần chứng minh. $\square$

2.2.5. Mệnh đề. Cho $D \subset \mathbb{C}^N$ là miền lồi (có thể không bị chặn). Khi đó D là taut nếu và chỉ nếu nó là hyperbolic đầy.

Chứng minh. Giả sử D là hyperbolic đầy. Gọi M là một miền khác trong $\mathbb{C}^N$. Vì (D, d_D) là tight, theo định nghĩa miền tight thì tập các ánh xạ chỉnh hình từ M vào D là đồng liên tục và vì D là hyperbolic đầy, nên mỗi tập bị chặn trong D là compact tương đối. Điều này kéo theo $\text{Hol}(M, D)$ là chuẩn tắc. Vì vậy D là taut.

Ngược lại, giả sử D là taut. Chúng ta sẽ chứng minh rằng mỗi cầu đóng Kobayashi là compact (tương đương với tính hyperbolic đầy, theo Mệnh đề 1.7.3 trong Chương 1).

Lấy $R > 0$, $z \in D$ và hình cầu $B(z, R) = \{w \in D : k_D(z, w) \leq R\}$.

Nếu $B(z, R)$ không compact thì tồn tại dãy $\{w_k\}$ sao cho

$$\{w_k\} \rightarrow p \in \partial D \cup \{\infty\} \text{ và } k_D(z, w_k) \leq R.$$

Với bất kì k , lấy $\varphi_k \in \text{Hol}(\Delta, D)$ là đĩa cực trị cho bởi Bổ đề 2.2.4 sao cho $\varphi_k(0) = z$, $\varphi_k(t_k) = w_k$, với $t_k \in (0, 1)$ nào đó và $k_D(z, w_k) = \rho(0, t_k)$.

Chú ý rằng, do $k_D(z, w_k) \leq R$, nên tồn tại $t_0 < 1$ sao cho $t_k \leq t_0$ với mọi k . Bằng cách lấy dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng với $t < 1$. Do D là taut và $\varphi_k(0) = z$, dãy $\{\varphi_k\}$ hội tụ đều trên các tập con compact tới một đĩa chỉnh hình $\varphi : \Delta \rightarrow D$ sao cho $\varphi(0) = z$.

Mặt khác, $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k = p$, điều này mâu thuẫn.

Bởi vậy $B(z, R)$ là compact và do đó D là hyperbolic đầy. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

2.2.6. Mệnh đề. [5, Bổ đề 3]. Cho $D \subset \mathbb{C}^N$ là miền lồi, không chứa đường thẳng affine phức nào. Khi đó tồn tại các siêu mặt phức $\{L_1 = 0\}, \dots, \{L_N = 0\}$ độc lập tuyến tính chứa gốc tọa độ và $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ sao cho $D \subset \{\text{Re } L_1 > a_1, \dots, \text{Re } L_N > a_N\}$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $O \in D$. Do D không chứa đường thẳng affine phức, suy ra ∂D không rỗng. Lấy một điểm $p_1 \in \partial D$ và một siêu phẳng tiếp xúc thực qua p_1 , được cho bởi $\{\text{Re } L_1 = a_1\}$ (nếu biên trơn thì chỉ có một siêu phẳng tiếp xúc), ở đó L_1 được xác định sao cho $D \subset \{\text{Re } L_1 > a_1\}$.

Giả sử rằng $L_1, \dots, L_k$, $k < N$, đều xác định, chúng độc lập tuyến tính và $D \subset \{\operatorname{Re} L_1 > a_1, \dots, \operatorname{Re} L_k > a_k\}$.

Giao $h_k = \bigcap_{i=1}^k \{L_i = 0\}$ là một $(N-k)$ -phẳng phức đi qua gốc O (nó cũng chứa trong D theo giả thiết). Do D không chứa đường thẳng affine phức, nên $\partial D \cap h_k$ không rỗng. Lấy một điểm $p_{k+1} \in \partial D \cap h_k$ và xét một siêu phẳng tiếp xúc thực qua p_{k+1} , $\{\operatorname{Re} L_{k+1} = a_{k+1}\}$, mà ở đó L_{k+1} được xác định sao cho $D \subset \{\operatorname{Re} L_{k+1} > a_{k+1}\}$. Bằng cách xây dựng L_{k+1} là độc lập tuyến tính đối với $L_1, \dots, L_k$ và $D \subset \{\operatorname{Re} L_1 > a_1, \dots, \operatorname{Re} L_{k+1} > a_{k+1}\}$.

