

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THÚY QUỲNH

TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THÚY QUỲNH

TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số : 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mục lục	i
LỜI NÓI ĐẦU	1
1 BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH	4
1.1 NỘI DUNG BÀI TOÁN VÀ TÍNH CHẤT	4
1.1.1 NỘI DUNG BÀI TOÁN	4
1.1.2 TÍNH CHẤT BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH	6
1.2 ĐỐI NGẪU CỦA QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN	8
1.2.1 CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU	8
1.2.2 CÁC QUAN HỆ ĐỐI NGẪU	9
1.3 PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH	12
1.3.1 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH GỐC	12
1.3.2 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU	19
2 BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN	24
2.1 KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU	24
2.1.1 VÍ DỤ VỀ TRÒ CHƠI MA TRẬN	24
2.1.2 TRÒ CHƠI MA TRẬN	25
2.1.3 HÀM THU HOẠCH CỦA P_1	26
2.2 ĐIỂM YÊN NGỰA VÀ CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU	28
2.2.1 ĐIỂM YÊN NGỰA	28
2.2.2 CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU	29

2.2.3	TRÒ CHƠI ĐỐI XỨNG	31
2.3	QUAN HỆ GIỮA TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH	32
2.3.1	ĐƯA TRÒ CHƠI MA TRẬN VỀ BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH	32
2.3.2	ĐƯA CẶP BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU VỀ TRÒ CHƠI MA TRẬN	36
2.4	TRÒ CHƠI POKER	36
2.4.1	QUI TẮC CHƠI VÀ THANH TOÁN	37
2.4.2	CHIẾN LƯỢC ĐƠN	38
2.4.3	MA TRẬN TRẢ TIỀN	39
	Kết luận	42
	Tài liệu tham khảo	44

LỜI NÓI ĐẦU

Quy hoạch tuyến tính là bài toán tối ưu đơn giản nhất. Đó là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm tuyến tính với các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Quy hoạch tuyến tính có nhiều ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết và thực tiễn, nói riêng trong lý thuyết trò chơi. Phương pháp đơn hình là phương pháp quen thuộc, có hiệu quả để giải bài toán quy hoạch tuyến tính và các bài toán đưa được về quy hoạch tuyến tính.

Trong bài toán quy hoạch tuyến tính nói riêng và trong bài toán tối ưu nói chung, chỉ có một chủ thể (cá nhân, tập thể hay nhà nước, ...). Có một hàm mục tiêu (biểu thị lợi ích hay chi phí) duy nhất đại diện cho chủ thể đó. Mục đích của chủ thể này là tìm một giải pháp trong tập chiến lược hay tập phương án có thể, sao cho giải pháp đó là tốt nhất cho chủ thể theo mục tiêu đã đề ra (hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất). Trong thực tế, một hoạt động hay một vấn đề nào đó thường có nhiều chủ thể (đối tác) cùng tham gia. Mỗi chủ thể đều có một hàm mục tiêu và tập chiến lược riêng của mình và mỗi chủ thể đều muốn tìm một chiến lược hay phương án tối ưu cho mình. Một phương án tối ưu cho tất cả các đối tác như vậy thường không tồn tại, vì lợi ích của các đối tác nhiều khi đối kháng nhau. Do đó, một phương án tốt cho đối tác này có thể lại không tốt cho đối tác kia. Từ đó, hình thành nên khái niệm *tối ưu Pareto* và khái niệm *cân bằng Nash*. Về đại thể, có thể nói đó là trạng thái mà mỗi đối tác cần tuân thủ thực hiện, nếu không muốn lợi ích của mình bị thua thiệt hơn. Sau đó đã hình thành một lý thuyết toán học, có tên gọi *lý thuyết*

trò chơi nhằm nghiên cứu và tìm ra giải pháp có lợi nhất cho mỗi đối tác (người tham gia chơi) trong các tình huống tương tự. Trong thời đại hiện nay, do các hoạt động và lợi ích đều ảnh hưởng qua lại và liên hệ mật thiết với nhau, nên lý thuyết trò chơi, đặc biệt là các trò chơi vi phân và trò chơi kinh tế, rất được quan tâm nghiên cứu.

Trò chơi ma trận là một dạng trò chơi đơn giản nhất. Đó là trò chơi đối kháng, hai người với tổng bằng 0, nghĩa là số tiền thắng cuộc của người này bằng số tiền thua cuộc của người kia và ngược lại. Trò chơi ma trận có mối liên hệ chặt chẽ với quy hoạch tuyến tính. Có thể quy việc tìm chiến lược chơi tối ưu của trò chơi ma trận về việc tìm nghiệm của một cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau và ngược lại, mỗi cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau lại tương đương với một trò chơi ma trận.

Luận văn đề cập tới trò chơi ma trận, trình bày những khái niệm cơ bản về trò chơi ma trận, phân tích mối quan hệ giữa trò chơi ma trận với quy hoạch tuyến tính và nêu phương pháp tìm chiến lược tối ưu của trò chơi ma trận thông qua việc giải số bài toán quy hoạch tuyến tính gốc hay đối ngẫu. Việc làm này có lợi cho việc đi sâu tìm hiểu sau này về lý thuyết trò chơi nói chung và những ứng dụng thực tiễn của lý thuyết toán học này nói riêng.

Nội dung luận văn được chia thành hai chương.

Chương 1 với tiêu đề "**Bài toán quy hoạch tuyến tính**" giới thiệu nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính, khái niệm bài toán đối ngẫu và các quan hệ đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính. Phương pháp đơn hình quen thuộc, bao gồm thuật toán đơn hình gốc và thuật toán đơn hình đối ngẫu, cũng được nhắc lại ở chương này. Các thuật toán đơn hình sẽ được dùng đến ở chương sau để tìm chiến lược tối ưu của hai người chơi trong trò chơi ma trận đề cập tới ở chương sau.

Chương 2 với tiêu đề "**Bài toán trò chơi ma trận**" trình bày các

khái niệm cơ bản về bài toán trò chơi ma trận như qui tắc chơi, cách trả tiền, hàm thắng cuộc, điểm yên ngựa, chiến lược đơn, chiến lược hỗn hợp, chiến lược tối ưu, v.v ... Phân tích mối quan hệ giữa trò chơi ma trận và quy hoạch tuyến tính. Việc tìm chiến lược tối ưu của mỗi người chơi trong trò chơi ma trận đưa được về việc tìm nghiệm của một cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau và ngược lại, mỗi cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau lại có thể mô tả tương đương như một trò chơi ma trận. Để làm ví dụ minh họa cho trò chơi ma trận, cuối chương xét trò chơi Poker, một loại trò chơi giải trí trên mạng. Trong trường hợp đơn giản, trò chơi này có thể mô tả như một trò chơi ma trận với các chiến lược đơn và ma trận trả tiền hoàn toàn xác định.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn này mới chỉ đề cập tới những nội dung cơ bản của bài toán trò chơi ma trận trong mối quan hệ với qui hoạch tuyến tính, chưa đi sâu vào các chi tiết. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn GS-TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học-Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tập thể bạn bè cùng gia đình đã quan tâm giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2012.

Người thực hiện

Đỗ Thị Thúy Quỳnh

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này sẽ trình bày các kiến thức cơ bản về bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán đối ngẫu và các quan hệ đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính, cũng như phương pháp đơn hình (thuật toán đơn hình gốc và đơn hình đối ngẫu) giải quy hoạch tuyến tính. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1 NỘI DUNG BÀI TOÁN VÀ TÍNH CHẤT

1.1.1 NỘI DUNG BÀI TOÁN

A. Dạng tổng quát

Bài toán này có dạng: Tìm các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn điều kiện

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \equiv \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = m_1 + m_2 + 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n_1, x_j \leq 0, j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 \leq n, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.1) \\ (2.2) \\ (2.3) \\ (2.4) \end{array}$$

trong đó a_{ij}, b_i, c_j là các hằng số thực cho trước.

Trong bài toán trên, f gọi là *hàm mục tiêu*, mỗi hệ thức ở (2.1)-(2.4) gọi là một *ràng buộc*. Mỗi ràng buộc (2.1)-(2.3) gọi là một *ràng buộc chính* liên kết nhiều biến với nhau (dạng *đẳng thức* hay *bất đẳng thức*), mỗi ràng buộc $x_j \geq 0$ hay $x_j \leq 0$ gọi là một *ràng buộc về dấu*.

Điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ thỏa mãn mọi ràng buộc gọi là một *điểm chấp nhận được*, hay một *phương án*. Tập hợp tất cả các phương án, ký hiệu D , gọi là *tập ràng buộc* hay *miền chấp nhận được*. Một phương án đạt cực tiểu của hàm mục tiêu gọi là một *phương án tối ưu* hay một *lời giải* của bài toán đã cho.

Bài toán có ít nhất một phương án tối ưu gọi là bài toán *có lời giải*. Bài toán không có phương án (tập ràng buộc rỗng $D = \emptyset$) hoặc có phương án nhưng không có phương án tối ưu, do hàm mục tiêu giảm vô hạn (bài toán tìm min) hoặc tăng vô hạn (bài toán tìm max), gọi là bài toán *không có lời giải*.

B. Dạng chính tắc:

$$\begin{cases} f(x) \equiv \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

(đặc điểm của bài toán này là ràng buộc chính chỉ là đẳng thức và mọi biến đều không âm).

C. Dạng chuẩn tắc:

$$\begin{cases} f(x) \equiv \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

(đặc điểm của bài toán này là ràng buộc chính chỉ gồm các bất đẳng thức $\geq$ đối với bài toán min hoặc $\leq$ đối với bài toán max và mọi biến đều không âm).

Để viết bài toán gọn hơn, ta dùng các kí hiệu véc tơ và ma trận như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(A là ma trận $m \times n$ gồm các hệ số ở vế trái ràng buộc chính, A_j là véc tơ cột thứ j của A tương ứng với biến x_j , b là véc tơ các hệ số ở vế phải ràng buộc chính, c là véc tơ các hệ số ở hàm mục tiêu, x là véc tơ các ẩn số, 0 là véc tơ không).

