ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM ANH KHOA

VỀ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN CÁC KHÔNG GIAN METRIC ĐẦY ĐỦ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Hà Trần Phương

Thái Nguyên - 2012

1Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: TS. Hà Trần Phương

Phản biện 1: **TS. Nguyễn Quỳnh Nga**

Phản biện 2: **TS.Vũ Mạnh Xuân**

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
Ngày 18 tháng 11 năm 2012

Có thể tìm hiểu tại
Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Mở đầu **2**

1 Mở đầu về điểm bất động của ánh xạ hợp thành **5**

1.1 **Ánh xạ Lipschitz và định lý điểm bất động** 5

1.1.1 Một số khái niệm 5

1.1.2 Ánh xạ Lipschitz và nguyên lý ánh xạ co Banach 11

1.2 Định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành 17

1.2.1 Giới thiệu 17

1.2.2 Định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành với $p = 3$ và $p = 4$ 19

2 Điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa năm không gian metric **27**

2.1 Định lý điểm bất động của Garg và Agarwal 27

2.2 Một số cải tiến của Định lý 2.1 37

Kết luận **52**

Tài liệu tham khảo **53**

Lời nói đầu

Bài toán nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất của điểm bất động của ánh xạ là một vấn đề thời sự, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới và đạt được nhiều kết quả quan trọng. Với một không gian X, $f : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. Điểm $x_0 \in X$ thỏa mãn $x_0 = f(x_0)$ được gọi là *điểm bất động* của ánh xạ f. Vấn đề đặt ra là với những điều kiện nào của X và f thì f có điểm bất động và khi nào điểm bất động đó là duy nhất.

Những định lý về điểm bất động xuất hiện từ đầu thế kỷ XX. Các công trình đầu tiên là Nguyên lý điểm bất động Brouwer (1912) và Nguyên lý ánh xạ co Banach (1922), trong đó Nguyên lý ánh xạ co Banach được đánh giá là định lý điểm bất động đơn giản và được sử dụng rộng rãi nhất. Về sau, các kết quả kinh điển này đã được mở rộng ra nhiều lớp ánh xạ và các không gian khác nhau và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Các kết quả nghiên cứu về điểm bất động của ánh xạ tập chung vào các hướng: nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất của điểm bất động. Các phương pháp tìm điểm bất động và nghiên cứu ứng dụng của định lý điểm bất động. Các công trình theo hướng nghiên cứu này được biết đến với tên: "Lý thuyết điểm bất động" và ngày càng được phát triển mạnh mẽ.

Thời gian gần đây, các định lý điểm bất động còn được mở rộng cho một họ ánh xạ hợp thành giữa các không gian metric. Cho $M_1, ..., M_p$ là một họ các không gian metric, $A_j : M_j \to M_{j+1}, j = 1, \ldots, p-1$ và $A_p : M_p \to M_1$ là một họ các ánh xạ. Vấn đề đặt ra là với những điều kiện nào của các không gian M_j và ánh xạ A_j thì các ánh xạ hợp thành $A_{j-1}...A_{j+1}A_j : M_j \to M_j$ có điểm bất động. Năm 1985, N. P. Nung trong [8] đã chứng minh một điều kiện đủ cho sự tồn tại duy nhất của

ánh xạ hợp thành giữa ba không gian metric. Trong [6], các tác giả xem xét trường hợp $p = 3$ và tính chất liên tục của các ánh xạ được bỏ qua. L. Kikina và K. Kikina khảo sát với $p = 4$ trong [5], trong [3] các tác giả chứng minh định lý điểm bất động với $p = 5$, ... Trong luận văn này, chúng tôi trình bày tổng quan các kết quả nghiên cứu và chứng minh chi tiết kết quả L. Kikina trong [6], của M. Garg and S. Agarwal trong [3]. Ngoài ra chúng tôi chứng minh thêm một kết quả nghiên cứu về cải tiến kết quả của M. Garg and S. Agarwal.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Dành cho việc trình bày một số vấn đề cơ sở của không gian metric, không gian Banach, Nguyên lý ánh xạ co Banach và kết quả của L. Kikina trong [6] trong trường hợp $p = 3$.

Chương 2: Chúng tôi trình bày về các dạng định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa năm không gian metric đầy đủ.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Hà Trần Phương - Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Hà Trần Phương. Người Thầy đã dành rất nhiều thời gian quý báu, tâm huyết. Đã hướng dẫn, giúp đỡ, động viên tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn tới Ban Giám hiệu, các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Những thầy cô đã tận tình dạy bảo cho tác giả suốt thời gian học. Đã trang bị cho tác giả và lớp Cao học Toán K4c những kiến thức và tạo mọi điều kiện cho lớp học tập tại trường. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K4c - Trường Đại học Khoa học đã động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tác giả xin cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo Tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp trường THPT Kim Ngọc - Huyện Bắc Quang đã tạo điều kiện về mọi mặt để tác giả được tham gia học tập và hoàn thành khóa học.

Tuy nhiên, do thời gian và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tác

giả rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của quý Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 11 năm 2012

Tác giả

Phạm Anh Khoa

Chương 1

Mở đầu về điểm bất động của ánh xạ hợp thành

Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số định lý cổ điển về định lý điểm bất động và chứng minh lại định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa ba không gian metric đầy đủ của L. Kikina ([6]).

1.1 Ánh xạ Lipschitz và định lý điểm bất động

1.1.1 Một số khái niệm

Cho X là một tập khác rỗng, trên X ta trang bị hàm số

$$\begin{aligned} \rho : & X \times X \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto \rho(x, y) \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \\ &(2) \qquad \rho(x, y) = \rho(x, y); \\ &(3) \qquad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

với mọi $x, y, z \in X$. Khi đó ρ được gọi là một *metric* hay *khoảng cách* trên X và cặp (X, ρ) gọi là *một không gian metric*. Mỗi phần tử của X sẽ được gọi là *một điểm*, $\rho(x, y)$ gọi là *khoảng cách giữa hai điểm* x, y trên X.

Cho X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, chuẩn trên X là hàm số

$$\begin{aligned} ||.|| :& X \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto ||x|| \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} &(1) \qquad ||x|| \geq 0, \qquad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \\ &(2) \qquad ||\lambda x|| = |\lambda| ||x|; \\ &(3) \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in X$ và $\lambda \in \mathbb{K}$.

Cặp $(X, ||.||)$, trong đó X là một không gian tuyến tính, $||.||$ là một chuẩn trên X. Gọi là một *không gian định chuẩn* (hay còn gọi là *không gian tuyến tính định chuẩn*).

Với một không gian định chuẩn $(X, ||.||)$, ta dễ dàng chứng minh được hàm

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+,$$

xác định bởi $\rho(x, y) = ||x - y||$, với $x, y \in X$, là một metric trên X, $\rho = o$ gọi là metric sinh bởi chuẩn. Như vậy mỗi không gian định chuẩn đều là không gian metric.

Ví dụ 1.1. Dễ dàng chứng minh được $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ là không gian định chuẩn với chuẩn xác định bởi:

$$||x|| = |x| \quad \text{với } x \in X.$$

Do đó $\mathbb{K}$ là không gian metric với $\rho(x, y) = |x - y|$.

Ví dụ 1.2. Cho $X = \mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, ..., x_n)$, đặt

$$||x|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

Khi đó $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x_1 = \cdots = x_n = 0$, tức là $x = 0$. $\|\lambda x\| = \sqrt{|\lambda x_1|^2 + ... + |\lambda x_n|^2} = |\lambda| \|x\|$. Và với $x = (x_1, ..., x_n)$,

$y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (|x_1+y_1|)^2 + ... + (|x_n+y_n|)^2 \\
&= (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2) + (|y_1|^2 + ... + |y_n|^2) \\
&\quad + 2(|x_1y_1| + ... + |x_ny_n|) \\
&\leq (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2) + (|y_1|^2 + ... + |y_n|^2) \\
&\quad + 2\sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.\sqrt{|y_1|^2 + ... + |y_n|^2} \\
&= (\sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} + \sqrt{|y_1|^2 + ... + |y_n|^2})^2.
\end{aligned}$$

Từ đó $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Như vậy, $\|.\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$. Do đó

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

là một metric trên $\mathbb{R}^n$.

Cho (X, ρ) là một không gian metric, $x_0 \in X$ và $r > 0$. Tập

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$$

gọi là *hình cầu mở* tâm x_0 bán kính r. Tập

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$$

gọi là *hình cầu đóng* tâm x_0 bán kính r. Giả sử A là một tập con của không gian metric của X, điểm $x_0 \in A$ được gọi là *điểm trong* của A nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x_0, r) \subset A$. Tập tất cả các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A và kí hiệu int$A$ hoặc A^o. Một tập con A trong không gian metric (X, ρ) được gọi là đóng nếu phần bù của nó C_XA là tập mở.

Nhận xét. *Trong không gian metric (X, ρ), X, $\emptyset$ là các tập mở. Hình cầu $B(x_0, r)$ là một tập mở vì với mọi $x \in B(x_0, r)$ luôn tồn tại $r_1 = r - \rho(x_0, r) > 0$ sao cho $B(x, r_1) \subset B(x_0, r)$, tức là mọi điểm của $B(x_0, r)$ đều là điểm trong. Hiển nhiên X và $\emptyset$ cũng là những tập đóng trong không gian metric. Ngoài ra mọi hình cầu đóng là một tập đóng.*

Cho (X, ρ) là một không gian metric, $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử của X, ta nói $\{x_n\}$ hội tụ đến $x_0 \in X$ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ hoặc $x_n \to x_0$, x_0 gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

Không gian metric đầy đủ, không gian Banach

Giả sử (X, ρ) là một không gian metric. Dãy $\{x_n\}$ các phần tử của X được gọi là một dãy Cauchy (*hay còn gọi là dãy cơ bản*) nếu:

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_m, x_n) = 0.$$

Nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$, với mọi $m, n \geq n_0 : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Trong trường hợp X là không gian siêu metric, điều kiện Cauchy của dãy $\{x_n\} \subset X$ là

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Ta biết rằng mọi dãy hội tụ trong không gian metric đều là những dãy Cauchy, tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ví dụ 1.3. $\mathbb{Q}$ với metric $\rho(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{Q}$ là một không gian metric, dãy $\left\{x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{Q}$ nhưng không hội tụ trong $\mathbb{Q}$.

Không gian metric X được gọi là *không gian metric đầy đủ* nếu với mọi dãy Cauchy các phần tử của X đều hội tụ. Không gian định chuẩn đầy đủ với metric sinh bởi chuẩn được gọi là *không gian Banach.*

Ví dụ 1.4. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ với metric tự nhiên, là các không gian metric đầy đủ (theo tiêu chuẩn Cauchy trong các không gian này). Đồng thời chúng cũng là các không gian Banach. $\mathbb{R}^n$ cũng là một không gian metric đầy đủ. Tuy nhiên $\mathbb{Q}$ không là không gian đầy đủ.

Ánh xạ liên tục

Giả sử $(X, \rho_X); (Y, \rho_Y)$ là hai không gian metric, $f : X \to Y$ là một ánh xạ, $x_o \in X$. Ta nói ánh xạ f liên tục tại điểm x_o nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ mà $\rho_X(x, x_o) < \delta$ thì

$$\rho_Y(f(x), f(x_o)) < \varepsilon.$$

Ta nói f liên tục trên X nếu nó liên tục tại mọi $x \in X$.

Ta nói ánh xạ f liên tục đều trên X nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$ mà $\rho_X(x, y) < \delta$ thì

$$\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Nhận xét.

1. Dễ dàng thấy $f : X \to Y$ liên tục tại $x \in X$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}$ các phần tử của X, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong X thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ trong Y.

2. Nếu X, Y, Z là ba không gian metric, $f : X \to Y; g : Y \to Z$ là những ánh xạ liên tục thì ánh xạ $g_\circ f : X \to Z$ là liên tục.

3. Một ánh xạ liên tục đều thì liên tục, điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ví dụ 1.5. Cho (X, ρ) là một không gian metric, $A \subset X$, xét hàm số $\rho_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\rho_A(x) = \inf_{a\in A} \rho(x, a).$$

Khi đó ρ_A là hàm số liên tục đều trên X. Thật vậy, với $x, y \in X$, với mọi $a \in A$ ta có:

$$\rho(x, a) \le \rho(x, y) + \rho(y, a).$$

Suy ra

$$\inf_{a\in A} \rho(x, a) \le \rho(x, y) + \inf_{a\in A} \rho(y, a),$$

tương đương với

$$\rho_A(x) - \rho_A(y) = \inf_{a\in A} \rho(x, a) - \inf_{a\in A} \rho(y, a) \le \rho(x, y).$$

Tương tự ta cũng có

$$\rho_A(y) - \rho_A(x) \leq \rho(x, y).$$

Từ hai bất đẳng thức trên

$$|\rho_A(x) - \rho_A(y)| \leq \rho(x, y).$$

Như vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$, chỉ cần chọn $\delta = \varepsilon$, khi đó với mọi $x, y \in X$ thỏa mãn $\rho(x, y) < \delta$ thì

$$|\rho_A(x) - \rho_A(y)| < \varepsilon.$$

Kéo theo hàm ρ_A liên tục đều trên X.

Định lý sau đây cho thấy một đặc trưng của ánh xạ liên tục.

Định lý 1.1. *Giả sử f là một ánh xạ từ không gian metric X vào không gian metric Y khi đó ba mệnh đề sau đây là tương đương*

(i) f liên tục trên X;

(ii) Nghịch ảnh của mỗi tập mở trong Y là một tập mở trong X;

(iii) Nghịch ảnh của mỗi tập đóng trong Y là một tập đóng trong X.

Một song ánh $f : X \to Y$ từ một không gian metric X lên một không gian metric Y gọi là *đồng phôi* nếu f và f^{-1} là các ánh xạ liên tục. Hai không gian metric X và Y được gọi là *đồng phôi với nhau* nếu tồn tại một ánh xạ đồng phôi từ X lên Y.

Một ánh xạ $f : X \to Y$ từ một không gian metric (X, ρ_X) vào một không gian metric (Y, ρ_Y) gọi là *đẳng cự* nếu với mọi $x, y \in X$ ta luôn có

$$\rho_X(x, y) = \rho_Y(f(x), f(y)).$$

Hai không gian metric X và Y được gọi là *đẳng cự với nhau* nếu tồn tại một toàn ánh đẳng cự f từ X lên Y.

Nhận xét.

1. Một song ánh $f : X \to Y$ là đồng phôi khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}$ các phần tử X và với mọi $x_o \in X$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_o \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o).$$

2. Dễ dàng chứng minh được quan hệ "không gian đồng phôi" là một quan hệ tương đương.

3. Ánh xạ đẳng cự là một ánh xạ liên tục đều và hai không gian metric đẳng cự là đồng phôi với nhau.