Tiếp tục lập luận tương tự ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.2.7. Mệnh đề. *Giả sử $D \subset \mathbb{C}^N$ là miền lồi. Những điều sau đây là tương đương:*

- (1) D là song chỉnh hình với một miền bị chặn;
- (2) D là hyperbolic ;
- (3) D là taut;
- (4) D là hyperbolic đầy ;
- (5) D không chứa các đường cong nguyên khác hằng;
- (6) D không chứa các đường thẳng affine phức;
- (7) D có N siêu phẳng thực độc lập tuyến tính rời nhau;
- (8) D có hàm peak và antipeak tại vô cực.

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$: Ta có tính hyperbolic là bất biến song chỉnh hình.

Hơn nữa, mỗi miền bị chặn trong $\mathbb{C}^N$ là hyperbolic (vì theo Hệ quả 2.1.11 và Định lý 1.7.6). Từ đó ta có (2) .

$(2) \Rightarrow (5)$: Vì D là hyperbolic (Kobayashi), do tính chất giảm khoảng cách của khoảng cách Kobayashi nên mọi ánh xạ chỉnh hình $f : \mathbb{C} \rightarrow D$ đều là ánh

xạ hằng. Do đó D cũng là hyperbolic Brody nên D không chứa đường cong nguyên khác hằng.

(5) $\Rightarrow$ (6): Hiển nhiên theo định nghĩa.

(6) $\Rightarrow$ (7): Được suy ra từ Mệnh đề 2.2.6.

(7) $\Rightarrow$ (1): Lấy $L_1, \dots, L_N$ là các hàm độc lập tuyến tính phức và $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ để $\{\operatorname{Re} L_j = a_j\}$ với $j = 1, \dots, N$ là các siêu phẳng thực tách rời đối với D . Ta có thể giả sử rằng $D \subset \{\operatorname{Re} L_j > a_j\}$. Khi đó ánh xạ $F(z_1, \dots, z_N) := \left(\frac{1}{L_1(z) - a_1 + 1}, \dots, \frac{1}{L_N(z) - a_N + 1} \right)$ là một song chỉnh hình từ D tới một miền lồi bị chặn của $\mathbb{C}^N$.

(6) $\Rightarrow$ (8): Lấy $L_1, \dots, L_N$ như trong Mệnh đề 2.2.6. Bằng cách thay đổi tuyến tính hệ tọa độ, ta có thể giả sử rằng $z_j = L_j$ với mọi $1 \leq j \leq N$. Một hàm peak được cho bởi công thức $-\operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \frac{1}{z_j - a_j + 1}$.

Lấy $D_j := \{\operatorname{Re} L_j > a_j\}$. Khi đó $D \subset \prod_{j=1}^N D_j$, và D_j là song chỉnh hình với D với mỗi j . Đặc biệt, $\mathbb{C} \setminus D_j$ không là tập cực. Ta có thể giả sử rằng $0 \notin D_j$. Lấy G_j là ảnh của D_j qua phép biến đổi $z \mapsto \frac{1}{z}$. Do $\mathbb{C} \setminus G_j$ không là tập cực, nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $\mathbb{C} \setminus G_j^\varepsilon$ cũng không có cực, ở đó $G_j^\varepsilon = G_j \cup \varepsilon \Delta$.

Kí hiệu g_j^ε là hàm Green của G_j^ε . Khi đó $h_j = g_j^\varepsilon(0; \square)$ là hàm điều hòa âm trên G_j , $\lim_{z \rightarrow 0} h_j(z) = -\infty$ và $\inf_{G_j \setminus r\Delta} h_j > -\infty$ với bất kì $r > 0$. Khi đó $\phi_j(z) = h_j\left(\frac{1}{z}\right)$ là hàm antipeak của D_j tại vô cực và do đó $\psi = \sum_{j=1}^{N'} \psi_j$ là hàm antipeak của D tại vô cực.

(8) $\Rightarrow$ (3): Được suy ra từ Định lí 2.1.9.

(3) $\Leftrightarrow$ (4): Được suy ra từ Mệnh đề 2.2.5.