Với các kí hiệu trên, bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc có dạng :

$$\min \{f(x) = \langle c, x \rangle : Ax = b, x \geq 0\}$$

$$\text{hay } \max \{f(x) = \langle c, x \rangle : Ax = b, x \geq 0\}$$

($\langle c, x \rangle$ là tích vô hướng của hai véc tơ c và x)

Bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn tắc có dạng :

$$\min \{f(x) = \langle c, x \rangle : Ax \geq b, x \geq 0\}$$

$$\text{hay } \max \{f(x) = \langle c, x \rangle : Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

1.1.2 TÍNH CHẤT BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Tính chất 1.1. Tập hợp D các phương án của bài toán qui hoạch tuyến tính (dạng bất kỳ) là một tập lồi đa diện.

Tính chất 1.2. (về sự tồn tại lời giải của bài toán qui hoạch tuyến tính). Nếu một qui hoạch tuyến tính có ít nhất một phương án và hàm mục tiêu bị chặn dưới trong miền ràng buộc (đối với bài toán min) thì bài toán chắc chắn có phương án tối ưu.

Tính chất 1.3. Nếu x^0 là một phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính (dạng bất kỳ) và nếu x^1, x^2 ($x^1 \neq x^2$) là hai phương án thỏa mãn $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, 0 < \lambda < 1$, thì x^1, x^2 cũng là các phương án tối ưu.

Một phương án $x \in D$ mà đồng thời là đỉnh của D gọi là một *phương án cực biên*, nghĩa là x không thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi của hai phương án bất kỳ nào khác của D . Nói cách khác, hễ $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ với $0 < \lambda < 1$ và $x^1, x^2 \in D$ thì phải có $x = x^1 = x^2$.

Sau đây ta sẽ tập trung nghiên cứu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc với giả thiết $m \leq n$ và ma trận A có hạng $= m$.

Tính chất 1.4. Để một phương án $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc là phương án cực biên thì cần và đủ là các véc tơ cột A_j của ma trận A ứng với các thành phần $x_j^0 > 0$ là độc lập tuyến tính.

Hệ quả 1.1. Số phương án cực biên của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.

Hệ quả 1.2. Số thành phần dương trong mỗi phương án cực biên của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc tối đa bằng m (m là số hàng của A)

Người ta phân ra hai loại phương án cực biên: Nếu phương án cực biên có số thành phần dương đúng bằng m , nó được gọi là phương án cực biên *không suy biến*. Trái lại, nó được gọi là phương án cực biên *suy biến*.

Tính chất 1.5. Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có ít nhất một phương án thì nó cũng có phương án cực biên (tập ràng buộc D có đỉnh).

Tính chất 1.6. Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu.

Các tính chất trên cho phép tìm phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc trong số các phương án cực biên của bài toán (số này là hữu hạn)

1.2 ĐỐI NGẪU CỦA QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN

1.2.1 CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Cho một qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn, ký hiệu (P):

$$(P) \quad \begin{aligned} f(x) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\geq b_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Đối ngẫu của (P) là qui hoạch tuyến tính, ký hiệu (Q), có dạng:

$$(Q) \quad \begin{aligned} g(y) &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \max, \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m &\leq c_j, j = 1, 2, \dots, n \\ y_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

ở đây $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ là véc tơ biến cần tìm. Ta nhận xét rằng

a) Các ràng buộc chính trong qui hoạch ban đầu (mà ta sẽ gọi là *qui hoạch gốc* hay *bài toán gốc*) tương ứng một - một với các biến trong bài toán đối ngẫu (mà ta sẽ gọi là các biến đối ngẫu), trong khi các biến trong qui hoạch gốc (biến gốc) sẽ tương ứng một - một với các ràng buộc chính trong bài toán đối ngẫu.

b) Các hệ số ở vế phải ràng buộc chính trong bài toán gốc trở thành các hệ số mục tiêu trong bài toán đối ngẫu, còn các hệ số mục tiêu trong bài toán gốc lại trở thành các hệ số ở vế phải ràng buộc chính trong bài toán đối ngẫu.

c) Bài toán gốc tìm min thì bài toán đối ngẫu tìm max (và ngược lại).

d) Cả hai bài toán (P) và (Q) đều có dạng chuẩn: mọi ràng buộc chính đều là các bất đẳng thức ($\geq$ đối với bài toán min, $\leq$ đối với bài toán max) và mọi biến đều không âm.

Dùng kí hiệu véc tơ và ma trận, ta có thể viết

Bài toán gốc:

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax \geq b,$$

$$x \geq 0.$$

Bài toán đối ngẫu:

$$g(y) = \langle b, y \rangle \rightarrow \max,$$

$$A^T y \leq c,$$

$$y \geq 0.$$

(A^T là ma trận chuyển vị của A, $\langle a, b \rangle$ là tích vô hướng của hai véc tơ a và b).

Ví dụ 1: Đối ngẫu của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$f(x) = 20x_1 + 15x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 60, \\ x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 2x_2 \geq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

là bài toán

$$g(y) = 60y_1 + 40y_2 + 60y_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 \leq 20, \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 15, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

1.2.2 CÁC QUAN HỆ ĐỐI NGÃU

Các kết quả đối ngẫu nhận được đối với cặp bài toán đối ngẫu ở dạng chuẩn cũng đúng cho một cặp bài toán đối ngẫu dạng bất kỳ.

Tính chất 1.7: (Đối ngẫu yếu). Nếu x là một phương án bất kỳ của bài toán gốc (P) và y là một phương án bất kỳ của bài toán đối ngẫu (Q) thì

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \geq g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

Thật vậy, do x là phương án của bài toán (P) và y là phương án của bài toán (Q) nên $Ax \geq b, A^Ty \leq c, x \geq 0, y \geq 0$. Từ đó ta có

$$f(x) = \langle c, x \rangle \geq \langle A^Ty, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \geq \langle y, b \rangle = g(y).$$

Từ tính chất đối ngẫu yếu trên đây ta suy ra ngay các hệ quả sau.

Hệ quả 1.3: a) Giá trị mục tiêu của một phương án đối ngẫu bất kỳ là một cận dưới cho giá trị mục tiêu đối với mọi phương án của bài toán gốc.

b) Nếu hàm mục tiêu của bài toán gốc không bị chặn dưới trong miền ràng buộc của nó thì bài toán đối ngẫu không có bất kỳ một phương án nào

c) Nếu hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu không bị chặn trên trong miền ràng buộc của nó thì bài toán gốc không có bất kỳ một phương án nào.

d) Nếu x^* là phương án của bài toán gốc, y^* là phương án của bài toán đối ngẫu và $f(x^*) = g(y^*)$ thì x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc và y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Thật vậy các kết luận a)- c) là hiển nhiên.

Với bất kỳ phương án x của (P) và phương án y của (Q) theo tính chất 1.7 ta có

$$f(x) \geq g(y^*) = f(x^*) \geq g(y),$$

Các bất đẳng thức này chứng tỏ x^* là phương án tối ưu của (P) (bài toán tìm min) và y^* là phương án tối ưu của (Q) (bài toán tìm max).

Tính chất 1.8. (Đối ngẫu mạnh). Nếu một qui hoạch có phương án tối ưu thì qui hoạch đối ngẫu của nó cũng có phương án tối ưu và giá trị

tối ưu của chúng là bằng nhau.

Các kết quả nêu trên cho thấy mối quan hệ sau đây giữa hai bài toán gốc và đối ngẫu

Tính chất 1.9. (Định lý tồn tại) Đối với mỗi cặp qui hoạch đối ngẫu nhau chỉ có thể xảy ra một trong ba khả năng loại trừ nhau sau đây.

- a) Cả hai qui hoạch đều không có phương án.
- b) Cả hai qui hoạch đều có phương án. Khi đó, cả hai qui hoạch đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của hai hàm mục tiêu là bằng nhau.
- c) Một qui hoạch có phương án và qui hoạch kia không có phương án. Khi đó qui hoạch có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn trên tập ràng buộc.

Mối liên hệ giữa hai bài toán đối ngẫu còn thể hiện ở các sự kiện cơ bản sau.

Tính chất 1.10: (Định lý yếu về độ lệch bù). *Một cặp phương án x, y của hai qui hoạch đối ngẫu (P) và (Q) là những phương án tối ưu khi và chỉ khi chúng nghiệm đúng các hệ thức :*

$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right) = 0 \quad \text{với mọi } i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

$$x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \right) = 0 \quad \text{với mọi } j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

Hệ thức (1) có nghĩa là

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > b_i \Rightarrow y_i = 0 \text{ và } y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m.$$

Hệ thức (2) có nghĩa tương tự

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i < c_j \Rightarrow x_j = 0 \text{ và } x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Các đẳng thức (1) và (2) không loại trừ khả năng là với một i nào đó ta có đồng thời $y_i = 0$ và $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$. Tuy nhiên định lý sau cho thấy khả năng này không thể xảy ra đối với tất cả các cặp phương án tối ưu đối ngẫu.

Tính chất 1.11: (Định lý mạnh về độ lệch bù). Nếu cặp bài toán đối

ngẫu (P) và (Q) có phương án thì tồn tại một cặp phương án tối ưu x^* , y^* nghiệm đúng

$$y^* + (Ax^* - b) > 0 \text{ và } x^* + (c - A^T y^*) > 0.$$

1.3 PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

1.3.1 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH GỐC

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} \langle c, x \rangle \rightarrow \min \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

trong đó A là ma trận $m \times n$, $b \in R^m$, c và $x \in R^n$. Với $m \leq n$ và A có hạng = m .