1.1.2 Ánh xạ Lipschitz và nguyên lý ánh xạ co Banach

Ánh xạ Lipschitz

Cho (X, ρ) là một không gian metric. Một ánh xạ $F : X \to X$ gọi là ánh xạ *Lipschitz* nếu tồn tại một hằng số $\alpha \geq 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$ ta có:

$$\rho(F(x), F(y)) \leq \alpha\rho(x, y), \text{với mọi } x, y \in X. \tag{1.1}$$

Dễ thấy một ánh xạ Lipschitz là liên tục. Số α nhỏ nhất thỏa mãn (1.1) được gọi là hằng số Lipschitz, kí hiệu là L. Nếu $L < 1$ ta nói rằng F là một phép co, hay còn gọi là ánh xạ co. Nếu $L = 1$ ta nói rằng F là ánh xạ không giãn. Cho X là một không gian, $f : X \to X$ là một ánh xạ. Điểm $x \in X$ thỏa mãn

$$f(x) = x,$$

được gọi là điểm bất động của ánh xạ f. Việc tìm điểm bất động của một ánh xạ là vấn đề thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà Toán học, thu được nhiều kết quả quan trọng và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học, trong kinh tế.

Nguyên lý ánh xạ co

Với mỗi $x \in X$, ta xác định dãy $F^n(x)$ như sau: $F^0(x) = x$ và $F^{n+1}(x) = F(F^n(x))$, với mỗi $n = 0, 1, ...$

Định lý 1.2. *(Nguyên lý ánh xạ co Banach) Giả sử (X, ρ) là một không gian metric đầy đủ, ánh xạ $F : X \to X$ là một ánh xạ co với hằng số Lipschitz $L < 1$. Khi đó F có duy nhất điểm bất động $u \in X$. Ngoài ra, với mọi $x \in X$, ta có:*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = u,$$

với

$$\rho(F^n(x), u) \leq \frac{L^n}{1-L}\rho(x, F(x)).$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh tính duy nhất.

Giả sử tồn tại $x, y \in X$ với $x = F(x)$ và $y = F(y)$. Khi đó

$$\rho(x, y) = \rho(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y).$$

Điều này kéo theo $\rho(x, y) = 0$ suy ra $x = y$.

Để chứng minh sự tồn tại của $x \in X$. Ta phải chứng minh $F^n(x)$ là một dãy Cauchy. Chú ý rằng với $n = 0, 1, ..,$ thì

$$\rho(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq L\rho(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq ... \leq L^n\rho(x, F(x)).$$

Như vậy với các số nguyên dương $m > n$, thì ta có

$$\begin{aligned}\rho(F^n(x), F^m(x)) &\leq \rho(F^n(x), F^{n+1}(x)) + \rho(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) \\ &\quad + ... + \rho(F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq L^n\rho(x, F(x)) + ... + \ L^{m-1}\rho(x, F(x)) \\ &\leq L^n\rho(x, F(x))[1 + L + L^2 + ...] \\ &= \frac{L^n}{1-L}\rho(x, F(x)).\end{aligned}$$

Như vậy

$$\rho(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{L^n}{1-L}\rho(x, F(x)). \tag{1.2}$$

với mọi $m > n$. Điều đó suy ra

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(F^n(x), F^m(x)) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{L^n}{1-L}\rho(x, F(x)) = 0,$$

kéo theo $\{F^n(x)\}$ là một dãy Cauchy. Do X là đầy đủ nên tồn tại $u \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} F^n(x) = u$. Hơn nữa do tính liên tục của F ta có

$$u = \lim_{n\to\infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} F^n(x) = F(u),$$

vì vậy u là một điểm bất động của F. Trong (1.2) cho $m \to \infty$ ta được

$$\rho(F^n(x), u) \leq \frac{L^n}{1-L}\rho(x, F(x)).$$

Định lý được chứng minh. □

Chú ý rằng, trong Định lý trên, điều kiện $L < 1$ rất quan trọng. Vì nếu $L = 1$ thì có thể F không có điểm bất động.

Định lý 1.3. *Giả sử (X, ρ) là không gian metric đầy đủ, với $x_0 \in X$ và $r > 0$, kí hiệu:*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}.$$

Giả sử $F : B(x_0, r) \to X$ là một phép co với hằng số Lipschitz $L \in [0; 1)$ thỏa mãn $\rho(F(x_0), x_0) < (1 - L)r$. Khi đó F có một điểm bất động duy nhất trong $B(x_0, r)$.

Chứng minh. Gọi r_0 thỏa mãn $0 < r_0 < r$ và

$$\rho(F(x_0), x_0) < (1 - L)r_0.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng

$$F : \overline{B(x_0, r_0)} \longrightarrow \overline{B(x_0, r_0)}. \tag{1.3}$$

Thật vậy, nếu $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$ thì

$$\begin{aligned} \rho(F(x), x_0) &\leq \rho(F(x), F(x_0)) + \rho(F(x_0), x_0) \\ &\leq L\rho(x, x_0) + (1 - L)r_0 \leq r_0. \end{aligned}$$

Điều này kéo theo $F(x) \in \overline{B(x_0, r_0)}$. Từ nguyên lý ánh xạ co Banach suy ra, F có một điểm bất động duy nhất trong $\overline{B(x_0, r_0)} \subset B(x_0, r)$. Dễ thấy điểm bất động này của F là duy nhất trong $B(x_0, r)$. □

Mệnh đề 1.4. *Cho (X, ρ) là một không gian metric đầy đủ và $F : X \to X$ là một ánh xạ. Giả sử mệnh đề sau thỏa mãn*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \textit{sao cho nếu} \\ \rho(x, F(x)) < \delta(\varepsilon) \quad \textit{thì} \quad F(B(x, \varepsilon)) \subseteq B(x, \varepsilon), \\ \textit{trong đó} \quad B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Khi đó, nếu với mỗi $u \in X$ ta có

$$\rho(F^n(u), F^{n+1}(u)) = 0,$$

thì dãy $F^n(u)$ hội tụ tới một điểm bất động của F.

Chứng minh. Giả sử u được xác định như trên và $u_n = F^n(u)$. Ta chứng minh dãy u_n là một dãy Cauchy. Giả sử $\varepsilon > 0$ chọn $\delta(\varepsilon)$ như trong (1.4) ta có thể chọn N đủ lớn sao cho

$$\rho(u_n, u_{n+1}) < \delta(\varepsilon) \text{ với mọi } n \geq N.$$

Vì $\rho(u_N, F(u_N)) < \delta(\varepsilon)$, nên từ (1.4) suy ra

$$F(B(u_N, \varepsilon)) \subseteq B(u_N, \varepsilon),$$

từ đó suy ra $F(u_N) = u_{N+1} \in B(u_N, \varepsilon)$. Bằng cách quy nạp ta chứng minh được

$$F^k(u_N) = u_{N+k} \in B(u_N, \varepsilon), \text{ với mọi } k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Do đó

$$\rho(u_k, u_l) \leq \rho(u_k, u_N) + \rho(u_N, u_l) < 2\varepsilon, \text{ với mọi } k, l \neq N,$$

kéo theo $\{u_n\}$ là một dãy Cauchy. Do X đầy đủ nên dãy $\{u_n\}$ hội tụ trong X, tức là, tồn tại $y \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} u_n = y.$$

Bây giờ ta đi chứng minh y là điểm bất động của F. Giả sử ngược lại ta có

$$\rho(y, F(y)) = \gamma \leq 0.$$

Ta có thể chọn và cố định $u_n \in B(y, \frac{\gamma}{3})$ với

$$\rho(u_n, u_{n+1}) < \delta(\frac{\gamma}{3}).$$

Từ (1.4) ta có

$$F(B(u_n, \frac{\gamma}{3})) \subseteq B(u_n, \frac{\gamma}{3}),$$

do đó $F(y) \in B(u_n, \frac{\gamma}{3})$. Điều này mâu thuẫn vì

$$\rho(F(y), u_n) \geq \rho(F(y), y) - \rho(u_n, y) > \gamma - \frac{\gamma}{3} = \frac{2\gamma}{3}.$$

Do vậy $\rho(y, F(y)) = 0$. Tức là $y = F(y)$, hay y là một điểm bất động của F. Từ chứng minh trên ta suy ra $\lim_{n\to\infty} F^n(u) = y$. □

Định lý 1.5. *Giả sử (X, ρ) là một không gian metric đầy đủ và*

$$\rho(F(x), F(y)) \leq \varphi(\rho(x, y)), \text{ với mọi } x, y \in X,$$

trong đó $\varphi : [0; \infty) \to [0; \infty)$ là hàm đơn điệu, không giảm thỏa mãn

$$\lim_{x \to \infty} \varphi^n(t) = 0, \tag{1.5}$$

với mọi $t > 0$. Khi đó F có một điểm bất động duy nhất $u \in X$. Và $\lim\limits_{x \to \infty} F^n(x) = u$, với mỗi $x \in X$.

Chứng minh. Ta thấy, nếu tồn tại $t > 0$ thỏa mãn $t \leq \varphi(t)$. Khi đó

$$\varphi(t) \leq \varphi(\varphi(t)) \text{ và } t \leq \varphi^2(t).$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $t \leq \varphi^n(t)$, với $n \in 1, 2...$, mâu thuẫn với (1.5). Vì vậy $\varphi(t) < t$ với mọi $t > 0$. Hơn nữa

$$\rho(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq \varphi^n(\rho(x, F(x))), \text{ với } x \in X.$$

Điều đó kéo theo

$$\lim_{x \to \infty} \rho(F^n(x), F^{n+1}(x)) = 0, \text{ với mỗi } x \in X.$$

Với $\varepsilon > 0$, chọn $\delta(\varepsilon) = \varepsilon - \varphi(\varepsilon)$. Khi đó nếu $\rho(x, F(x)) < \delta(\varepsilon)$, thì $z \in B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, ta có

$$\begin{aligned}\rho(F(z), x) &\leq \rho(F(z), F(x)) + \rho(F(x), x) \leq \varphi(\rho(z, x)) + \rho(F(x), x)\\ &< \varphi(\rho(z, x)) + \delta(\varepsilon) \leq \varphi(\varepsilon) + (\varepsilon - \varphi(\varepsilon)) = \varepsilon,\end{aligned}$$

do đó $F(z) \in B(x, \varepsilon)$. Từ Mệnh đề 1.8 suy ra F có cùng một điểm bất động u với $\lim\limits_{x \to \infty} F^n(x) = u$, với mỗi $x \in X$. Cuối cùng ta dễ thấy F chỉ có một điểm bất động trong X. □

Định lý 1.6. *Cho $\overline{B}_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ là hình cầu đóng với bán kính $r > 0$, tâm là gốc tọa độ, trong không gian Banach E và $F : \overline{B}_r \longrightarrow E$ là một phép co với hằng số Lipschitz $L \in [0, 1)$ thỏa mãn.*

$$F(\partial \overline{B}_r) \subseteq \overline{B}_r.$$

Khi đó F có một điểm bất động duy nhất trong $\overline{B}_r$ (ở đây $\partial \overline{B}_r$ ký hiệu biên của $\overline{B}_r$).

Chứng minh. Xét hàm số

$$G(x) = \frac{x + F(x)}{2}.$$

Trước tiên ta chỉ ra rằng $G : \overline{B}_r \to \overline{B}_r$. Thật vậy, với $x \in \overline{B}_r$ và $x \neq 0$, đặt

$$x^* = r\frac{x}{||x||}.$$

Khi đó $x \in \overline{B}_r$ và $x \neq 0$, ta có

$$||F(x) - F(x^*)|| \leq L||x - x^*|| = L(r - ||x||),$$

vì $x - x^* = \dfrac{x}{||x||}(||x|| - r)$, suy ra

$$\begin{aligned} ||F(x)|| &\leq ||F(x^*)|| + ||F(x) - F(x^*)|| \\ &\leq r + L(r - ||x||) \leq 2r - ||x||. \end{aligned}$$

Khi đó, với $x \in \overline{B}_r$ và $x \neq 0$, ta có

$$||G(x)|| = \left\|\frac{x + F(x)}{2}\right\| \leq \frac{||x|| + ||F(x)||}{2} \leq r.$$

Điều này kéo theo $G(x) \in \overline{B}_r$, với mọi $x \in \overline{B}_r$ và $x \neq 0$.

Với $x = 0$, bằng cách đặt hàm G ta có

$$||G(0)|| \leq r.$$

Như vậy $G : \overline{B}_r$. Hơn nữa $G : \overline{B}_r$. là một phép co vì

$$||G(x) - G(y)|| \leq \frac{||x - y|| + L||x - y||}{2} = \frac{(1 + L)}{2}||x - y||.$$

Từ Định lý 1.1, suy ra G có một điểm bất động duy nhất $u \in \overline{B}_r$. Hiển nhiên nếu $u = G(u)$ thì $u = F(u)$. Do đó u chính là điểm bất động duy nhất của ánh xạ F.

□

1.2 Định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành

1.2.1 Giới thiệu

Năm 1983, trong [8], N. P. Nung chứng minh:

Định lý 1.7. *Cho $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ là ba không gian metric đầy đủ và $T : X \to Y, S : Y \to Z, R : Z \to X$ là các ánh xạ liên tục thỏa mãn các điều kiện*

$$d_1(RSy, RSTx) \leq c\frac{f_1(x, y)}{g_1(x, y)};$$
$$d_2(TRz, TRSy) \leq c\frac{f_2(y, z)}{g_2(y, z)};$$
$$d_3(STx, STRz) \leq c\frac{f_3(z, x)}{g_3(z, x)},$$

với mọi $x \in X$, $y \in Y$ và $z \in Z$ sao cho $g_1(x, y) \neq 0$, $g_2(y, z) \neq 0$, $g_3(z, x) \neq 0$, trong đó $0 \leq c < 1$ và

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) = \max\{&d_1(x, RSTx)d_3(Sy, STx), d_1(x, RSTx)d_2(y, TRSy),\\
&d_1(x, RSy)d_2(y, Tx)\};\\
f_2(y, z) = \max\{&d_2(y, TRSy)d_1(Rz, RSy), d_2(y, TRSy)d_3(z, STRz),\\
&d_2(y, TRz)d_3(z, Sy)\};\\
f_3(z, x) = \max\{&d_3(z, STRz)d_2(Tx, TRz), d_3(z, STRz)d_1(x, RSTx),\\
&d_3(z, STx)d_1(x, Rz)\},\\
g_1(x, y) = \max\{&d_1(x, RSy), d_1(x, RSTx), d_2(Tx, TRSy)\};\\
g_2(y, z) = \max\{&d_2(y, TRz), d_2(y, TRSy), d_3(Sy, STRz)\};\\
g_3(z, x) = \max\{&d_3(z, STx), d_3(z, STRz), d_1(Rz, RSTx)\}.
\end{aligned}$$

Khi đó RST có một điểm bất động duy nhất $\alpha \in X$, TRS có một điểm bất động duy nhất $\beta \in Y$, STR có một điểm bất động duy nhất $\gamma \in Z$. Hơn nữa, $T\alpha = \beta, S\beta = \gamma$ và $R\gamma = \alpha$.