(3) $\Rightarrow$ (2): Hiển nhiên vì theo Mệnh đề 2.2.5, nếu D là taut thì D là hyperbolic đầy, do đó D là hyperbolic. $\square$

Kết quả sau là một hệ quả của Mệnh đề 2.2.7 đưa ra một biểu diễn chính tắc của một miền lồi thông qua tích của một miền hyperbolic đầy với $\mathbb{C}^m$.

2.2.8. Mệnh đề. Cho $D \subset \mathbb{C}^N$ là miền lồi (có thể không bị chặn). Khi đó tồn tại duy nhất số k ($0 \leq k \leq N$) và một miền lồi hyperbolic đầy duy nhất $D' \subset \mathbb{C}^k$, sao cho: $D = D' \times \mathbb{C}^{N-k}$, sai khác một phép đổi tọa độ tuyến tính.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo N .

Nếu $N = 1$ thì hoặc $D = \mathbb{C}$ hoặc D song chình hình với đĩa và do đó là hyperbolic đầy.

Giả sử mệnh đề đúng với N , ta chứng minh nó đúng với $N+1$. Lấy $D \subset \mathbb{C}^{N+1}$ là miền lồi. Khi đó, theo Mệnh đề 2.2.7, hoặc D là hyperbolic đầy hoặc D chứa một đường thẳng affine, sai khác một phép đổi tọa độ tuyến tính $l_{N+1} = \{z_1, \dots, z_N = 0\} \subset D$.

Rõ ràng, tồn tại $c \in \mathbb{C}$ sao cho $D \cap \{z_{N+1} = c\} \neq \emptyset$. Bằng một phép tịnh tiến ta có thể giả sử rằng $c = 0$. Ta định nghĩa $D_N = D \cap \{z_{N+1} = 0\}$; Khi đó $D_N \subset \mathbb{C}^N$ là lồi. Ta chứng tỏ rằng $D = D_N \times \mathbb{C}$.

Lấy $z_0 \in D_N$, ta phải chỉ ra rằng $(z_0, \zeta) \in D$ với mọi $\zeta \in \mathbb{C}$. Do $l_{N+1} \subset D$ nên $(0, \zeta) \in D$ với mọi $\zeta \in \mathbb{C}$. Giả sử $z_0 \neq 0$. Cố định $\zeta \in \mathbb{C}$. Vì D_N là mở, nên tồn tại $\varepsilon_0 > 0$ sao cho $z_1 := (1 + \varepsilon_0)z_0 \in D_N$. Do D là lồi, nên với bất kì $t \in [0, 1]$ ta có

$$t(z_1, 0) + (1-t)(0, \zeta) \in D \text{ với mọi } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Đặt $\xi_0 := \frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \zeta \in \square$ và $t_0 = (1 + \varepsilon_0)^{-1} \in (0,1)$, ta nhận được

$$(z_0, \zeta) = t_0(z_1, 0) + (1-t_0)(0, \xi_0) \in D.$$

Lập luận quy nạp tương tự ta có điều phải chứng minh. $\square$

Để hoàn thành chứng minh của Định lý 2.2.1, chúng ta cần phải chỉ ra rằng tám điều kiện đầu tiên (xem Mệnh đề 2.2.7), tương đương với (9), (10), (11).

2.2.9. Chứng minh Định lý 2.2.1. Các điều kiện từ (1) đến (8) là tương đương bởi Mệnh đề 2.2.7.

(10) $\Rightarrow$ (9): Hiển nhiên.

(4) $\Rightarrow$ (10): Theo Bổ đề 2.2.2, khoảng cách Caratheodory c_D bằng khoảng cách Kobayashi k_D , vì thế, do D là hyperbolic đầy, nên c_D là một khoảng cách cảm sinh tôpô trên D và các c_D -cầu là compact. Áp dụng Mệnh đề 2.1.2 ta có D chứa metric Bergman và nó đầy ứng với metric đó.

(9) $\Rightarrow$ (4): Giả sử D không là hyperbolic đầy. Khi đó từ Mệnh đề 2.2.8, ta có $D = D' \times \square^k$ trong đó D' là miền hyperbolic đầy và $k \geq 1$. Theo công thức tích (Mệnh đề 1.6.2) ta có $l_D = l_{D'} \cdot l_{\square^k} \equiv 0$, do đó D không chứa metric Bergman.

