

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Mạc Văn Thư

MỘT SỐ LỚP BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG KARAMATA VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu	2
1 Biểu diễn lớp các hàm số lồi (lõm) và tựa lồi (lõm) khả vi	1
1.1 Định nghĩa và các tính chất của hàm lồi	1
1.2 Biểu diễn hàm lồi	8
1.3 Hàm tựa lồi, tựa lõm	11
1.4 Thứ tự sắp xếp được của dãy số sinh bởi hàm lồi	18
2 Các bất đẳng thức dạng Karamata và các bài toán liên quan	22
2.1 Định lý Karamata	22
2.2 Bất đẳng thức đan dấu	26
2.3 Một số định lý mở rộng đối với hàm lồi	27
2.4 Các định lý dạng Karamata	35
2.5 Một số bài tập áp dụng	45
2.6 Bài toán tương tự	50
3 Ứng dụng bất đẳng thức Karamata trong đại số và lượng giác	53
3.1 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng phân thức	53
3.2 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng căn thức	56
3.3 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng logarit và mũ	58
3.4 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng lượng giác	62
Kết luận	67
Tài liệu tham khảo	68

Mở đầu

Các vấn đề liên quan đến bất đẳng thức là một bộ phận quan trọng trong giải tích và đại số. Có nhiều dạng toán hình học lượng giác và nhiều môn học khác cũng đòi hỏi cần giải quyết các vấn đề cực trị và tối ưu...Rất nhiều học sinh và sinh viên gặp khó khăn khi phải đối mặt với vấn đề này. Bất đẳng thức có vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học, không chỉ là đối tượng để nghiên cứu mà còn là công cụ đắc lực trong các bài toán liên tục, lý thuyết rời rạc, lý thuyết phương trình....Trong hầu hết các cuộc thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic toán khu vực hay quốc tế...các bài toán về bất đẳng thức cũng rất hay được đề cập và thường thuộc loại khó và rất khó. Các bài toán về ước lượng và tính giá trị cực trị của các tổng tích cũng như các bài toán xác định giới hạn của một số biểu thức cho trước thường có mối quan hệ ít nhiều đến các tính toán ước lượng tương ứng.

Lý thuyết bất đẳng thức và đặc biệt, các bài tập về bất đẳng thức rất phong phú và cực kỳ đa dạng. Có rất nhiều ý tưởng và cách tiếp cận khác nhau để giải các bài toán này. Với đề tài "**Một số lớp bất đẳng thức dạng Karamata và áp dụng**" tác giả trình bày một cách khái quát nhất về bất đẳng thức Karamata đồng thời đưa ra một số lớp bài toán có thể giải bằng bất đẳng thức Karamata.

Luận văn được chia thành ba chương với các nội dung như sau:

Chương 1: Biểu diễn lớp các hàm số lồi (lõm) và tựa lồi (lõm) khả vi.

Trình bày các khái niệm, tính chất cơ bản của lớp hàm lồi, tựa lồi, hàm lõm và thứ tự sắp xếp của hàm số sinh bởi hàm lồi.

Chương 2: Các bất đẳng thức dạng Karamata và các bài toán liên quan.

Trình bày định lý Karamata, bất đẳng thức đan dấu, một số định lý mở rộng với hàm lồi. Đưa ra một số bài toán tương tự và áp dụng vào giải bài

tập cụ thể.

Chương 3: Ứng dụng bất đẳng thức Karamata trong đại số và lượng giác.

Trình bày một số ứng dụng của định lý Karamata vào việc chứng minh một số bất đẳng thức có dạng phân thức, căn thức, lượng giác...

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Qua đây tác giả xin gửi lời cảm ơn tới các thầy cô giáo Khoa Toán, Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tác giả quá trình học tập của mình.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 05 tháng 08 năm 2013.

Học viên

Mạc Văn Thư

Chương 1

Biểu diễn lớp các hàm số lồi (lõm) và tựa lồi (lõm) khả vi

1.1 Định nghĩa và các tính chất của hàm lồi

Định nghĩa 1.1 (Xem [1]-[2]). Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi (lồi dưới) trên tập $[a; b] \in \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \quad (1.1)$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $[a, b]$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lõm (lồi trên) trên tập $[a, b] \in \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \quad (1.2)$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.2) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lõm thực sự (chặt) trên $[a, b]$.

Tương tự ta cũng có định nghĩa về hàm lồi (lõm) trên các tập (a, b) , $(a, b]$ và $[a, b]$. Ta sử dụng kí hiệu $I(a, b)$ để chỉ một trong bốn tập hợp (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ và $[a, b]$.

Tính chất 1.1. Nếu $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a, b)$ thì hàm $g(x) = c.f(x)$ là hàm lõm (lồi) trên $I(a, b)$ khi $c < 0$ ($c > 0$).

Tính chất 1.2. Tổng hữu hạn các hàm lồi trên $I(a, b)$ cũng là một hàm lồi trên $I(a, b)$.

Các tính chất trên đều dễ dàng nhận thấy.

Tính chất 1.3. Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và $g(x)$ là một hàm lồi và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

Chứng minh. Thật vậy theo giả thiết, $f(x)$ là hàm số liên tục trên $I(a, b)$ nên tập giá trị của nó cũng là một tập dạng $I(c, d) \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ nên theo định nghĩa ta có với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Mà $f(x_1), f(x_2) \in I(c, d)$ nên với cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$ thì $\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in I(c, d)$. Từ giả thiết $g(x)$ là hàm đồng biến ta nhận được

$$g[f(\alpha x_1 + \beta x_2)] \leq g[\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)]. \quad (1.3)$$

Do $g(x)$ là hàm lồi nên

$$g[\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)] \leq \alpha g[f(x_1)] + \beta g[f(x_2)]. \quad (1.4)$$

Từ (1.3) và (1.4) suy ra

$$g[f(\alpha x_1 + \beta x_2)] \leq \alpha g[f(x_1)] + \beta g[f(x_2)].$$

Vậy $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$. □

Tương tự ta cũng có tính chất sau

Tính chất 1.4.

- (i) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lồi và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.
- (ii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lõm và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.
- (iii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lõm và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.5. Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ hàm ngược của $f(x)$ thì ta có các kết luận sau

- (i) $f(x)$ lõm, đồng biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, đồng biến.
- (ii) $f(x)$ lõm, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lõm, nghịch biến.
- (iii) $f(x)$ lồi, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, nghịch biến.

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ tính chất của hàm ngược. Hàm ngược luôn cùng tính chất đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) với hàm xuất phát. $\square$

Tính chất 1.6. Nếu $f(x)$ là hàm số lồi khả vi trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a, b)$.

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$. Khi đó với $x_1 < x < x_2$ ($x, x_1, x_2 \in I(a, b)$), ta có

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} > 0, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} > 0, \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1,$$

và vì vậy

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

hay

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1.5)$$

Trong công thức trên cho $x \rightarrow x_1$, ta thu được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (1.6)$$

tương tự, nếu cho $x \rightarrow x_2$, ta thu được

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \quad (1.7)$$

Từ (1.5) và (1.6), ta nhận được $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, tức là hàm số $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng.

Ngược lại, giả sử $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tăng và

$$x_1 < x < x_2 \quad (x, x_1, x_2 \in I(a, b)).$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại x_3, x_4 với $x_1 < x_3 < x < x_4 < x_2$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_3); \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_4).$$

Do $f'(x_3) \leq f'(x_4)$ nên

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

tức là ta có (1.5). $\square$

Về sau ta thường dùng các tính chất sau

Định lý 1.1 (Xem [1]-[2]). Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) trên $I(a, b)$.