A. Cách lập bảng đơn hình ban đầu

Ta lập một bảng gồm $n+3$ cột: cột *Biến cơ sở* (ghi tên m biến cơ sở đối với phương án cực biên đang xét), cột *Hệ số C_B* (ghi hệ số mục tiêu của các biến cơ sở) và cột *Phương án* (ghi giá trị các biến cơ sở). Tiếp theo là n cột ứng với n biến của bài toán $x_1, x_2, \dots, x_n$, phía dưới tên biến ghi hệ số mục tiêu của nó. Trong cột x_k ghi các hệ số khai triển của véc tơ A_k theo các véc tơ cơ sở đang xét (véc tơ Z_k). Ngoài dòng tiêu đề đã nêu, mỗi bảng có $m+1$ dòng: m dòng đầu tương ứng với m ràng buộc chính trong bài toán. Dòng cuối cùng, gọi là dòng mục tiêu, lần lượt ghi giá trị hàm mục tiêu (phần tử $z_{m+1,0}$) và ghi các ước lượng Δ_k của biến x_k tương ứng, $k = 1, 2, \dots, n$ (các phần tử $z_{m+1,k}$, $k \geq 1$).

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	...	...	x_n
			c_1	c_2	c_3	...	...	c_n
x_{k_1}	c_{k_1}	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	...	...	z_{1n}
x_{k_2}	c_{k_2}	z_{20}	z_{21}	z_{22}	z_{23}	...	...	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
x_{k_m}	c_{k_m}	z_{m0}	z_{m1}	z_{m2}	z_{m3}	...	...	z_{mn}
Bảng 1		$z_{m+1,0}$	$z_{m+1,1}$	$z_{m+1,2}$	$z_{m+1,3}$	...	...	$z_{m+1,n}$

B. Cách lập các bảng đơn hình kế tiếp

Để xây dựng các bảng đơn hình kế tiếp ta lần lượt thực hiện các việc a)- c) như sau:

a) Tìm cột quay. Nếu dòng mục tiêu không có phần tử dương ở các cột khác với cột phương án, nghĩa là $z_{m+1,k} = \Delta_k \leq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$, thì phương án hiện có là tối ưu, trái lại chọn cột x_s với

$z_{m+1,s} = \max_{1 \leq k \leq n} z_{m+1,k} > 0$ làm cột quay (Đưa biến x_s vào cơ sở mới).

b) Tìm dòng quay. Nếu cột quay không có phần tử dương ở các dòng khác với dòng mục tiêu thì hàm mục tiêu sẽ giảm vô hạn và bài toán không có lời giải.

Trái lại, chia các phần tử trong cột phương án cho các phần tử dương tương ứng trong cột quay. Dòng ứng với tỉ số nhỏ nhất được chọn làm dòng quay. Phần tử ở dòng quay, cột quay gọi là *phần tử quay*, phần tử này luôn dương và thường được khoanh tròn hoặc để trong ô được tô bóng mờ. Cụ thể, dòng quay là dòng r thỏa mãn $\theta_0 = \min \left\{ \frac{z_{i0}}{z_{is}} : z_{is} > 0 \right\} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}}$. Biến cơ sở ở dòng này bị loại khỏi cơ sở cũ, chẳng hạn đó là biến x_{k_r} .

c) Biến đổi bảng đơn hình.

+ Đổi cột Biến cơ sở: biến cơ sở mới là x_s thay cho biến cơ sở cũ là x_{k_r}

ở dòng r .

+ Đổi cột Hệ số C_B tương ứng: hệ số mục tiêu c_s thay cho hệ số c_{k_r} ở dòng r .

+ Xác lập các véc tơ đơn vị : ghi số 1 vào ô có cùng tên biến trên dòng và cột của nó, ghi số 0 vào các ô còn lại của cột vừa ghi số 1 (Cột ứng với biến cơ sở là cột đơn vị).

+ Biến đổi dòng quay (công thức $z'_{rk} = z_{rk}/z_{rs}$. ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) .

Dòng mới= dòng cũ/ phần tử quay,

nghĩa là chia mỗi phần tử ở dòng quay cho phần tử quay ($z_{rs} > 0$). Kết quả nhận được gọi là dòng chính (số 1 xuất hiện ở vị trí của z_{rs} cũ).

+ Biến đổi các dòng khác theo quy tắc hình chữ nhật (công thức $z'_{ik} = z_{ik} - (z_{rk}/z_{rs}) z_{is}$, $i \neq r$ ($i = 1, 2, \dots, m, m+1; k = 0, 1, 2, \dots, n$) .):

Dòng mới = dòng cũ tương ứng - phần tử của nó trên cột quay $\times$ dòng chính,

nghĩa là	Cột $\neq$ cột quay	Cột quay
Dòng $\neq$ dòng quay:	a	b
Dòng quay:	c	d (phần tử quay)

$$a' = a - b \times \frac{c}{d} = a - b \times c'$$

Nếu trong bảng đơn hình mới vẫn còn $z_{m+1,k} = \Delta_k > 0$, ta lại tiếp tục biến đổi bảng cho đến khi nhận được bảng với mọi $z_{m+1,k} = \Delta_k \leq 0$ (tối ưu) hoặc phát hiện cột quay không chứa phần tử dương: $z_{is} \leq 0$, $\forall i$ (bài toán không có lời giải). Sau một số hữu hạn lần biến đổi bảng ta phải dừng ở một trong hai tình huống trên.

C. Ví dụ 1.1: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc sau đây

$$f = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min,$$

với điều kiện

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2, \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12, \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Cho $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ ta được phương án cực biên ban đầu $x^1 = (2; 12; 9; 0; 0; 0)$ với trị mục tiêu $f_1 = -10$. Cơ sở của x^1 là $J = \{1, 2, 3\}$. Các biến cơ sở là x_1, x_2, x_3 . Các biến phi cơ sở là x_4, x_5, x_6 . Các véc tơ cơ sở A_1, A_2, A_3 là các véc tơ đơn vị, nên A_4 chính là véc tơ các hệ số khai triển của nó theo các véc tơ cơ sở A_1, A_2, A_3 . Cũng vậy đối với A_5 và A_6 .

Bảng đơn hình ban đầu có dạng sau.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	-1	0	-2	2	-3
x_1	1	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	12	0	1	0	1	0	1
x_3	0	9	0	0	1	2	4	3
Bảng 1		-10	0	0	0	2	-1	1

Trong dòng mục tiêu (dòng cuối) còn phần tử dương ở cột x_4, x_6 nên phương án x^1 ở bảng này chưa tối ưu. Biến đưa vào cơ sở x_4 (ứng với $\Delta_4 = 2$ lớn nhất), biến loại khỏi cơ sở là x_1 (ứng với tỉ số nhỏ nhất $\theta_0 = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{12}{-1}, \frac{9}{0} \right\} = 2$). Phần tử quay là $z_{14} = 1$. Biến đổi bảng 1 theo qui tắc đã nêu ta nhận được bảng 2.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	-1	0	-2	2	-3
x_4	-2	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	10	-1	1	0	0	-1	2
x_3	0	5	-2	0	1	0	2	5
Bảng 2		-14	-2	0	0	0	-3	3

Trong dòng cuối của bảng này còn phần tử dương ở cột x_6 nên phương án ở bảng này chưa tối ưu. Biến đưa vào cơ sở x_6 (ứng với $\Delta_6 = 3$ lớn nhất), biến loại khỏi cơ sở là x_3 (ứng với tỉ số nhỏ nhất $\theta_0 = \min \left\{ \frac{10}{2}, \frac{5}{5} \right\} = 1$). Phần tử quay là $z_{36} = 5$. Biến đổi bảng 2 ta nhận được bảng 3. Trong bảng này mọi $\Delta_k \leq 0$, nên phương án $x^* = (0; 8; 0; 3; 0; 1)$ là tối ưu với $f_{\min} = f(x^*) = -17$.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	-1	0	-2	2	-3
x_4	-2	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0
x_2	-1	8	-1/5	1	-2/5	0	-9/5	0
x_6	-3	1	-2/5	0	1/5	0	2/5	1
Bảng 3		-17	-4/5	0	-3/5	0	-21/5	0

Ví dụ 1.2: Ví dụ sau cho thấy bài toán không có phương án tối ưu

$$f = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min,$$

$$\text{với các điều kiện} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 7, \\ -4x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -5x_2 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{array} \right.$$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^1 = (7, 0, 0, 12, 0, 10)$ với cơ sở là các véc tơ cột đơn vị A_1, A_4, A_6 , tức là $J = \{1, 4, 6\}$. Lập các bảng đơn hình.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			0	1	-3	0	2	0
x_1	0	7	1	1	-1	0	1	0
x_4	0	12	0	-4	4	1	0	0
x_6	0	10	0	-5	3	0	1	1
Bảng 1		0	0	-1	3	0	-2	0
x_1	0	10	1	0	0	1/4	1	0
x_4	-3	3	0	-1	1	1/4	0	0
x_6	0	1	0	-2	0	-3/4	1	1
Bảng 2		-9	0	2	0	-3/4	-2	0

Ở bảng 1 có $\Delta_3 = 3 > 0$ (cột x_3 là cột quay) nên ta đưa véc tơ A_3 vào cơ sở và loại A_4 khỏi cơ sở (dòng x_4 là dòng quay). Trong bảng 2 có $\Delta_2 = 2 > 0$ (cột x_2 là cột quay), nhưng mọi phần tử $z_{i2} \leq 0$ ($i = 1, 2, 3$) nên bài toán trên không có phương án tối ưu, vì hàm mục tiêu của bài toán giảm vô hạn trong miền ràng buộc của nó.

Ví dụ 1.3: Dùng phương pháp đơn hình giải quy hoạch gốc cho ở ví dụ 1.1, từ đó suy ra lời giải của bài toán đối ngẫu tương ứng với nó.

$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2,$$

$$x_2 + x_4 + x_6 = 12,$$

$$x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Xuất phát từ phương án cực biên ban đầu $x^1 = (2, 12, 9, 0, 0, 0)$ với cơ sở tương ứng là ma trận đơn vị. Quá trình giải được ghi lại trong bảng đơn hình dưới đây (các Bảng 1- 3).

