

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ THỊ HOÀI NGỌC

TỐI ƯU HÓA MỘT TẬP

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số:60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học: PGS.TS Đỗ Văn Lưu

Thái Nguyên: 05/2013

Mục lục	
Mở đầu	2
Chương 1. NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU MỘT TẬP	4
1.1. Điểm cực tiểu và điểm cực đại	4
1.2. Các điểm cực tiểu và cực đại mạnh và yếu	8
Chương 2. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU	15
2.1. Điều kiện cần tối ưu	15
2.2. Điều kiện đủ tối ưu	32
Kết luận	45
Tài liệu tham khảo	46

MỞ ĐẦU

Lý thuyết tối ưu vectơ có nhiều ứng dụng trong kinh tế, kỹ thuật. V. Pareto đã đưa ra khái niệm nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu. Từ đó lý thuyết tối ưu vectơ đã phát triển mạnh mẽ và thu được nhiều kết quả đẹp đẽ. Khái niệm cực tiểu chính thường được Kuhn - Tucker đưa ra và phát triển bởi: A.M. Geoffrion, H.P. Benson, J.M. Borwein, M.I. Henig,...

Để nghiên cứu bài toán tối ưu vectơ, người ta thường dùng phương pháp vô hướng hóa, tức là thay thế bài toán tối ưu vectơ bằng một bài toán tối ưu vô hướng thích hợp và sử dụng các kết quả của tối ưu vô hướng. Các kết quả về điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu đã cho ta các điều kiện vô hướng hóa một bài toán tối ưu vectơ. Các điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ là đề tài đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy tôi đã chọn đề tài: "Tối ưu hóa một tập". Đề tài có tính thời sự.

Luận văn trình bày lý thuyết tối ưu hóa một tập bao gồm nghiên cứu về các loại nghiệm hữu hiệu của một bài toán tối ưu một tập (cực tiểu, cực tiểu mạnh, cực tiểu chính thường và cực tiểu yếu), các điều kiện cần và các điều kiện đủ cho các loại nghiệm hữu hiệu đó.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1. Nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu một tập

Trình bày các khái niệm cực tiểu, cực tiểu mạnh, cực tiểu chính thường, cực tiểu yếu và các khái niệm cực đại tương ứng của một tập trong không

gian tuyến tính có thứ tự bộ phận cùng với một số ví dụ minh họa, một số tính chất của chúng. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo từ các tài liệu [1] - [5].

Chương 2. Điều kiện tối ưu

Trình bày các điều kiện cần cho cực tiểu, cực tiểu mạnh, cực tiểu chính thường, cực tiểu yếu của một tập, và các điều kiện đủ để một phần tử là cực tiểu của một tập. Các điều kiện đủ cho cực tiểu chính thường và cực tiểu yếu của một tập cũng được trình bày trong chương này. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo từ các tài liệu [3], [5].

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa toán, phòng đào tạo sau đại học trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học. Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K5 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2013

Tác giả

Tô Thị Hoài Ngọc

Chương 1

NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU MỘT TẬP

Chương 1 trình bày các khái niệm cực tiểu, cực đại, cực tiểu mạnh, cực đại mạnh, cực tiểu chính thường, cực đại chính thường, cực tiểu yếu và cực đại yếu của một tập hợp trong không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận cùng với các ví dụ minh họa và một số tính chất của chúng. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo từ các tài liệu [1] - [5].

1.1 Điểm cực tiểu và điểm cực đại

Định nghĩa 1.1

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C .

a) Phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu (minimal element) của tập S , nếu

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S \subset \{\bar{x}\} + C. \quad (1.1)$$

b) Phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực đại (maximal element) của tập S , nếu

$$(\{\bar{x}\} + C) \cap S \subset \{\bar{x}\} - C. \quad (1.2)$$

Nếu nón thứ tự C là nhọn thì các bao hàm thức (1.1) và (1.2) có thể thay thế bằng

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S = \{\bar{x}\} \quad (\text{hoặc: } x \leq_C \bar{x}, x \in S \Rightarrow x = \bar{x}),$$

và

$$(\{\bar{x}\} + C) \cap S = \{\bar{x}\} \quad (\text{hoặc: } \bar{x} \leq_C x, x \in S \Rightarrow x = \bar{x}).$$

Bởi vì mọi phần tử cực đại của S cũng là cực tiểu với nón thứ tự lồi $-C$, không mất tính tổng quát ta chỉ nghiên cứu khái niệm cực tiểu là đủ.

Ví dụ 1.1

Cho X là không gian tuyến tính thực gồm các hàm xác định trên không gian tuyến tính thực E và thứ tự bộ phận theo thứ tự từng điểm. Hơn nữa, cho S là tập con của X bao gồm tất cả các hàm dưới tuyến tính trên E . Khi đó, không gian đối ngẫu đại số E' là tập hợp tất cả các phần tử cực tiểu của S . Khẳng định này được chứng minh trong Bổ đề 3.7[3].

Ví dụ 1.2

Cho X và Y là các không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với các nón thứ tự C_X và C_Y , và cho $T : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả thiết rằng tồn tại $q \in Y$ sao cho $S := \{x \in C_X \mid T(x) + q \in C_Y\}$ khác rỗng. Khi đó, một bài toán bù trườ tượng dẫn đến bài toán tìm một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Trong lý thuyết thống kê và lý thuyết kiểm định, có nhiều bài toán nghiên cứu các phần tử cực tiểu của tập hợp (xem [3]). Ví dụ sau đây có thể được hiểu như là một bài toán tìm các ma trận hiệp phương sai cực tiểu.

Ví dụ 1.3

Cho X là không gian tuyến tính thực của các (n, n) - ma trận đối xứng thực và thứ tự bộ phận trong X xác định sinh bởi nón lồi $C := \{A \in X \mid A \text{ là bán xác định dương}\}$. Khi đó, chúng ta tìm các phần tử cực tiểu của một tập con không rỗng S của C . Chẳng hạn, nếu có một ma trận $A \in S$ trong đó có một vết nhỏ nhất trong số tất cả các ma trận của S , thì A là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Ví dụ 1.4

Cho X và Y là các không gian tuyến tính thực, và C_Y là một nón lồi trong Y . Hơn nữa, cho S là một tập hợp con không rỗng của X , và cho ánh xạ $f : S \rightarrow Y$. Khi đó, bài toán tối ưu trừu tượng

$$\min_{x \in S} f(x) \quad (1.3)$$

được hiểu như sau: Nghiệm cực tiểu $\bar{x} \in S$ được xác định là nghịch ảnh của phần tử cực tiểu $f(\bar{x})$ của tập ảnh $f(S)$. Nếu f là một chuẩn vectơ, thì bài toán (1.3) được gọi là một bài toán xấp xỉ vectơ.

Bây giờ, chúng ta xét một bài toán tối ưu vectơ phát sinh trong lý thuyết trò chơi

Ví dụ 1.5

Xét một trò chơi hợp tác có n người chơi. Cho $X, Y_1, \dots, Y_n$ là các

không gian tuyến tính thực, S là một tập hợp con không rỗng của X , và cho $C_{Y_1}, \dots, C_{Y_n}$ là các nón lồi trong $Y_1, \dots, Y_n$, tương ứng. Ngoài ra, với mỗi người chơi ta cho một ánh xạ mục tiêu $f_i : S \rightarrow Y_i$ (với mọi $i \in \{1, \dots, n\}$). Mỗi người chơi cố gắng để tối thiểu hóa ánh xạ mục tiêu f_i trên S . Tuy nhiên, bởi vì họ chơi hợp tác cho nên họ không thể làm tổn thương lẫn nhau. Để có thể đưa vào một khái niệm tối ưu, ta xác định không gian tích $Y := \prod_{i=1}^n Y_i$, nón thứ tự tích $C := \prod_{i=1}^n C_{Y_i}$, và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi $f = (f_1, \dots, f_n)$. Khi đó, một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là một nghiệm cực tiểu (hoặc một nghiệm tối ưu Edgeworth – Pareto), nếu $\bar{x}$ là nghịch ảnh của một phần tử cực tiểu của tập $f(S)$. Thứ tự tích cho phép mô tả sự hợp tác bởi vì một phần tử $x \in S$ được ưa thích, nếu nó được ưa thích bởi tất cả người chơi. Do đó, trò chơi hợp tác n người chơi là một bài toán tối ưu hóa trừu tượng.