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ tính chất (1.6). $\square$

Định lý 1.2 (Xem [1]-[2]). Nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ và

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

Chứng minh. Với mọi $x_0 \in (a, b)$ cố định, chọn các số dương tùy ý u, v sao cho $x_0 - u \in (a, b)$, $x_0 + v \in (a, b)$. Khi đó, theo (1.5) thì

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - u)}{u} \leq \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v}. \quad (1.8)$$

Chọn $v' > v$ để $x_0 + v \in (a, b)$, thì $x_0 < x_0 + v < x_0 + v'$ và theo (1.5) thì

$$\frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} \leq \frac{f(x_0 + v') - f(x_0 + v)}{v' - v}. \quad (1.9)$$

Biến đổi (1.9), ta thu được

$$\frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} \leq \frac{f(x_0 + v') - f(x_0)}{v'}. \quad (1.10)$$

Hệ thức (1.10) chứng tỏ rằng hàm số

$$g(v) := \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v}$$

là một hàm đơn điệu tăng và khi v giảm dần tới 0 thì $g(v)$ đơn điệu giảm và bị chặn (theo (1.8)) nên tồn tại giới hạn một phía

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} g(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} = f'_+(x_0).$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được sự tồn tại các đạo hàm trái $f'_-(x_0)$.

Nhận xét rằng, nếu trong (1.8), cho $u, v \rightarrow 0^+$ thì sẽ thu được bất đẳng thức

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

Nhận xét 1.1. Các hàm số $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ là những hàm đơn điệu tăng trong (a, b) . $\square$

Chứng minh. Thật vậy, khi $x_1 < x_2$ thì ta chọn t_1, t_2 sao cho $x_1 < t_1 < t_2 < x_2$ khi đó, theo (1.5) thì

$$\frac{f(t_1) - f(x_1)}{t_1 - x_1} \leq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{f(x_2) - f(t_2)}{x_2 - t_2}. \quad (1.11)$$

Lấy giới hạn khi $t_1 \rightarrow x_1$ và $t_2 \rightarrow x_2$ trong (1.11) ta thu được

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$$

và vì vậy

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2),$$

hay

$$f'_-(x_1) \leq f'_-(x_2), \text{ khi } x_1 < x_2.$$

$$f'_+(x_1) \leq f'_+(x_2), \text{ khi } x_1 < x_2.$$

$\square$

Định lý 1.3. Nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ liên tục trên (a, b) .

Chứng minh. Theo Định lý 1.2 thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ và do vậy hàm số $f(x)$ vừa liên tục trái vừa liên tục phải. Suy ra $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong (a, b) . $\square$

Nhận xét 1.2. Hàm lồi trên $[a, b]$ có thể không liên tục tại mọi đầu nút của đoạn $[a, b]$.

Thật vậy, chẳng hạn hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

là hàm lồi trên $[0, 1]$ nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Như vậy hàm lồi luôn là hàm liên tục trong khoảng đang xét. Về sau, ta luôn quan tâm đến các hàm số lồi và liên tục trên $I(a, b)$. Tính chất sau đây cho phép ta dễ dàng kiểm chứng tính lồi (lõm) đối với một hàm cho trước.

Định lý 1.4 (Jensen). Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in I(a, b) \quad (1.12)$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ thì ta có ngay (1.12) bằng cách chọn $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Giả sử ta có (1.12). Ta cần chứng minh rằng với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}$ thì $\beta \in \mathbb{Q}$ và ta có thể viết

$$\alpha = \frac{m}{p}; \quad \beta = \frac{n}{p},$$

trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$ và $m + n = p$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có ngay

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = f\left(\frac{mx_1 + nx_2}{p}\right) \leq \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{p} = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nếu α là số vô tỉ thì $\beta (= 1 - \alpha)$ cũng là số vô tỉ. Chọn dãy số hữu tỉ dương u_n trong khoảng $(0, 1)$ có giới hạn bằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha.$$

Khi đó hiển nhiên dãy $v_n := 1 - u_n$ cũng nằm trong $(0, 1)$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \beta.$$

Theo chứng minh trên ứng với trường hợp α hữu tỉ, thì

$$f(u_n x_1 + v_n x_2) \leq u_n f(x_1) + v_n f(x_2), \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2 \in I(a, b).$$

Chuyển qua giới hạn và sử dụng tính liên tục của $f(x)$, ta thu được

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

□

Nhận xét 1.3. Giả sử $f(x) \neq \text{const}$ và là hàm lồi trên $[a, b]$ với $f(a) = f(b)$. Khi đó $f(x) \neq f(a)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Tiếp theo, ta đặc biệt quan tâm đến lớp con của lớp các hàm lồi và là hàm đơn điệu. Đó là lớp con của lớp các hàm lồi hai lần khả vi. Đây là lớp hàm thông dụng nhất của giải tích gắn với nhiều bất đẳng thức cổ điển.

Định lý 1.5. Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong (a, b) . Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b). \quad (1.13)$$

Chứng minh.

Điều kiện cần: Khi $f(x)$ là hàm lồi ta có

$$f(x+h) - f(x-h) - 2f(x) \geq 0, \forall x \in (a, b), h > 0, x \pm h \in (a, b). \quad (1.14)$$

Giả sử $f''(x_0) < 0$. Khi đó tồn tại cặp số dương δ, u sao cho

$$f'(x_0 + u) - f'(x_0 - u) < -\delta u, \text{ với } 0 \leq u \leq h$$

Lấy tích phân hai vế theo cận từ $u = 0$ đến $u = h$ ta được

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) < -\frac{1}{2}\delta h^2,$$

mâu thuẫn với (1.14).

Điều kiện đủ: Ta sử dụng giả thiết $f''(x) \geq 0$ trong (a, b) để chứng minh bất đẳng thức (1.12)

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in I(a, b).$$

Thật vậy, theo định lý Lagrange thì

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x > x_0,$$

và

$$f'(x) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x < x_0.$$

Suy ra

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ khi } x_1 < x < x_2.$$

Điều này tương đương với

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \text{ khi } x_1 < x < x_2.$$

Chọn $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, ta được (1.12). □

1.2 Biểu diễn hàm lồi

Để đơn giản cách trình bày, về sau nếu không có chú thích đặc biệt, ta chỉ xét lớp các hàm lồi (lõm) khả vi bậc hai. Như vậy, hàm $f(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b),$$

và hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b).$$

Từ đó ta có nhận xét, khi hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì đạo hàm bậc nhất của nó là một hàm đơn điệu tăng.

Do vậy, ta có thể phát biểu tính chất của biểu diễn hàm lồi như sau

Định lý 1.6. *Hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a, b)$ và số $c \in (a, b)$ sao cho*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt.$$

Chứng minh. Xét hàm $f(x)$ lồi khả vi bậc hai trên $I(a, b)$ khi đó $f''(x) \geq 0$ trên $I(a, b)$ nên $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a, b)$.

Ta có

$$\int_c^x f'(t) dt = f(x) - f(c),$$

suy ra

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt,$$

đặt $g(t) = f'(t)$ ta được

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt,$$

Ngược lại nếu tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trên $I(a, b)$ sao cho

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt,$$

hay

$$\int_c^x g(t)dt = f(x) - f(c),$$

mà

$$\int_c^x f'(t)dt = f(x) - f(c),$$

suy ra $f'(t) \equiv g(t)$ hay $f'(x) \equiv g(x)$ trên $I(a, b)$.

Vậy $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a, b)$ nên $f''(x) > 0$ trên $I(a, b)$. Do đó $f(x)$ là hàm lồi khả vi bậc hai trên $I(a, b)$.

Tiếp theo còn có rất nhiều cách tiếp cận khác đến lớp các hàm lồi và hàm lõm và người ta tìm các cách biểu diễn chúng theo những mục tiêu khác nhau để giải quyết các bài toán thực tiễn.

Trong mục này, chúng ta đặc biệt quan tâm đến một dạng biểu diễn hàm lồi và lõm thông qua các hàm số bậc nhất, vì lớp hàm này đơn giản và dễ tính toán trên tập giá trị của chúng.