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	-1	0	-2	2	-3
x_1	1	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	12	0	1	0	1	0	1
x_3	0	9	0	0	1	2	4	3
Bảng 1		-10	0	0	0	2	-1	1
x_4	-2	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	10	-1	1	0	0	-1	2
x_3	0	5	-2	0	1	0	2	5
Bảng 2		-14	-2	0	0	0	-3	3
x_4	-2	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0
x_2	-1	8	-1/5	1	-2/5	0	-9/5	0
x_6	-3	1	-2/5	0	1/5	0	2/5	1
Bảng 3		-17	-4/5	0	-3/5	0	-21/5	0

Để tìm lời giải (phương án tối ưu) của bài toán đối ngẫu ta áp dụng quy tắc sau:

Qui tắc A. Nếu cơ sở ban đầu là ma trận đơn vị thì để tìm lời giải của bài toán đối ngẫu, ta chọn ra từ bảng đơn hình cuối cùng các Δ_j của các cột biến x_j mà chúng là các biến cơ sở ở bước lặp đầu tiên (bảng 1), rồi cộng thêm với hệ số c_j tương ứng.

Lời giải của bài toán gốc là $x^* = (0, 8, 0, 3, 0, 1)$ với $f_{\min} = -17$. Các biến cơ sở ở bước lặp đầu tiên (Bảng 1) là x_1, x_2, x_3 . Các véc tơ A_1, A_2, A_3 tương ứng đều là các véc tơ đơn vị.

Vì thế, lời giải của bài toán đối ngẫu $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ được xác định

như sau:

$$\begin{cases} y_1^* = \Delta_1 + c_1 = -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}, \\ y_2^* = \Delta_2 + c_2 = 0 - 1 = -1, \\ y_3^* = \Delta_3 + c_3 = -\frac{3}{5} + 0 = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Vậy, $y^* = (\frac{1}{5}, -1, -\frac{3}{5})$ và $g_{\max} = 2 \times \frac{1}{5} + 12 \times (-1) + 9 \times (-\frac{3}{5}) = -17 = f_{\min}$.

1.3.2 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

A. Các bước tiến hành thuật toán đơn hình đối ngẫu :

Bước 1: Lập bảng đơn hình đối ngẫu ban đầu.

Bước 2: Kiểm tra tối ưu: Nếu mọi phần tử trong cột giả phương án đều không âm thì dừng quá trình giải: ta nhận được phương án tối ưu của bài toán đã cho. Trái lại chuyển sang bước 3.

Bước 3: Chọn dòng quay: đó là dòng đầu tiên từ trên xuống mà nó chứa phần tử âm nhỏ nhất trong cột giả phương án.

Bước 4: Chọn cột quay: Chia các phần tử trên dòng ước lượng (cuối mỗi bảng) cho các phần tử tương ứng trên dòng quay, nhưng chỉ chia cho những phần tử âm trên dòng quay. Cột quay là cột đầu tiên từ trái sang phải ứng với số nhỏ nhất trong các tỉ số đó.

Bước 5: Biến đổi bảng đơn hình hoàn toàn như trong phương pháp đơn hình thường (thay đổi biến cơ sở, đổi hệ số mục tiêu tương ứng, xác lập các véc tơ đơn vị, biến đổi dòng quay và cuối cùng là biến đổi các dòng khác theo qui tắc hình chữ nhật).

Trở lại thực hiện bước 2 theo mô tả ở trên.

Chú ý: Khi tìm cột quay, nếu mọi phần tử trên dòng quay đều không âm thì đó là dấu hiệu cho thấy bài toán ban đầu không có phương án.

Ví dụ 1.4: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn sau đây.

$$\begin{cases} f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 160, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 140, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc và đổi dấu hai vế các ràng buộc đẳng thức:

$$\begin{cases} f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \rightarrow \min, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -160, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = -140, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{cases}$$

Bài toán có $n = 5$ biến và $m = 2$ ràng buộc chính, nên mỗi bảng đơn hình gồm $n+3 = 8$ cột và $m+1 = 3$ dòng. Cũng như trong phương pháp đơn hình bình thường, bảng đầu tiên ghi lại các hệ số trong bài toán, chỉ khác là cột "Phương án" bây giờ được thay bằng cột "Giả phương án", vì trong thành phần của "Phương án" xuất phát có các phần tử âm. Bảng này tương ứng với giả phương án ban đầu $x^1 = (0, 0, 0, -160, -140)$, $f_1 = f(x^1) = 0$.

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			15	12	10	0	0
x_4	0	-160	-3	-4	-2	1	0
x_5	0	-140	-1	-2	-3	0	1
Bảng 1		0	-15	-12	-10	0	0

Trong bảng 1, cột giả phương án có phần tử âm, nên ta chưa nhận được phương án tối ưu. Ta chọn dòng x_4 (tương ứng với số âm nhỏ nhất là -160)

làm dòng quay. Cột quay là cột x_2 (tương ứng với số nhỏ nhất trong ba tỉ số $:\frac{-15}{-3} = 5, \frac{-12}{-4} = 3, \frac{-10}{-2} = 5$). Phần tử quay bằng -4. Biến đổi bảng này theo quy tắc đơn hình nhận được bảng 2.

Trong bảng 2, cột giả phương án vẫn còn phần tử âm. Ta chọn dòng x_5 làm dòng quay và chọn cột x_3 làm cột quay. Phần tử quay bằng -2. Biến đổi bảng 2 ta nhận được bảng 3. Trong bảng này, mọi phần tử trong cột giả phương án đều dương, ta có phương án tối ưu: $x^* = (0, 25, 30)$ với $f_{\min} = 600$.

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			15	12	10	0	0
x_2	12	40	3/4	1	1/2	-1/4	0
x_5	0	-60	1/2	0	-2	-1/2	1
Bảng 2		480	-6	0	-4	-3	0
x_2	12	25	7/8	1	0	-3/8	1/4
x_3	10	30	-1/4	0	1	1/4	-1/2
Bảng 3		600	-7	0	0	-2	-2

Từ các kết quả tính toán nêu trên, ta cũng có thể tìm được lời giải của bài toán đối ngẫu nhờ vận dụng quy tắc sau đây (tương tự như quy tắc A):

Quy tắc B. Nếu cơ sở ban đầu là ma trận đơn vị thì để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu, ta chọn ra từ bảng đơn hình đối ngẫu cuối cùng các Δ_j của các cột biến x_j mà chúng là các biến cơ sở ở bước lập đầu tiên (bảng 1), rồi cộng thêm với hệ số c_j tương ứng. Sau đó, đổi dấu tổng tìm được nếu biến cơ sở tương ứng ban đầu nhận giá trị âm.

Với ví dụ đang xét ta thấy các bước cơ sở ở bước lập đầu tiên (bảng 1) là x_4, x_5 (A_4, A_5 là các véc tơ đơn vị). Lúc đầu các biến này đều nhận giá trị âm, nên phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ được xác

định như sau:

$$\begin{cases} y_1^* = -\Delta_4 - c_4 = 2 - 0 = 2, \\ y_2^* = -\Delta_5 - c_5 = 2 - 0 = 2, \end{cases}$$

Vậy, $y^* = (2, 2)$ và $g_{\max} = 160 \times 2 + 140 \times 2 = 600 = f_{\min}$.

Ví dụ sau đây cho thấy bài toán gốc không có phương án.

Ví dụ 1.5. Dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 \quad \quad - 2x_5 \quad \quad = -2, \\ \quad \quad 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \quad \quad = -4, \\ \quad \quad \quad 2x_3 \quad \quad - x_5 + x_6 \quad \quad = 2, \\ \quad \quad x_2 + x_3 \quad \quad + 4x_5 \quad + x_7 = 6, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7. \end{cases}$$

Xuất phát từ giả phương án $x^0 = (2, 0, 0, -4, 0, 2, 6)$. Quá trình như sau.

Biến cơ sở	C_B	Giải phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			2	-4	1	-1	2	0	0
x_1	2	-2	1	-2	0	0	-2	0	0
x_4	-1	-4	0	4	1	1	-1	0	0
x_6	0	2	0	0	2	0	-1	1	0
x_7	0	6	0	1	1	0	4	0	1
Bảng 1		0	0	-4	-2	0	-5	0	0
x_1	2	6	1	-10	-2	-2	0	0	0
x_5	2	4	0	-4	-1	-1	1	0	0
x_6	0	6	0	-4	1	-1	0	1	0
x_7	0	-10	0	17	5	4	0	0	1
Bảng 2		20	0	-24	-7	-5	0	0	0

Ở bảng 2, mọi phần tử trên dòng quay x_7 không âm nên bài toán gốc không có phương án.

Trong các ví dụ trên ta đã may mắn có được các giải phương án thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu. Nói chung, khó có thể tìm được những điểm xuất phát như thế cho đơn hình đối ngẫu. Ta sẽ không đi sâu vào vấn đề này.

Tóm lại, chương này đã đề cập tới nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính. Bài toán đối ngẫu và lý thuyết đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính cũng được trình bày ngắn gọn (có thể xem chứng minh chi tiết ở các tài liệu [1] và [2]). Các thuật toán đơn hình gốc và đơn hình đối ngẫu, cần dùng để tìm nghiệm của trò chơi ma trận xét ở chương sau, cũng đã được nhắc lại ở chương này với các ví dụ số minh họa cụ thể.

Chương 2

BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN

Chương này sẽ trình bày các khái niệm cơ bản về trò chơi ma trận, mối quan hệ giữa trò chơi ma trận với quy hoạch tuyến tính và vấn đề tìm nghiệm của trò chơi ma trận. Cuối chương xét trò chơi Poker, một trò chơi giải trí trên mạng, xem như một ví dụ thực tế về trò chơi ma trận. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [3] và [4].

2.1 KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

2.1.1 VÍ DỤ VỀ TRÒ CHƠI MA TRẬN

+ Quy tắc chơi: Hai người chơi P_1 và P_2 . Mỗi người đều có một viên bi trắng (T) và một viên bi xanh (X). Khi có hiệu lệnh (sau tiếng hô 1, 2, 3 chẳng hạn) mỗi người lấy ra một viên bi và đặt nó lên bàn.