Bổ đề sau đây chỉ ra rằng các phần tử cực tiểu của một tập S và các phần tử cực tiểu của tập hợp $S + C$, trong đó C ký hiệu là nón thứ tự, liên quan chặt chẽ với nhau.

Bổ đề 1.1

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C .

(a) Nếu nón thứ tự C là nhọn thì mọi phần tử cực tiểu của tập hợp $S + C$ cũng là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

(b) Mọi phần tử cực tiểu của tập hợp S cũng là một phần tử cực tiểu của

tập hợp $S + C$.

Chứng minh

(a) Cho $\bar{x} \in S + C$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp $S + C$. Nếu $\bar{x} \notin S$, thì tồn tại phần tử $x \neq \bar{x}$ với $x \in S$ và $\bar{x} \in \{x\} + C$. Do đó, ta có

$$x \in (\{\bar{x}\} - C) \cap (S + C).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp $S + C$. Vì vậy, chúng ta nhận được $\bar{x} \in S \subset S + C$. Do đó, $\bar{x}$ cũng là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

(b) Lấy một phần tử cực tiểu tùy ý $\bar{x} \in S$ của tập hợp S , và lấy $x \in (\{\bar{x}\} - C) \cap (S + C)$. Khi đó, tồn tại các phần tử $s \in S$ và $c \in C$ sao cho $x = s + c$. Kết quả, chúng ta nhận được $s = x - c \in \{\bar{x}\} - C$. Bởi vì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S , chúng ta kết luận $s \in \{\bar{x}\} + C$. Nhưng khi đó chúng ta cũng nhận được $x \in \{\bar{x}\} + C$. Đó là điều phải chứng minh.

□

1.2 Các điểm cực tiểu và cực đại mạnh và yếu

Định nghĩa 1.2

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C .

(a) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu mạnh (strongly minimal element) của tập hợp S , nếu

$$S \subset \{\bar{x}\} + C \quad (\text{hay là : } \bar{x} \leq_C x, \forall x \in S) \quad (1.4)$$

(b) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực đại mạnh (*strongly maximal element*) của tập hợp S , nếu

$$S \subset \{\bar{x}\} - C \quad (\text{hay là : } x \leq_C \bar{x}, \forall x \in S) \quad (1.5)$$

Khái niệm cực tiểu mạnh là rất chặt và thường không áp dụng được trong thực tế.

Ví dụ 1.6

Với các giả thiết của ví dụ 1.2 chúng ta xét tập hợp

$$S := \{x \in C_X \mid T(x) + q \in C_Y\}.$$

Hiển nhiên, nếu $q \in C_Y$ thì 0_X là một phần tử cực tiểu mạnh của tập hợp S .

Bổ đề dưới đây cho một mối quan hệ giữa cực tiểu mạnh và các phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Bổ đề 1.2[3]

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận. Khi đó, mọi phần tử cực tiểu mạnh của tập hợp S cũng là một phần tử cực tiểu của S .

Nhắc lại: Cho S là tập con của không gian định chuẩn X , nón tiếp liên của tập S tại điểm $\bar{x} \in S$ được định nghĩa như sau:

$$T(S; \bar{x}) = \{v \in X : \exists v_n \rightarrow v, \exists t_n \rightarrow 0_+ \text{ sao cho } \bar{x} + t_n v_n \in S, \forall n\}.$$

Định nghĩa 1.3

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn thực $(X, \|\cdot\|)$ mà thứ tự bộ phận của X được sinh bởi nón lồi C .

(a) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu chính thường (properly minimal element) của tập hợp S , nếu $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S và phần tử 0_X là cực tiểu của nón tiếp liên $T(S + C, \bar{x})$.

(b) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực đại chính thường (properly maximal element) của tập hợp S , nếu $\bar{x}$ là một phần tử cực đại của tập hợp S và phần tử 0_X là cực đại của nón tiếp liên $T(S - C, \bar{x})$.

Rõ ràng là một phần tử cực tiểu chính thường của tập hợp S cũng là cực tiểu của S .

Ta xét một khái niệm tối ưu yếu hơn so với tất cả các khái niệm đã xét.

Nhắc lại: Phần trong đại số của tập $S \neq \emptyset$ trong không gian tuyến tính thực X là tập

$$\text{cor}(S) = \{\bar{x} \in S \mid \forall x \in X, \exists \bar{\lambda} > 0 : \bar{x} + \lambda x \in S, \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]\}.$$

Định nghĩa 1.4

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C có phần trong đại số $\text{cor}(C)$ không rỗng.

a) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu yếu (weakly minimal element) của tập hợp S , nếu $(\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S = \emptyset$

b) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực đại yếu (weakly maximal element) của tập hợp S , nếu $(\{\bar{x}\} + \text{cor}(C)) \cap S = \emptyset$

Chú ý rằng các khái niệm “ cực tiểu” và “ cực tiểu yếu” liên quan chặt chẽ với nhau. Lấy tùy ý một phần tử cực tiểu yếu $\bar{x} \in S$ của tập hợp S , tức là $(\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S = \emptyset$. Theo bổ đề 1.12.(a)[3] tập $\widehat{C} := \text{cor}(C) \cup \{0_X\}$ là một nón lồi và nó sinh ra thứ tự bộ phận khác trong X . Do đó, $\bar{x}$ cũng là cực tiểu của tập hợp S đối với thứ tự bộ phận sinh ra bởi $\widehat{C}$. Khái niệm cực tiểu yếu rất hay về mặt lý thuyết, và nó không phải là một khái niệm thích hợp cho các bài toán ứng dụng.

Bổ đề tiếp theo tương tự như bổ đề 1.1.

Bổ đề 1.3

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng.

(a) Mọi phần tử cực tiểu yếu $\bar{x} \in S$ của tập hợp $S + C$ cũng là cực tiểu yếu của tập hợp S .

(b) Mọi phần tử cực tiểu yếu $\bar{x} \in S$ của tập hợp S cũng là cực tiểu yếu của tập hợp $S + C$.

Chứng minh

(a) Cho phần tử cực tiểu bất kỳ $\bar{x} \in S$ của tập hợp $S + C$, ta có

$$(\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S \subset (\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap (S + C) = \emptyset.$$

Điều này kéo theo $\bar{x}$ cũng là cực tiểu yếu của tập hợp S .

(b) Lấy phần tử bất kỳ $\bar{x} \in S$ không phải là một phần tử cực tiểu yếu của tập hợp $S + C$. Khi đó, tồn tại một phần tử

$$x \in (\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap (S + C) \neq \emptyset,$$

và tồn tại $s \in S$ với $\bar{x} - x \in \text{cor}(C)$ và $x - s \in C$. Do đó, theo bổ đề 1.12[3], ta có

$$\bar{x} - s = \bar{x} - x + x - s \in \text{cor}(C) + C = \text{cor}(C),$$

hoặc $s \in (\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S$. Vì vậy, $\bar{x}$ không là cực tiểu yếu của tập hợp S , và khẳng định được chứng minh. $\square$

Với bổ đề tiếp theo chúng ta lại xét mối liên hệ giữa cực tiểu và cực tiểu yếu của một tập hợp.

Bổ đề 1.4

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C mà $C \neq X$ và $\text{cor}(C) \neq \emptyset$. Khi đó, mọi phần

tử cực tiểu của tập hợp S cũng là cực tiểu yếu của tập hợp S .

Chứng minh

Giả thiết $C \neq X$ kéo theo $(-Cor(C)) \cap C = \emptyset$. Do đó, với một phần tử cực tiểu $\bar{x}$ của S , ta có

$$\begin{aligned}\emptyset &= (\{\bar{x}\} - Cor(C)) \cap (\{\bar{x}\} + C) \\ &= (\{\bar{x}\} - Cor(C)) \cap (\{\bar{x}\} - C) \cap S \\ &= (\{\bar{x}\} - Cor(C)) \cap S.\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là $\bar{x}$ cũng là một phần tử cực tiểu yếu của S . $\square$

Nói chung, mệnh đề đảo của bổ đề 1.4 là không đúng. Điều này được minh họa bằng ví dụ sau

Ví dụ 1.7. Xét tập hợp

$$S := \left\{ (x_1, x_2) \in [0, 2] \mid x_2 \geq 1 - \sqrt{1 - (x_1 - 1)^2}, x_1 \in [0, 1] \right\}$$

trong $X := \mathbb{R}^2$ với nón thứ tự $C := \mathbb{R}_+^2$. Không có các phần tử cực tiểu mạnh của tập hợp S . Tập hợp M gồm tất cả các phần tử cực tiểu của S được xác định bởi

$$M = \left\{ \left(x_1, 1 - \sqrt{1 - (x_1 - 1)^2} \right) \mid x_1 \in [0, 1] \right\}.$$

Tập hợp M_P gồm tất cả các phần tử cực tiểu chính thường của S là

$$M_P = M \setminus \{(0, 1), (1, 0)\},$$

và tập hợp M_ω gồm tất cả các phần tử cực tiểu yếu của S là

$$M_\omega = M \cup \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in (1, 2]\} \cup \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (1, 2]\}.$$

Do đó, ta có $M_P \subsetneq M \subsetneq M_\omega$.