Công trình này của P. N. Nung được xem khởi nguồn cho những nghiên cứu về điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa các không gian metric, trong đó các không gian metric là đầy đủ và các ánh xạ giữa các

không gian là liên tục. Gần đây, nhiều tác giả đã nghiên cứu các trường hợp mở rộng khác nhau của kết quả trên theo các hướng:

- Xem xét vấn đề tương tự với số không gian lớn hơn;
- Xem xét tính cần thiết về tính liên tục của các ánh xạ;
- Xem xét tính cần thiết về tính đầy đủ không gian metric;

Bây giờ ta giới thiệu bài toán tổng quát: Cho $M_1, ..., M_p$ là một họ gồm p không gian metric và

$$A_1 : M_1 \to M_2,\ ...\ , A_{p-1} : M_{p-1} \to M_p,\ A_p : M_p \to M_1$$

là các ánh xạ. Khi đó, ta có p ánh xạ hợp thành từ mỗi không gian $M_j,\ j = 1, \ldots, p$, vào chính nó như sau:

$$\begin{aligned} &J_1 = A_1 A_2 \ldots A_p : M_1 \longrightarrow M_1, \\ &J_j = A_j \ldots A_p A_1 \ldots A_{j-1} : M_j \longrightarrow M_j,\ j = 2, 3 \ldots, p. \end{aligned}$$

Với mỗi $j \in \{1, \ldots, p\}$, một điểm $x_j \in M_j$ được gọi là *điểm bất động* của ánh xạ hợp thành J_j nếu

$$J_j(x_j) = x_j.$$

Vấn đề đặt ra là: với những điều kiện nào của các không gian M_j và các ánh xạ A_j thì mỗi ánh xạ hợp thành $J_j : M_j \to M_j$ đều có điểm bất động. Năm 1996, R. K. Jain, H. K. Sahu và B. Fiher ([9]) đã xem xét vấn đề trên trong trường hợp $p = 3$, trong đó tính liên tục của các ánh xạ giữa các không gian đã được bỏ qua. Trong [6] các tác giả xem xét trường hợp $p = 3$ và tính chất liên tục của các ánh xạ cũng được bỏ qua. Trong [5], L. Kikina và K. Kikina khảo sát với $p = 4$, trong [3] các tác giả chứng minh định lý điểm bất động với $p = 5$, ... Về sau, việc phát triển và mở rộng của vấn đề theo các hướng trên thu hút được nhiều nhà toán học và thu được nhiều kết quả quan trọng.

Tiếp theo chúng tôi trình bày kết quả của L. Kikina ([6]) trong trường hợp $p = 3$ và giới thiệu kết quả L. Kikina và K. Kikina ([5]) trong trường hợp $p = 4$.

1.2.2 Định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành với $p = 3$ và $p = 4$

Cho $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ là 3 không gian metric và $T : X \to Y, R : Y \to Z, S : Z \to X$ là 3 ánh xạ . Ta ký hiệu

$$M_1(x, y) = d_1^p(x, SRy); d_1^p(x, SRTx); d_2^p(y, Tx); \tag{1.6}$$
$$M_2(y, z) = d_2^p(y, TSz); d_2^p(y, TSRy); d_3^p(z, Ry); \tag{1.7}$$
$$M_3(z, x) = d_3^p(z, RTx); d_3^p(z, RTSz); d_2^p(x, Sz), \tag{1.8}$$

với mọi $x \in X, y \in Y, z \in Z$.
Cho $F : [0. + \infty) \to R^+$ là ánh xạ liên tục tại 0 với $F(0) = 0$.
Định lý 1.8. ([6]) *Cho $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ là 3 không gian metric đầy đủ. Nếu $T : X \to Y$, $R : Y \to Z$, $S : Z \to X$ là 3 ánh xạ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:*

$$d_1^p(SRy, SRTx) \leq \alpha \max M_1(x, y) + F(\min M_1(x, y)); \tag{1.9}$$
$$d_2^p(TSz, TSRy) \leq \alpha \max M_2(y, z) + F(\min M_2(y, z)); \tag{1.10}$$
$$d_3^p(RTx, RTSz) \leq \alpha \max M_3(z, x) + F(\min M_3(z, x)), \tag{1.11}$$

với mọi $x \in X, y \in Y, z \in Z$, trong đó $0 \leqslant \alpha < 1$, thì SRT có 1 điểm bất động duy nhất $a \in X$, TSR có 1 điểm bất động duy nhất $b \in Y$, RST có 1 điểm bất động duy nhất $c \in Z$. Hơn nữa,

$$Ta = b, Rb = c \text{ và } Sc = a.$$

Chứng minh. Cho $x_0 \in X$ là một điểm tùy ý. Ta lấy ba dãy $(x_n), (y_n)$ và (z_n) lần lượt trong X, Y, Z như sau.

$$x_n = (SRT)^n x_0;$$
$$y_n = Tx_{n-1};$$
$$z_n = Ry_n,$$

với mọi $n \in N$.

Ta sẽ giả sử rằng $x_n \neq x_{n+1}$, $y_n \neq y_{n+1}$ và $z_n \neq z_{n+1}$ với $\forall n$.

Ngoài ra, nếu $x_n = x_{n+1}$ với một vài n, thì $y_{n+1} = y_{n+2}$, $z_{n+1} = z_{n+2}$ và ta có thể đặt $x_n = a$, $y_{n+1} = b$ và $z_{n+1} = c$.

Nếu $y_n = y_{n+1}$ thì $z_n = z_{n+1}$ và đẳng thức sau cùng là $SRTx_{n-1} = SRTx_n$, nghĩa là $x_n = x_{n+1}$. Tương tự, nếu $z_n = z_{n+1}$ thì ta lại có $x_n = x_{n+1}$.

Trước tiên, ta chứng minh rằng các dãy (x_n), (y_n) và (z_n) là dãy Cauchy.

Thay $x = x_n$, $y = y_n$ trong (1.6) và (1.9), ta được:

$$\begin{aligned}
M_1(x_n, y_n) &= \{d_1^p(x_n, SRy_n), d_1^p(x_n, SRTx_n), d_2^p(y_n, Tx_n)\} \\
&= \{d_1^p(x_n, x_n), d_1^p(x_n, x_{n+1}), d_2^p(y_n, y_{n+1})\} \\
&= \{0, d_1^p(x_n, x_{n+1}), d_2^p(y_n, y_{n+1})\}. \\
d_1^p(x_n, x_{n+1}) &= d_1^p(SRy_n, SRTx_n) \\
&\leqslant \alpha \max M_1(x_n, y_n) + F(\min M_1(x_n, y_n)) \\
&= \alpha \max\{0, d_1^p(x_n, x_{n+1}), d_2^p(y_n, y_{n+1})\} + F(0) \\
&= \alpha d_2^p(y_n, y_{n+1}),
\end{aligned}$$

vì nếu $\max M_1(x_n, y_n) = d_1^p(x_n, x_{n+1})$ thì theo bất đẳng thức.

$$d_1^p(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d_1^p(x_n, x_{n+1}),$$

suy ra $x_{n+1} = x_n$,vì $0 \leq \alpha < 1$. Do đó:

$$d_1^p(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d_2^p(y_n, y_{n+1}). \tag{1.12}$$

Thay $y = y_n$, $z = z_{n-1}$ trong (1.7) và (1.10), ta được:

$$\begin{aligned}
M_2(y_n, z_{n-1}) &= \{d_2^p(y_n, TSz_{n-1}), d_2^p(y_n, TSRy_n), d_3^p(z_{n-1}, Ry_n)\} \\
&= \{d_2^p(y_n, y_n), d_2^p(y_n, y_{n+1}), d_3^p(z_{n-1}, z_n)\} \\
&= \{0, d_2^p(y_n, y_{n+1}), d_3^p(z_{n-1}, z_n)\}. \\
d_2^p(y_n, y_{n+1}) &= d_2^p(TSz_{n-1}, TSRy_n) \\
&\leq \alpha \max M_2(y_n, z_{n-1}) + F(\min M_2(x_n, z_{n-1})) \\
&= \alpha \max\{d_2^p(y_n, y_{n+1}), d_3^p(z_{n-1}, z_n)\} + F(0) \\
&\leq \alpha d_3^p(z_{n-1}, z_n).
\end{aligned}$$

Vì, nếu $\max\{d_2^p(y_n, y_{n+1}), d_3^p(z_{n-1}, z_n)\} = d_2^p(y_n, y_{n+1})$ thì từ bất đẳng thức:

$$d_2^p(y_n, y_{n+1}) \leq \alpha d_2^p(y_n, y_{n+1}),$$

suy ra $y_n = y_{n+1}$ vì $0 \leqslant \alpha < 1$. Do đó:

$$d_2^p(y_n, y_{n+1}) \leq \alpha d_3^p(z_{n-1}, z_n). \tag{1.13}$$

Thay $x = x_{n-1}$, $z = z_n$ trong (1.8) và (1.11), ta được:

$$\begin{aligned}
M_3(z_n, x_{n-1}) &= \{d_3^p(z_n, RTx_{n-1}), d_3^p(z_n, RTSz_n), d_1^p(x_{n-1}, Sz_n)\} \\
&= \{d_3^p(z_n, z_n), d_3^p(z_n, z_{n+1}), d_1^p(x_{n-1}, x_n)\} \\
&= \{0, d_3^p(z_n, z_{n+1}), d_1^p(x_{n-1}, x_n)\}. \\
d_3^p(z_n, z_{n+1}) &= d_3^p(RTx_{n-1}, RTSz_n) \\
&\leq \alpha \max M_3(z_n, x_{n-1}) + F(\min M_3(z_n, x_{n-1})) \\
&= \alpha \max\{d_3^p(z_n, z_{n+1}), d_1^p(x_{n-1}, x_n)\} \\
&= \alpha d_1^p(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

Thay n bằng $n-1$ ta được:

$$d_3^p(z_{n-1}, z_n) \leq \alpha d_1^p(x_{n-2}, x_{n-1}). \tag{1.14}$$

Từ (1.12), (1.13) và (1.14) ta có:

$$\begin{aligned}
d_1^p(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha d_2^p(y_n, y_{n+1}) \leq \alpha^2 d_3^p(x_{n-1}, z_n) \\
&\leq \alpha^3 d_1^p(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \alpha^6 d_1^p(x_{n-4}, x_{n-3}) \\
.... &\leq \begin{cases} \alpha^{3k} d_1^p(x_1, x_2) & n = 2k+1, \\ \alpha^{3k} d_1^p(x_0, x_1) & n = 2k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vì $0 \leqslant \alpha < 1$, các dãy $(x_n), (y_n)$ và (z_n) là các dãy Cauchy.

Vì $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ là các không gian metric đầy đủ nên ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= a \in X; \\
\lim_{n\to\infty} y_n &= b \in Y; \\
\lim_{n\to\infty} z_n &= c \in Z.
\end{aligned}$$

Thay $x = x_n$ và $y = b$ trong bất đẳng thức(1.9) ta được:

$$\begin{aligned}
d_1^p(SRb, x_{n+1}) &= d_1^p(SRb, SRTx_n) \\
&\leq \alpha \max M_1(x_n, b) + F(\min M_1(x_n, b)),
\end{aligned} \tag{1.15}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} M_1(x_n, b) &= \{d_1^p(x_n, SRb), d_1^p(x_n, SRTx_n), d_2^p(b, Tx_n)\} \\ &= \{d_1^p(x_n, SRb), d_1^p(x_n, x_{n+1}), d_2^p(b, y_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Cho $n \longrightarrow \infty$ trong Bất đẳng thức (1.15) và do F là hàm liên tục tại 0 nên ta có:

$$d_1^p(SRb, a) \leq \alpha d_1^p(a, SRb),$$

suy ra

$$SRb = a.$$

Bằng cách tương tự, có thể chỉ ra rằng:

$$TSc = b \text{ và } RTa = c.$$

Từ (1.9), nếu ta thay $x = a, y = y_n$ thì ta được:

$$\begin{aligned} d_1^p(x_n, SRTa) &= d_1^p(SRy_n, SRTa) \\ &\leq \alpha \max M_1(a, y_n) + F(\min M_1(a, y_n)), \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} M_1(a, y_n) &= \{d_1^p(a, SRy_n), d_1^p(a, SRTa), d_2^p(y_n, Ta)\} \\ &= \{d_1^p(a, x_n), d_1^p(a, SRTa), d_2^p(y_n, Ta)\}. \end{aligned}$$

Cho $n \longrightarrow \infty$ ta được

$$\begin{aligned} d_1^p(a, SRTa) &\leq \alpha \max\{d_1^p(a, a), d_1^p(a, SRTa), d_2^p(b, Ta)\} \\ &= \alpha \max\{d_1^p(a, SRTa), d_2^p(b, Ta)\}. \end{aligned}$$

Suy ra hoặc:

$$d_1^p(a, SRTa) \leq \alpha d_1^p(a, SRTa) \Leftrightarrow SRTa = a.$$

hoặc:

$$d_1^p(a, SRTa) \leq \alpha d_2^p(b, Ta).$$

Bất đẳng thức trên cũng có thể được viết dưới dạng

$$d_1^p(a, Sc) \leq \alpha d_2^p(b, Ta). \tag{1.16}$$

vì $RTa = c$.

Thay $z = z_n$, $y = b$ trong bất đẳng thức (1.10) bằng cách tương tự như trên ta được

$$d_2^p(b, Ta) \leq \alpha d_3^p(c, Rb). \tag{1.17}$$

Tương tự, ta được

$$d_3^p(c, Rb) \leq \alpha d_1^p(a, Sc). \tag{1.18}$$

Từ (1.16), (1.17), (1.18) ta có:

$$d_1^p(a, Sc) \leq \alpha^3 d_1^p(a, Sc) \Leftrightarrow Sc = a.$$

Do vậy ta lại có $d_1^p(a, SRTa) = d_1^p(a, Sc) = 0$ hay

$$SRTa = a.$$

Vậy, ta đã chứng minh được a là một điểm bất động của SRT.