+ Cách trả tiền: P_2 trả cho P_1 1 ngàn nếu hai viên bi chọn ra có cùng màu hoặc -1 ngàn (nghĩa là P_1 trả P_2 1 ngàn) nếu hai viên bi chọn ra có màu khác nhau. Trong trường hợp đầu ta nói P_1 thắng, P_2 thua; còn trong trường hợp sau thì ngược lại P_2 thắng, P_1 thua. Sau đó trò chơi lại có thể được tiếp tục.

Như vậy, số tiền trả 1 hay -1 biểu thị số *thu nhập* hay số *tổn thất* của P_1 . Do P_1 mong muốn làm cực đại số thắng cuộc của mình, nên ta gọi P_1 là *người chơi max*, còn P_2 mong muốn làm cực tiểu số thắng cuộc của đối

thủ P_1 (tức là làm cực tiểu số tổn thất của mình) nên ta gọi P_2 là *người chơi min*.

+ Ma trận của trò chơi:

	T	X
T	1	-1
X	-1	1

Ta có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ta gọi A là *ma trận thu hoạch* (*ma trận thắng thua* hay *ma trận trả tiền* của P_1).

Các ví dụ tương tự: hai người chơi, mỗi người chọn một mặt sấp (S) hay ngửa (N) của một đồng xu, chọn một quân bài màu đen hay đỏ từ một cỗ bài (tam cúc, tú lơ khơ...).

Các ví dụ nêu trên là một dạng của *trò chơi ma trận* hay còn gọi là *trò chơi đối kháng hai đấu thủ với tổng 0* (số thu hoạch của người này bằng số tổn thất của người kia).

2.1.2 TRÒ CHƠI MA TRẬN

Định nghĩa 2.1: *Trò chơi ma trận* là trò chơi được xác định bởi ma trận m hàng, n cột $A = (a_{ij})$ với a_{ij} là các số thực tùy ý (cho trước). Ma trận A gọi là *ma trận trả tiền*. Phần tử a_{ij} biểu thị số tiền P_2 trả cho P_1 nếu P_1 chọn cách chơi thứ i (hàng i) và P_2 chọn cách chơi thứ j (cột j). Ma trận A còn gọi là *ma trận thu hoạch* của P_1 ($-A$ là ma trận thu hoạch của P_2).

Ma trận A được xác định như sau: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$.

Định nghĩa 2.2. Với mỗi $i = 1, 2, \dots, m$, *chiến lược đơn* thứ i của P_1 , kí hiệu $\mathbf{i}$, là véc tơ m - chiều $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ với $x_i=1, x_k=0$ ($k \neq i$), nghĩa là X là véc tơ đơn vị thứ i trong R^m . Nó biểu thị việc P_1 chọn hàng i của ma trận A .

Tương tự, *chiến lược đơn* thứ j ($j=1,2,\dots,n$) của P_2 là véc tơ n - chiều $Y=(y_1, y_2,\dots, y_n)$ với $y_j = 1, y_k = 0$ ($k \neq j$), nghĩa là Y là véc tơ đơn vị thứ j trong R^n . Ký hiệu chiến lược đơn thứ j của P_2 là $\mathbf{j}$. Nó biểu thị việc P_2 chọn cột j của ma trận A .

Trong các trò chơi ma trận, thông tin về cách chơi của mỗi đấu thủ cần được giữ kín, đồng thời số tiền thắng hay thua từ một cuộc chơi (gồm nhiều lần chơi) được tính như là kết quả của các lần chơi. Bây giờ ở mỗi lần chơi, các đấu thủ không chọn cố định một chiến lược đơn (hàng, cột) cụ thể nào mà sẽ lựa chọn phối hợp các hàng (cột) theo một tỉ lệ (xác suất) nào đó. Vì thế, ta đi đến khái niệm *chiến lược hỗn hợp*.

Định nghĩa 2.3. Chiến lược hỗn hợp của P_1 là véc tơ m - chiều $X = (x_1, x_2,\dots, x_m)$ với $x_i \geq 0$ ($i=1, 2,\dots, m$) và $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$, trong đó x_i biểu thị tỉ lệ hay xác suất để P_1 chọn cách chơi thứ i (hàng i). Tương tự, chiến lược hỗn hợp của P_2 là véc tơ n - chiều $Y = (y_1, y_2,\dots, y_n)$ với $y_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) và $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$, trong đó y_j biểu thị tỉ lệ hay xác suất để P_2 chọn cách chơi thứ j (cột j).

Trong trò chơi chọn bi nêu trên, chiến lược hỗn hợp của P_1 có thể là một trong các véc tơ : $(1, 0); (0, 1); (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. P_2 cũng có thể dùng các chiến lược hỗn hợp tương tự.

2.1.3 HÀM THU HOẠCH CỦA P_1

Khi P_1 chọn chiến lược hỗn hợp $X=(x_1, x_2,\dots, x_m)$ và P_2 chọn chiến lược hỗn hợp $Y = (y_1, y_2,\dots, y_n)$ thì phần thắng của P_1 (cũng là phần thua của P_2) bằng bao nhiêu?

Nếu P_2 chọn chiến lược đơn thứ nhất thì kỳ vọng thắng cuộc của P_1 là :

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m,$$

Nếu P_2 chọn chiến lược đơn thứ hai thì kỳ vọng thắng cuộc của P_1 là :

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m, v.v\dots$$

Nếu P_2 chọn chiến lược đơn thứ n thì kỳ vọng thắng cuộc của P_1 là :

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m,$$

Do P_2 chọn chiến lược hỗn hợp $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ nên kỳ vọng thắng cuộc của P_1 là :

$$y_1 \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i + y_2 \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i + \dots + y_n \sum_{i=1}^m a_{in}x_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right) y_j$$

.

Định nghĩa 2.4. Ta gọi *hàm thu hoạch* hay *số thu hoạch* của P_1 là số thực

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right) y_j$$

.

trong đó $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ và $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là chiến lược hỗn hợp bất kỳ của P_1 và P_2 tương ứng.

Ví dụ 2.1: Xét trò chơi cho bởi ma trận chữ nhật ($m = 3, n = 4$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Xét cặp chiến lược $X = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$ và $Y = (\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$. Tính số thu hoạch của P_1 ?

P_2 chọn cột 1: kỳ vọng thắng của P_1 là: $1 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$.

P_2 chọn cột 2: kỳ vọng thắng của P_1 là: $3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$.

P_2 chọn cột 3: kỳ vọng thắng của P_1 là: $3 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 2$.

P_2 chọn cột 4: kỳ vọng thắng của P_1 là: $2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Vậy số thu hoạch của P_1 là $E(X, Y) = (2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 2 + 2\frac{1}{4}) \times \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

2.2 ĐIỂM YÊN NGỰA VÀ CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU

2.2.1 ĐIỂM YÊN NGỰA

Xét trò chơi cho bởi ma trận trả tiền $A = (a_{ij})$. Nếu P_1 chọn chiến lược đơn thứ i thì P_1 tin chắc sẽ nhận được số thu hoạch ít nhất là $\min_j a_{ij}$ (min lấy theo từng hàng.)

Ví dụ 2.2, trong trò chơi với ma trận trả tiền

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

thì $\min_j a_{1j} = a_{11} = 1$, $\min_j a_{2j} = a_{23} = 0$, $\min_j a_{3j} = a_{32} = -1$.

Do P_1 có thể chọn chiến lược đơn bất kỳ nên đương nhiên P_1 sẽ chọn chiến lược đơn làm cực đại số thắng cuộc, nghĩa là P_1 sẽ chọn i sao cho $\min_j a_{ij}$ là lớn nhất. Bằng cách chọn chiến lược đơn này, P_1 bảo đảm thắng ít nhất là $\max_i \min_j a_{ij}$. Với ma trận trả tiền ở trên thì $\max_i \min_j a_{ij} = a_{11} = 1$.

Tương tự, nếu P_2 chọn chiến lược đơn j , P_2 tin chắc số chi phí phải trả (tổn thất) nhiều nhất là $\max_i a_{ij}$ (max lấy theo từng cột). Như vậy, P_2 sẽ chọn chiến lược đơn làm cực tiểu số tổn thất của mình. Bằng cách chọn chiến lược đơn này, P_2 có thể giữ cho P_1 thắng nhiều nhất là $\min_j \max_i a_{ij}$. Với ma trận trả tiền ở đây thì

$$\max_i a_{i1} = a_{21} = 5, \max_i a_{i2} = a_{22} = 4, \max_i a_{i3} = a_{13} = 3, \max_i a_{i4} = a_{34} = 4$$

và

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{13} = 3$$

Trong ví dụ này ta thấy $\max_i \min_j a_{ij} = 1 < \min_j \max_i a_{ij} = 3$

Định nghĩa 2.5. Nếu ma trận trả tiền A thỏa mãn điều kiện:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{hk} = v,$$

thì ta nói rằng trò chơi ma trận có *điểm yên ngựa* và điểm yên ngựa là phần tử a_{hk} .

Khi trò chơi có điểm yên ngựa a_{hk} , P_1 sẽ thắng ít nhất v nếu P_1 chọn chiến lược đơn h , và P_2 sẽ thua nhiều nhất v nếu P_2 chọn chiến lược đơn k . Khi đó, h là chiến lược tối ưu cho P_1 và k là chiến lược tối ưu cho P_2 . Thật vậy, nếu P_1 chọn chiến lược đơn khác h trong khi P_2 chọn k thì số thu hoạch của P_1 không tăng mà còn có thể giảm. Cũng vậy, nếu P_2 không chọn chiến lược đơn k trong khi P_1 chọn h thì số tiền P_2 phải trả cho P_1 không giảm mà còn có thể tăng. Trò chơi với ma trận trả tiền

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

có điểm yên ngựa là $a_{32} = 3$ và cặp chiến lược đơn tối ưu là $X^* = (0 \ 0 \ 1)$ và $Y^* = (0 \ 1 \ 0)$, bởi vì

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{32} = 3.$$

Ta nhận xét rằng a_{32} là phần tử vừa nhỏ nhất trên hàng 3, vừa lớn nhất trên cột 2. Bất cứ điểm yên ngựa nào cũng có tính chất này. Nếu a_{hk} là điểm yên ngựa thì h là chiến lược đơn tối ưu của P_1 và k là chiến lược đơn tối ưu của P_2 và $a_{hk} = v$.