Ta biết rằng, nếu $f(x)$ là hàm lồi liên tục trên $[a, b]$ và với một cặp số dương (α, β) với $\alpha + \beta = 1$ mà xảy ra đẳng thức

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = f(\alpha a + \beta b),$$

thì hàm số $f(x)$ là hàm số (đa thức) bậc nhất.

Vì vậy, khi hàm số $f(x)$ lồi và khả vi trên $I(a, b)$ thì đồ thị của nó luôn luôn thuộc nửa mặt phẳng trên tạo nên bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tùy ý của đồ thị đó trên $I(a, b)$. Nói cách khác, nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1.15)$$

Thật vậy, ta có (1.15) tương ứng với

$$f(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x > x_0 \quad x_0, x \in (a, b), \quad (1.16)$$

và

$$f(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x < x_0 \quad x_0, x \in (a, b). \quad (1.17)$$

Các bất đẳng thức (1.16) và (1.17) là hiển nhiên theo định lý Lagrange.

Dễ nhận thấy rằng (1.15) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (1.15) dưới dạng

$$\max_{u \in (a, b)} [f(u) + f'(u)(x - u)].$$

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với hàm lõm. Khi hàm số $f(x)$ lõm và khả vi trên $I(a, b)$ thì đồ thị của nó luôn luôn thuộc nửa mặt phẳng dưới tạo nên bởi tiếp tuyến tại mọi điểm tùy ý của đồ thị đó trên $I(a, b)$, tức là với mỗi cặp $x_0, x \in I(a, b)$ ta có

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1.18)$$

Dễ thấy rằng (1.18) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (1.18) dưới dạng

$$\min_{u \in (a, b)} [f(u) + f'(u)(x - u)]. \quad (1.19)$$

Vậy, chúng ta đã có một dạng biểu diễn hàm lồi và hàm lõm thông qua các cực trị của các hàm số bậc nhất phụ thuộc tham biến. Phép biểu diễn này được gọi là biểu diễn *á tuyến tính* và nó đóng vai trò quan trọng như là một công cụ hữu hiệu trong nhiều bài toán cực trị và tối ưu.

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với lớp hàm lồi nhiều biến.

Xét hàm số thực nhiều biến $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Giả sử, ứng với mọi bộ số $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ mà

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n,$$

ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i}.$$

Hàm số thực nhiều biến thỏa mãn điều kiện trên được gọi là hàm lồi nhiều biến. Khi đó, hiển nhiên

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{R(z)} \left[F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i} \right].$$

□

1.3 Hàm tựa lồi, tựa lõm

Ta đã biết, theo định lý Jensen: Với hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in I(a, b).$$

Tuy nhiên, do đặc thù của dạng toán, đôi khi chỉ đòi hỏi hàm số đã cho có tính chất yếu hơn tính lồi (lõm), chẳng hạn như khi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 > 0, \text{ mà } x_1 + x_2 \leq 1,$$

thì không nhất thiết $f(x)$ phải là một hàm lồi trên $(0, 1)$.

Cũng như vậy, với hàm số $f(x)$ mà

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 > 0, \text{ mà } x_1 + x_2 \leq 1,$$

thì không nhất thiết $f(x)$ phải là một hàm lõm trên $(0, 1)$.

Từ đó ta đi đến định nghĩa sau đây

Định nghĩa 1.2. Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ được gọi là *hàm tựa lồi* trong khoảng đó, nếu

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 > 0, \text{ mà } x_1 + x_2 \leq b. \quad (1.20)$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm tựa lõm trong khoảng cho trước.

Định nghĩa 1.3. Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ được gọi là *hàm tựa lõm* trong khoảng đó, nếu

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 > 0, \text{ mà } x_1 + x_2 \leq b. \quad (1.21)$$

Từ định nghĩa ta có ngay khẳng định

Nhận xét 1.4. Mọi hàm $f(x)$ lồi (lõm) trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ đều là hàm tựa lồi (tựa lõm) trong khoảng đó.

Nhận xét 1.5. Mọi hàm $f(x)$ tựa lồi trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ thì nó là hàm tựa lồi trong mọi khoảng $(0, a)$ với $0 < a \leq b$.

Nhận xét 1.6. Mọi hàm $f(x)$ tựa lồi (tựa lõm) trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ đều là hàm lồi (lõm) trong khoảng $(0, a)$ với $0 < a \leq b$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $f(x)$ tựa lồi trong $(0, b)$. Khi $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$ thì hiển nhiên, $x_1 + x_2 < b$ và ta thu được

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in \left(0, \frac{b}{2}\right).$$

Hệ thức này chứng tỏ $f(x)$ là một hàm lồi trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. $\square$

Định lý 1.7 (Xem [1]-[2]). Giả thiết rằng hàm $h(x)$ có đạo hàm cấp hai và lồi trên $\left(0, \frac{b}{2}\right]$. Khi đó hàm số

$$f(x) = \begin{cases} h''(x) & \text{khi } x \in \left(0, \frac{b}{2}\right], \\ h''(b-x) & \text{khi } x \in \left[\frac{b}{2}, b\right), \end{cases}$$

sẽ là hàm tựa lồi trong $(0, b)$.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết thì $f(x)$ có đạo hàm bậc hai trên $(0, b)$ và do $h''(x) \geq 0$ trên $\left(0, \frac{b}{2}\right]$, nên

$$f''(x) = \begin{cases} h''(x) \geq 0 & \text{khi } x \in \left(0, \frac{b}{2}\right], \\ h''(b-x) \geq 0 & \text{khi } x \in \left[\frac{b}{2}, b\right), \end{cases}$$

vậy nên $f(x)$ là một hàm tựa lồi trên $(0, b)$. $\square$

Nhận xét 1.7. Kết luận của nhận xét trên vẫn đúng đối với hàm $h(x)$ lồi tùy ý trên $\left(0, \frac{b}{2}\right]$.

Định lý 1.8. Cho hàm số $h(x)$ liên tục và lồi trong $\left(0, \frac{b}{2}\right]$. Xét hàm số $f(x)$ xác định theo công thức sau

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{khi } x \in \left(0, \frac{b}{2}\right], \\ 2h\left(\frac{b}{2}\right) - h(b-x) & \text{khi } x \in \left[\frac{b}{2}, b\right), \end{cases}$$

Khi đó, $f(x)$ là một hàm tựa lồi trên $(0, b)$.

Chứng minh. Theo giả thiết, $h(x)$ lồi trên $\left(0, \frac{b}{2}\right]$ và $f(x)$ xác định và liên tục trong $(0, b)$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in (0, b), \text{ với } x_1 + x_2 < b.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in (0, b), \text{ với } x_1 + x_2 < b. \quad (1.22)$$

Coi $x_1 < x_2$. Khi đó, nếu $x_2 < \frac{b}{2}$ thì (1.22) có dạng

$$h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{h(x_1) + h(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in (0, b), \text{ với } x_1 + x_2 < b.$$

Điều này là hiển nhiên.

Xét trường hợp $x_2 > \frac{b}{2}$. Đặt $\frac{b}{2} = d$. Khi đó, (1.22) có dạng

$$h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{h(x_1) + 2h(d) - h(b - x_2)}{2}.$$

Dễ dàng suy ra

$$b - x_2, x_1 + x_2 - d \in (0, d), (b, x_2) + (x_1 + x_2 - d) = x_1 + d.$$

Không mất tính tổng quát, coi $x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \leq b - x_2$. Khi đó

$$x_1 \leq x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \leq b - x_2 \leq d,$$

và theo định lý Lagrange, ta có

$$h(d) - h(b - x_2) = h'(u)(d - b + x_2), \quad u \in (b - x_2, d), \quad (1.23)$$

và

$$h(x_1 + x_2 - d) - h(x_1) = h'(v)(d - x_2), \quad v \in (x_1, x_1 + x_2 - d). \quad (1.24)$$

Vì $v \leq u$ nên $h'(v) \leq h'(u)$, từ (1.23) ta thu được

$$h(d) + h(x_1) \geq h(x_1 + x_2 - d) + h(b - x_2). \quad (1.25)$$

Do

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 - d + d}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2 - d}{2} + f(d)\right)}{2},$$

nên

$$f(x_1 + x_2 - d) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(d). \quad (1.26)$$

Từ (1.15) và (1.26) cho ta

$$f(d) + f(x_1) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(d) + f(b - x_2),$$

hay

$$2f(d) - f(b - x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1). \quad (1.27)$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có

$$f(x_2) + f(b - x_2) \geq 2f(d),$$

hay

$$2f(d) - f(b - x_2) \leq f(x_2).$$

Hệ thức này và (1.27) cho ta (1.22) □

Định lý 1.9. Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lồi trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thỏa mãn

- (i) $f(x)$ lồi trong $\left(0, \frac{b}{2}\right]$,
(ii) $f(x) + f(b-x) \geq 2f\left(\frac{b}{2}\right), \forall x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$.