Chương 2

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Chương 2 trình bày các điều kiện cần cho cực tiểu, cực tiểu mạnh, cực tiểu chính thường của một tập và các điều kiện đủ để một phần tử là cực tiểu, cực tiểu chính thường và cực tiểu yếu của một tập. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo từ các tài liệu [3], [5].

2.1 Điều kiện cần tối ưu

Trước hết ta định nghĩa các khái niệm đơn điệu.

Định nghĩa 2.1

Cho S là một tập hợp con không rỗng của tập hợp T trong không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C .

(a) Một hàm số $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tăng đơn điệu trên S , nếu với mọi $\bar{x} \in S$,

$$\begin{aligned} x \in (\{\bar{x}\} - C) \cap S &\implies f(x) \leq f(\bar{x}) \\ (\text{hay là : } x \leq_C \bar{x}, x \in S &\implies f(x) \leq f(\bar{x})). \end{aligned}$$

(b) Một hàm số $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tăng đơn điệu mạnh trên S , nếu với mọi $\bar{x} \in S$,

$$x \in (\{\bar{x}\} - C) \cap S, x \neq \bar{x} \implies f(x) < f(\bar{x})$$

$$(hay là: x \leq_C \bar{x}, x \in S, x \neq \bar{x} \implies f(x) < f(\bar{x})).$$

(c) Nếu $\text{cor}(C) \neq \emptyset$, thì một hàm $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tăng đơn điệu ngặt trên S , nếu với mọi $\bar{x} \in S$,

$$x \in (\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S \implies f(x) < f(\bar{x}).$$

Nếu $\text{cor}(C) \neq \emptyset$, thì mọi hàm tăng đơn điệu mạnh trên S cũng là hàm tăng đơn điệu ngặt.

Ví dụ 2.1

Cho S là một tập hợp con bất kỳ của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C_X . Mọi phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'}$ là hàm tăng đơn điệu trên S trong đó X' là không gian đối ngẫu đại số của X . Hơn nữa, mọi phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'}^\#$ là hàm tăng đơn điệu mạnh trên S trong đó $C_{X'}^\#$ là tựa phần trong (quasi - interior) của nón đối ngẫu của $C_{X'}$:

$$C_{X'}^\# = \{x' \in X' \mid x'(x) > 0, \forall x \in C_X \setminus \{0_X\}\}.$$

Nếu $\text{cor}(C_X) \neq \emptyset$ theo bổ đề 3.21.(b)[3] mọi phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$ là hàm tăng đơn điệu ngặt trên S .

Ví dụ 2.2

Cho $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là không gian Hilbert có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C_X . Khi đó, chuẩn trên X là hàm tăng đơn điệu mạnh trên C_X nếu và chỉ nếu

$$C_X \subset C_{X^*}.$$

Chứng minh

Trước hết, chúng ta giả thiết rằng bao hàm thức $C_X \subset C_{X^*}$ không đúng. Khi đó, tồn tại các phần tử $x, y \in C_X$ với $\langle x, y \rangle < 0$. Với $\alpha \in (0, 1)$ ta xét phần tử $z_\alpha := x + \alpha y$. Hiển nhiên, $z_\alpha \in C_X$ và

$$x \in (\{z_\alpha\} - C_X) \cap C_X.$$

Nhưng khi đó với α đủ nhỏ $\alpha \in (0, 1)$, ta có

$$\begin{aligned} \|z_\alpha\|^2 &= \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle \\ &< \|x\|^2. \end{aligned}$$

Do đó, chuẩn $\|\cdot\|$ không đơn điệu tăng mạnh trên C_X .

Bây giờ, chúng ta giả thiết rằng bao hàm thức $C_X \subset C_{X^*}$ đúng. Chọn tùy ý $y \in C_X$ và

$$x \in (\{y\} - C_X) \cap C_X \text{ với } x \neq y.$$

Bởi vì $y + x \in C_X$, $y - x \in C_X$ và $C_X \subset C_{X^*}$, ta có

$$\|y\|^2 - \|x\|^2 = \langle y - x, y + x \rangle \geq 0.$$

Nhưng điều này chỉ kéo theo tính đơn điệu của chuẩn trên C_X . Với chứng minh của tính đơn điệu mạnh ta giả sử rằng $\|x\| = \|y\|$. Do tính đơn điệu của chuẩn trên C_X ta có

$$\|x\| \leq \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \|y\|, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Với giả thiết $\|x\| = \|y\|$ chúng ta nhận được

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\|, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Nếu bình phương phương trình này ta nhận được $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$.
 Đẳng thức Cauchy - Schwarz kéo theo tồn tại $\beta > 0$ với $x = \beta y$. Bởi vì ta
 giả thiết $\|x\| = \|y\|$, trong trường hợp $x \neq 0_X$ chúng ta có $\beta = 1$ và
 $x = y$. Trong trường hợp $x = 0_X$ chúng ta có ngay $x = y$. Nhưng điều
 này mâu thuẫn với giả thiết $x \neq y$. Vì vậy, chuẩn trên X là hàm tăng đơn
 điệu mạnh trên C_X .

Định lý 2.1

*Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ
 tự bộ phận X với nón thứ tự đóng đại số, nhọn C và C có phần trong đại
 số không rỗng. Nếu $\bar{x} \in S$ là một phần tử cực tiểu của tập S , thì với mọi
 $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - \text{cor}(C)$, tồn tại một chuẩn $\|\cdot\|$ trên X là hàm tăng đơn điệu
 trên C với tính chất*

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}.$$

Chứng minh

Lấy một phần tử tùy ý $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - \text{cor}(C)$. Ta định nghĩa chuẩn $\|\cdot\|$
 trên X bằng phép hàm Minkowski:

$$\|x\| = \inf_{\lambda > 0} \left\{ \lambda \mid \frac{1}{\lambda} x \in [\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] \right\}, \forall x \in X.$$

Khi đó, khoảng $[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]$ là hình cầu đơn vị đóng. Bởi vì $\bar{x}$ là một
 phần tử cực tiểu của tập hợp S , ta có

$$[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] \cap (S - \{\hat{x}\}) = \{\bar{x} - \hat{x}\}.$$

Điều này kéo theo

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}.$$

Cuối cùng, với lý luận tương tự trong chứng minh của Bổ đề 1.45.(b)[3] chúng ta nhận được với mọi $c \in C$,

$$x \in [0_X, c] \implies \|x\| \leq \|c\|.$$

Điều này có nghĩa là chuẩn $\|\cdot\|$ là hàm tăng đơn điệu trên C . □

Một điều kiện cần đơn giản có thể nhận được, khi tập $S + C$ lồi

Định lý 2.2

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự không tầm thường nhọn C_X . Nếu tập hợp $S + C_X$ lồi và có phần trong đại số không rỗng, thì với mọi phần tử cực tiểu $\bar{x} \in S$ của tập hợp S , tồn tại một phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$ với tính chất

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

Chứng minh

Nếu $\bar{x} \in S$ là một phần tử cực tiểu của tập S , thì theo Bổ đề 1.1.(b) $\bar{x}$ cũng là cực tiểu của tập $S + C_X$, tức là

$$(\{\bar{x}\} - C_X) \cap (S + C_X) = \{\bar{x}\}.$$

Bởi vì $\{\bar{x}\} - C_X$ và $S + C_X$ lồi, $\text{cor}(S + C_X) \neq \emptyset$ và $\bar{x} \notin \text{cor}(S + C_X)$, theo định lý tách 3.14[3], tồn tại một phiếm hàm tuyến tính $l \in X' \setminus \{0_{X'}\}$ và một số thực α với

$$l(\bar{x} - c_1) \leq \alpha \leq l(x + c_2), \forall x \in S, \forall c_1, c_2 \in C_X.$$

Từ đó C_X là một hình nón, ta có $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$. Hơn nữa, chúng ta nhận được (với $c_1 = c_2 = 0_X$):

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

□

Định lý 2.2 cũng có thể được giải thích theo cách sau: với các giả thiết đã phát biểu, với mọi phần tử cực tiểu $\bar{x}$, tồn tại một phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$ sao cho $\bar{x}$ là cực tiểu của bài toán tối ưu vô hướng:

$$\min_{x \in S} l(x).$$

Định lý sau đây trình bày một điều kiện cần và đủ với các phiếm hàm tuyến tính nhưng không có giả thiết lõi của Định lý 2.2.