Bằng cách tương tự, ta chứng minh được b là một điểm bất động của TSR và c là một điểm bất động của RTS. Hơn nữa, ta còn chỉ ra rằng

$$Ta = b, Rb = c, Sc = a.$$

Để chứng minh a duy nhất ta giả sử $a' \in X$ là một điểm bất động khác của SRT, từ (1.9) nếu thay $x = a$, $y = Ta'$, ta được:

$$\begin{aligned} d_1^p(a', a) &= d_1^p(SRTa', SRTa) \\ &\leq \alpha \max M_1(a, Ta') + F(\min M_1(a, Ta')), \end{aligned}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} M_1(a, Ta') &= \{d_1^p(a, SRTa'), d_1^p(a, SRTa), d_2^p(Ta', Ta)\} \\ &= \{d_1^p(a, a'), d_1^p(a, a), d_2^p(Ta', b)\}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$d_1^p(a', a) \leq \alpha d_2^p(Ta', b). \tag{1.19}$$

Thay $z = c, y = Ta'$ trong bất đẳng thức (1.10) ta được:

$$\begin{aligned} d_2^p(b, Ta') &= d_2^p(TSc, TSRTa') \\ &\leq \alpha \max M_2(Ta', c) + F(\min M_2(Ta', c)), \end{aligned}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} M_2(Ta', c) &= \{d_2^p(Ta', TSc), d_2^p(Ta', TSRTa'), d_3^p(c, RTa')\} \\ &= \{d_2^p(Ta', b), d_2^p(Ta', Ta'), d_3^p(c, RTa')\}. \end{aligned}$$

Khi đó:

$$d_2^p(b, Ta') \leq \alpha d_3^p(c, RTa'). \tag{1.20}$$

Thay $z = c, x = a'$ trong bất đẳng thức (1.11) ta được:

$$\begin{aligned} d_3^p(RTa', c) &= d_3^p(RTa', RTSc) \\ &\leq \alpha \max M_3(c, a') + F(\min M_3(c, a')), \end{aligned}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} M_3(c, a') &= \{d_3^p(c, RTa'), d_3^p(c, RTSc), d_1^p(a', Sc)\} \\ &= \{d_3^p(c, RTa'), 0, d_1^p(a', a)\}. \end{aligned}$$

Khi đó, hoặc là

$$d_3^p(RTa', c) \leq \alpha d_1^p(a', a). \tag{1.21}$$

hoặc:

$$d_3^p(RTa', c) \leq \alpha d_3^p(RTa', c). \tag{1.22}$$

Từ (1.22) suy ra $RTa' = c$ vì $0 \leqslant \alpha < 1$.
Từ (1.19), (1.20) và (1.21) ta được

$$d_1^p(a', a) \leq \alpha d_2^p(Ta', b) \leq \alpha^2 d_3^p(RTa', c) \leq \alpha^3 d_1^p(a', a),$$

và vì $d_1^p(a', a) \leq \alpha^3 d_1^p(a', a)$ trong đó $0 \leq \alpha < 1$, suy ra $a' = a$. Do đó ta chứng minh được a là điểm bất động duy nhất của SRT.

Tương tự, ta có thể chứng minh rằng b là điểm bất động duy nhất của TSR và c là điểm bất động duy nhất của RTS. □

Trong trường hợp $p = 4$, năm 2009, L. Kikina và K. Kikina ([5]) đã chứng minh:

Định lý 1.9. ([5]) *Cho* $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ *và* (U, d_4) *là* 4 *không gian metric đầy đủ và* $T : X \to Y,\ S : Y \to Z,\ R : Z \to U$ *và* $Q : U \to X$ *là các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$d_1(QRSy, QRSTx) \leq c\frac{F_1(x, y)}{G_1(x, y)}; \tag{1.23}$$

$$d_2(TQRz, TQRSy) \leq c\frac{F_2(y, z)}{G_2(y, z)}; \tag{1.24}$$

$$d_3(STQu, STQRz) \leq c\frac{F_3(z, u)}{G_3(z, u)}; \tag{1.25}$$

$$d_4(RSTx, RSTQu) \leq c\frac{F_4(u, x)}{G_4(u, x)}, \tag{1.26}$$

với mọi $x \in X,\ y \in Y,\ x \in Z$ *và* $u \in U$ *thỏa mãn*

$$G_1(x, y) \neq 0,\ G_2(y, z) \neq 0,\ G_3(z, u) \neq 0,\ G_4(u, x) \neq 0,$$

trong đó $0 \leq c < 1$ *và*

$$\begin{aligned}
F_1(x, y) = \max\{&d_1(x, QRSTx)d_4(RSy, RSTx), d_1(x, QRSy)d_2(y, Tx)\}\\
&d_1(x.QRSTx)d_3(Sy, STx), d_1(x, QRSTx)d_2(y, TQRSy);\\
F_2(y, z) = \max\{&d_2(y, TQRSy)d_1(QRz, QRSy), d_2(y, TQRz)d_3(z, Sy)\}\\
&d_2(y.TQRSy)d_4(Rz, RSy), d_2(y, TQRSy)d_3(z, STQRz);\\
F_3(z, u) = \max\{&d_3(z, STQRz)d_2(TQu, TQRz), d_3(z, STQu)d_4(u, Rz)\}\\
&d_3(z.STQRz)d_1(Qu, QRz), d_3(z, STQRz)d_4(u, RSTQu);\\
F_4(u, x) = \max\{&d_4(u, RSTQu)d_3(STx, STQu), d_4(u, RSTx)d_1(x, Qu)\}\\
&d_4(u.RSTQu)d_2(Tx, TQu), d_4(u, RSTQu)d_1(x, QRSTx);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1(x, y) &= \max\{d_1(x, QRSy), d_1(x, QRSTx), d_2(Tx, TQRSy)\};\\
G_2(y, z) &= \max\{d_2(y, TQRz), d_2(y, TQRSy), d_3(Sy, STQRz)\};\\
G_3(z, u) &= \max\{d_3(z, STQu), d_3(z, STQRz), d_4(Rz, RSTQu)\};\\
G_4(u, x) &= \max\{d_4(u, RSTx), d_4(u, RSTQu), d_1(Qu, QRSTx)\}.
\end{aligned}$$

Khi đó $QRST$ có một điểm bất động duy nhất $\alpha \in X$, $TQRS$ có một điểm bất động duy nhất $\beta \in Y$, $STQR$ có một điểm bất động duy nhất $\gamma \in Z$ và $RSTQ$ có một điểm bất động duy nhất $\delta \in U$. Hơn nữa,

$$T\alpha = \beta, S\beta = \gamma, R\gamma = \delta \quad \text{và} \quad Q\delta = \alpha.$$

Hệ quả 1.10 ([5]) *Trong Định lý 1.9, nếu xét không gian metric (U, d_4) giống với không gian metric (X, d_1), tức là $U = X, d_4 = d_1$ và Q là ánh xạ đồng nhất trên X (tức là $Qx = x, \forall x \in X$) thì ta được một định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa ba không gian metric mà là sự mở rộng của Định lý 1.7.*

Chương 2

Điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa năm không gian metric

Trong chương này chúng tôi sẽ chứng minh lại kết quả M. Garg và S. Agarwal ([3]) trong trường hợp $p = 5$ và chứng minh một số cải tiến kết quả của định lý này.

2.1 Định lý điểm bất động của Garg và Agarwal

Định lí 2.1. ([3]) *Cho* (X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3), (U, d_4), *và* (V, d_5) *là các không gian metric đầy đủ. Cho* $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$, $R : Z \to U$, $Q : U \to V$ *và* $P : V \to X$ *là năm ánh xạ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:*

$$d_1(PQRSy, PQRSTx) \leq c\frac{f_1(x, y)}{g_1(x, y)}; \tag{2.1}$$

$$d_2(TPQRz, TPQRSy) \leq c\frac{f_2(y, z)}{g_2(y, z)}; \tag{2.2}$$

$$d_3(STRQu, STPQRz) \leq c\frac{f_3(z, u)}{g_3(z, u)}; \tag{2.3}$$

$$d_4(RSTPv, RSTPQu) \leq c\frac{f_4(u, v)}{g_4(u, v)}; \tag{2.4}$$

$$d_5(QRSTx, QRSTPv) \leq c\frac{f_5(v, x)}{g_5(v, x)}, \tag{2.5}$$

với mọi $x \in X, y \in Y, z \in Z, u \in U$ *và* $v \in V$ *sao cho* $g_1(x,y) \neq 0$, $g_2(y,z) \neq 0$, $g_3(z,u) \neq 0$, $g_4(u,v) \neq 0$, $g_5(v,x) \neq 0$, *trong đó* $0 \leq c < 1$ *và*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = \max\{&d_1(x, PQRSTx)d_5(QRSy, QRSTx);\\ &d_1(x, PQRSTx)d_4(RSy, RSTx);\\ &d_1(x, PQRSTx)d_3(Sy, STx);\\ &d_1(x, PQRSTx)d_2(y, TPQRSy);\\ &d_1(x, PQRSy)d_2(y, Tx)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(y,z) = \max\{&d_2(y, TPQRSy)d_1(PQRz, PQRSy);\\ &d_2(y, TPQRSy)d_5(QRz, QRSy);\\ &d_2(y, TPQRSy)d_4(Rz, RSy);\\ &d_2(y, TPQRSy)d_3(z, STPQRz);\\ &d_2(y, TPQRz)d_3(z, Sy)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(z,u) = \max\{&d_3(z, STPQRz)d_2(TPQu, TPQRz)\\ &d_3(z, STPQRz)d_1(PQu, PQRz);\\ &d_3(z, STPQRz)d_5(Qu, QRz);\\ &d_3(z, STPQRz)d_4(u, RSTPQu);\\ &d_3(z, STPQu)d_4(u, Rz)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(u,v) = \max\{&d_4(u, RSTPQu)d_3(STPv, STPQu);\\ &d_4(u, RSTPQu)d_1(TPv, TPQu);\\ &d_4(u, RSTPQu)d_1(Pv, PQu);\\ &d_4(u, RSTPQu)d_5(v, QRSTPv);\\ &d_4(u, RSTPv)d_5(v, Qu)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5(v,x) = \max\{&d_5(v,QRSTPv)d_4(RSTx,RSTPv);\\ &d_5(v,QRSTPv)d_3(STx,STPv);\\ &d_5(v,QRSTPv)d_2(Tx,TPv);\\ &d_5(v,QRSTPv)d_1(x,PQRSTx);\\ &d_5(v,QRSTx)d_1(x,Pv)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \max\{d_1(x,PQRSy); d_1(x,PQRSTx); d_2(Tx,TPQRSy)\};\\ g_2(y,z) &= \max\{d_2(y,TPQRz); d_2(y,TPQRSy); d_3(Sy,STPQRz)\};\\ g_3(z,u) &= \max\{d_3(z,STPQu); d_3(z,STPQRz); d_4(Rz,RSTPQu)\};\\ g_4(u,v) &= \max\{d_4(u,RSTPv); d_4(u,RSTPQu); d_5(Qu,QRSTPv)\};\\ g_5(v,x) &= \max\{d_5(v,QRSTx); d_5(v,QRSTPv); d_1(Pv,PQRSTx)\}. \end{aligned}$$

Khi đó $PQRST$ có duy nhất một điểm bất động $\alpha \in X$, $TPQRS$ có duy nhất một điểm bất động $\beta \in Y$, $STPQR$ có duy nhất một điểm bất động $\gamma \in Z$, $RSTPQ$ có duy nhất một điểm bất động $\delta \in U$, $QRSTP$ có duy nhất một điểm bất động $\xi \in V$. Ngoài ra, $T\alpha = \beta$, $S_\beta = \gamma$, $R_\gamma = \delta$, $Q_\delta = \xi$ và $P_\xi = \alpha$.

Chứng minh. Cho $x_0 \in X$ là một điểm tùy ý. Trước tiên ta xác định 5 dãy (x_n), (y_n), (z_n), (u_n) và (v_n) thuộc X, Y, Z, U và V lần lượt như sau:

$$\begin{aligned} &x_n = (PQRST)^n x_0; y_n = Tx_{n-1};\\ &z_n = Sy_n; u_n = Rz_n; \quad \text{và} \quad v_n = Qu_n, \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Ta giả sử rằng:

$$x_n \neq x_{n+1}, y_n \neq y_{n+1}, z_n \neq z_{n+1}, u_n \neq u_{n+1}, v_n \neq v_{n+1}. \text{Với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, nếu $x_n = x_{n+1}$ với một vài giá trị n, $y_{n+1} = y_{n+2}$, $z_{n+1} = z_{n+2}$, $u_{n+1} = u_{n+2}$, $v_{n+1} = v_{n+2}$ và ta có thể đặt $x_n = \alpha$, $y_{n+1} = \beta$, $z_{n+1} = \gamma$, $u_{n+1} = \delta$, $v_{n+1} = \xi$.

Nếu $y_n = y_{n+1}$ thì $z_n = z_{n+1}$, $u_n = u_{n+1}$, $v_n = v_{n+1}$ và đẳng thức sau cùng là $x_n = x_{n+1}$.

Nếu $z_n = z_{n+1}$ thì $u_n = u_{n+1}$, $v_n = v_{n+1}$ và các đẳng thức sau cùng là $x_n = x_{n+1}$ và $y_n = y_{n+1}$. Tương tự nếu $u_n = u_{n+1}$ hoặc $v_n = v_{n+1}$ thì lại có $x_n = x_{n+1}$.