Chứng minh.

Điều kiện cần: Hiển nhiên.

Điều kiện đủ: Giả sử $f(x)$ lồi trong khoảng $\left(0, \frac{b}{2}\right]$ và

$$f(x) - f(b-x) \geq 2f\left(\frac{b}{2}\right), \forall x \in \left(0, \frac{b}{2}\right).$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right), \forall x_1, x_2 \in (0, b), \text{ với } x_1+x_2 < b. \quad (1.28)$$

Coi $x_1 < x_2$. Khi đó, hiển nhiên $x_2 < \frac{b}{2}$. Nếu $x_2 \leq \frac{b}{2}$ thì (1.28) hiển nhiên đúng.

Xét $x_2 > \frac{b}{2}$. Khi đó, dễ dàng suy ra

$$b-x_2, x_1+x_2-\frac{b}{2} \in \left(0, \frac{b}{2}\right), (b-x_2) + (x_1+x_2-\frac{b}{2}) = x_1+\frac{b}{2}.$$

Không mất tính tổng quát, coi $x_1+x_2-\frac{b}{2} \leq b-x_2$. Khi đó

$$x_1 \leq x_1+x_2-\frac{b}{2} \leq b-x_2 \leq \frac{b}{2},$$

và theo định lý Lagrange, ta có

$$f\left(\frac{b}{2}\right) - f(b-x_2) = f'(u)\left(\frac{b}{2} - x_2\right), u \in \left(b-x_2, \frac{b}{2}\right), \quad (1.29)$$

và

$$f(x_1+x_2-\frac{b}{2}) - f(x_1) = f'(v)\left(\frac{b}{2} - x_2\right), v \in \left(x_1, x_1+x_2-\frac{b}{2}\right). \quad (1.30)$$

Vì $v \leq u$ nên $f'(v) \leq f'(u)$, từ (1.29) và (1.30), ta thu được

$$f\left(\frac{b}{2}\right) + f(x_1) \geq f\left(x_1+x_2-\frac{b}{2}\right) + f(b-x_2). \quad (1.31)$$

Do

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 - \frac{b}{2} + \frac{b}{2}}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2 - \frac{b}{2}}{2}\right) + f\left(\frac{b}{2}\right)}{2},$$

nên

$$f\left(x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\right) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f\left(\frac{b}{2}\right). \quad (1.32)$$

Từ (1.31) và (1.32) cho ta

$$f\left(\frac{b}{2}\right) + f(x_1) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f\left(\frac{b}{2}\right) + f(b - x_2),$$

hay

$$2f\left(\frac{b}{2}\right) - f(b - x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1). \quad (1.33)$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có

$$f(x_2) + f(b - x_2) \geq 2f\left(\frac{b}{2}\right),$$

hay

$$2f\left(\frac{b}{2}\right) - f(b - x_2) \leq f(x_2).$$

Hệ thức này và (1.33) cho ta điều phải chứng minh. $\square$

Tương tự ta có tiêu chuẩn để nhận biết hàm tựa lõm trên một khoảng cho trước.

Định lý 1.10. Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lõm trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thỏa mãn

- (i) $f(x)$ lõm trong $\left(0, \frac{b}{2}\right]$,
- (ii) $f(x) + f(b - x) \geq 2f\left(\frac{b}{2}\right), \forall x \in \left(0, \frac{b}{2}\right).$

Từ Định lý 1.9 và 1.10, ta thu được phương pháp dựng các hàm tựa lồi trên $(0, b)$ như sau

Hệ quả 1.1. Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lồi trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là tồn tại hàm số $h_0(x)$ liên tục và lồi trong $\left(0, \frac{b}{2}\right]$ sao cho

$$f(x) = \begin{cases} h_0(x) & \text{khi } x \in \left(0, \frac{b}{2}\right], \\ h_1(x) & \text{khi } x \in \left[\frac{b}{2}, b\right), \end{cases}$$

trong đó

$$h_1(x) \geq 2h\left(\frac{b}{2}\right) - h(b-x), \quad \forall x \in \left(0, \frac{b}{2}\right).$$

Tương tự, ta có cách xây dựng hàm tựa lõm trên một khoảng cho trước.

Hệ quả 1.2. Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lõm trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là tồn tại hàm số $h_0(x)$ liên tục và lõm trong $\left(0, \frac{b}{2}\right]$ sao cho

$$f(x) = \begin{cases} h_0(x) & \text{khi } x \in \left(0, \frac{b}{2}\right], \\ h_1(x) & \text{khi } x \in \left[\frac{b}{2}, b\right), \end{cases}$$

trong đó

$$h_1(x) \leq 2h\left(\frac{b}{2}\right) - h(b-x), \quad \forall x \in \left(0, \frac{b}{2}\right).$$

Các định lý sau đây cho ta mối liên hệ chặt chẽ giữa các hàm tựa đồng biến (nghịch biến) với hàm tựa lồi (tựa lõm).

Định lý 1.11. Hàm khả vi $f(x)$ là tựa đồng biến trên tập $(0, b)$ khi và chỉ khi mọi nguyên hàm $F(x)$ của nó đều là hàm tựa lồi trên tập đó.

Định lý 1.12. Hàm khả vi $f(x)$ là tựa nghịch biến trên tập $(0, b)$ khi và chỉ khi mọi nguyên hàm $F(x)$ của nó đều là hàm tựa lõm trên tập đó.

1.4 Thứ tự sắp xếp được của dãy số sinh bởi hàm lồi

Theo Định lý 1.1, nếu $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b) , thì điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b).$$

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lồi trên (a, b) thì theo định lý Jensen, ta có điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in I(a, b).$$

Giả sử cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ trên $I(a, b)$ và $x_1, x_2 \in I(a, b)$ với $x_1 < x_2$. Hiển nhiên rằng ta có thứ tự $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$. Khi đó có vô số dãy số tăng dần u_k trong $\left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$:

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần v_k trong $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = v_n < v_{n-1} < \dots < v_1 < v_0 = x_2,$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2, \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

Định lý 1.13. Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ trên $I(a, b)$ và giả sử $x_1, x_2 \in I(a, b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó với mọi dãy số tăng dần u_k trong $\left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$:

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần v_k trong $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = v_n < v_{n-1} < \dots < v_1 < v_0 = x_2,$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2, \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

Ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \geq f(u_1) + f(v_1) \geq \cdots \geq f(u_n) + f(v_n).$$

Nói cách khác, dãy $f(u_j) + f(v_j)$ là một dãy giảm.