Định lý 2.3

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính lõi địa phương có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự đóng nhọn C_X . Phần tử $\bar{x}$ là cực tiểu của tập hợp S nếu và chỉ nếu với mọi $x \in S \setminus \{\bar{x}\}$ tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $l \in C_{X^} \setminus \{0_{X^*}\}$ thỏa mãn,*

$$l(\bar{x}) < l(x).$$

Chứng minh

Giả sử $\bar{x} \in S$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S , tức là

$$(\{\bar{x}\} - C_X) \cap S = \{\bar{x}\}.$$

Dạng thức này có thể viết lại như sau:

$$x \notin \{\bar{x}\} - C_X, \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\} \quad (2.1)$$

Bởi vì C_X đóng và lồi, tập hợp $\{\bar{x}\} - C_X$ cũng đóng và lồi. Theo Định lý 3.18[3], (2.1) tương đương với: với mọi $x \in S \setminus \{\bar{x}\}$ tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $l \in C_{X^*} \setminus \{0_{X^*}\}$ sao cho

$$l(\bar{x}) < l(x).$$

□

Theo định lý 2.3, $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của S nếu và chỉ nếu $C_{X^*} \setminus \{0_{X^*}\}$ tách $\bar{x}$ với các phần tử khác trong S . Định lý 2.3 thực chất không phải là một kết quả vô hướng hóa. Nhưng với lập luận tương tự chúng ta nhận được một kết quả vô hướng hóa cho các phần tử cực tiểu mạnh.

Định lý 2.4

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính lồi địa phương có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự đóng C_X . Một phần tử $\bar{x} \in S$ là một phần tử cực tiểu mạnh của tập hợp S nếu và chỉ nếu với mọi $l \in C_{X^}$,*

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

Chứng minh

Giả sử $\bar{x} \in S$ là cực tiểu mạnh của một tập hợp S , tức là

$$S \subset \{\bar{x}\} + C_X. \quad (2.2)$$

Bởi vì C_X là nón lồi đóng và X là lồi địa phương, theo Bổ đề 3.21.(a)[3],

$$C_X = \{x \in X \mid l(x) \geq 0, \forall l \in C_{X^*}\}.$$

Do đó, bao hàm thức (2.2) tương đương với

$$S - \{\bar{x}\} \subset \{x \in X \mid l(x) \geq 0, \forall l \in C_{X^*}\}.$$

Bao hàm thức này kéo theo: với mọi $x \in S$,

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall l \in C_{X^*}.$$

□

Chú ý rằng chúng ta không cần giả thiết lồi trong Định lý 2.4. Như vậy, một phần tử cực tiểu mạnh là một nghiệm cực tiểu cho toàn bộ lớp các bài toán tối ưu vô hướng. Điều này chứng tỏ rằng khái niệm tối ưu này rất mạnh.

Tiếp theo, chúng ta trình bày về cực tiểu chính thường.

Định lý 2.5

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận $(X, \|\cdot\|_X)$ với nón thứ tự C_X , và C_X có một cơ sở compact yếu. Với $\bar{x}$ nào đó thuộc S , giả sử nón $(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ là đóng yếu. Nếu $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu chính thường của tập hợp S , thì với mọi $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - C_X$, $\hat{x} \neq \bar{x}$, tồn tại một chuẩn liên tục $\|\cdot\|$ (trên X) tăng đơn điệu mạnh trên C_X và có tính chất

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}.$$

Chứng minh

Chứng minh định lý này rất kỹ thuật và, do đó, một tổng quan ngắn được đưa ra đầu tiên để hình dung về mặt hình học. Phần (1) chỉ ra rằng cơ sở của

nón lồi - C_X và nón C sinh ra bởi tập $T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\})$ có một “khoảng cách” dương ε . Điều này cho phép chúng ta xây dựng thêm nón $\widehat{C}$ ở phần hai "lớn hơn" nón thứ tự C_X , nhưng $(-\widehat{C}) \cap C = \{0_X\}$. Ta có thể chỉ ra rằng $\widehat{C}$ là lồi, đóng, nhọn và có phần trong khác rỗng. Trong phần (3) chúng ta xác định chuẩn $\|\cdot\|$ là phiếm hàm Minkowski theo khoảng thứ tự thích hợp. Hơn nữa, trong phần (4) một số tính chất của chuẩn được chứng minh. Chú ý rằng nón thứ tự C_X là nhọn, bởi vì nó có một cơ sở (so sánh Bổ đề 3.3[3] và Bổ đề 1.27.(b)[3]).

(1) Sau đây B được ký hiệu là cơ sở compact yếu của nón thứ tự C_X , và C ký hiệu là nón sinh bởi $T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\})$, tức là

$$C := \text{cone}(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\})).$$

Bởi vì B là compact yếu, và, với mọi $x \in C$ phiếm hàm $\|x - \cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới yếu, nên với mọi $x \in C$, bài toán tối ưu vô hướng:

$$\inf_{y \in -B} \|x - y\|_X$$

là giải được, tức là tồn tại $y(x) \in -B$ có tính chất

$$\|x - y(x)\|_X \leq \|x - y\|_X, \forall y \in -B.$$

Tiếp theo, chúng ta xét bài toán tối ưu vô hướng:

$$\varepsilon := \inf_{x \in C} \|x - y(x)\|_X.$$

Nếu chúng ta giả thiết $\varepsilon = 0$, thì tồn tại một lưới

$$(\|x_i - y(x_i)\|)_{i \in I} \rightarrow 0, \text{ với } x_i \in C, \forall i \in I \quad (2.3)$$

Do B là compact yếu và C là đóng yếu, tập hợp $C + B$ đóng yếu, và điều kiện (2.3) kéo theo

$$0_X \in \text{cl}(C + B) \subset \text{cl}(C + B)_{\sigma(X, X^*)} = C + B. \quad (2.4)$$

$\bar{x}$ được giả thiết là một phần tử cực tiểu chính thường của tập hợp S . Do đó, 0_X là một phần tử cực tiểu của nón tiếp liên $T(S + C_X, \bar{x})$ và một phần tử cực tiểu của tập hợp $S - \{\bar{x}\}$, và chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}\{0_X\} &= (-C_X) \cap T(S + C_X, \bar{x}) \cup (-C_X) \cap (S - \{\bar{x}\}) \\ &= (-C_X) \cap (T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\{0_X\} &= (-C_X) \cap \text{cone}(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\})) \\ &\supset (-B) \cap C.\end{aligned}$$

Bởi vì $0_X \notin B$, ta có $(-B) \cap C = \emptyset$. Điều đó mâu thuẫn với điều kiện (2.4). Do đó, chúng ta nhận được

$$0 < \varepsilon = \inf_{x \in C} \inf_{y \in -B} \|x - y\|_X,$$

tức là, các tập hợp C và $-B$ có một “khoảng cách” dương ε .