(11) $\Rightarrow$ (4): Giả sử D không là hyperbolic đầy. Ta phải chỉ ra một ánh xạ chỉnh hình $f: D \rightarrow D$ sao cho $\{f^{ok}\}$ không phân kì compact và không tồn tại $z_0 \in D$ sao cho $f(z_0) = z_0$.

Theo Mệnh đề 2.2.8, ta có $D = D' \times \square^k$ với D' là miền hyperbolic đầy và $k \geq 1$.

Lấy

$$f: D' \times \square^{k-1} \times \square \rightarrow D' \times \square^{k-1} \times \square \\ (z, w', w) \mapsto (z, w', e^{w+w'})$$

Khi đó rõ ràng không điểm bất động trong D . Hơn nữa, nếu $w_0 = \log(i\pi)$ thì $f^{\circ 2}(z, w', w_0) = (z, w', w_0)$ và do vậy dãy $\{f^{\circ k}\}$ không phân kì compact.

(4) $\Rightarrow$ (11): Ta có, nếu D là hyperbolic đầy, thì nó là taut và các hình cầu đóng Kobayashi của nó là lồi và compact. Lập luận tương tự như trong trường hợp các miền lồi bị chặn (xem [2, Định lí 2.4.20]) ta có điều phải chứng minh.

Định lý được chứng minh. $\square$

2.3. Ứng dụng

2.3.1. Hệ quả. Cho $D \subset \square^N$ là một miền lồi. Nếu tồn tại một điểm $p \in \partial D$ sao cho ∂D là lồi chặt tại p thì D là hyperbolic đầy.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 2.2.8, nếu D không là hyperbolic đầy, thì $D = D' \times \square^k$ với D' là một miền lồi, hyperbolic đầy và $k \geq 1$. Khi đó $\partial D = \partial D' \times \square^k$ không thể là lồi chặt. $\square$

Chú ý rằng phần đảo của hệ quả trên là sai: nửa mặt phẳng $\{\zeta \in \square : \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ là một miền lồi hyperbolic đầy trong $\square$ với biên không lồi chặt.

2.3.2. Mệnh đề. Cho $D \subset \square^N$ là một miền lồi (không bị chặn). Khi đó D có sự phân tích chính tắc (sai khác một phép đổi tọa độ tuyến tính) $D = D' \times \square^k$ với D' là hyperbolic đầy, nếu và chỉ nếu với mỗi $p \in \partial D$ và mỗi siêu phẳng tách H_p thì $(H_p \cap \partial D) \cap i(H_p \cap \partial D)$ chứa $\square^k$ nhưng không chứa $\square^{k+1}$.

Chứng minh. ($\Rightarrow$): Từ $D = D' \times \square^k$, với mỗi $p \in \partial D$ và mỗi siêu phẳng tách H_p ta có

$$(H_p \cap \partial D) \cap i(H_p \cap \partial D) = \left[(H_p \cap \partial D') \cap i(H_p \cap \partial D') \right] \times \square^k.$$

Vì D' là hyperbolic đầy nên biên của nó không chứa đường thẳng phức nào.

($\Leftarrow$) Vì D là lồi nên $D = D' \times \square^{k'}$ (theo Mệnh đề 2.2.8). Theo chứng minh phần thuận ta có, với mỗi $p \in \partial D$ và mỗi siêu phẳng tách H_p , $(H_p \cap \partial D) \cap i(H_p \cap \partial D) = \square^{k'}$. Do vậy $k' = k$. $\square$

2.3.3. Hệ quả. Cho $D \subset \mathbb{C}^N$ là một miền lồi (không bị chặn). Nếu tồn tại $p \in \partial D$ và một siêu phẳng tách H_p sao cho $(H_p \cap \partial D) \cap i(H_p \cap \partial D)$ không chứa bất kì đường thẳng affine phức nào thì D là hyperbolic đầy. Ngược lại, nếu D là hyperbolic đầy, thì với bất kì điểm $p \in \partial D$ và bất kì siêu phẳng tách H_p nào, ta có $(H_p \cap \partial D) \cap i(H_p \cap \partial D)$ không chứa bất kì đường thẳng affine phức nào.