Thay $z = z_{n-1}, y = y_n$ trong (2.2) ta được:

$$d_2(y_n, y_{n+1}) = d_2(TPQRz_{n-1}, TPQRSy_n) \leq c\frac{f_2(y_n, z_{n-1})}{g_2(y_n, z_{n-1})}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_2(y_n, y_{n+1})d_1(x_{n-1}, x_n); d_2(y_n, y_{n+1})d_5(v_{n-1}, v_n); d_2(y_n, y_{n+1})\\ d_4(u_{n-1}, u_n); d_2(y_n, y_{n+1})d_3(z_{n-1}, z_n); d_2(y_n, y_n)d_3(z_{n-1}, z_n)\}\end{array}}{\max\{d_2(y_n, y_n); d_2(y_n, y_{n+1}; d_3(z_n, z_n)\}}$$

$$= c.\frac{\max\{d_2(y_n, y_{n+1})[d_1(x_{n-1}, x_n); d_5(v_{n-1}, v_n); d_4(u_{n-1}, u_n); d_3(z_{n-1}, z_n)]\}}{d_2(y_n, y_{n+1})}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} d_2(y_n, y_{n+1}) \leq c.\max\{&d_1(x_{n-1}, x_n); d_3(z_{n-1}, z_n);\\ &d_4(u_{n-1}, u_n); d_5(v_{n-1}, v_n)\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Thay $u = u_{n-1}, z = z_n$ trong (2.3) ta được:

$$d_3(z_n, z_{n+1}) = d_3(STPQu_{n-1}, STPQRz_n) \leq c\frac{f_3(z_n, u_{n-1})}{g_3(u_n, z_{n-1})}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_3(z_n, z_{n+1})d_2(y_n, y_{n+1}); d_3(z_n, z_{n+1})d_1(x_{n-1}, x_n); d_3(z_n, z_{n+1})\\ d_5(v_{n-1}, v_n); d_3(z_n, z_{n+1})d_4(u_{n-1}, u_n); d_3(z_n, z_n)d_4(u_{n-1}, u_n)\}\end{array}}{\max\{d_3(z_n, z_n); d_3(z_n, z_{n+1}; d_4(u_n, u_n)\}}$$

$$= c.\frac{\max\{d_3(z_n, z_{n+1})[d_2(y_n, y_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n); d_5(v_{n-1}, v_n); d_4(u_{n-1}, u_n)]\}}{d_3(z_n, z_{n+1})}$$

$$= c.\max\{d_2(y_n, y_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n; d_4(u_{n-1}, u_n); d_5(v_{n-1}, v_n)\}.$$

Từ (2.6) ta có:

$$\begin{aligned} d_3(z_n, z_{n+1}) \leq c.\max\{&d_1(x_{n-1}, x_n); d_3(z_{n-1}, z_n);\\ &d_4(u_{n-1}, u_n); d_5(v_{n-1}, v_n)\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Thay $v = v_{n-1}, u = u_n$ trong (2.4) ta được:

$$d_4(u_n, u_{n+1}) = d_4(RSTPv_{n-1}, RSTPQu_n) \leq c\frac{f_4(u_n, v_{n-1})}{g_4(u_n, v_{n-1})}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_4(u_n, u_{n+1})d_3(z_n, z_{n+1}); d_4(u_n, u_{n+1})d_2(y_n, y_{n+1}); d_4(u_n, u_{n+1})\\ d_1(x_{n-1}, x_n); d_4(u_n, u_{n+1})d_5(v_{n-1}, v_n); d_4(u_n, u_n)d_5(v_{n-1}, v_n)\}\end{array}}{\max\{d_4(u_n, u_n); d_4(u_n, u_{n+1}; d_5(v_n, v_n)\}}$$

$$= c.\frac{\max\{d_4(u_n, u_{n+1})[d_3(z_n, z_{n+1}); d_2(y_n, y_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n); d_5(v_{n-1}, v_n)]\}}{d_4(u_n, u_{n+1})}$$

$$= c.\max\{d_3(z_n, z_{n+1}); d_2(y_n, y_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n); d_5(v_{n-1}, v_n)\}.$$

Từ (2.6) và (2.7) ta có:

$$\begin{aligned} d_4(u_n, u_{n+1}) \leq c.\max\{&d_1(x_{n-1}, x_n); d_3(z_{n-1}, z_n);\\ &d_4(u_{n-1}, u_n); d_5(v_{n-1}, v_n)\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Thay $v = v_n, x = x_{n-1}$ trong (2.5) ta được:

$$d_5(v_n, v_{n+1}) = d_5(QRSTx_{n-1}, QRSTPv_n) \leq c\frac{f_5(v_n, x_{n-1})}{g_5(v_n, x_{n-1})}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_5(v_n, v_{n+1})d_4(u_n, u_{n+1}); d_5(v_n, v_{n+1})d_3(z_n, z_{n+1}); d_5(v_n, v_{n+1})\\ d_2(y_n, y_{n+1}); d_5(v_n, v_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n); d_5(v_n, v_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n)\}\end{array}}{\max\{d_5(v_n, v_n); d_5(v_n, v_{n+1}; d_1(x_n, x_n)\}}$$

$$= c.\frac{\max\{d_5(v_n, v_{n+1})[d_4(u_n, u_{n+1}); d_3(z_n, z_{n+1}); d_2(y_n, y_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n)]\}}{d_5(v_n, v_{n+1})}$$

$$= c.\max\{d_4(u_n, u_{n+1}); d_3(z_n, z_{n+1}); d_2(y_n, y_{n+1}); d_1(x_{n-1}, x_n)\}.$$

Từ (2.6), (2.7) và (2.8) ta có:

$$\begin{aligned} d_5(v_n, v_{n+1}) \leq c.\max\{&d_1(x_{n-1}, x_n); d_3(z_{n-1}, z_n);\\ &d_4(u_{n-1}, u_n); d_5(v_{n-1}, v_n)\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Thay $x = x_n, y = y_n$ trong (2.1) ta được:

$$d_1(x_n, x_{n+1}) = d_1PQRSy_n, PQRSTx_n) \leq c\frac{f_1(x_n, y_n)}{g_1(x_n, y_n)}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_1(x_n, x_{n+1})d_5(v_n, v_{n+1}); d_1(x_n, x_{n+1})d_4(u_n, u_{n+1}); d_1(x_n, x_{n+1})\\ d_3(z_n, z_{n+1}); d_1(x_n, x_{n+1}); d_2(y_n, y_{n+1}); d_1(x_n, x_{n+1})d_2(y_n, x_{n+1})\}\end{array}}{\max\{d_1(x_n, x_n); d_1(x_n, x_{n+1}; d_2(y_{n+1}, y_{n+1})\}}$$

$$= c.\frac{\max\{d_1(x_n, x_{n+1})[d_5(v_n, v_{n+1}); d_4(u_n, u_{n+1}); d_3(z_n, z_{n+1}); d_2(y_n, x_{n+1})]\}}{d_1(x_n, x_{n+1})}$$

$$= c.\max\{d_5(v_n, v_{n+1}); d_4(u_n, u_{n+1}); d_3(z_n, z_{n+1}); d_2(y_n, y_{n+1})\}.$$

Từ (2.6), (2.7), (2.8) và (2.9) ta có:

$$\begin{aligned} d_1(x_n, x_{n+1}) \leq c.\max\{&d_1(x_{n-1}, x_n); d_3(z_{n-1}, z_n);\\ &d_4(u_{n-1}, u_n); d_5(v_{n-1}, v_n)\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Tiếp tục như vậy, bằng cách quy nạp từ các bất đẳng thức (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) và (2.10) ta được các bất đẳng thức sau:

$$d_1(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1}\{d_1(x_1, x_2); d_3(z_1, z_2); d_4(u_1, u_2); d_5(v_1, v_2)\}.$$

$$d_2(y_n, y_{n+1}) \leq c^{n-1}\{d_1(x_1, x_2); d_3(z_1, z_2); d_4(u_1, u_2); d_5(v_1, v_2)\}.$$

$$d_3(z_n, z_{n+1}) \leq c^{n-1}\{d_1(x_1, x_2); d_3(z_1, z_2); d_4(u_1, u_2); d_5(v_1, v_2)\}.$$

$$d_4(u_n, u_{n+1}) \leq c^{n-1}\{d_1(x_1, x_2); d_3(z_1, z_2); d_4(u_1, u_2); d_5(v_1, v_2)\}.$$

$$d_5(v_n, v_{n+1}) \leq c^{n-1}\{d_1(x_1, x_2); d_3(z_1, z_2); d_4(u_1, u_2); d_5(v_1, v_2)\}.$$

Vì $0 \leq c < 1$, nên các dãy(x_n), (y_n), (z_n), (u_n) và (v_n) là các dãy Cauchy. Mặt khác, vì (X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3), (U, d_4) và (V, d_5) là các không gian metric đầy đủ nên ta có:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \in X,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \beta \in Y,\ \lim_{n\to\infty} z_n = \gamma \in Z,$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \delta \in U,\ \lim_{n\to\infty} v_n = \xi \in V.$$

Thay $x = x_n$ và $y = \beta$ trong (2.1) ta được:

$$d_1(PQRS_\beta, x_{n+1}) = d_1(PQRS_\beta,\ PQRSTx_n) \leq c\,\frac{f_1(x_n, \beta)}{g_1(x_n, \beta)}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_1(x_n, x_{n+1})d_5(QRS_\beta, v_{n+1}); d_1(x_n, x_{n+1})d_4(RS_\beta, u_{n+1}); d_1(x_n, x_{n+1})\\ d_3(S_\beta, z_{n+1}); d_1(x_n, x_{n+1}); d_2(\beta, TPQRS_\beta); d_1(x_n, PQRS_\beta)d_2(\beta, y_{n+1})\}\end{array}}{\max\{d_1(x_n, PQRS_\beta); d_1(x_n, x_{n+1}; d_2(y_{n+1}, TPQRS_\beta)\}}$$

Khi $n \to \infty$ ta được $d_1(PQRS_\beta, \alpha) \leqslant 0$. Từ đó suy ra $PQRS_\beta = \alpha$

Bằng cách tương tự, từ các bất đẳng thức (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) suy ra:

$$QRST_\alpha = \xi,\ RSTP_\xi = \delta,\ STPQ_\delta = \gamma,\ TPQR_\gamma = \beta.$$

Thay $z = S_\beta$ và $y = y_n$ trong (2.2) ta được:

$$d_2(TQRS_\beta, y_{n+1}) = d_2(TPQRS_\beta, TPQRSy_n) \leq c\,\frac{f_2(y_n, S_\beta)}{g_2(y_n, S_\beta)}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_2(y_n, y_{n+1})d_1(PQRS_\beta, x_n); d_2(y_n, y_{n+1})d_5(QRS_\beta, v_n); d_2(y_n, y_{n+1})\\ d_4(RS_\beta, u_n); d_2(y_n, y_{n+1}); d_3(S_\beta, STPQRS_\beta; d_2(y_n, TPQRS_\beta)d_3(S_\beta, z_n)\}\end{array}}{\max\{d_2(y_n, TPQRS_\beta); d_2(y_n, y_{n+1}; d_3(z_n, STPQRS_\beta)\}}$$

Khi $n \to \infty$ và do $PQRS_\beta = \alpha$ nên ta có

$$d_2(TPQRS_\beta, \beta) \leq c.\frac{d_2(\beta, TPQRS_\beta)d_3(S_\beta, \gamma)}{\max\{d_2(\beta, TPQRS_\beta); d_3(\gamma, ST_\alpha)\}}$$

Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp (i)

Nếu $\max\{d_2(\beta,\, TPQRS_\beta); d_3(\gamma, ST_\alpha)\} = d_2(\beta,\, TPQRS_\beta)$ ta có

$$\begin{aligned} d_2(TPQRS_\beta, \beta) = d_2(T_\alpha, \beta) &\leqslant c.\frac{d_2(\beta, TPQRS_\beta)d_3(S_\beta, \gamma)}{d_2(\beta,\, TPQRS_\beta)} \\ &= cd_3(S_\beta, \gamma). \end{aligned}$$

Trường hợp (ii)
Nếu $\max\{d_2(\beta,\, TPQRS_\beta); d_3(\gamma, ST_\alpha)\} = d_3(\gamma, ST_\alpha)$
và $d_2(\beta,\, TPQRS_\beta) \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} d_2(TPQRS_\beta, \beta) = d_2(T_\alpha,\, \beta) &\leq c.\frac{d_2(\beta, TPQRS_\beta)d_3(S_\beta, \gamma)}{d_3(\gamma, ST_\alpha)} \\ &= c.\frac{d_2(\beta, TPQRS_\beta)d_3(S_\beta, \gamma)}{d_2(\beta,\, TPQRS_\beta)} \\ &= cd_3(S_\beta, \gamma). \end{aligned}$$

Do đó cả hai trường hợp ta có:

$$d_2(TPQRS_\beta, \beta) = d_2(T\alpha, \beta) \leq cd_3(S_\beta, \gamma). \tag{2.11}$$

Thay $z = z_n$ và $u = R_\gamma$ trong (2.4) ta được:

$$d_3(STPQR_\gamma, z_{n+1}) = d_3(STPQR_\gamma, STPQRz_n) \leq c\frac{f_3(z_n, R_\gamma)}{g_3(z_n, R_\gamma)}$$

$$= c.\frac{\begin{aligned}\max\{&d_3(z_n, z_{n+1})d_2(TPQR_\gamma, y_{n+1}); d_3(z_n, z_{n+1})d_1(PQR_\gamma, x_n); \\ &d_3(z_n, z_{n+1})d_5(QR_\gamma, v_n); d_3(z_n, z_{n+1})d_4(R_\gamma, RSTPQR_\gamma); \\ &d_3(z_n, STPQR_\gamma)d_4(R_\gamma, u_n)\}\end{aligned}}{\max\{d_3(z_n, STPQR_\gamma); d_3(z_n, z_{n+1}); d_4(u_n, RSTPQR_\gamma)\}}.$$

Cho $n \to \infty$ và do $TPQR_\gamma = \beta$ nên ta được:

$$\begin{aligned} d_3(STPQR_\gamma, \gamma) = d_3(S_\beta, \gamma) &\leq c.\frac{d_3(\gamma,\, STPQR_\gamma)d_4(R_\gamma, \delta)}{\max\{d_3(\gamma, STPQR_\gamma); d_4(\delta, RS_\beta)\}} \\ &= cd_4(R\gamma, \delta). \end{aligned}$$

Do đó như trên ta được bất đẳng thức sau:

$$d_3(STPQR_\gamma, \gamma) = d_3(S_\beta, \gamma) \leq d_4(R_\gamma, \delta). \tag{2.12}$$

Bằng cách tương tự, sử dụng bất đẳng thức (2.4), (2.5) và (2.1) ta được:

$$d_4(RSTPQ_\delta, \delta) = d_4(R_\gamma, \delta) \leq cd_5(Q_\delta, \xi). \tag{2.13}$$

$$d_5(QRSTP_\xi, \xi) \ = d_5(Q_\delta, \xi) \leq cd_1(P_\xi, \alpha). \tag{2.14}$$

$$d_1(PQRST\alpha, \alpha) = d_1(P_\xi, \alpha) \leq cd_2(T\alpha, \beta). \tag{2.15}$$

Từ (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) và (2.15) ta được:

$$d_2(TPQRS_\beta, \beta) = d_2(T\alpha, \beta) \leq cd_3(S_\beta, \gamma) \leq c^2 d_4(R_\gamma, \delta) \leq c^3 d_5(Q_\delta, \xi)$$
$$\ldots \leqslant c^4 d_1(P_\xi, \alpha) \leq c^5 d_2(T\alpha, \beta) = c^5 d_2(TPQRS_\beta, \beta).$$

Từ đó suy ra: $TPQRS_\beta = \beta : T\alpha = \beta$; $S_\beta = \gamma$; $R_\gamma = \delta$; $Q_\delta = \xi$; $P_\xi = \alpha$, vì $0 \leqslant c < 1$.