Tuy nhiên không phải trò chơi ma trận nào cũng có điểm yên ngựa, nghĩa là có chiến lược đơn tối ưu. Vì thế ta cần đến khái niệm *chiến lược hỗn hợp tối ưu*.

2.2.2 CHIẾN LƯỢC TỐI ƯU

Định nghĩa 2.6. Nghiệm của trò chơi ma trận là cặp chiến lược hỗn hợp $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$, $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ và số thực v sao cho:

- a) $E(\bar{X}, \bar{Y}) = v$ và
- b) $E(\bar{X}, j) \geq v$ với mọi chiến lược đơn $j = 1, 2, \dots, n$,
- c) $E(i, \bar{Y}) \leq v$ với mọi chiến lược đơn $i = 1, 2, \dots, m$.

$\bar{X}, \bar{Y}$ gọi là chiến lược tối ưu của P_1 và P_2 tương ứng. Số v gọi là *giá* của trò chơi.

Định nghĩa trên cho thấy nếu P_1 chọn cách chơi theo tỉ lệ cho bởi chiến lược tối ưu $\bar{X}$ thì dù P_2 chơi như thế nào, P_1 vẫn luôn thắng ít nhất là v . Cũng vậy, nếu P_2 chọn cách chơi theo tỉ lệ cho bởi chiến lược tối ưu $\bar{Y}$ thì dù P_1 chơi như thế nào, P_2 chỉ thua nhiều nhất là v . Giá v có thể dương, âm hay bằng 0. Với trò chơi chọn bi nêu ở phần mở đầu thì giá của trò chơi $v = 0$ và các chiến lược tối ưu là $\bar{X} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ và $\bar{Y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Định lý sau đây cho thấy mọi trò chơi ma trận đều có nghiệm.

Định lý minimax. Đối với mọi trò chơi ma trận bao giờ cũng tồn tại

$\max_X \min_Y E(X, Y), \min_Y \max_X E(X, Y)$ và hai giá trị này bằng nhau.

Nói cách khác, mọi trò chơi ma trận đều có nghiệm $[\bar{X}, \bar{Y}, v]$ sao cho:

$E(X, \bar{Y}) \leq E(\bar{X}, \bar{Y}) = v \leq E(\bar{X}, Y)$ với mọi cặp chiến lược hỗn hợp X, Y .

Như vậy, với trò chơi ma trận bất kỳ mỗi đối thủ đều có chiến lược tối ưu $\bar{X}, \bar{Y}$ sao cho số tiền thắng nhỏ nhất của P_1 bằng số tiền thua lớn nhất của P_2 và bằng v .

Nhận xét. Nếu ma trận trả tiền A có phần tử âm thì ta có thể thay nó bằng ma trận $A_\alpha = [a_{ij} + \alpha] > 0$ (mọi phần tử của A_α đều dương) bằng cách chọn số α thích hợp, chẳng hạn $\alpha > -\min \{a_{ij} : a_{ij} < 0\}$. Có thể chứng minh rằng các chiến lược tối ưu trong cả hai trò chơi (với ma trận trả tiền A và A_α) là như nhau, đồng thời $v_\alpha = v + \alpha > 0$.

2.2.3 TRÒ CHƠI ĐỐI XỨNG

Định nghĩa 2.7. Trò chơi *đối xứng* là trò chơi có ma trận trả tiền A thỏa mãn:

$$a) A \text{ vuông, cấp } n; \quad b) a_{ii} = 0, \forall i; \quad c) a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j.$$

Ma trận A với các tính chất a) - c) như trên gọi là ma trận *đối xứng lệch*.

Ví dụ 2.3: Trò chơi dân gian "One- Two- Three" (đọc chệch là Oẳn tù tì) là một trò chơi ma trận với tập chiến lược đơn giống nhau cho cả hai đấu thủ: ở mỗi lần chơi, mỗi người chơi giơ tay ra hiệu chọn "Giấy", "Búa" hoặc "Kéo" với qui ước: Giấy thắng Búa, Búa thắng Kéo, Kéo thắng Giấy. Ma trận trả tiền có dạng:

	Giấy	Búa	Kéo
Giấy	0	1	-1
Búa	-1	0	1
Kéo	1	-1	0

Tính chất 2.1. Nếu $X = Y$ thì $E(X, Y) = 0$, nghĩa là nếu cả hai người chơi sử dụng cùng một chiến lược như nhau thì kì vọng thắng cuộc của họ bằng 0.

+ Giả sử chiến lược tối ưu của hai người chơi lần lượt là $\bar{X}$ và $\bar{Y}$. Khi đó, $\bar{X} = \bar{Y}$ và $v = E(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$, nghĩa là giá của trò chơi đối xứng bằng 0.

Chiến lược tối ưu cho trò chơi "Giấy-Búa-Kéo" là $\bar{X} = \bar{Y} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ với giá $v = 0$

2.3 QUAN HỆ GIỮA TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.3.1 ĐƯA TRÒ CHƠI MA TRẬN VỀ BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Xét trò chơi ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Theo các định nghĩa 2.4 và 2.6 thì bài toán của P_1 là tìm véc tơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ và số v sao cho $v \rightarrow \max$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột 1),}$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột 2),}$$

.....

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v \text{ (cộng theo cột n),}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

Ngược lại, bài toán của P_2 là tìm véc tơ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ và số v sao cho $v \rightarrow \min$

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng 1),}$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng 2),}$$

.....

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq v \text{ (cộng theo hàng m),}$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết mọi $a_{ij} > 0$ và vì thế $v > 0$. Bằng cách đặt

$$x'_i = x_i/v \text{ (} i = 1, 2, \dots, m \text{) và } y'_j = y_j/v \text{ (} j = 1, 2, \dots, n \text{).}$$

Ta có: $x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m = 1/v$ và $y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n = 1/v$.

Ta thấy v là số tiền mà P_1 nhận được và v cũng là số tiền mà P_2 phải trả, nên P_1 tìm cách làm cực đại v hay cực tiểu $1/v$; còn P_2 tìm cách làm cực tiểu v hay cực đại $1/v$. Vì thế ta có cặp bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu:

Bài toán của P_1 : $f_1 = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m \rightarrow \min,$

$$a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \dots + a_{m1}x'_m \geq 1 \text{ (cột 1),}$$

$$a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{m2}x'_m \geq 1 \text{ (cột 2),}$$

.....

$$a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \dots + a_{mn}x'_m \geq 1 \text{ (cột n),}$$

$$x'_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

Bài toán của P_2 : $f_2 = y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n \rightarrow \max,$

$$a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + \dots + a_{1n}y'_n \leq 1 \text{ (hàng 1),}$$

$$a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2 + \dots + a_{2n}y'_n \leq 1 \text{ (hàng 2),}$$

.....

$$a_{m1}y'_1 + a_{m2}y'_2 + \dots + a_{mn}y'_n \leq 1 \text{ (hàng m),}$$

$$y'_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Nhận xét. + Hai bài toán trên lập thành một cặp qui hoạch đối ngẫu nhau. Hơn nữa, rõ ràng cả hai bài toán đều có phương án, nên theo định lý tồn tại (tính chất 1.9) cả hai đều có phương án tối ưu (lời giải) và

$$\min_{x'} \sum_{i=1}^m x'_i = \max_{y'} \sum_{j=1}^n y'_j = \frac{1}{v}$$

(số tiền thắng nhỏ nhất của P_1 bằng số tiền thua lớn nhất của P_2).

+ Chiến lược tối ưu của P_1, P_2 tương ứng là:

$$x_i = v \times x'_i, i = 1, 2, \dots, m \text{ và } y_j = v \times y'_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Ví dụ 2.4. Tìm nghiệm của trò chơi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta thấy $-\min\{a_{ij} : a_{ij} < 0\} = 2$, vì thế ta chọn $\alpha = 3$ và thay A bởi ma trận

$$A_\alpha = [a_{ij} + \alpha] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} > 0$$

Mọi phần tử của A_α đều dương nên $v_\alpha > 0$. Cặp bài toán đối ngẫu của P_1 và P_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min, \\ 5x'_1 + 4x'_2 \geq 1, \\ 4x'_1 + 3x'_2 \geq 1, \\ 3x'_1 + 6x'_2 \geq 1, \\ x'_1 + 5x'_2 \geq 1, \\ x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2 = y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4 \rightarrow \max, \\ 5y'_1 + 4y'_2 + 3y'_3 + y'_4 \leq 1, \\ 4y'_1 + 3y'_2 + 6y'_3 + 5y'_4 \leq 1, \\ y'_1 \geq 0, y'_2 \geq 0, y'_3 \geq 0, y'_4 \geq 0. \end{array} \right.$$

Giải:Đưa bài toán gốc về dạng chính tắc bằng cách thêm 4 ẩn phụ $x'_3, x'_4, x'_5, x'_6 \geq 0$, sau đó đổi dấu các ràng buộc đẳng thức ta được bài toán:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = x'_1 + x'_2 \rightarrow \min, \\ -5x'_1 - 4x'_2 + x'_3 = -1, \\ -4x'_1 - 3x'_2 + x'_4 = -1, \\ -3x'_1 - 6x'_2 + x'_5 = -1, \\ -x'_1 - 5x'_2 + x'_6 = -1, \\ x'_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{array} \right.$$

Giả phương án ban đầu $x^1 = (0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1)$. Cơ sở đối ngẫu $J = \{3, 4, 5, 6\}$. Quá trình giải bài toán theo thuật toán đơn hình đối ngẫu được ghi ở 4 bảng sau:

Biến cơ sở	Hệ số m.tiêu	Giả Ph.án	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x'_5	x'_6
			1	1	0	0	0	0
x'_3	0	-1	-5	-4	1	0	0	0
x'_4	0	-1	-4	-3	0	1	0	0
x'_5	0	-1	-3	-6	0	0	1	0
x'_6	0	-1	-1	-5	0	0	0	1
Bảng 1		0	-1↑	-1	0	0	0	0
x'_1	1	1/5	1	4/5	-1/5	0	0	0
x'_4	0	-1/5	0	1/5	-4/5	1	0	0
x'_5	0	-2/5	0	-18/5	-3/5	0	1	0
x'_6	0	-4/5	0	-21/5	-1/5	0	0	1
Bảng 2		1/5	0	-1/5↑	0	0	0	0
x'_1	1	1/21	1	0	-5/21	0	0	4/21
x'_4	0	-5/21	0	0	-17/21	1	0	1/21
x'_5	0	6/21	0	0	-9/21	0	1	-18/21
x'_2	1	4/21	0	1	1/21	0	0	-5/21
Bảng 3		5/21	0	0	-4/21↑	0	0	-1/21
x'_1	1	2/17	1	0	0	-5/17	0	3/17
x'_3	0	5/17	0	0	1	-21/17	0	-1/17
x'_5	0	7/17	0	0	0	-9/17	1	-15/17
x'_2	1	3/17	0	1	0	1/17	0	-4/17
Bảng 4		5/17	0	0	0	-4/17	0	-1/17

Ở bảng 4 mọi phần tử trong cột Giả phương án đều dương nên lời giải của bài toán là

$$f_{1\min} = f_{2\max} = 5/17 = 1/v_\alpha \Rightarrow v_\alpha = 17/5, x'_1 = 2/17, x'_2 = 3/17$$

Áp dụng qui tắc B ta nhận được:

$$y'_1 = -\Delta_3 - c_3 = 0, y'_2 = -\Delta_4 - c_4 = 4/17,$$

$$y'_1 = -\Delta_5 - c_5 = 0, \quad y'_4 = -\Delta_6 - c_6 = 1/17$$

Từ đó suy ra nghiệm của trò chơi đã cho là:

$$+ \text{Chiến lược tối ưu của } P_1: x^* = v_\alpha x' = \frac{17}{5} \left(\frac{2}{17}, \frac{3}{17} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right),$$

$$+ \text{Chiến lược tối ưu của } P_2: y^* = v_\alpha y' = \frac{17}{5} \left(0, \frac{4}{17}, 0, \frac{1}{17} \right) = \left(0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5} \right),$$

$$+ \text{Giá của trò chơi: } v^* = v_\alpha - \alpha = \frac{17}{5} - 3 = \frac{2}{5}$$

2.3.2 ĐƯA CẶP BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU VỀ TRÒ CHƠI MA TRẬN

Xét cặp bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu dạng chuẩn:

$$\begin{cases} f = \langle c, x \rangle \rightarrow \min, \\ Ax \geq b, x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g = \langle b, y \rangle \rightarrow \max, \\ A^T y \leq c, y \geq 0. \end{cases}$$

Cặp bài toán trên tương đương với trò chơi ma trận (kích thước $(n+m+1) \times (n+m+1)$):

$$A_{t,d} = \begin{pmatrix} 0 & A^T & -c \\ -A & 0 & b \\ -c^T & -b^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Đây là một trò chơi đối xứng. Vì thế chiến lược tối ưu là như nhau đối với cả hai đấu thủ và giá của trò chơi bằng 0. Giả sử $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{z})$ là nghiệm của trò chơi nói trên. Nếu $\bar{z} > 0$ thì $X = \bar{X}/\bar{z}$, $Y = \bar{Y}/\bar{z}$ là lời giải của cặp bài toán qui hoạch tuyến tính đối ngẫu đã cho. Trường hợp $\bar{z} = 0$ chứng tỏ cặp bài toán ban đầu không có lời giải.

2.4 TRÒ CHƠI POKER

Poker là một trò chơi bài gồm nhiều người chơi, trong đó các quân bài thường được đặt úp, không cho biết rõ ký hiệu ghi trên mặt quân bài. Khi bắt đầu chơi, mỗi người chơi phải góp quỹ (đặt cọc) một số tiền nhất định và được chia một số quân bài. Đến lượt chơi, người chơi có thể xướng bài

và đặt thêm tiền vào quĩ hoặc bỏ qua lượt chơi. Khi kết thúc trò chơi, số tiền trong quĩ sẽ được trao cho người thắng cuộc. Khi chơi người chơi có thể đánh lừa đối phương bằng cách xướng bài với giá cao để buộc đối phương phải chịu thua, mặc dù anh ta có thể bị thua nếu đối phương chấp nhận thách đố hoặc xướng bài với giá thấp hơn để đối phương nuôi hy vọng thắng.

Cũng như nhiều trò chơi bài khác, trò chơi Poker mang tính trí tuệ, trong đó may rủi cũng là một yếu tố tác động đến trò chơi, nhưng kỹ năng chơi mới là phẩm chất quyết định sự thắng hay thua của người chơi. Trò chơi đòi hỏi người chơi phải có chiến lược thích hợp, ứng phó linh hoạt mới có thể giành được chiến thắng.

Trong mục này, luận văn sẽ trình bày một số khái niệm và qui tắc chơi cơ bản của trò chơi Poker, thông qua việc phân tích một biến thể đơn giản của trò chơi này. Trò chơi Poker diễn ra trên thực tế quá phức tạp để có thể phân tích bằng toán học.

Trò chơi Poker đơn giản hoá gồm có hai người chơi, ký hiệu A và B, và một cỗ bài gồm có ba quân bài, ký hiệu là 1, 2 và 3.

2.4.1 QUI TẮC CHƠI VÀ THANH TOÁN

Khi bắt đầu chơi, mỗi người chơi phải góp (đặt cọc) một số tiền, chẳng hạn \$ 1, vào "quĩ" và được chia một quân bài từ cỗ bài. Sau đó lần lượt từng người chơi, bắt đầu từ người chơi A, có thể đặt cược thêm \$ 1 vào quĩ hoặc bỏ qua lượt chơi.

Quá trình chơi trên đây chấm dứt khi gặp một trong ba tình huống sau:

- Đặt cược theo sau cũng là đặt cược,
- Bỏ qua theo sau cũng là bỏ qua,
- Đặt cược theo sau là bỏ qua.

Trong hai trường hợp đầu, người thắng trong cuộc chơi được quyết định bằng cách so sánh các quân bài trên tay mỗi người chơi: người chơi nào có

quân bài đánh số cao hơn sẽ là người thắng cuộc. Trong trường hợp thứ ba: đặt cược theo sau là bỏ qua, thì người đặt cược sẽ là người thắng cuộc, không phụ thuộc người nào có quân bài cao hơn (khi chơi thực, người chơi chọn "bỏ qua" tuyên bố đầu hàng và chấp nhận thua cuộc). Người thắng cuộc sẽ được nhận một số tiền từ quỹ theo thỏa thuận.

Với các qui tắc chơi đơn giản nêu trên thì chỉ có 5 trường hợp sau đây xảy ra:

- a) A bỏ qua, B bỏ qua: \$ 1 cho người chơi có quân bài cao hơn.
- b) A bỏ qua, B đặt cược, A bỏ qua: \$ 1 cho người chơi B.
- c) A bỏ qua, B đặt cược, A đặt cược: \$ 2 cho người chơi có quân bài cao hơn.
- d) A đặt cược, B bỏ qua: \$ 1 cho người chơi A.
- e) A đặt cược, B đặt cược: \$ 2 cho người chơi có quân bài cao hơn.

2.4.2 CHIẾN LƯỢC ĐƠN

Sau khi được chia một quân bài, người chơi A có thể quyết định chơi theo một trong ba qui tắc sau:

- 1. Bỏ qua. Sau đó nếu B đặt cược, tiếp tục bỏ qua (Dừng cuộc chơi và B thắng).
- 2. Bỏ qua. Sau đó nếu B đặt cược, cũng đặt cược (Dừng cuộc chơi và ai giữ quân bài cao hơn sẽ thắng).
- 3. Đặt cược. (Sau đó dù B đặt cược hay bỏ qua, cuộc chơi đều dừng).

Tương tự, sau khi được chia một quân bài, người chơi B có thể chơi theo một trong bốn qui tắc sau:

- 1. Bỏ qua, bất kể trước đó A đặt cược hay bỏ qua.
- 2. Bỏ qua nếu A bỏ qua và đặt cược nếu A đặt cược (B chơi như A).
- 3. Đặt cược nếu A bỏ qua và bỏ qua nếu A đặt cược (B chơi ngược lại với A).
- 4. Đặt cược, bất kể trước đó A đặt cược hay bỏ qua.

Để mô phỏng tình huống như một trò chơi ma trận, ta phải nhận biết được các chiến lược đơn của mỗi người chơi. Chiến lược đơn là qui tắc nào trên đây được người chơi lựa chọn đối với mỗi quân bài mà người đó được chia.

Vì thế, các chiến lược đơn của người chơi được biểu thị bởi bộ ba (x_1, x_2, x_3) , trong đó x_i là qui tắc chơi mà người chơi sẽ sử dụng khi anh ta đang có trong tay quân bài i . Với người chơi A thì x_i nhận ba giá trị 1, 2 và 3, còn với người chơi B thì x_i nhận bốn giá trị 1, 2, 3 và 4. Ví dụ: chiến lược đơn $(2, 3, 1)$ có nghĩa là người chơi áp dụng qui tắc 2, 3 hay 1 nếu anh ta có trong tay quân bài 1, 2 hay 3.

2.4.3 MA TRẬN TRẢ TIỀN

Căn cứ vào chiến lược đơn của hai người chơi, ta có thể tính được số tiền trung bình mà người này phải trả cho người kia, chẳng hạn A trả cho B. Giả sử A sử dụng chiến lược $(3, 1, 2)$ và B sử dụng chiến lược $(3, 2, 4)$. Có 6 cách chia bài như sau.