Chứng minh. Ta chỉ cần xét với $x_1, x_2 \in I(a, b)$ cho trước với $x_1 < x_2$, thì

$$f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon),$$

trong đó $0 \leq \epsilon \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$. Thật vậy, từ giả thiết $0 \leq \epsilon \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ ta thu được

$$x_1 \leq x_1 + \epsilon \leq x_2 - \epsilon \leq x_2.$$

Theo định lý Lagrange thì

$$f(x_1 + \epsilon) - f(x_1) = f'(\theta_1)\epsilon, \text{ với } \theta_1 \in (x_1, x_1 + \epsilon),$$

$$f(x_2) - f(x_2 - \epsilon) = f'(\theta_2)\epsilon, \text{ với } \theta_2 \in (x_2 - \epsilon, x_2).$$

Vì $\theta_1 < \theta_2$ và $f''(x) \geq 0$ nên $f'(\theta_1) \leq f'(\theta_2)$. Mặt khác, do $\epsilon \geq 0$ nên

$$f(x_2) - f(x_2 - \epsilon) - f(x_1) \geq f(x_1 + \epsilon) - f(x_1)$$

hay

$$f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon).$$

Định lý được chứng minh. □

Tương tự, ta cũng có kết quả sau đối với hàm số lõm.

Định lý 1.14. Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \leq 0$ trên $I(a, b)$ và giả sử $x_1, x_2 \in I(a, b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó với mọi dãy số tăng dần u_k trong $\left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần v_k trong $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0 = x_2,$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2, \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

Ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \leq f(u_1) + f(v_1) \leq \cdots \leq f(u_n) + f(v_n).$$

Nói cách khác, dãy $f(u_j) + f(v_j)$ là một dãy tăng.

Khi đó, ta luôn có các khẳng định sau

Bổ đề 1.1. Giả sử cho trước dãy số giảm

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n.$$

Khi đó

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Bổ đề 1.2. Giả sử cho trước dãy số giảm

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n.$$

Khi đó luôn tồn tại dãy số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, sao cho

$$x_1 - \alpha_1 \geq x_2 + \alpha_1 - \alpha_2 \geq \cdots \geq x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} \geq x_n + \alpha_{n-1}.$$

Thật vậy, ta chỉ cần chọn dãy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ như sau

$$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{x_2 - x_3}{2}, \dots, \quad 0 \leq \alpha_{n-1} \leq \frac{x_{n-1} - x_n}{2}.$$

Từ 2 định lý trên ta có thể chứng minh kết quả sau đây:

Định lý 1.15. Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ trên $I(a, b)$ và dãy số giảm trong $I(a, b)$

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$$

Khi đó với mọi dãy số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, sao cho

$$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{x_2 - x_3}{2}, \dots, \quad 0 \leq \alpha_{n-1} \leq \frac{x_{n-1} - x_n}{2},$$

ta đều có

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) &\geq f(x_1 - \alpha_1) + f(x_2 + \alpha_1 - \alpha_2) + \cdots + \\ &\quad f(x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + f(x_n + \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Định lý 1.16. Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \leq 0$ trên $I(a, b)$ và dãy số giảm trong $I(a, b)$

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$$

Khi đó với mọi dãy số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, sao cho

$$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{x_2 - x_3}{2}, \dots, \quad 0 \leq \alpha_{n-1} \leq \frac{x_{n-1} - x_n}{2},$$

ta đều có

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) &\leq f(x_1 - \alpha_1) + f(x_2 + \alpha_1 - \alpha_2) + \cdots + \\ &\quad f(x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + f(x_n + \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, đồng thời thỏa mãn các điều kiện $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ và $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ và

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq a_1 \\ x_1 + x_2 \geq a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{array} \right.$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \geq \sum_{k=1}^n f(a_k)$$

Chứng minh. Sử dụng biểu diễn đối với hàm lồi

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = \max_{t_1, \dots, t_n \in I(a,b)} \left[\sum_{i=1}^n f(t_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - t_i) f'(t_i) \right]. \quad (2.7)$$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết bộ số $t_1, \dots, t_n \in I(a, b)$ cũng là một bộ số giảm, tức là

$$t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n.$$

Khi đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$x_1 f'(t_1) + x_2 f'(t_2) + \cdots + x_n f'(t_n) \geq y_1 f'(t_1) + y_2 f'(t_2) + \cdots + y_n f'(t_n).$$

Sử dụng biến đổi Abel

$$x_1 f'(t_1) + x_2 f'(t_2) + \cdots + x_n f'(t_n) = S_1[f'(t_1) - f'(t_2)] + \\ + S_2[f'(t_2) - f'(t_3)] + \cdots + S_{n-1}[f'(t_{n-1}) - f'(t_n)] + S_n f'(t_n).$$

với

$$S_k(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Vì rằng $f''(x) > 0$ nên $f'(x_k) \leq f'(x_{k-1})$. Mặt khác, do $S_k(x) \geq S_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) và $S_n(x) = S_n(y)$ và $f'(t_n) \geq 0$, ta thu được ngay điều cần chứng minh. $\square$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

Định lý 2.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$ và $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, thỏa mãn điều kiện $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ và

[illegible]

Khi đó

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \leq \sum_{k=1}^n f(a_k).$$

Định lý 2.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, thỏa mãn điều kiện $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.

[illegible]

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \geq \sum_{k=1}^n f(a_k).$$

Nhận xét rằng, điều kiện (2.6) cho ta một thuật toán nắn đều bộ số cho trước bằng phương pháp biến đổi tuyến tính. Dễ nhận thấy phép biểu diễn hàm lồi (lõm) một biến có thể mở rộng cho hàm lồi nhiều biến. Cụ thể là, ứng với mọi hàm lồi $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{t_1, \dots, t_n \in I(a, b)} \left[F(t_1, t_2, \dots, t_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - t_i) \frac{\partial F}{\partial t_i} \right]. \quad (2.8)$$

Sử dụng các chứng minh tương tự như đối với bất đẳng thức Karamata, ta thu được

Định lý 2.6. Giả sử $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn điều kiện (2.7). Khi đó với mọi cặp bộ số đơn điệu giảm $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$, thỏa mãn điều kiện Schur (2.6), ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (2.9)$$

Nhận xét 2.1. Có thể nói rằng Định lý 1.6 cho ta một công cụ rất mạnh để thực hiện quá trình làm đều và thuật toán dồn biến để chứng minh nhiều dạng bất đẳng thức phức tạp.

Thật vậy, từ (1.9) ta có ngay hệ quả

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n\right).$$

2.2 Bất đẳng thức đan dấu

Trong phần này ta xét một số bất đẳng thức đan dấu sinh bởi hàm lồi. Các bất đẳng thức dạng này đều quy được về bất đẳng thức Karamata quen biết.

Định lý 2.7 (Bất đẳng thức Szego).

Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$ và cho dãy $2n - 1$ số không âm và đơn điệu giảm

$$a \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2n-1} \geq 0.$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} f(a_j) \geq f\left(\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} a_j\right).$$

Chứng minh. Để ý rằng, từ dãy giảm

$$a \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2n-1} \geq 0,$$

ta có thể thành lập hai bộ dãy giảm thỏa mãn điều kiện Karamata

$$a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, b_1, b_3, \dots, b_{2n-1},$$

trong đó dãy $b_1, b_3, \dots, b_{2n-1}$ là sự sắp xếp theo thứ tự giảm dần và đánh số lại dãy các số

$$a_2, a_4, \dots, a_{2n-2}, a_1 - a_2 + a_3 + \dots + a_{2n-1}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta có ngay điều cần chứng minh. $\square$

Cũng vậy, theo đúng cách thức lập luận ở trên, ta có các kết quả sau (bạn đọc hãy tự chứng minh).

Định lý 2.8 (Bất đẳng thức Bellman).

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$ và $f(x) \leq 0$. Xét dãy n số không âm và đơn điệu giảm

$$a \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0.$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f(a_j) \geq f\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j\right).$$

Định lý 2.9 (Bất đẳng thức Olkin).

Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$. Xét cặp dãy số không âm và đơn điệu giảm

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$$

$$1 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0.$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\left[1 - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \alpha_j\right] f(0) + \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \alpha_j f(a_j) \geq f\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \alpha_j a_j\right).$$

2.3 Một số định lý mở rộng đối với hàm lồi

Trong ứng dụng, ngoài việc xây dựng các kỹ thuật biến đổi để áp dụng được các định lý, các nhà toán học cũng rất quan tâm đến các bất đẳng thức hàm, tức là mở rộng các bất đẳng thức tổng quát cho cả lớp hàm đang xét. Những thành tựu theo hướng này đã bùng nổ trong những năm gần đây. Điều đó dẫn tới lượng bài tập được sáng tác trở nên phong phú và hỗn độn, thiếu tính hệ thống, Vì vậy, nhu cầu về hệ thống hóa và cho các tiêu chuẩn nhận biết về tính đúng đắn của nhiều lớp bất đẳng thức đang trở nên cấp bách.

Vào năm 1965, T.Popoviciu đã chứng minh định lý sau đây

Định lý 2.10 (T.Popoviciu).

Với mọi hàm lồi trên $I(a, b)$ và với mọi $x, y, z \in I(a, b)$, ta đều có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

Nhận xét rằng định lý trên là một mở rộng thực sự của các kết quả quen biết (bất đẳng thức Jensen) về hàm lồi. Thật vậy, theo bất đẳng thức Jensen, thì

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

và

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

Do vậy, định lý Popoviciu cho ta thực hiện được phép cộng trái chiều.

Hệ quả 2.1. Với mọi hàm lồi trên $I(a, b)$ và với mọi $x, y, z \in I(a, b)$, $0 \leq \alpha \leq 3$, ta đều có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + \alpha f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right].$$

Chứng minh. Ta coi $x \geq y \geq z$. Khi đó sẽ xảy ra một trong hai khả năng

$$x \geq \frac{x+y+z}{3} \geq y \geq z$$

hoặc

$$x \geq y \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z.$$

Ta chỉ cần xét trường hợp $x \geq y \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z$ là đủ.

Khi đó dễ dàng kiểm tra

$$x \geq y \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z, \quad (2.10)$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+z}{2} \geq \frac{x+z}{2} \geq \frac{y+z}{2} \geq \frac{y+z}{2} \quad (2.11)$$

và

$$x + y + z + 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2}\right).$$

Ta thu được dãy (2.10) gần đều hơn (2.11). Theo định lý Karamata, ta được điều phải chứng minh. $\square$

Đến năm 1982, A.Lupas đã mở rộng định lý Popoviciu theo hướng sau.

Định lý 2.11 (A. Lupas). Với mỗi bộ số dương p, q, r và với mọi $x, y, z \in I(a, b)$, ta đều có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & pf(x) + qf(y) + rf(z) + (p + q + r)f\left(\frac{px + qy + rz}{p + q + r}\right) \\ & \geq (p + q)f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) + (q + r)f\left(\frac{qy + rz}{q + r}\right) + (r + p)f\left(\frac{rz + px}{r + p}\right). \end{aligned}$$

Chứng minh. Tương tự như cách chứng minh định lý Popoviciu, không mất tính tổng quát, giả thiết rằng

$$x \geq y \geq \frac{px + qy + rz}{p + q + r} \geq z.$$

Từ đó, ta có thể áp dụng định lý Karamata cho bộ số có trọng để thu được (2.12).

Ta nhắc lại giả thiết Karamata đối với hai bộ số sắp được như sau. Ta nói rằng vectơ $\vec{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ với giả thiết $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ xa đều hơn so với vectơ $\vec{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ với giả thiết $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, và được kí hiệu $\vec{A} \succeq \vec{B}$, nếu

$$\begin{aligned} & a_1 \geq b_1 \\ & a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ & \vdots \\ & a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \\ & a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n. \end{aligned}$$

$\square$

Dựa vào định lý Karamata, ta có thể dễ dàng chứng minh các định lý sau đây.

Định lý 2.12 (Vasile Cirtoaje).

Với mọi hàm lồi $f(x)$ trên $I(a, b)$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in I(a, b)$, ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + n(n-2)f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \\ \geq (n-1)(f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

trong đó $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ với mọi i .

Chứng minh. Không mất tổng quát, ta coi $n \geq 3$ và $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Khi đó tồn tại số tự nhiên m sao cho $1 \leq m \leq n-1$ và

$$a_1 \leq \dots \leq a_m \leq a \leq a_{m+1} \leq \dots \leq a_n,$$

trong đó $a = (a_1 + \dots + a_n)/n$. Ta cũng có

$$b_1 \geq \dots \geq b_m \geq a \geq b_{m+1} \geq \dots \geq b_n.$$

Dễ thấy rằng điều cần chứng minh được suy ra từ hai bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_m) + n(n-m-1)f(a) \\ \geq (n-1)(f(b_{m+1}) + f(b_{m+2}) + \dots + f(b_n)), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} f(a_{m+1}) + f(a_{m+2}) + \dots + f(a_n) + n(m-1)f(a) \\ \geq (n-1)(f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_m)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dễ chứng minh (2.13), ta áp dụng bất đẳng thức Jensen đối với hàm lồi

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_m) + (n-m-1)f(a) \geq (n-1)f(b),$$

trong đó

$$b = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m + (n-m-1)a}{n-1}.$$

Vậy ta chỉ còn chứng minh rằng

$$(n-m-1)f(a) + f(b) \geq f(b_{m+1}) + f(b_{m+2}) + \dots + f(b_n).$$

Vì

$$a \geq b_{m+1} \geq b_{m+2} \geq \dots \geq b_n$$

và

$$(n-m-1)a + b = b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_n,$$

ta thấy ngay $\vec{A}_{n-m} = [a, \dots, a, b]$ xa đều hơn $\vec{B}_{n-m} = [b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n]$. Vậy bất đẳng thức (2.13) được suy ngay từ định lý Karamata.

Bất đẳng thức (2.14) được chứng minh tương tự bằng cách sử dụng bất đẳng thức Jensen quen biết

$$\frac{f(a_{m+1}) + f(a_{m+2}) + \dots + f(a_n) + (m-1)f(a)}{n-1} \geq f(c),$$

ứng dụng cho

$$f(c) + (m-1)f(a) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_m),$$

trong đó

$$c = \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n + (m-1)a}{n-1}.$$

Bất đẳng thức cuối này suy được ngay từ bất đẳng thức Karamata, vì rằng

$$b_1 \geq \dots \geq b_m \geq a$$

và $c + (m-1)a = b_1 + b_2 + \dots + b_m$, và $\vec{C}_m = [c, a, \dots, a]$ xa đều hơn $\vec{D}_m = [b_1, b_2, \dots, b_m]$. $\square$

Định lý 2.13 (Vasile Cirtoaje).

Với mọi hàm lồi f trên $I(a, b)$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in I(a, b)$ ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} (n-2)(f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)) + nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \\ \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_i + a_j}{2}\right). \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$, ta thu được đẳng thức. Giả thiết rằng $n \geq 3$ và bất đẳng thức đúng với $n-1$. Ta chứng minh nó đúng với n .

Giả sử rằng $a = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$ và $x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/(n-1)$. Theo giả thiết quy nạp thì

$$(n-3)(f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)) + (n-1)f(x) \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right).$$

Vậy chỉ cần chỉ ra rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1}) + (n-2)f(a_n) + nf(a)$$

$$\geq (n-1)f(x) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_n}{2}\right).$$

từ bất đẳng thức Jensen, ta có

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1}) \geq (n-1)f(x).$$

Vậy nên

$$(n-2)f(a_n) + nf(a) \geq 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_n}{2}\right).$$

Vì rằng

$$(n-2)a_n + na = 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i + a_n}{2},$$

ta có thể sử dụng bất đẳng thức Karamata cho hai trường hợp.