Tương tự ta có thể chỉ ra rằng: $STPQR_\gamma = \gamma$; $RSTPQ_\delta = \delta$; $QRSTP_\xi = \xi$; $PQRST\alpha = \alpha$; $TPQRS_\beta = \beta$. Nghĩa là $\alpha; \beta; \gamma; \delta$ và ξ lần lượt là các điểm bất động của $PQRST$, $TPQRS$, $STPQR$, $RSTPQ$ và $QRSTP$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh các điểm bất động trên là duy nhất. Ta có thể giả sử rằng α' là một điểm bất động khác thuộc $PQRST$.
Sử dụng bất đẳng thức (2.1) với $y = T\alpha$ và $x = \alpha'$ ta có :

$$d_1(\alpha, \alpha') = d_1(PQRST\alpha, PQRST\alpha') \leqslant c\frac{f_1(\alpha', T_\alpha)}{g_1(\alpha', T_\alpha)}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_1(\alpha', \alpha')d_5(QRST\alpha, QRST\alpha'); d_1(\alpha', \alpha')d_4(RST\alpha, RST\alpha');\\ d_1(\alpha', \alpha')d_3(ST\alpha, ST\alpha'); d_1(\alpha', \alpha')d_2(T\alpha, TPQRST\alpha);\\ d_1(\alpha', \alpha)d_2(T\alpha, T\alpha')\}\end{array}}{\max\{d_1(\alpha', \alpha); d_1(\alpha', \alpha'); d_2(T\alpha', T\alpha)\}}$$

$$= c.\frac{d_1(\alpha', \alpha)d_2(T\alpha, T\alpha')}{\max\{d_1(\alpha', \alpha); d_2(T\alpha', T\alpha)\}}.$$

Ở đây có hai trường hợp xảy ra:
Trường hợp (i)
Nếu $\max\{d_1(\alpha', \alpha); d_2(T\alpha', T\alpha)\} = d_2(T\alpha', T\alpha)$ thì ta có:

$$d_1(\alpha, \alpha') \leq cd_1(\alpha', \alpha) \text{ cho ra } \alpha' = \alpha.$$

Trường hợp (ii)
Nếu $\max\{d_1(\alpha',\alpha); d_2(T\alpha',T\alpha)\} = d_1(\alpha',\alpha)$ thì ta có:

$$d_1(\alpha,\alpha') \leq cd_2(T\alpha,T\alpha'). \tag{2.16}$$

Bây giờ thay $z = ST\alpha$ và $y = T\alpha'$ trong công thức (2.2) ta được:

$$d_2(T\alpha,T\alpha') = d_2(TPQRT_\alpha, TPQRST_{\alpha'}) \leq c\frac{f_2(T\alpha',ST\alpha)}{g_2(T\alpha',ST\alpha)}$$

$$= c.\frac{\begin{array}{c}\max\{d_2(T\alpha',T\alpha')d_1(\alpha,\alpha'); d_2(T\alpha',T\alpha')d_5(QRST\alpha,QRST\alpha');\\ d_2(T\alpha',T\alpha')d_4(RST\alpha,RST\alpha'); d_2(T\alpha',T\alpha')\\ d_3(ST\alpha,STPQRST\alpha); d_2(T\alpha',T\alpha)d_3(ST\alpha,ST\alpha')\}\end{array}}{\max\{d_2(T\alpha',T\alpha); d_2(T\alpha',T\alpha'); d_3(ST\alpha',ST\alpha)\}}$$

$$= c.\frac{\max d_2(T\alpha',T\alpha)d_3(ST\alpha,ST\alpha')}{\max\{d_2(T\alpha',T\alpha); d_3(ST\alpha',ST\alpha)\}}.$$

Như đã nói ở trên ta được:

$$d_2(T\alpha,T\alpha') \leq cd_3(ST\alpha,ST\alpha'). \tag{2.17}$$

Tương tự thay $u = RST\alpha$ và $z = ST\alpha'$ trong công thức (2.3) ta được:

$$d_3(ST\alpha,ST\alpha') \leq cd_4(RST\alpha,RST\alpha'). \tag{2.18}$$

Thay $v = QRST\alpha$ và $u = RST\alpha'$ trong công thức (2.4) ta được:

$$d_4(RST\alpha,RST\alpha') \leq cd_5(QRST\alpha,QRST\alpha'). \tag{2.19}$$

Thay $x = PQRST\alpha$ và $v = QRST\alpha'$ trong công thức (2.5) ta được:

$$d_5(QRST\alpha,QRST\alpha') \leq cd_1(PQRST\alpha,PQRST\alpha')$$

$$= cd_1(\alpha,\alpha'). \tag{2.20}$$

Từ công thức (2.16), (2.17),(2.18), (2.19) và (2.20) ta được:

$$\begin{aligned} d_1(\alpha,\alpha') &\leq cd_2(T\alpha,T\alpha') \leq c^2d_3(ST\alpha,ST\alpha')\\ &\leq c^3d_4(RST\alpha,RST\alpha') \leq c^4d_5(QRST\alpha,QRST\alpha') \leq c^5d_1(\alpha,\alpha'), \end{aligned}$$

Điều này vô lý vì $0 \leq c < 1$. Do đó $d_1(\alpha, \alpha') = 0$ nghĩa là $\alpha = \alpha'$, tức là α là điểm cố định duy nhất của $PQRST$.

Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh rằng $\beta; \gamma; \delta$ và ξ lần lượt là điểm bất động của $TPQRS$, $STPQR$, $RSTPQ$, và $QRSTP$. Vậy định lý đã được chứng minh. □

Nhận xét. *Nếu ta xét định lý trên trong trường hợp không gian metric (V, d_5) trùng với không gian metric (X, d_1), nghĩa là $V = X$, $d_5 = d_1$ và P là ánh xạ đồng nhất của X, nghĩa là $Px = x$ với mọi $x \in X$, thì ta nhận được Định lý 1.9. Như vậy, Định lý 2.1 là một mở rộng của Định lý 1.9 khi nâng số không gian lên 5.*

2.2 Một số cải tiến của Định lý 2.1

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh một số cải tiến của Định lý 2.1. Cụ thể, chúng tôi sẽ xem xét vấn đề điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa 5 không gian metric, với các hằng số c trong các điều kiện của Định lý thay đổi và không yêu cầu tính đầy đủ của tất cả các không gian. Ngoài ra chúng tôi chứng minh thêm trong trường hợp không gian compact. Cho $(M_1, d_1), (M_2, d_2), ..., (M_5, d_5)$ là các không gian metric và

$$A_1 : M_1 \to M_2, \ ... \ , A_4 : M_4 \to M_5, \ A_5 : M_5 \to M_1$$

là các ánh xạ giữa các không gian đó. Khi đó ta có các ánh xạ hợp thành từ mỗi không gian $M_j, \ j = 1, \ldots, 5$, vào chính nó

$$J_1 = A_5 A_{5-1} \ldots A_1 : M_1 \longrightarrow M_1,$$
$$J_j = A_{j-1} \ldots A_1 A_5 \ldots A_j : M_j \longrightarrow M_j, \ j = 2, 3, 4, 5.$$

Kí hiệu

$A_{5+j} := A_j : M_j \to M_{j+1}$, với $j = 1, ..., 4$, và

$A_{10} := A_5 : M_5 \to M_1$.

Cố định $k \in \{1, ..., 5\}$, với mỗi $j = 1, ..., 5$, ta kí hiệu các ánh xạ

$C_{k,j} := A_{5+j-1} A_{5+j-2} ... A_k : M_k \to M_j$ nếu $j < k$,

$C_{k,j} := A_{j-1}A_{j-2}...A_k : M_k \to M_j$ nếu $j > k$ và
$C_{k,k} := H_k : M_k \to M_k$ nếu $j = k$.

Tiếp theo ta thiết lập các hàm $F_j(x, y)$ và $G_j(x, y)$ như sau: với mỗi $j = 1, ..., 4$, đặt

$$F_j(x,y) = \max\Big\{d_j(x, J_j(x)) \max_{l\in\{1,...,5\}\setminus\{j,j+1\}} \{d_l(C_{j,l}(x), C_{(j+1),l}(y))\},$$
$$d_j(x, J_j(x)).d_{j+1}(y, J_{j+1}(y)), d_j(x, C_{(j+1),j}(y)).d_{j+1}(y, A_j(x))\Big\},$$
$$G_j(x,y) = \max\{d_j(x, C_{(j+1),j}(y)), d_j(x, J_j(x)), d_{j+1}(A_j(x), J_{j+1}(y))\},$$

với $x \in M_j,\ y \in M_{j+1}$ và

$$F_5(x,y) = \max\Big\{d_5(x, J_5(x)) \max_{l\in\{1,...,5\}\setminus\{5,1\}} \{d_l(C_{5,l}(x), C_{1,l}(y))\},$$
$$d_5(x, J_5(x)).d_1(y, J_1(y)), d_5(x, C_{1,5}(y)).d_1(y, A_5(x))\Big\},$$
$$G_5(x,y) = \max\{d_5(x, C_{1,5}(y)), d_5(x, J_5(x)), d_1(A_5(x), J_1(y))\},$$

với $x \in M_5, y \in M_1$.

Định lí 2.2. *Cho $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2), ..., (M_5, \rho_5)$ là các không gian metric đầy đủ, $A_j : M_j \to M_{j+1}$ với $j = 1, ..., 4$ và $A_5 : M_5 \to M_1$ là các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện*

$$\rho_j(C_{(j+1),j}(x_{j+1}), J_j(x_j)) \le c_j \frac{F_j(x_j, x_{j+1})}{G_j(x_j, x_{j+1})} \text{ với } j = 1, ..., 4,$$
$$\rho_5(C_{1,5}(x_1), J_5(x_5)) \le c_5 \frac{F_5(x_5, x_1)}{G_5(x_5, x_1)}, \tag{2.21}$$

với mọi $x_j \in M_j, j = 1, ..., 5$ mà

$$G_j(x_j, x_{j+1}) \ne 0 \ (j = 1, ..., 4),\ G_5(x_5, x_1) \ne 0,$$

trong đó $c_j,\ j = 1, \ldots, 5$ là các hằng số thỏa mãn

$$\max_{i\ne j\in\{1,...,5\}} \{c_i c_j\} < 1, \tag{2.22}$$

các ánh xạ $C_{i,j},\ J_j$ được xác định như trên. Khi đó J_j có điểm bất động duy nhất $x_j^* \in M_j$, với mỗi $j \in \{1, ..., 5\}$. Hơn nữa $A_j(x_j^*) = x_{j+1}^*$, với $j = 1, ..., 4$ và $A_5(x_5^*) = x_1^*$.

Chứng minh. Trước hết ta thấy rằng, trong các hằng số $c_1, c_2, \ldots, c_5$ chỉ tồn tại không quá một hằng số lớn hơn hoặc bằng 1, các hằng số còn lại phải nhỏ hơn hẳn 1. Vì nếu ngược lại thì điều kiện (2.22) không thỏa mãn. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $0 \leq c_2, \ldots, c_5 < 1$.

Đặt $c = \max\{c_2, ..., c_5\}$, khi đó $0 \leq c < 1$. Để ý rằng, điều kiện

$$\max_{i \neq j \in \{1,...,5\}} \{c_i c_j\} < 1$$

sẽ kéo theo $c_1 c < 1$.

Lấy một phần tử tùy ý $y_{1,0} \in M_1$. Ta xây dựng các dãy số

$$(y_{1,n}), (y_{2,n}), ..., (y_{5,n})$$

tương ứng trong các không gian $M_1, M_2, ..., M_5$ như sau:

$$\begin{aligned} &y_{1,n} = (J_1)^n(y_{1,0});\ y_{2,n} = A_1(y_{1,n-1}), \\ &y_{3,n} = A_2(y_{2,n}); \ldots; y_{5,n} = A_{n-1}(y_{4,n}), \end{aligned} \tag{2.23}$$

với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bây giờ ta chứng minh các dãy $(y_{j,n})$ là các dãy Cauchy. Thật vậy, nếu tồn tại nếu $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $y_{1,n_0} = y_{1,n_0+1}$ thì

$$y_{2,n_0+1} = y_{2,n_0+2}, ..., y_{5,n_0+1} = y_{5,n_0+2}.$$

Điều này kéo theo

$$y_{j,n+1} = y_{j,n+2}$$

với mọi $n \geq n_0$, với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 5$. Tức là các dãy $(y_{j,n})$ là dãy Cauchy. Nếu tồn tại nếu $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $y_{j,n_0} = y_{j,n_0+1}$, với một giá trị $j \in \{2, 3, \ldots, 5\}$ nào đó, thì

$$y_{j+1,n_0} = y_{j+1,n_0+1}, ..., y_{5,n_0} = y_{5,n_0+1}.$$

Điều này kéo theo

$$y_{1,n_0} = C_{5,1}(y_{5,n_0}) = C_{5,1}(y_{5,n_0+1}) = y_{1,n_0+1}.$$

Ta quay trở lại với trường hợp $y_{1,n_0} = y_{1,n_0+1}$ ở trên, tức là, theo chứng minh trên, các dãy $(y_{j,n})$ là dãy Cauchy với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 5$.

Như vậy, ta chỉ cần xem xét trong trường hợp các dãy $(y_{j,n})$ thỏa mãn: với mỗi $j \in \{1, ..., 5\}$,

$$y_{j,n} \neq y_{j,n+1},$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $j = 2$, lấy $x_2 = y_{2,n} \in M_2$ và $x_3 = y_{3,n-1} \in M_3$ trong (2.21) ta có

$$\begin{aligned}\rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}) &= \rho_2(C_{3,2}(y_{3,n-1}), J_2(y_{2,n})) \leq c_2 \frac{F_2(y_{2,n}, y_{3,n-1})}{G_2(y_{2,n}, y_{3,n-1})} \\ &\leq c \frac{F_2(y_{2,n}, y_{3,n-1})}{G_2(y_{2,n}, y_{3,n-1})}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Bây giờ ta ước lượng $F_2(y_{2,n}, y_{3,n-1})$ và $G_2(y_{2,n}, y_{3,n-1})$. Ta có

$$\begin{aligned} &F_2(y_{2,n}, y_{3,n-1}) \qquad (2.25)\\ &= \max\Big\{\rho_2(y_{2,n}, J_2(y_{2,n})) \max_{l \in \{1,...,5\} \setminus \{2,3\}} \{\ \rho_l(C_{2,l}(y_{2,n}), C_{3,l}(y_{3,n-1}))\}, \\ &\qquad \rho_2(y_{2,n}, J_2(y_{2,n}))\rho_3(y_{3,n-1}, J_3(y_{3,n-1})), \\ &\qquad \rho_2(y_{2,n}, C_{3,2}(y_{3,n-1}))\rho_3(y_{3,n-1}, A_2(y_{2,n}))\Big\} \\ &= \max\Big\{\rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}) \max_{l \in \{1,...,5\} \setminus \{2,3\}} \{\rho_l(C_{2,l}(y_{2,n}), C_{3,l}(y_{3,n-1}))\}, \\ &\qquad \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1})\rho_3(y_{3,n-1}, y_{3,n}), \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n})\rho_3(y_{3,n-1}, y_{3,n})\Big\} \\ &= \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}) \max\{\rho_1(y_{1,n-1}, y_{1,n}), \max_{l=3,...,5} \{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}\}. \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} G_2(y_{2,n}, y_{3,n-1}) &= \max\{\rho_2(y_{2,n}, C_{3,2}(y_{3,n-1})), \rho_2(y_{2,n}, J_2(y_{2,n})), \qquad (2.26)\\ &\qquad \rho_3(A_2(y_{2,n}), J_3(y_{3,n-1}))\} \\ &= \max\{\rho_2(y_{2,n}, y_{2,n})), \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}), \rho_3(y_{3,n}, y_{3,n})\} \\ &= \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}). \end{aligned}$$