(2) Bây giờ, chúng ta “tách” các tập hợp C và $-B$ bởi một nón $-\widehat{C}$. Bởi vì cơ sở B là compact yếu và $0_X \notin B$ ta nhận được

$$0 < \delta := \inf_{y \in B} \|y\|_X.$$

Với $\beta := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\} > 0$ ta định nghĩa tập hợp $U := B + N(0_X, \beta)$ ($N(0_X, \beta)$ ký hiệu hình cầu đóng tâm 0_X với bán kính β). Rõ ràng là U là một tập lồi. Vì vậy, nón sinh bởi U và bao đóng của nó $\widehat{C} := \text{cl}(\text{cone}(U))$ là nón lồi. Theo định nghĩa, nón này có phần trong tôpô khác rỗng. Để thấy rằng $\widehat{C}$ là nhọn, chúng ta nghiên cứu nón $\widetilde{C} := \text{cone}(B + N(0_X, \frac{3}{2}\beta))$. Nếu chúng ta giả thiết rằng tồn tại $\tilde{x} \in (-\widetilde{C}) \cap \widetilde{C}$ với $\tilde{x} \neq 0_X$, thì tồn tại số $\lambda > 0$ và $x \in B + N(0_X, \frac{3}{2}\beta)$ với $\tilde{x} = \lambda x$. Vì $-\tilde{x} = \lambda(-x) \in \widetilde{C}$ ta nhận được với số $\mu > 0$ nào đó,

$$-\mu x \in B + N(0_X, \frac{3}{2}\beta).$$

Vì vậy, x và $-\mu x$ là các phần tử của tập hợp lồi $B + N(0_X, \frac{3}{2}\beta)$. Điều này kéo theo $0 \in B + N(0_X, \frac{3}{2}\beta)$. Nhưng đây là một mâu thuẫn đến việc chọn $\beta \leq \frac{\delta}{2}$. Vì vậy, $\tilde{C}$ nhọn và với $\hat{C} \subset \tilde{C}$, nón $\hat{C}$ cũng nhọn.

(3) Tiếp theo, chúng ta chọn tùy ý $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - C_X$, với $\hat{x} \neq \bar{x}$ và chúng ta xác định khoảng thứ tự (theo thứ tự bộ phận sinh bởi $\hat{C}$)

$$[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] := \left(\{\hat{x} - \bar{x}\} + \hat{C} \right) \cap \left(\{\bar{x} - \hat{x}\} - \hat{C} \right).$$

Do cách xây dựng $\hat{C}$ và tập hợp U phần tử $\bar{x} - \hat{x}$ thuộc phần trong của $\hat{C}$. Hơn nữa, $\hat{C}$ là đóng và nhọn. Do đó, phiếm hàm Minkowski $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\|x\| := \inf_{\lambda > 0} \left\{ \lambda \mid \frac{1}{\lambda} x \in [\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] \right\}, \forall x \in X$$

là một chuẩn trên X , và

$$[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}. \quad (2.5)$$

(4) Chúng ta chỉ ra một vài tính chất của chuẩn $\|\cdot\|$. Bởi vì 0_X thuộc phần trong tôpô của khoảng thứ tự $[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]$, tồn tại số $\alpha > 0$ với

$$N(0_X, \alpha) \subset [\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}].$$

Từ bao hàm thức trên và (2.5), ta suy ra

$$\|x\| \leq \alpha \|x\|_X, \forall x \in X.$$

Từ bất đẳng thức này ta suy ra

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|_X, \forall x, y \in X.$$

Do đó, chuẩn $\|\cdot\|$ liên tục.

Để thấy rằng chuẩn $\|\cdot\|$ là hàm tăng đơn điệu mạnh trên C_X , ta để ý rằng chuẩn này là hàm tăng đơn điệu (theo $\widehat{C}$) trên $\widehat{C}$, tức là

$$\tilde{x} \in \widehat{C}, x \in (\{\tilde{x}\} - \widehat{C}) \cap \widehat{C} \implies \|x\| \leq \|\tilde{x}\|.$$

Với mọi $\tilde{x} \in C_X \subset \widehat{C}$ và mọi $x \in (\{\tilde{x}\} - (C_X \setminus \{0_X\})) \cap C_X$, ta có với $C_X \setminus \{0_X\} \subset \text{int}(\widehat{C})$,

$$\|x\| < \|\tilde{x}\|.$$

Do đó, chuẩn $\|\cdot\|$ là hàm tăng đơn điệu mạnh trên C_X .

Cuối cùng, chúng ta chứng minh rằng $\bar{x}$ là một nghiệm duy nhất của một bài toán xấp xỉ nào đó. Bởi vì $\bar{x} - \hat{x}$ thuộc bao đóng của hình cầu đơn vị, ta nhận được $\|\bar{x} - \hat{x}\| = 1$. Hơn nữa, chúng ta khẳng định rằng

$$(-\widehat{C}) \cap C = \{0_X\}. \quad (2.6)$$

Do cách xây dựng tập hợp U và lựa chọn $\beta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, với mọi $x \in C \setminus \{0_X\}$, tồn tại số $\eta > 0$ với

$$N(x, \eta) \cap \text{cone}(U) = \emptyset.$$

Từ đó suy ra

$$x \notin \text{cl}(\text{cone}(U)) = \widehat{C}.$$

Do đó,

$$(-\widehat{C}) \cap (C \setminus \{0_X\}) = \emptyset,$$

và đẳng thức tập (2.6) là hiển nhiên. Hơn nữa, với (2.5) và (2.6) chúng ta nhận được

$$[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] \cap (\{\bar{x} - \hat{x}\} + C) = \{\bar{x} - \hat{x}\},$$

và

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|\bar{x} - \hat{x} + x\|, \forall x \in C \setminus \{0_X\}.$$

Bởi vì $S - \{\bar{x}\} \subset C$, ta nhận được

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}.$$

Định lý được chứng minh đầy đủ. $\square$

Trong định lý trước nón thứ tự C_X được giả thiết có một cơ sở compact yếu. Khi đó, C_X nhất thiết không tầm thường, nhọn và đóng. Với các bổ đề sau trình bày các điều kiện đủ cho các giả thiết của Định lý 2.5.

Bổ đề 2.1

Cho $(X, \|\cdot\|_X)$ là không gian Banach phản xạ có thứ tự bộ phận với nón thứ tự đóng không tầm thường C_X . Nón thứ tự C_X có một cơ sở compact yếu nếu và chỉ nếu tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $l \in C_{X^}^\#$ sao cho tập hợp $\{x \in C_X \mid l(x) = 1\}$ bị chặn.*

Chứng minh

Bổ đề này là hệ quả của Bổ đề 3.3[3] (tính liên tục của l có thể nhận được từ Bổ đề 3.15[3]) và giả thiết X là phản xạ. $\square$

Nhắc lại: tập S của không gian tuyến tính thực X là hình sao (starshaped set) tại $\bar{x} \in S$, nếu $\forall x \in S$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} \in S, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Bổ đề 2.2

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận $(X, \|\cdot\|_X)$ với nón thứ tự C_X . Nếu tập hợp $S + C_X$ có hình sao tại $\bar{x}$ nào đó thuộc S và nón tiếp liên $T(S + C_X, \bar{x})$ là đóng yếu, thì nón $(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ cũng đóng yếu.

Chứng minh

Bởi vì tập hợp $S + C_X$ có hình sao tại $\bar{x}$, từ Định lý 3.43[3] ta suy ra

$$S - \{\bar{x}\} \subset S + C_X - \{\bar{x}\} \subset T(S + C_X, \bar{x}).$$

Do đó, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \text{cone}(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\})) &= \text{cone}(T(S + C_X, \bar{x})) \\ &= T(S + C_X, \bar{x}) \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.3

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận $(X, \|\cdot\|_X)$ với nón thứ tự C_X . Nếu tập hợp $S + C_X$ lồi thì với mọi $\bar{x} \in S$, tập hợp nón $\text{cone}(T(S + C_X, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ là đóng yếu.

Chứng minh

Nón tiếp liên $T(S + C_X, \bar{x})$ đóng và lồi vì tính lồi của tập hợp $S + C_X$. Do đó, theo Định lý 3.24[3], nón tiếp liên $T(S + C_X, \bar{x})$ là đóng yếu. Do đó, khẳng định được suy ra từ Bổ đề 2.2. $\square$

Bổ đề (2.3) cho thấy rằng các giả thiết của Định lý 2.5 có thể giảm nhẹ, nếu tập hợp $S + C_X$ lồi.