Trường hợp 1. Khi $2a \geq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Không mất tổng quát, coi $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Vậy thì $a \geq \frac{a_1 + a_n}{2}$. Theo bất đẳng thức Karamata, ta cần chứng minh

$$a_n \leq \min\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}$$

và

$$a_n \geq \max\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}.$$

Điều kiện thứ nhất là hiển nhiên, còn điều kiện thứ hai được suy ra từ $a \geq \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Trường hợp 2. Khi $2a < \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Không giảm tổng quát coi $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Khi đó $a \leq \frac{a_1 + a_n}{2}$. Theo bất đẳng thức Karamata, ta chỉ cần chứng minh

$$a \leq \min\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}$$

và

$$a_n \geq \max\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}.$$

Điều kiện thứ hai là hiển nhiên và điều kiện thứ nhất suy ra từ

$$a \leq \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

□

Sau đây, ta mô tả một số áp dụng trực tiếp.

Bài tập 2.1. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là bộ số dương thỏa mãn điều kiện $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng khi đó, ta luôn có

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Lời giải. Bất đẳng thức này được suy trực tiếp từ Định lý 2.1 nếu ta xét hàm lồi $f(x) = e^x$ và thay bộ số $a_1, a_2, \dots, a_n$ bởi bộ số $(n-1) \ln a_1, (n-1) \ln a_2, \dots, (n-1) \ln a_n$, tương ứng.

Bài tập 2.2. Xét bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Khi đó, ta luôn có

$$(n-a_1)(n-a_2) \dots (n-a_n) \geq (n-1)(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Lời giải. Chỉ cần áp dụng Định lý 2.1 với hàm số $f(x) = -\ln x$ ứng với $x > 0$, ta có ngay điều phải chứng minh.

Nhận xét 2.2. Với $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ kéo theo $a_1 a_2 \dots a_n \leq 1$, ta thấy bất đẳng thức $AM - GM$ sắc hơn bất đẳng thức

$$(n-a_1)(n-a_2) \dots (n-a_n) \geq (n-1)^n a_1 a_2 \dots a_n$$

.

Thật vậy, từ các bất đẳng thức

$$\begin{aligned} n-a_1 &= a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq (n-1)(a_2 a_3 \dots a_n)^{\frac{1}{n-1}} \\ n-a_2 &= a_1 + a_3 + \dots + a_n \geq (n-1)(a_1 a_3 \dots a_n)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\vdots \\ n-a_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq (n-1)(a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài tập 2.3. Xét bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và đặt $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ ứng với mọi i . Chứng minh rằng khi đó

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}. \quad (2.15)$$

Lời giải. Giả sử $a = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$. Sử dụng hệ thức

$$\frac{(n-1)b_i}{a_i} = \frac{na}{a_i} - 1 \text{ và } \frac{a_i}{b_i} = \frac{na}{b_i} - n + 1$$

với $i = 1, 2, \dots, n$, ta thấy (2.15) tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{n(n-2)}{a} \geq (n-1) \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right).$$

Bất đẳng thức này dễ dàng nhận được từ Định lý 2.1 ứng dụng cho hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$ ứng với $x > 0$.

Bài tập 2.4. Xét bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn điều kiện

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}. \quad (2.16)$$

Chứng minh rằng khi đó

$$\frac{1}{1 + (n-1)x_1} + \frac{1}{1 + (n-1)x_2} + \dots + \frac{1}{1 + (n-1)x_n} \geq 1. \quad (2.17)$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể suy từ (2.15) theo cách sau đây. Giả thiết ngược lại rằng

$$\frac{1}{1 + (n-1)x_1} + \frac{1}{1 + (n-1)x_2} + \dots + \frac{1}{1 + (n-1)x_n} < 1. \quad (2.18)$$

Ta chứng minh rằng (2.16) không thỏa mãn. Giả sử

$$a_i = \frac{1}{1 + (n-1)x_i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Nhận xét rằng $a_i > 0$ và

$$x_i = \frac{1 - a_i}{(n-1)a_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Theo (2.18) thì $\sum_{i=1}^n a_i < 1$. Vậy nên

$$1 - a_i > \sum_{j \neq i} a_j = (n-1)b_i \quad (2.19)$$

ứng với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Do đó

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1 - a_i}{(n-1)a_i} > \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \\ &> \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)a_i}{1 - a_i} \\ &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}. \end{aligned}$$

Vậy nên, ta có điều phải chứng minh.

2.4 Các định lý dạng Karamata

Trong phần này, ta sẽ nêu kết luận về tính so sánh được đối với một số biểu thức sinh bởi các bộ số (có trọng hoặc không có trọng) sắp theo thứ tự cho trước. Các ràng buộc này tương tự như các giả thiết của bất đẳng thức Karamata.

Bài tập 2.5. Giả thiết cho ba cặp số dương (α_1, α_2) , (u_1, u_2) và (x_1, x_2) thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} u_1 \leq u_2, \\ \alpha_1 x_1 \leq \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng, khi đó

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = u_1$ và $x_2 = u_2$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$y = \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s-x}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}.$$

Ta có

$$y' = \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{s-x}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2-1} \left(\frac{s-x}{\alpha_2} - \frac{x}{\alpha_1}\right).$$

Vậy nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha_1} = \frac{s-x}{\alpha_2} = \frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

và $y' > 0$ khi $\frac{x}{\alpha_1} < \frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Do đó với

$$\frac{x}{\alpha_1} \leq \frac{u}{\alpha_1} \leq \frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

thì ta có

$$\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s-x}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2} \leq \left(\frac{u}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s-u}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}.$$

Đặt

$$\frac{x}{\alpha_1} = x_1, \frac{s-x}{\alpha_2} = x_2, \frac{u}{\alpha_1} = u_1, \frac{s-u}{\alpha_2} = u_2.$$

Suy ra, khi

$$x_1 \leq u_1 \leq u_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,$$

ta thu được

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}.$$

Nhận thấy rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2$. $\square$

Bài tập 2.6. Giả thiết cho ba bộ số dương $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, (u_1, u_2, u_3) và (x_1, x_2, x_3) , thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} u_1 \leq u_2 \leq u_3, \\ \alpha_1 x_1 \leq \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3. \end{cases}$$

Khi đó

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \leq u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, 3$.

Chứng minh. Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} u_1 \leq u_2 \leq u_3, \\ \alpha_1 x_1 \leq \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \end{cases}$$

nên ta cần xét hai trường hợp.

Trường hợp 1.

Khi $x_1 = u_1 - d_1, x_2 = u_2 - d_2, x_3 = u_3 + d_3$ với $d_1, d_2, d_3 \geq 0$.

Khi đó $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = \alpha_3 d_3$ và từ đó, ta thu được

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} &= (u_1 - d_1)^{\alpha_1} (u_2 - d_2)^{\alpha_2} (u_3 + d_3)^{\alpha_3} \\ &\leq u_1^{\alpha_1} (u_2 - d_2)^{\alpha_2} (u_3 + d_3 - \frac{\alpha_1 d_1}{\alpha_3})^{\alpha_3} \\ &\leq u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, 3$.

Trường hợp 2.

Khi $x_1 = u_1 - d_1, x_2 = u_2 + d_2, x_3 = u_3 + d_3$ với $d_1, d_2, d_3 \geq 0$.

Khi đó $\alpha_1 d_1 = \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3$ và từ đó, ta thu được

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} &= (u_1 - d_1)^{\alpha_1} (u_2 + d_2)^{\alpha_2} (u_3 + d_3)^{\alpha_3} \\ &\leq u_2^{\alpha_2} (u_3 + d_3)^{\alpha_3} (u_1 - d_1 + \frac{\alpha_2 d_2}{\alpha_1})^{\alpha_1} \\ &\leq u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, 3$. □

Bây giờ, ta có thể chứng minh định lý sau.

Định lý 2.14. *Giả thiết cho ba số dương $(\alpha_i), (u_i), (x_i)$ thỏa mãn các điều*

Trường hợp 1. Khi $\alpha_k d_k \leq \alpha_{k+1} d_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned}
& x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \\
&= x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} (u_k - d_k)^{\alpha_k} (u_{k+1} + d_{k+1})^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \\
&\leq x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} u_k^{\alpha_k} \left(u_{k+1} + d_{k+1} \frac{\alpha_k d_k}{\alpha_{k+1}}\right)^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \\
&\leq u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, \dots, n+1$.