Thế (2.25) và (2.26) vào (2.24) ta có

$$\begin{aligned} \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}) &\leq c \max\{\rho_1(y_{1,n-1}, y_{1,n}), \max_{l=3,...,5} \{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}\} \\ &\leq c \max_{l=1,...,5} \{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Với $j = 3$, lấy $x_3 = y_{3,n} \in M_3$ và $x_4 = y_{4,n-1} \in M_4$ trong (2.21) ta có

$$\rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1}) = \rho_3(C_{4,3}(y_{4,n-1}, J_3(y_{3,n})) \leq c_3 \frac{F_3(y_{3,n}, y_{4,n-1})}{G_3(y_{3,n}, y_{4,n-1})}$$
$$\leq c \frac{F_3(y_{3,n}, y_{4,n-1})}{G_3(y_{3,n}, y_{4,n-1})}. \tag{2.28}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &F_3(y_{3,n}, y_{4,n-1}) \qquad (2.29)\\ &= \max\Big\{\rho_3(y_{3,n}, J_3(y_{3,n})) \max_{l\in\{1,\dots,5\}\setminus\{3,4\}}\{\ \rho_l(C_{3,l}(y_{3,n}), C_{4,l}(y_{4,n-1}))\},\\ &\qquad \rho_3(y_{3,n}, J_3(y_{3,n}))\rho_4(y_{4,n-1}, J_4(y_{4,n-1})),\\ &\qquad \rho_3(y_{3,n}, C_{4,3}(y_{4,n-1}))\rho_4(y_{4,n-1}, A_3(y_{3,n}))\Big\}\\ &= \max\Big\{\rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1}) \max_{l\in\{1,\dots,5\}\setminus\{3,4\}}\{\rho_l(C_{3,l}(y_{3,n}), C_{4,l}(y_{4,n-1}))\},\\ &\qquad \rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1})\rho_4(y_{4,n-1}, y_{4,n}), \rho_3(y_{3,n}, y_{3,n})\rho_4(y_{4,n-1}, y_{4,n})\Big\}\\ &= \rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1}) \max\Big\{\rho_1(y_{1,n-1}, y_{1,n}), \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}),\\ &\qquad \max_{l=4,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}\Big\}. \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} G_3(y_{3,n}, y_{4,n-1}) &= \max\{\rho_3(y_{3,n}, C_{4,3}(y_{4,n-1})), \rho_3(y_{3,n}, J_3(y_{3,n})), \qquad (2.30)\\ &\qquad \rho_3(A_3(y_{3,n}), J_4(y_{4,n-1}))\}\\ &= \max\{\rho_3(y_{3,n}, y_{3,n})), \rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1}), \rho_4(y_{4,n}, y_{4,n})\}\\ &= \rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1}). \end{aligned}$$

Thế (2.29) và (2.30) vào (2.28) ta có

$$\rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1}) \leq c \max\Big\{\rho_1(y_{1,n-1}, y_{1,n}), \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}),$$
$$\max_{l=4,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}\Big\}. \tag{2.31}$$

Sử dụng (2.27) ta có

$$\rho_3(y_{3,n}, y_{3,n+1}) \leq c \max\Big\{\rho_1(y_{1,n-1}, y_{1,n}), \max_{l=4,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\},$$
$$c \max_{l=1,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}\Big\}$$
$$\leq c \max_{l=1,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}. \tag{2.32}$$

Tương tự, với mỗi $j = 4, ..., 5$, ta cũng chứng minh được

$$\rho_j(y_{j,n}, y_{j,n+1}) \leq c \max_{l=1,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}.$$

Như vậy

$$\rho_j(y_{j,n}, y_{j,n+1}) \leq c \max_{l=1,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}. \tag{2.33}$$

với mỗi $j = 2, ..., 5$.

Với $j = 1$, ta lấy $x_1 = y_{1,n} \in M_1, x_2 = y_{2,n} \in M_2$ trong (2.21), ta có

$$\rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}) = \rho_1(C_{2,1}(y_{2,n}), J_1(y_{1,n}) \leq c_1 \frac{F_1(y_{1,n}, y_{2,n})}{G_1(y_{1,n}, y_{2,n})}. \tag{2.34}$$

Trong đó

$$F_1(y_{1,n}, y_{2,n}) \tag{2.35}$$
$$= \max\Big\{\rho_1(y_{1,n}, J_1(y_{1,n})) \max_{l\in\{3,\dots,5\}}\{\rho_l(C_{1,l}(y_{1,n}), C_{2,l}(y_{2,n}))\},$$
$$\rho_1(y_{1,n}, J_1(y_{1,n}))\rho_2(y_{2,n}, J_2(y_{2,n})),$$
$$\rho_1(y_{1,n}, C_{2,1}(y_{2,n}))\rho_2(y_{2,n}, A_1(y_{1,n}))\Big\}$$
$$= \max\Big\{\rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}) \max_{l\in\{3,\dots,5\}}\{\rho_l(C_{1,l}(y_{1,n}), C_{2,l}(y_{2,n}))\},$$
$$\rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1})\rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}), \rho_1(y_{1,n}, y_{1,n})\rho_1(y_{1,n}, y_{2,n+1})\Big\}$$
$$= \rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}) \max_{l=2,\dots,5}\{\rho_l(y_{l,n}, y_{l,n+1})\}.$$

Và

$$\begin{aligned} G_1(y_{1,n}, y_{2,n}) &= \max\{\rho_1(y_{1,n}, C_{2,1}(y_{2,n})), \rho_1(y_{1,n}, J_1(y_{1,n})), \\ &\qquad \rho_2(A_1(y_{1,n}), J_2(y_{2,n}))\} \\ &= \max\{\rho_1(y_{1,n}, y_{1,n})), \rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}), \rho_2(y_{2,n+1}, y_{2,n+1})\} \\ &= \rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Thế (2.35) và (2.36) vào (2.34) ta có

$$\rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}) \leq c_1 \max_{l=2,\ldots,5}\{\rho_l(y_{l,n}, y_{l,n+1})\}. \tag{2.37}$$

Thay thế (2.33) vào (2.37) ta có

$$\rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}) \leq c_1.c \max_{l=1,\ldots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}.$$

Như vậy

$$\rho_j(y_{j,n}, y_{j,n+1}) \leq c_0 \max_{l=1,\ldots,5}\{\rho_l(y_{l,n-1}, y_{l,n})\}, \tag{2.38}$$

trong đó $c_0 = \max\{c, c.c_1\} < 1$, với mỗi $j = 1, ..., 5$. Quy nạp bất đẳng thức (2.38), ta có

$$\rho_j(y_{j,n}, y_{j,n+1}) \leq c_0^{n-1} \max_{l=1,\ldots,5}\{\rho_l(y_{l,1}, y_{l,2})\},$$

với mỗi $j = 1, ..., 5$. Từ $0 \leq c_0 < 1$, suy ra $(y_{j,n})$ là dãy Cauchy.

Như vậy, $(y_{j,n})$ là dãy Cauchy trong không gian đầy đủ M_j (với mỗi $j = 1, \ldots, 5$), nên nó hội tụ. Đặt

$$x_j^* = \lim_{n\longrightarrow\infty} y_{j,n}, \quad j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Tiếp theo ta chứng minh $C_{(j+1),j}(x_{j+1}^*) = x_j^*$ với $j = 1, \ldots, 4$ và $C_{1,5}(x_1^*) = x_5^*$. Đầu tiên ta chứng minh trong trường hợp $j = 1$ bằng phản chứng. Giả sử $C_{2,1}(x_2^*) \neq x_1^*$, điều đó kéo theo

$$\rho_1(C_{2,1}(x_2^*), x_1^*) > 0.$$

Lấy $x_1 = y_{1,n}$ và $x_2 = x_2^*$ trong (2.21) ta có

$$\begin{aligned} \rho_1(C_{2,1}(x_2^*), y_{1,n+1}) &= \rho_1(C_{2,1}(x_2^*), J_1(y_{1,n})) \\ &\leq c_1 \frac{F_1(y_{1,n}, x_2^*)}{G_1(y_{1,n}, x_2^*)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Trong đó

$$
\begin{aligned}
&F_1(y_{1,n}, x_2^*)\\
&\quad = \max\Big\{\rho_1(y_{1,n}, J_1(y_{1,n})) \max_{l\in\{3,\dots,5\}}\{\rho_l(C_{1,l}(y_{1,n}), C_{2,l}(x_2^*))\},\\
&\qquad\qquad \rho_1(y_{1,n}, J_1(y_{1,n}))\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*)), \rho_1(y_{1,n}, C_{2,1}(x_2^*))\rho_2(x_2^*, A_1(y_{1,n}))\Big\}\\
&\quad = \max\Big\{\rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}) \max_{l\in\{3,\dots,5\}}\{\rho_l(y_{l,n+1}, C_{2,l}(x_2^*))\},\\
&\qquad\qquad \rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1})\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*)), \rho_1(y_{1,n}, C_{2,1}(x_2^*))\rho_2(x_2^*, y_{2,n+1})\Big\}.
\end{aligned}
$$

Và

$$
\begin{aligned}
G_1(y_{1,n}, x_2^*) &= \max\{\rho_1(y_{1,n}, C_{2,1}(x_2^*)), \rho_1(y_{1,n}, J_1(y_{1,n})),\\
&\qquad \rho_2(A_1(y_{1,n}), J_2(x_2^*))\}\\
&= \max\{\rho_1(y_{1,n}, C_{2,1}(x_2^*)), \rho_1(y_{1,n}, y_{1,n+1}), \rho_2(y_{2,n+1}, J_2(x_2^*))\}.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Do đó, khi $n \longrightarrow \infty$, tử của (2.39) dần đến 0, mẫu của (2.39) dần đến

$$\max\{\rho_1(x_1^*, C_{2,1}(x_2^*)), \rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*))\} \geq \rho_1(x_1^*, C_{2,1}(x_2^*)) > 0.$$

Nên từ (2.39), ta có

$$\rho_1(C_{2,1}(x_2^*), x_1^*) \leq 0.$$

Đó chính là mâu thuẫn. Như vậy $C_{2,1}(x_2^*) = x_1^*$. Chứng minh một cách tương tự ta cũng có

$$C_{(j+1)j}(x_{j+1}^*) = x_j^*,$$

với mỗi $j = 1, 2, \dots, 5-1$ và

$$C_{15}(x_1^*) = x_5^*.$$

Tiếp theo ta chứng minh x_j^* là điểm bất động của ánh xạ hợp thành J_j, với mỗi $j = 1, 2, \dots, 5$. Trước hết, ta chứng minh

$$\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*)) \leq c_2.\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*). \tag{2.41}$$

Thật vậy, nếu $\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*)) = 0$ thì (2.41) luôn đúng. Ta xét trường hợp $\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*)) > 0$. Chọn $y = A_2(x_2^*)$, $x = x_n$ trong (2.21) ta có

$$\begin{aligned}\rho_2(J_2(x_2^*), y_{2,n+1}) &= \rho_2(C_{32}(A_2(x_2^*)), J_2(y_{2,n})) \\ &\leq c_2 \frac{F_2(y_{2,n}, A_2(x_2^*))}{G_2(y_{2,n}, A_2(x_2^*))}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Trong đó

$$\begin{aligned} &F_2(y_{2,n}, A_2(x_2^*)) \\ &\quad = \max\Big\{\rho_2(y_{2,n}, J_2(y_{2,n})) \max_{l\in\{1,\dots,5\}\setminus\{2,3\}} \{\rho_l(C_{2l}(y_{2,n}), C_{3l}(A_2(x_2^*)))\}, \\ &\qquad\qquad \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1})\rho_3(A_2(x_2^*), J_3(A_2(x_2^*))), \\ &\qquad\qquad \rho_2(y_{2,n}, C_{32}(A_2(x_2^*)))\rho_3(A_2(x_2^*), A_3(y_{2,n}))\Big\}. \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} G_2(y_{2,n}, A_2(x_2^*)) = \max\{&\rho_2(y_{2,n}, C_{32}(A_2(x_2^*))), \rho_2(y_{2,n}, y_{2,n+1}), \\ &\rho_3(y_{3,n}, J_3(A_2(x_2^*))\}. \end{aligned}$$

Cho $n \longrightarrow \infty$, từ (2.42) ta có

$$\begin{aligned} \rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) &\leq c_2 \frac{\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*))\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*))}{\max\{\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*)), \rho_3(x_3^*, J_3(A_2(x_2^*))\}} \\ &\leq c_2 \frac{\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*))\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*))}{\rho_2(x_2^*, J_2(x_2^*))} \\ &= c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*)). \end{aligned}$$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta luôn có

$$\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) \leq c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*)).$$

Từ $C_{21}(x_2^*) = x_1^*$, suy ra

$$J_2(x_2^*) = A_1(C_{21}(x_2^*)) = A_1(x_1^*).$$

Như vậy ta luôn có

$$\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) = \rho_2(A_1(x_1^*), x_2^*) \leq c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*). \tag{2.43}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\rho_j(J_j(x_j^*), x_j^*) = \rho_j(A_{j-1}(x_{j-1}^*), x_j^*) \leq c_j\rho_{j+1}(A_j(x_j^*), x_{j+1}^*), \tag{2.44}$$

với mỗi $j = 3, ..., 5$ và

$$\rho_1(J_1(x_1^*), x_1^*) = \rho_1(A_5(x_5^*), x_1^*) \leq c_1\rho_2(A_1(x_1^*), x_2^*). \tag{2.45}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.43), (2.44) và (2.45) ta có

$$\begin{aligned}\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) &\leq c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*) \leq c_2c_3\rho_4(A_3(x_3^*), x_4^*)\\ &\leq c_1c_2\ldots c_5\rho_2(A_1(x_1^*), x_2^*) = c_1c_2\ldots c_5\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*)\\ &< \rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*),\end{aligned}$$

vì $c_1c_2\ldots c_5 < 1$. Điều đó kéo theo $\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) = 0$, tức là

$$J_2(x_2^*) = x_2^*.$$

Suy ra x_2^* là điểm bất động của ánh xạ J_2. Hơn nữa từ $J_2(x_2^*) = A_1(x_1^*)$, suy ra

$$A_1(x_1^*) = x_2^*.$$

Lập luận tương tự như trên ta cũng có

$$J_j(x_j^*) = x_j^*, \quad A_{j-1}(x_{j-1}^*) = x_j^*,$$

với mỗi $j = 3, ..., 5$, và

$$J_1(x_1^*) = x_1^*, \quad A_5(x_5^*) = x_1^*.$$

Như vậy x_j^* là điểm bất động của ánh xạ hợp thành J_j, với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 5$. Để kết thúc, ta chứng minh tính duy nhất của các điểm bất động này.