Định lý 2.6

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận X , trong đó cho tôpô trên X là không gian tôpô đối ngẫu của X^* , và cho C_X là một nón thứ tự đóng trong X với $\text{int}(C_{X^*}) \neq \emptyset$. Nếu tập hợp $S + C_X$ lồi, thì với mọi phần tử cực tiểu chính thường $\bar{x} \in S$ của tập S tồn tại phép hàm tuyến tính liên tục $l \in C_{X^*}^\#$ với tính chất

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

Chứng minh

Nếu $\bar{x} \in S$ là phần tử cực tiểu chính thường của tập S , thì phần tử 0_X là phần tử cực tiểu của nón tiếp liên $T(S + C_X, \bar{x})$, tức là (theo các Bổ đề 3.21.(d)[3] và 1.27.(b)[3])

$$(-C_X) \cap T(S + C_X, \bar{x}) = \{0_X\}. \quad (2.7)$$

Bởi vì tập hợp $S + C_X$ lồi, $\text{cone}(S + C_X - \{\bar{x}\})$ cũng lồi, và theo Bổ đề 1.32[3] bao đóng $\text{cl}(\text{cone}(S + C_X - \{\bar{x}\}))$ cũng lồi. Theo Định lý 3.43[3] và Định lý 3.44[3] chúng ta nhận được

$$T(S + C_X, \bar{x}) = \text{cl}(\text{cone}(S + C_X - \{\bar{x}\}))$$

lồi. Khi đó, theo Định lý 3.22[3], phương trình (2.7) là tương đương với sự tồn tại của một hàm tuyến tính liên tục $l \in X^* \setminus \{0_{X^*}\}$ với

$$l(-c) \leq 0 \leq l(t), \forall c \in C_X, t \in T(S + C_X, \bar{x}) \quad (2.8)$$

và

$$l(c) > 0, \forall c \in C_X \setminus \{0_X\}. \quad (2.9)$$

Từ bất đẳng thức (2.9) ta có $l \in C_{X^*}^\#$. Từ Định lý 3.43[3] ta có

$$S - \{\bar{x}\} \subset S + C_X - \{\bar{x}\} \subset T(S + C_X, \bar{x}).$$

Do đó, từ bất đẳng thức (2.8) ta nhận được

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

□

So sánh Định lý 2.6 với Định lý 2.2 và Định lý 2.3 ta thấy rằng phiếm hàm tuyến tính l trong Định lý 2.6 thuộc tựa phần trong của nón thứ tự liên hợp.

Chúng ta trình bày tiếp 2 điều kiện cần cho cực tiểu yếu.

Định lý 2.7

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng. Nếu $\bar{x} \in S$ là một phần tử cực tiểu yếu của tập hợp S , thì với mọi $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - \text{cor}(C)$ có một nửa chuẩn $\|\cdot\|$ trên X là hàm tăng đơn điệu ngặt trên $\text{cor}(C)$ với tính chất

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S.$$

.

Chứng minh

Lấy $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - \text{cor}(C)$. Như trong chứng minh của Bổ đề 1.45.(a)[3] chúng ta xác định một nửa chuẩn $\|\cdot\|$ trên X qua hàm Minkowski

$$\|x\| = \inf_{\lambda > 0} \left\{ \lambda \mid \frac{1}{\lambda} x \in [\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}] \right\}, \forall x \in X.$$

Khi đó,

$$\text{cor}([\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\},$$

và do $\bar{x}$ là cực tiểu yếu, ta có

$$\{x \in X \mid \|x\| < 1\} \cap (S - \{\hat{x}\}) = \emptyset.$$

Điều này kéo theo

$$1 \leq \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S.$$

$\bar{x} - \hat{x}$ thuộc biên đại số của khoảng thứ tự $[\hat{x} - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}]$.

Do đó, $\|\bar{x} - \hat{x}\| = 1$. Với các lập luận giống như trong Bổ đề 1.45.(a)[3] ta suy ra với mọi $c \in \text{cor}(C)$,

$$c \in \text{cor}([0_X, c]) \implies \|x\| < \|c\|.$$

Điều này có nghĩa là nửa chuẩn $\|\cdot\|$ là hàm tăng đơn điệu ngặt trên $\text{cor}(C)$.

□

Với khái niệm cực tiểu yếu, một kết quả vô hướng hóa đặc biệt được trình bày với giả thiết độ lồi như sau.

Định lý 2.8

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C_X có phần trong đại số không rỗng. Nếu tập hợp $S + C_X$ lồi, thì với mọi phần tử cực tiểu yếu $\bar{x} \in S$ của tập S , tồn tại hàm tuyến tính $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$ có tính chất

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

Chứng minh

Cho $\bar{x} \in S$ là cực tiểu yếu của tập S . Theo Bổ đề 1.3, $\bar{x}$ cũng là cực tiểu yếu của tập $s + C_X$, tức là

$$(\{\bar{x}\} - \text{cor}(C_X)) \cap (S + C_X) = \emptyset.$$

Từ Định lý 3.14[3], ta suy ra tồn tại phiếm hàm tuyến tính $l \in X' \setminus \{0_{X'}\}$ và một số thực α với

$$l(\bar{x} - c_1) \leq \alpha \leq l(s + c_2), \forall c_1 \in C_X, s \in S \text{ và } c_2 \in C_X.$$

Bởi vì C_X là nón, ta nhận được $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$ và suy ra điều phải chứng minh. $\square$

2.2 Điều kiện đủ tối ưu

Mục đích của phần này là nghiên cứu các giả thiết để các điều kiện cần được trình bày trong phần 2.1 cũng là điều kiện đủ tối ưu.

Bổ đề 2.4

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với nón nhọn thứ tự C . Hơn nữa, giả sử $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ là một phiếm hàm, và cho phần tử $\bar{x} \in S$ có tính chất

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in S. \quad (2.10)$$

(a) Nếu hàm f tăng đơn điệu trên S , và nếu $\bar{x}$ xác định duy nhất bởi (2.10),

thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

(b) Nếu hàm f tăng đơn điệu mạnh trên S thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Chứng minh

Để chứng minh cả hai phần chúng ta giả sử rằng $\bar{x}$ không là phần tử cực tiểu của tập hợp S . Khi đó, tồn tại phần tử $x \in (\{\bar{x}\} - C) \cap S$ với $x \neq \bar{x}$. Điều này kéo theo $f(x) \leq f(\bar{x})$. Trong phần (a), điều này mâu thuẫn với tính giải được duy nhất của bài toán tối ưu hóa vô hướng đã xét. Trong phần (b) chúng ta nhận được $f(x) < f(\bar{x})$. Điều đó mâu thuẫn với tính cực tiểu của f tại $\bar{x}$. $\square$

Sau đây, chúng ta áp dụng Bổ đề 2.4 cho một lớp hàm đặc biệt f .

Định lý 2.9

Cho S là một tập con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự nhọn C . Hơn nữa, giả sử $\|\cdot\|$ là một nửa chuẩn trên X , các phần tử $\hat{x} \in X$ và $\bar{x} \in S$ với

$$S \subset \{\hat{x}\} + C, \quad (2.11)$$

và

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|, \quad \forall x \in S.$$

(a) Nếu nửa chuẩn $\|\cdot\|$ tăng đơn điệu trên C và nếu $\bar{x}$ là xấp xỉ tốt nhất duy nhất từ tập hợp S tới $\bar{x}$, thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

(b) Nếu nửa chuẩn $\| \cdot \|$ tăng đơn điệu mạnh trên C , thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Chứng minh

Chúng ta chỉ chứng minh phần (a). Chứng minh phần (b) tương tự. Để có thể áp dụng Bổ đề 2.4.(a) chúng ta chứng minh tính đơn điệu của hàm $\| \cdot - \hat{x} \|$ trên S . Từ (2.11), với mọi $\bar{x} \in S$ chúng ta nhận được

$$(\{\bar{s}\} - C) \cap S \subset (\{\bar{s}\} - C) \cap (\{\hat{x}\} + C) = [\hat{x}, \bar{s}] = \{\hat{x}\} + [0_X, \bar{s} - \hat{x}].$$

Vì vậy, chúng ta có với mọi $x \in (\{\bar{s}\} - C) \cap S$,

$$x - \hat{x} \in [0_X, \bar{s} - \hat{x}].$$

Do đó, do tính đơn điệu của nửa chuẩn $\| \cdot \|$ trên C , ta có

$$\| x - \hat{x} \| \leq \| \bar{s} - \hat{x} \|.$$

Vì vậy, hàm $\| \cdot - \hat{x} \|$ tăng đơn điệu trên S . Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 2.1 và Định lý 2.9.(a) dẫn đến một tính chất đặc trưng của cực tiểu một tập.