2.3.4. Nhận xét. Ta biết rằng, định lý của Abate (Định lý 2.1.12)[2, Định lý 2.1.9] là nền tảng cho việc nghiên cứu lý thuyết lặp trong các miền lồi bị chặn. Với Định lý 2.2.1 và Mệnh đề 2.2.8, ta có thể được áp dụng có hiệu quả trong việc nghiên cứu các miền lồi không bị chặn. Đây là một hướng phát triển tiếp theo của đề tài này.

KẾT LUẬN

Luận văn nghiên cứu về tính hyperbolic của các miền lồi không bị chặn trong C^N . Cụ thể, luận văn đã đạt được các kết quả chính sau:

- 1) Hệ thống các khái niệm và kết quả trong không gian hyperbolic.
- 2) Trình bày và chứng minh một số kết quả về tính hyperbolic của các miền lồi D trong C^N thông qua định lý gồm các điều kiện tương đương:

- (1) D là song chỉnh hình với một miền bị chặn;
- (2) D là hyperbolic;
- (3) D là taut;
- (4) D là hyperbolic đầy;
- (5) D không chứa các đường cong nguyên khác hằng;
- (6) D không chứa các đường thẳng affine phức;
- (7) D có N siêu phẳng thực độc lập tuyến tính tách rời;
- (8) D có các hàm peak và anti-peak tại vô cực;
- (9) D có chứa metric Bergman b_D ;
- (10) D là đầy ứng với metric Bergman b_D ;
- (11) Với bất kì ánh xạ $f : D \rightarrow D$ chỉnh hình sao cho dãy lặp $\{f^{\circ k}\}$

không phân kì compact, tồn tại $z_0 \in D$ sao cho $f(z_0) = z_0$.

3) Trình bày một số ứng dụng liên quan mật thiết tới tính hyperbolic của miền lồi không bị chặn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Phạm Việt Đức, *Mở đầu về lý thuyết các không gian phức hyperbolic*, NXB ĐHSP, (2005).
- [2]. Abate M., *Iteration Theory of Holomorphic Maps on Taut Manifolds*, Mediterranean Press, Rende, Cosenza (1989).
- [3]. Abate M., *Iteration Theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 18(1991), pp. 167-191.
- [4]. Barth T.J., *Convex domains and Kobayashi hyperbolicity*, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), pp. 556-558.
- [5]. Bracci F. and Saracco A., *Hyperbolic in unbounded convex domains*, Forum Math, 21(2009), pp. 815-825.
- [6]. Drinovec Drnovsek B., *Proper holomorphic discs avoiding closed convex sets*, Math. Z. 241(2002), pp. 593-596.
- [7]. Gaussier H., *Tautness and complete hyperbolicity of domains in C^n* , Proc. Amer. Math. Soc. 127(1999), pp. 105-116.
- [8]. Harris L. A., “Schwarz-Pick systems of pseudometric for domains in normed linear spaces”, *Advances In Holomorphy*, Notas de Matematica 65, Toth-Holland, Amsterdam (1979), pp. 345-406.

- [9]. Jarnicki M. and Pflug P., *Invariant Distances and metrics in complex Analysis*, W. de Gruyter, Berlin, New york (1993).
- [10]. Kiernan P., *On the relations between tight, taut and hyperbolic manifolds*, Bull.Amer.Math.Soc, 76(1970), pp. 49-51.
- [11]. Kobayashi S., *Hyperbolic complex spaces*, Springer-Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 318, (1998).
- [12]. Lempert L., *La me'trique de Kobayashi et la repre'sentation des domaines sur la boule*, Bull.Soc.Math.France 109(1981), pp. 427-474.
- [13]. Lempert L., *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Analysis Math. 8(1982), pp. 257-261.
- [14]. Nikolov N. and Pflug P., *Behavior of the Bergman kernel and metrics near convex boundary points*, Proc. Amer. Math. Soc. 131(2003), pp. 2097-2102 (electronic).
- [15]. Nikolov N. and Pflug P., *Estimates for the Bergman kernel and metric of convex domains in C^n* , Ann. Polon. Math. 81(2003), pp. 73- 78.
- [16]. Nikolov N. and Pflug P., *Local vs. global hyperconvexity, tautness or k -completeness for unbounded open sets in C^n* , Ann.Sc.Norm.Super. Pisa Cl. Sci. (5) 4(2005), pp. 601-618.
- [17]. Royden H. L.: *Remarks on the Kobayashi Metric*, Lecture Notes in Mathematics 185, Springer, Berlin (1971), pp.125-127.