Giả sử $y_1^* \in M_1$ là một điểm thỏa mãn $J_1(y_1^*) = y_1^*$. Chọn $x_1 = y_1^*$ và $x_2 = A_1(x_1^*)$ trong (2.21) ta có

$$\begin{aligned}\rho_1(x_1^*, y_1^*) &= \rho_1(J_1(x_1^*), J_1(y_1^*)) = \rho_1(C_{21}(A_1(x_1^*)), J_1(y_1^*))\\ &\leq c_1\frac{F_1(y_1^*, A_1(x_1^*))}{G_1(y_1^*, A_1(x_1^*))},\end{aligned} \tag{2.46}$$

trong đó

$$F_1(y_1^*, A_1(x_1^*)) = \max\Big\{\rho_1(y_1^*, y_1^*) \max_{l\in\{1,\dots,5\}\setminus\{1,2\}}\{\rho_l(C_{1l}(y_1^*), C_{2l}(A_1(x_1^*)))\},$$
$$\rho_1(y_1^*, y_1^*).\rho_2(A_1(x_1^*), J_2(A_1(x_1^*))),$$
$$\rho_1(y_1^*, C_{21}(A_1(x_1^*)))\rho_2(A_1(x_1^*), A_1(y_1^*))\Big\}$$
$$= \rho_1(y_1^*,x_1^*)\rho_2(A_1(x_1^*), A_1(y_1^*)).$$

Và

$$G_1(y_1^*, A_1(x_1^*)) = \max\{\rho_1(y_1^*, C_{21}(A_1(x_1^*))), \rho_1(y_1^*, J_1(y_1^*)),$$
$$\rho_2(A_1(y_1^*), J_2(A_1(x_1^*)))\}$$
$$= \max\{\rho_1(y_1^*, x_1^*), \rho_2(A_1(y_1^*), A_1(x_1^*))\}.$$

Nếu $\rho_1(y_1^*, x_1^*) > 0$, ta biết

$$\max\{\rho_1(y_1^*, x_1^*), \rho_2(A_1(y_1^*), A_1(x_1^*))\} \geq \rho_1(y_1^*, x_1^*).$$

Khi đó bất đẳng thức (2.46) trở thành

$$\rho_1(x_1^*, y_1^*) \leq c_1\rho_2(A_1(x_1^*), A_1(y_1^*)) = c_1\rho_2(x_2^*, y_2^*), \tag{2.47}$$

trong đó $y_2^* = A_1(y_1^*)$. Hiển nhiên (2.47) đúng trong trường hợp

$$\rho_1(x_1^*, y_1^*) = 0.$$

Vì $J_1(y_1^*) = y_1^*$ nên $J_2(y_2^*) = y_2^*$. Chứng minh tương tự ta có

$$\rho_j(x_j^*, y_j^*) \leq c_j\rho_{j+1}(x_{j+1}^*, y_{j+1}^*), \tag{2.48}$$

trong đó $y_{j+1}^* = A_j(y_j^*)$, với mỗi $j = 2, ..., 4$ và

$$\rho_5(x_5^*, y_5^*) \leq c_1\rho_1(x_1^*, y_1^*). \tag{2.49}$$

Sử dụng các bất đẳng thức (2.47), (2.48), và ((2.49)) ta có

$$\rho_1(x_1^*, y_1^*) \leq c_1c_2\dots c_5\rho_1(x_1^*, y_1^*) < \rho_1(x_1^*, y_1^*).$$

Bất đẳng thức này kéo theo $\rho_1(x_1^*, y_1^*) = 0$ vì $0 \leq c_1c_2\dots c_5 < 1$, tức là $x_1^* = y_1^*$. Như thế x_1^* là điểm bất động duy nhất của ánh xạ J_1. Chứng minh tương tự ta cũng có x_j^* là điểm bất động duy nhất của J_j với mỗi $j = 2, ..., 5$. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét. *Nếu trong Định lý 2.2, ta chọn các hằng số* $0 \leq c_1 = c_2 = c_3 = c_4 < 1$ *thì ta có Định lý 2.1. Hiển nhiên điều kiện về hằng số* $c_1, \ldots, c_4$ *trong Định lý 2.2 mạnh hơn hẳn trong Định lý 2.1. Như vậy Định lý 2.2 là một mở rộng thực sự của Định lý 2.1.*

Tiếp theo ta xem xét định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành trong trường hợp không gian compact.

Định lí 2.3. *Cho* $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2), ..., (M_5, \rho_5)$ *là các không gian metric compact,* $A_j : M_j \to M_{j+1}$ *với* $j = 1, ..., 4$ *và* $A_5 : M_5 \to M_1$ *là các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện*

$$\rho_j(C_{(j+1),j}(x_{j+1}), J_j(x_j)) \leq c_j \frac{F_j(x_j, x_{j+1})}{G_j(x_j, x_{j+1})} \text{ với } j = 1, ..., 4,$$
$$\rho_5(C_{1,5}(x_1), J_5(x_5)) \leq c_5 \frac{F_5(x_5, x_1)}{G_5(x_5, x_1)}, \tag{2.50}$$

với mọi $x_j \in M_j, j = 1, ..., 5$ *mà*

$$G_j(x_j, x_{j+1}) \neq 0 \ (j = 1, ..., 4), \ G_5(x_5, x_1) \neq 0,$$

trong đó $c_j, \ j = 1, \ldots, 5$ *là các hằng số thỏa mãn*

$$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 < 1. \tag{2.51}$$

Khi đó J_j *có điểm bất động duy nhất* $x_j^* \in M_j$, *với mỗi* $j \in \{1, ..., 5\}$. *Hơn nữa* $A_j(x_j^*) = x_{j+1}^*$, *với* $j = 1, ..., 4$ *và* $A_5(x_5^*) = x_1^*$.

Chứng minh. Lấy một phần tử tùy ý $y_{1,0} \in M_1$. Ta xây dựng các dãy

$$(y_{1,n}), (y_{2,n}), ..., (y_{5,n})$$

tương ứng trong các không gian $M_1, M_2, ..., M_5$ như sau:

$$y_{1,n} = (J_1)^n(y_{1,0}); \ y_{2,n} = A_1(y_{1,n-1}),$$
$$y_{3,n} = A_2(y_{2,n}); \ldots; y_{5,n} = A_{n-1}(y_{4,n}), \tag{2.52}$$

với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do M_1 là không gian compact nên tồn tại một dãy con của dãy $\{y_{1,n}\}$ hội tụ, ta kí hiệu là $\{y'_{1,n}\}$. Do M_2 là không gian compact nên tồn tại

dãy con $\{A_1(y'_{1,n})\} \subset \{y_{1,n}\}$ hội tụ, ta kí hiệu là $\{y'_{2,n}\}$. Do M_3 là không gian compact nên tồn tại dãy con của dãy $\{A_2(y'_{2,n})\} \subset \{y_{2,n}\}$ hội tụ, ta kí hiệu là $\{y'_{3,n}\}$. Do M_4 là không gian compact nên tồn tại dãy con của dãy $\{A_3(y'_{3,n})\} \subset \{y_{3,n}\}$ hội tụ, ta kí hiệu là $\{y'_{4,n}\}$. Do M_5 là không gian compact nên tồn tại dãy con của dãy $\{A_4(y'_{4,n})\} \subset \{y_{4,n}\}$ hội tụ, ta kí hiệu là $\{y'_{5,n}\}$. Kí hiệu

$$\begin{aligned} &z_{1,n} = A_5(y'_{5,n}); z_{2,n} = A_1(z_{1,n}); z_{3,n} = A_2(z_{2,n});\\ &z_{4,n} = A_3(z_{3,n}); z_{5,n} = A_4(z_{4,n}). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Với mỗi $j = 1, \ldots, 5$, đặt

$$x^*_j = \lim_{n \longrightarrow \infty} z_{j,n}.$$

Chứng minh giống như trong Định lý 2.2 ta có

$$C_{(j+1)j}(x^*_{j+1}) = x^*_j,$$

với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 4$ và

$$C_{15}(x^*_1) = x^*_5.$$

Tiếp theo ta chứng minh x^*_j là điểm bất động của ánh xạ hợp thành J_j, với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 5$. Trước hết, ta chứng minh

$$\rho_2(x^*_2, J_2(x^*_2)) \leq c_2.\rho_3(A_2(x^*_2), x^*_3). \tag{2.54}$$

Thật vậy, nếu $\rho_2(x^*_2, J_2(x^*_2)) = 0$ thì (2.54) luôn đúng. Ta xét trường hợp $\rho_2(x^*_2, J_2(x^*_2)) > 0$. Chọn $y = A_2(x^*_2)$, $x = x_n$ trong (2.50) ta có

$$\begin{aligned} \rho_2(J_2(x^*_2), z_{2,n+1}) &= \rho_2(C_{32}(A_2(x^*_2)), J_2(z_{2,n}))\\ &\leq c_2 \frac{F_2(z_{2,n}, A_2(x^*_2))}{G_2(z_{2,n}, A_2(x^*_2))}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Trong đó

$$\begin{aligned} &F_2(z_{2,n}, A_2(x^*_2))\\ &\quad = \max\Big\{\rho_2(z_{2,n}, J_2(z_{2,n})) \max_{l \in \{1,\ldots,5\}\setminus\{2,3\}} \{\rho_l(C_{2l}(z_{2,n}), C_{3l}(A_2(x^*_2)))\},\\ &\qquad\qquad \rho_2(z_{2,n}, z_{2,n+1})\rho_3(A_2(x^*_2), J_3(A_2(x^*_2))),\\ &\qquad\qquad \rho_2(z_{2,n}, C_{32}(A_2(x^*_2)))\rho_3(A_2(x^*_2), A_3(z_{2,n}))\Big\}. \end{aligned}$$

Và

$$G_2(z_{2,n}, A_2(x_2^*)) = \max\{\rho_2(z_{2,n}, C_{32}(A_2(x_2^*))), \rho_2(z_{2,n}, z_{2,n+1}), \\ \rho_3(z_{3,n}, J_3(A_2(x_2^*))\}.$$

Cho $n \longrightarrow \infty$, từ (2.55) ta có

$$\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) \leq c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*)).$$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta luôn có

$$\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) \leq c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*)).$$

Từ $C_{21}(x_2^*) = x_1^*$, suy ra

$$J_2(x_2^*) = A_1(C_{21}(x_2^*)) = A_1(x_1^*).$$

Điều này kéo theo

$$\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) = \rho_2(A_1(x_1^*), x_2^*) \leq c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*). \tag{2.56}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\rho_j(J_j(x_j^*), x_j^*) = \rho_j(A_{j-1}(x_{j-1}^*), x_j^*) \leq c_j\rho_{j+1}(A_j(x_j^*), x_{j+1}^*), \tag{2.57}$$

với mỗi $j = 3, ..., 5$ và

$$\rho_1(J_1(x_1^*), x_1^*) = \rho_1(A_5(x_5^*), x_1^*) \leq c_1\rho_2(A_1(x_1^*), x_2^*). \tag{2.58}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.56), (2.57) và (2.58) ta có

$$\begin{aligned}\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) &\leq c_2\rho_3(A_2(x_2^*), x_3^*) \leq c_2c_3\rho_4(A_3(x_3^*), x_4^*) \\ &\leq c_1c_2\ldots c_5\rho_2(A_1(x_1^*), x_2^*) = c_1c_2\ldots c_5\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) \\ &< \rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*),\end{aligned}$$

vì $c_1c_2\ldots c_5 < 1$. Điều đó kéo theo $\rho_2(J_2(x_2^*), x_2^*) = 0$, tức là

$$J_2(x_2^*) = x_2^*.$$

Suy ra x_2^* là điểm bất động của ánh xạ J_2. Hơn nữa từ $J_2(x_2^*) = A_1(x_1^*)$, suy ra

$$A_1(x_1^*) = x_2^*.$$

Lập luận tương tự như trên ta cũng có

$$J_j(x_j^*) = x_j^*, \quad A_{j-1}(x_{j-1}^*) = x_j^*,$$

với mỗi $j = 3, ..., 5$, và

$$J_1(x_1^*) = x_1^*, \quad A_5(x_5^*) = x_1^*.$$

Như vậy x_j^* là điểm bất động của ánh xạ hợp thành J_j, với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 5$. Chứng minh giống như trong Định lý 2.2 ta suy ra x_j^* là điểm bất động duy nhất của J_j với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 5$. Định lý được chứng minh. □

Kết luận

Với mục đích nghiên cứu về điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa các không gian metric đầy đủ. Trong luận văn này chúng tôi đã nghiên cứu các vấn đề sau

- Trình bày một số kết quả nghiên cứu về Nguyên lý ánh xạ co Banach và mở rộng của nó.

- Trình bày một cách chi tiết kết quả của L. Kikina (Định lý 1.7) trong trường hợp ba không gian. Giới thiệu của L. Kikina và K. Kikina (Định lý 1.8) trong trường hợp bốn không gian. Phát biểu và chứng minh kết quả của M. Garg và S. Agarwal trong trường hợp năm không gian (Định lý 2.1) và chứng minh một số cải tiến của định lý này.

Tài liệu tham khảo

[1] Đỗ Hồng Tân, Nguyễn Thị Thanh Hà (2003), *Các định lý về điểm bất động*, NXB Đại học sư phạm.

[2] H. T. Phuong (2010), *A related point theorem on metric spaces*, preprint.

[3] M. Garg and S. Agarwal (2011), *A Fixed point theorems in five metric spaces*, Int. Journal of Math Analysis, Vol. 5. No 40, 1973-1982.

[4] F. Mergadi, Abdelkrim (2009), *A related fixed point theorem in N complete metric spaces*, Acta universitatis Apulensis No 19, 95 - 118.

[5] L. Kikina and K. Kikina (2009), *A related point theorem on four metric spaces*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 3. no 32, pp. 1559 - 1568.

[6] L. Kikina (2009), *Fixed point theorems in three metric spaces*, Int. Journal of Math Analysis, Vol. 3. No 13, 619-626.

[7] N. K. Namdeo and N. K. Tiwari and B. Fisher and K. Tas (1998), *Related fixed point theorems on two complete and compact metric spaces*, Internat, J. Math. & Sci. Vol 21, No 3, pp. 559 - 564.

[8] N. P. Nung (1985), *A fixed point theorem in three metric spaces*, Math. Sem. Kobe Univ, 11, pp. 77 - 79.

[9] Sakira Jain* and Brian Fisher+ (2002), *A related fixed point theorem for three of metric spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 31, pp. 19 - 24.