Hệ quả 2.1

Cho S là tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự đóng đại số, nhọn C có phần trong đại số không rỗng. Hơn nữa, cho phần tử $\hat{x} \in X$ với $S \subset \{\hat{x}\} + \text{cor}(C)$. Một phần tử $\bar{x} \in S$ là cực tiểu của tập S nếu và chỉ nếu tồn tại một chuẩn $\| \cdot \|$ trên X là hàm tăng đơn điệu trên C với tính chất

$$\| \bar{x} - \hat{x} \| < \| x - \hat{x} \|, \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}.$$

Nếu tập S không có cận dưới $\hat{x}$, tức là bao hàm thức (2.11) không thỏa mãn, các bài toán xấp xỉ vẫn đủ điều kiện để xác định các phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Định lý 2.10

Cho S là tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự nhọn C . Hơn nữa, cho một nửa chuẩn $\| \cdot \|$ trên X và phần tử $\tilde{x} \in S$ sao cho với $\bar{x}$ nào đó thuộc $S \cap (\{\tilde{x}\} - C)$,

$$\| \bar{x} - \tilde{x} \| \geq \| x - \tilde{x} \|, \forall x \in S \cap (\{\tilde{x}\} - C). \quad (2.12)$$

(a) Nếu nửa chuẩn $\| \cdot \|$ tăng đơn điệu trên C , và nếu $\bar{x}$ được xác định duy nhất bởi bất đẳng thức (2.12), thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

(b) Nếu nửa chuẩn $\| \cdot \|$ tăng đơn điệu mạnh trên C , thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Chứng minh

Chúng ta chỉ chứng minh phần (a) của định lý. Phần (b) được chứng minh tương tự. Đầu tiên, chúng ta chứng tỏ rằng hàm $\| \cdot - \tilde{x} \|$ là hàm tăng đơn điệu trên $\{\tilde{x}\} - C$. Lấy bất kỳ $\bar{y} \in \{\tilde{x}\} - C$ và chọn bất kỳ

$$x \in (\{\bar{y}\} - C) \cap (\{\tilde{x}\} - C) = \{\bar{y}\} - C.$$

Khi đó, ta có $\tilde{x} - x \in \{\tilde{x} - \bar{y}\} + C$ và $\tilde{x} - \bar{y} \in \{\tilde{x} - x\} - C$. Nhưng ta cũng có $\tilde{x} - \bar{y} \in C$. Do tính đơn điệu của nửa chuẩn trên C chúng ta nhận được

$$\| \tilde{x} - \bar{y} \| \leq \| \tilde{x} - x \| .$$

Điều này kéo theo

$$- \| \bar{y} - \tilde{x} \| \geq - \| x - \tilde{x} \| .$$

Khi đó, Bổ đề 2.4.(a) áp dụng được, và $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp $S \cap (\{\tilde{x}\} - C)$, tức là

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S \cap (\{\tilde{x}\} - C) = \{\bar{x}\} .$$

Cuối cùng, bao hàm thức $(\{\bar{x}\} - C) \cap S \subset \{\tilde{x}\} - C$ dẫn đến

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S = \{\bar{x}\} ,$$

tức là, $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S . □

Chú ý rằng trong Định lý 2.9 ta phải xác định một “khoảng cách” cực tiểu giữa $\hat{x}$ và tập hợp S , còn trong Định lý 2.10 một “khoảng cách” cực đại giữa $\tilde{x}$ và các phần tử trong tập hợp $S \cap (\{\tilde{x}\} - C)$ phải được xác định.

Định lý 2.11

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự nhọn C_X .

(a) Nếu tồn tại một phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'}$ và một phần tử $\bar{x} \in S$ thỏa mãn

$$l(\bar{x}) < l(x), \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\} ,$$

thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

(b) Nếu tồn tại một phiếm hàm tuyến tính $l \in C_X^\#$, và một phần tử $\bar{x} \in S$ thỏa mãn

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S,$$

thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S .

Chứng minh. Chứng minh suy trực tiếp từ Bổ đề 2.4 và trong Ví dụ 2.1.

□

Chúng ta đã đặc trưng cho các phần tử cực tiểu mạnh của tập hợp trong Định lý 2.4, bây giờ chúng ta nghiên cứu khái niệm cực tiểu chính thường.

Định lý 2.12

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận $(X, \|\cdot\|_X)$ với nón thứ tự nhọn C có phần trong đại số không rỗng. Giả sử $\|\cdot\|$ là chuẩn liên tục trên X , hàm tăng đơn điệu mạnh trên C . Hơn nữa, cho một phần tử $\hat{x} \in X$ thỏa mãn $S \subset \{\hat{x}\} + \text{cor}(C)$. Nếu tồn tại phần tử $\bar{x} \in S$ thỏa mãn tính chất

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S, \quad (2.13)$$

thì $\bar{x}$ là cực tiểu chính thường của tập hợp S .

Chứng minh

Bởi vì chuẩn $\|\cdot\|$ là hàm tăng đơn điệu mạnh trên C và $S - \{\hat{x}\} \subset \text{cor}(C)$, theo Bổ đề 2.4.(b), $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S . Tiếp theo, chúng ta chứng minh rằng 0_X là một phần tử cực tiểu của nón tiếp liên $T(S + C, \bar{x})$.

Bởi vì chuẩn $\| \cdot \|$ tăng đơn điệu mạnh trên C , từ (2.13) ta nhận được

$$\| \bar{x} - \hat{x} \| \leq \| x - \hat{x} \| \leq \| x + c - \hat{x} \|, \forall x \in S, \forall c \in C$$

Do đó

$$\| \bar{x} - \hat{x} \| \leq \| x - \hat{x} \|, \forall x \in S + C. \quad (2.14)$$

Hiển nhiên hàm $\| \cdot - \hat{x} \|$ lồi và liên tục theo tôpô được sinh ra bởi chuẩn $\| \cdot \|_X$. Khi đó theo Định lý 3.48.(a)[3] bất đẳng thức (2.14) kéo theo

$$\| \bar{x} - \hat{x} \| \leq \| \bar{x} - \hat{x} + h \|, \forall h \in T(S + C, \bar{x}). \quad (2.15)$$

Với $T := T(S + C, \bar{x}) \cap (\{\hat{x} - \bar{x}\} + C)$ bất đẳng thức (2.15) cũng đúng với mọi $h \in T$. Theo Bổ đề 2.4.(b), 0_X là một phần tử cực tiểu của tập T .

Bây giờ ta giả sử 0_X không là một phần tử cực tiểu của nón tiếp liên $T(S + C, \bar{x})$. Khi đó, tồn tại $x \in (-C) \cap T(S + C, \bar{x})$ với $x \neq 0_X$. Do bao hàm thức $S \subset \{\hat{x}\} + \text{cor}(C)$, tồn tại $\lambda > 0$ sao cho $\lambda x \in \{\hat{x} - \bar{x}\} + C$. Vì vậy, ta nhận được

$$\lambda x \in (-C) \cap T(S + C, \bar{x}) \cap (\{\hat{x} - \bar{x}\} + C).$$

Do đó, ta có $\lambda x \in (-C) \cap T$. Điều này mâu thuẫn với 0_X là một phần tử cực tiểu của tập hợp T . Do đó, 0_X là một phần tử cực tiểu của nón tiếp liên $T(S + C, \bar{x})$. Định lý được chứng minh. $\square$

Trong Định lý 2.5 ta không cần giả thiết $\text{cor}(C) \neq \emptyset$ và $\hat{x} \in \{\bar{x}\} - \text{cor}(C)$. Giả thiết đó đóng một vai trò quan trọng trong Định lý 2.12. Mặt khác trong Định lý 2.12, không đòi hỏi $\bar{x}$ được xác định duy nhất bởi bất đẳng thức (2.13). Với Định lý 2.5 và Định lý 2.12 ta nhận được một đặc trưng của cực tiểu chính thường.

Hệ quả 2.2

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận $(X, \|\cdot\|_X)$ với nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng và một cơ sở compact yếu. Hơn nữa, cho phần tử $\hat{x} \in X$ thỏa mãn $S \subset \{\hat{x}\} + \text{cor}(C)$, và với $\bar{x}$ nào đó thuộc S giả sử tập $\text{cone}(T(S + C, \bar{x}) \cup (S - \{\bar{x}\}))$ là đóng yếu. Khi đó, $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu chính thường của tập hợp S nếu và chỉ nếu tồn tại một chuẩn liên tục $\|\cdot\|$ trên X tăng đơn điệu mạnh trên C và có tính chất

$$1 = \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S \setminus \{\bar{x}\}.$$

Trong hệ quả trước chúng ta giả thiết rằng nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng và một cơ sở compact yếu. Khi đó, theo Bổ đề 1.45[3], tồn tại một chuẩn $\|\cdot\|$ trên X để cho không gian định chuẩn thực $(X, \|\cdot\|)$ là phản xạ. Điều này cho thấy các giả thiết của hệ quả 2.2 là rất chặt.