Chia bài		Phiên đặt cược			Số tiền
A	B				A trả B
1	2	A đặt cược	B đặt cược		2
1	3	A đặt cược	B đặt cược		2
2	1	A bỏ qua	B đặt cược	A bỏ qua	1
2	3	A bỏ qua	B đặt cược	A bỏ qua	1
3	1	A bỏ qua	B đặt cược	A đặt cược	-2
3	2	A bỏ qua	B bỏ qua		-1

Do 6 cách chia bài này đều có cơ hội xảy ra như nhau (đồng khả năng) nên số tiền trung bình A trả cho B bằng $(2 + 2 + 1 + 1 - 2 - 1) / 6 = 0,5$.

Cần tính toán số tiền trả trung bình đối với mỗi tổ hợp các cặp chiến lược đơn. Có bao nhiêu cặp như vậy? Người chơi A có $3 \times 3 \times 3 = 27$ chiến lược đơn và người chơi B có $4 \times 4 \times 4 = 64$ chiến lược đơn. Do đó có tất cả $27 \times 64 = 1728$ cặp chiến lược đơn. Việc tính số tiền trả trung bình cho tất cả các cặp này là hết sức khó khăn và tốn nhiều thời gian. Rất may là ta có thể giảm số chiến lược đơn (do đó giảm số cặp) cần xét nhờ những nhận xét đơn giản sau đây.

Nhận xét đầu tiên là người chơi giữ quân bài số 1 đừng bao giờ "đặt cược" khi đối phương đã "đặt cược", bởi vì anh ta sẽ thua và anh ta sẽ bị thua ít hơn nếu chọn "bỏ qua". Lập luận này cho thấy rằng khi giữ quân bài 1:

- Người chơi A không nên dùng qui tắc 2;
- Người chơi B không nên dùng qui tắc 2 và 4.

Rõ ràng cũng có thể không dùng một số qui tắc chơi khi người chơi giữ quân bài cao nhất. Chẳng hạn, người chơi giữ quân bài số 3 đừng bao giờ "bỏ qua" khi đối phương đã "đặt cược", vì nếu chọn "bỏ qua" anh ta sẽ thua, nhưng nếu chọn "đặt cược" anh ta sẽ thắng. Hơn nữa, khi giữ quân bài số 3 người chơi bao giờ cũng nên chọn "đặt cược" khi đối phương đã "bỏ qua", bởi vì dù đối phương sau đó đáp trả thế nào (đặt cược hay bỏ qua) anh ta vẫn sẽ thắng; chọn "đặt cược" còn tạo ra khả năng đối phương cũng "đặt cược" và do đó làm tăng số tiền thắng cho người chơi giữ quân bài số 3.

Vì thế, khi giữ quân bài số 3:

- Người chơi A không nên chọn qui tắc 1;
- Người chơi B không nên chọn qui tắc 1, 2 và 3.

Loại bỏ các qui tắc "xấu" đã phân tích, người chơi A bây giờ có $2 \times 3 \times 2 = 12$ chiến lược đơn và người chơi B có $2 \times 4 \times 1 = 8$ chiến lược đơn. Do đó số cặp chiến lược đơn giảm xuống còn $12 \times 8 = 96$ - một mức giảm đáng kể (so với 1.728)! Không chỉ loại bỏ những chiến lược "xấu"

khỏi mô hình toán học mà ta còn giả thiết rằng cả hai người chơi đều biết rằng các qui tắc "xấu" này sẽ không được sử dụng. Nghĩa là A cho rằng B sẽ chơi thông minh và B cũng nghĩ về A như vậy.

Tiếp tục quan sát sẽ giúp giảm hơn nữa số cặp chiến lược đơn cần xét. Ví dụ: khi giữ quân bài số 2, người chơi A không nên chơi theo qui tắc 3. Để có được kết luận này ta chỉ cần phân tích cận kẽ từng khả năng. Do A giữ quân bài số 2 nên B giữ quân bài số 1 hoặc số 3. Ta có thể xác định được B sẽ làm gì trong cả hai trường hợp này và dễ dàng nhận ra A sẽ sai lầm khi chọn qui tắc 3. Phân tích tương tự cho thấy khi giữ quân bài số 2 người chơi B không nên chọn qui tắc 3 và 4. Do vậy người chơi A chỉ có $2 \times 2 \times 2 = 8$ chiến lược đơn và người chơi B chỉ có $2 \times 2 \times 1 = 4$ chiến lược đơn. Số cặp chiến lược đơn cần xét bây giờ là $8 \times 4 = 32$.

Lúc này không thể giảm hơn được nữa. Tính ma trận trả tiền (A trả B) ta được:

	(1,1,4)	(1,2,4)	(3,1,4)	(3,2,4)
(1,1,2)	0	0	1/6	1/6
(1,1,3)	0	-1/6	1/3	1/6
(1,2,2)	1/6	1/6	-1/6	-1/6
(1,2,3)	1/6	0	0	-1/6
(3,1,2)	-1/6	1/3	0	1/2
(3,1,3)	-1/6	1/6	1/6	1/2
(3,2,2)	0	1/2	-1/3	1/6
(3,2,3)	0	1/3	-1/6	1/6

Giải trò chơi với ma trận trả tiền T, ta nhận được cặp chiến lược tối ưu cho A, B:

$$y^* = \left[\frac{2}{3} \ 0 \ 0 \ \frac{1}{3} \right]^T \text{ và } x^* = \left[\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ \frac{1}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{6} \right]^T$$

Có thể diễn giải kết quả này như sau:

Người chơi A áp dụng các chiến lược đơn (1, 1, 2), (1, 2, 3) và (3, 2, 3) theo tỉ lệ tương ứng 1/2, 1/3 và 1/6, nghĩa là chiến lược tối ưu của người chơi A là

- Khi giữ quân bài 1, dùng hỗn hợp qui tắc 1 và 3 theo tỉ lệ 5 : 1;
- Khi giữ quân bài 2, dùng hỗn hợp qui tắc 1 và 2 theo tỉ lệ 1 : 1;
- Khi giữ quân bài 3, dùng hỗn hợp qui tắc 2 và 3 theo tỉ lệ 1 : 1.

Tương tự, người chơi B áp dụng các chiến lược đơn $(1, 1, 4)$ và $(3, 2, 4)$ theo tỉ lệ tương ứng $2/3$ và $1/3$, nghĩa là chiến lược tối ưu của người chơi B là

- Khi giữ quân bài 1, dùng hỗn hợp qui tắc 1 và 3 theo tỉ lệ $2 : 1$;
- Khi giữ quân bài 2, dùng hỗn hợp qui tắc 1 và 2 theo tỉ lệ $2 : 1$;
- Khi giữ quân bài 3, luôn dùng qui tắc 4.

Để ý rằng chiến lược tối ưu của người chơi A khi giữ quân bài số 1 là dùng qui tắc 3 ít nhất vài lần. Qui tắc 3 bảo rằng "đặt cược", nhưng sự đặt cược này chỉ là để đánh lừa đối phương. Khi giữ quân bài số 1, người chơi B đôi khi cũng đánh lừa đối phương, bằng cách thỉnh thoảng dùng qui tắc 3. Rõ ràng là chiến lược tối ưu cũng gặp tình huống xướng bài với giá thấp hơn, gây thua thiệt cho người chơi.

Tóm lại, chương này đã đề cập tới bài toán trò chơi ma trận, một dạng trò chơi đơn giản nhất và có quan hệ chặt chẽ với bài toán quy hoạch tuyến tính. Như đã trình bày, việc tìm chiến lược tối ưu của mỗi người chơi được đưa về tìm nghiệm của một cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau dạng chuẩn và ngược lại, mỗi cặp quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau lại có thể diễn đạt tương đương dưới dạng một trò chơi ma trận. Trò chơi Poker có thể xem như một ví dụ về trò chơi ma trận trong thực tế

Kết luận

Luận văn đã đề cập tới trò chơi ma trận, đó là dạng mô hình trò chơi đơn giản nhất trong lý thuyết trò chơi. Thông qua mô hình này, luận văn đã trình bày các khái niệm cơ bản về trò chơi như: qui tắc chơi, cách trả tiền, hàm thắng cuộc, điểm yên ngựa, chiến lược đơn, chiến lược hỗn hợp, chiến lược tối ưu, v.v ... Trò chơi Poker có thể xem như một ứng dụng của trò chơi ma trận trong thực tế.

Trò chơi ma trận, trình bày ở chương 2 của luận văn, có quan hệ chặt chẽ với lý thuyết quy hoạch tuyến tính. Cụ thể, việc tìm chiến lược tối ưu của mỗi người chơi trong trò chơi ma trận được đưa về việc tìm nghiệm của một cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau và ngược lại, mỗi cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu nhau lại có thể mô tả như một trò chơi ma trận.

Chính vì lẽ đó, các kiến thức cơ bản về bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán đối ngẫu, lý thuyết đối ngẫu, cũng như thuật toán đơn hình gốc và đơn hình đối ngẫu dùng để tìm nghiệm của trò chơi ma trận được trình bày tóm tắt ở chương 1 của luận văn.

Có thể xem luận văn như bước tìm hiểu đầu tiên về lý thuyết trò chơi và các ứng dụng của lý thuyết này trong thực tiễn. Tác giả luận văn hy vọng sẽ có dịp được tìm hiểu sâu hơn về lý thuyết trò chơi trong tương lai.

Tài liệu tham khảo

- [1] Trần Vũ Thiệu (2004) *Giáo trình tối ưu tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [2] Nguyễn Thị Bạch Kim (2008) *Giáo trình các phương pháp tối ưu - Lý thuyết và thuật toán*, NXB Bách Khoa, Hà Nội.
- [3] S. Gass. (1994), *Linear Programming. International Edition* .
- [4] R. J. Vanderbei. (2008), *Linear Programming - Foundations and Extensions*. 3rd edition. Springer.