Một điều kiện đủ khác cho cực tiểu chính thường được phát biểu như sau

Định lý 2.13

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự nhọn C_X có tựa phần trong không rỗng $C_{X^*}^\#$ của nón thứ tự đối ngẫu tôpô. Nếu tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $l \in C_{X^*}^\#$ và một phần tử $\bar{x} \in S$ thỏa mãn

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S, \quad (2.16)$$

thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu chính thường của tập hợp S .

Chứng minh

Theo Định lý 2.11.(b), $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu của tập hợp S . Lấy bất kỳ tiếp tuyến $h \in T(S + C_X, \bar{x})$. Khi đó, tồn tại dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ các phần tử của $S + C_X$ và một dãy $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ các số thực dương với

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ và } h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (x_n - \bar{x}).$$

Phiếm hàm tuyến tính l liên tục và, do đó, ta nhận được $l(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(x_n)$. Bởi vì hàm l cũng tăng đơn điệu trên X , bất đẳng thức (2.16) kéo theo

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S + C_X.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} l(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} l(\lambda_n (x_n - \bar{x})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (l(x_n) - l(\bar{x})) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Do đó, ta thu được

$$0 \leq l(h), \forall h \in T(S + C_X, \bar{x}).$$

Vì vậy, theo Định lý 2.11.(b), 0_X là một phần tử cực tiểu của nón tiếp liên $T(S + C_X, \bar{x})$. Định lý được chứng minh. $\square$

Với Định lý 2.6 và Định lý 2.13 chúng ta có thể phát biểu đặc trưng sau đây của cực tiểu chính thường với một giả thiết độ lồi.

Hệ quả 2.3

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận X , trong đó tôpô trên X là đối ngẫu tôpô của X^ , và cho C_X là nón*

thứ tự đóng trong X với $\text{int}(C_{X^*}) \neq \emptyset$. Hơn nữa, giả sử tập $S + C_X$ lồi. Một phần tử $\bar{x} \in S$ là cực tiểu chính thường của tập hợp S nếu và chỉ nếu tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $l \in C_{X^*}^\#$ thỏa mãn

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

Chú ý rằng theo Bổ đề 3.21.(d)[3] ta có $\text{int}(C_{X^*}) = C_{X^*}^\#$ với các giả thiết của Hệ quả 2.3.

Định nghĩa 2.2

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính tôpô có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C_X có tựa phần trong không rỗng $C_{X^*}^\#$ của nón thứ tự đối ngẫu tôpô. Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là một phần tử hầu cực tiểu chính thường (*almost properly minimal element*) của tập S , nếu tồn tại phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X^*}^\#$ với tính chất

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

Nhắc lại rằng, theo Định lý Krein – Rutman 3.38[3], trong không gian định chuẩn tách có thứ tự bộ phận $(X, \|\cdot\|)$ với nón thứ tự nhọn và đóng C_X , tập hợp $C_{X^*}^\#$ không rỗng. Rõ ràng là với các giả thiết của Hệ quả 2.3 các khái niệm “cực tiểu chính thường” và “hầu cực tiểu chính thường” trùng nhau. Hơn nữa, theo Định lý 2.11.(b), mọi phần tử hầu cực tiểu chính thường cũng là một phần tử cực tiểu.

Bây giờ, chúng ta trình bày về khái niệm cực tiểu yếu.

Bổ đề 2.5

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng. Hơn nữa, cho $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ là một phiếm hàm tăng đơn điệu ngặt trên S . Nếu tồn tại phần tử $\bar{x} \in S$ thỏa mãn

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in S,$$

thì $\bar{x}$ là cực tiểu yếu của tập hợp S .

Chứng minh

Nếu $\bar{x} \in S$ không là cực tiểu yếu của tập hợp S , thì ta có $f(x) < f(\bar{x})$ với x nào đó thuộc $(\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S$. Điều đó mâu thuẫn với tính cực tiểu của f tại $\bar{x}$. $\square$

Định lý 2.14

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng. Hơn nữa, giả sử $\|\cdot\|$ là một nửa chuẩn trên X tăng đơn điệu ngặt trên C , và cho một phần tử $\hat{x} \in X$ sao cho $S \subset \{\hat{x}\} + C$. Nếu tồn tại phần tử $\bar{x} \in S$ thỏa mãn

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S,$$

thì $\bar{x}$ là cực tiểu yếu của tập hợp S .

Chứng minh. Chứng minh định lý này tương tự như chứng minh Định lý 2.9. $\square$

Với định lý 2.7 và Định lý 2.14 chúng ta nhận được đặc trưng sau đây của các phần tử cực tiểu của một tập hợp.

Hệ quả 2.4

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng. Hơn nữa, cho một phần tử $\hat{x} \in X$ thỏa mãn $S \subset \{\hat{x}\} + \text{cor}(C)$. Một phần tử $\bar{x} \in S$ là cực tiểu yếu của tập hợp S nếu và chỉ nếu tồn tại một nửa chuẩn $\|\cdot\|$ tăng đơn điệu ngặt trên X thỏa mãn

$$\|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|, \forall x \in S.$$

So sánh với Hệ quả 2.1 về các phần tử cực tiểu, Hệ quả 2.4 không đòi hỏi $\bar{x}$ là một xấp xỉ tốt nhất duy nhất từ $\hat{x}$ đến S . Trong kết quả sau đây, chúng ta không cần giả thiết rằng cận dưới "ngặt" $\hat{x}$ tồn tại.

Định lý 2.15

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C có phần trong đại số không rỗng. Hơn nữa, cho một phần tử $\tilde{x} \in S$ và một nửa chuẩn $\|\cdot\|$ trên X tăng đơn điệu ngặt trên C . Nếu tồn tại phần tử $\bar{x} \in S$ có tính chất

$$\|\bar{x} - \tilde{x}\| \geq \|x - \tilde{x}\|, \forall x \in S \cap (\{\tilde{x}\} - C),$$

thì $\bar{x}$ là cực tiểu yếu của tập hợp S .

Chúng minh Định lý 2.15 tương tự như Định lý 2.10. Từ Bổ đề 2.5, ta có ngay Định lý sau đây.

Định lý 2.16

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C_X có phần trong đại số không rỗng. Nếu với $\bar{x}$ nào đó thuộc S , tồn tại phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$ có tính chất

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S,$$

thì $\bar{x}$ là một phần tử cực tiểu yếu của tập hợp S .

Trong trường hợp $S + C_X$ lồi ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.5[3]

Cho S là một tập hợp con không rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C_X có phần trong đại số không rỗng. Hơn nữa, giả sử tập hợp $S + C_X$ lồi. Một phần tử $\bar{x} \in S$ là cực tiểu yếu của tập hợp S nếu và chỉ nếu tồn tại phiếm hàm tuyến tính $l \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}$ có tính chất

$$l(\bar{x}) \leq l(x), \forall x \in S.$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày lý thuyết tối ưu hóa một tập bao gồm:

- Các khái niệm nghiệm hữu hiệu: cực tiểu, cực tiểu mạnh, cực tiểu chính thường, cực tiểu yếu và các ví dụ minh họa;
- Các khái niệm cực đại, cực đại mạnh, cực đại chính thường, cực đại yếu;
- Một số tính chất của các nghiệm hữu hiệu;
- Các điều kiện cần cho cực tiểu, cực tiểu mạnh, cực tiểu chính thường và cực tiểu yếu của một tập;
- Các điều kiện đủ để một phần tử là cực tiểu, cực tiểu chính thường và cực tiểu yếu của một tập.

Tối ưu hóa một tập là đề tài đã và đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] B.D. Craven (1981), Vector - valued optimization, in: Schaible,S., Ziemba, W.T. (eds.), Generalized concavity in optimization and economics (Academic Press, New York), pp. 661 - 687.
- [2] M.I. Henig (1982), Proper efficiency with respect to cones, J. Optim. Theory Appl. 36, 387 - 407.
- [3] J. Jahn (2011), Vector optimization, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [4] J. Jahn (2007), Introduction to the theory of nonlinear optimization, Springer, Berlin.
- [5] D.T. Luc (1989), Theory of vector optimization, Spinger, Berlin.