Trường hợp 2. Khi $\alpha_k d_k > \alpha_{k+1} d_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned}
& x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \\
&= x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} (u_k - d_k)^{\alpha_k} (u_{k+1} + d_{k+1})^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \\
&\leq x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \left(u_k - d_k + \frac{\alpha_{k+1} d_{k+1}}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k} (u_{k+1})^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \\
&\leq u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, \dots, n+1$.

Vậy định lý đúng với mọi $n \geq 2$. □

Hệ quả 2.2. Với mọi bộ số dương (α_i) và (x_i) , ta đều có

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 \dots x_n &\leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \\
x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} &\leq \left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \\
&= \left(\frac{x_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{x_2}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{x_n}{\alpha_n} \right)^{\alpha_n} \\
&\leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}.
\end{aligned}$$

Bài tập 2.7. Giả thiết cho hàm số $f(x)$ xác định và có $f''(x) > 0$ trên $[\alpha, \beta]$ và cho hai cặp số $x_1, x_2; u_1, u_2 \in [\alpha, \beta]$. Khi đó với mỗi cặp số dương (γ_1, γ_2) và (u_1, u_2) thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} u_1 \leq u_2, \\ \gamma_1 x_1 \leq \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \end{cases}$$

ta đều có

$$\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) \geq \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = u_1$ và $x_2 = u_2$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$y = \gamma_1 f\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) + \gamma_2 f\left(\frac{s-x}{\gamma_2}\right),$$

với $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Ta có

$$y' = f'\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) - f'\left(\frac{s-x}{\gamma_2}\right) = 0$$

khi

$$\frac{x}{\gamma_1} = \frac{s-x}{\gamma_2} = \frac{s}{\gamma_1 + \gamma_2} \text{ và } y' < 0 \text{ khi } \frac{x}{\gamma_1} < \frac{s}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Do đó với

$$\frac{x}{\gamma_1} \leq \frac{u}{\gamma_1} \leq \frac{s}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

ta có

$$\gamma_1 f\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) + \gamma_2 f\left(\frac{s-x}{\gamma_2}\right) \geq \gamma_1 f\left(\frac{u}{\gamma_1}\right) + \gamma_2 f\left(\frac{s-u}{\gamma_2}\right).$$

Đặt

$$\frac{x}{\gamma_1} = x_1, \frac{s-x}{\gamma_2} = x_2, \frac{u}{\gamma_1} = u_1, \frac{s-u}{\gamma_2} = u_2.$$

Suy ra, ứng với

$$x_1 \leq u_1 \leq u_2, \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2,$$

ta có

$$\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) \geq \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2).$$

Nhận xét rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = u_1$ và $x_2 = u_2$. $\square$

Bài tập 2.8. Giả thiết cho hàm số $f(x)$ xác định và có $f''(x) > 0$ trên $[\alpha, \beta]$ và cho hai cặp số $(x_1, x_2, x_3); (u_1, u_2, u_3)$ nằm trong $[\alpha, \beta]$. Khi đó với mỗi cặp số dương $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ và (u_1, u_2, u_3) thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} u_1 \leq u_2 \leq u_3, \\ \gamma_1 x_1 \leq \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \leq \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, \end{cases}$$

ta đều có

$$\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \gamma_3 f(x_3) \geq \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \gamma_3 f(u_3).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, 3$.

Chứng minh. Theo giả thiết thì $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 \in [\alpha, \beta]; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ và

$$\begin{cases} u_1 \leq u_2 \leq u_3, \\ \gamma_1 x_1 \leq \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \leq \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3. \end{cases}$$

a) Xét trường hợp khi $x_1 = u_1 - d_1, x_2 = u_2 - d_2, x_3 = u_3 + d_3$. Khi đó, hiển nhiên

$$\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 = \gamma_3 d_3$$

và

$$\begin{aligned} \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \gamma_3 f(x_3) &= \gamma_1 f(u_1 - d_1) + \gamma_2 f(u_2 - d_2) + \gamma_3 f(u_3 + d_3) \\ &\geq \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2 - d_2) + \gamma_3 f(u_3 + d_3 - \frac{\gamma_1 d_1}{\gamma_3}) \\ &\geq \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \gamma_3 f(u_3). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, 3$.

b) khi $x_1 = u_1 - d_1, x_2 = u_2 + d_2, x_3 = u_3 + d_3$. Thì hiển nhiên, ta có

$$\gamma_1 d_1 = \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3$$

Không mất tổng quát, giả sử

$$x_k \leq u_k, u_{k+1} \leq x_{k+1}.$$

Đặt $x_k = u_k - d_k, x_{k+1} = u_{k+1} + d_{k+1}$ với $d_k, d_{k+1} \geq 0$.

a) Khi $\gamma_k d_k \leq \gamma_{k+1} x_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned} & \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(x_k) + \gamma_{k+1} f(x_{k+1}) + \\ & + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\ & = \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(u_k - d_k) + \\ & + \gamma_{k+1} f(u_{k+1} + d_{k+1}) + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\ & \geq \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(u_k) + \\ & + \gamma_{k+1} f(u_{k+1} + d_{k+1} - \frac{\gamma_k d_k}{\gamma_{k+1}}) + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\ & \geq \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \cdots + \gamma_{n+1} f(u_{n+1}). \end{aligned}$$

b) Khi $\gamma_k d_k > \gamma_{k+1} x_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned} & \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(x_k) + \gamma_{k+1} f(x_{k+1}) + \\ & + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\ & = \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(u_k - d_k) + \\ & + \gamma_{k+1} f(u_{k+1} + d_{k+1}) + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\ & \geq \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(u_k - d_k + \frac{\gamma_{k+1} d_{k+1}}{\gamma_k}) + \\ & + \gamma_{k+1} f(u_{k+1}) + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\ & \geq \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \cdots + \gamma_{n+1} f(u_{n+1}). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Vậy định lý đúng với mọi $n \geq 2$. □

Nhận xét 2.3. Khi $f''(x) < 0$ trên $[\alpha, \beta]$ thì ta có bất đẳng thức đổi chiều.

Định lý 2.16. Giả sử với mọi bộ số dương $c, (u_i)$ và (α_i) thỏa mãn các

[illegible]

$$\alpha_1 \left(\frac{x_1}{\alpha_1} \right)^{c+1} + \alpha_2 \left(\frac{x_2}{\alpha_2} \right)^{c+1} + \cdots + \alpha_n \left(\frac{x_n}{\alpha_n} \right)^{c+1} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{c+1}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)^c}.$$

Chứng minh. Các hàm số $f(x) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{c+1}$ và $f'(x) = \frac{c+1}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c$ đều xác định và đồng biến trong $\mathbb{R}^+$, nên với $c, x_i, u_i, \alpha_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$, thỏa mãn các điều kiện

[illegible]

ta luôn có

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \left(\frac{x_1}{\alpha_1} \right)^{c+1} + \alpha_2 \left(\frac{x_2}{\alpha_2} \right)^{c+1} + \cdots + \alpha_n \left(\frac{x_n}{\alpha_n} \right)^{c+1} \\
 & \geq \alpha_1 \left(\frac{u_1}{\alpha_1} \right)^{c+1} + \alpha_2 \left(\frac{u_2}{\alpha_2} \right)^{c+1} + \cdots + \alpha_n \left(\frac{u_n}{\alpha_n} \right)^{c+1} \\
 & \frac{x_1^{c+1}}{\alpha_1^c} + \frac{x_2^{c+1}}{\alpha_2^c} + \cdots + \frac{x_n^{c+1}}{\alpha_n^c} \geq \frac{u_1^{c+1}}{\alpha_1^c} + \frac{u_2^{c+1}}{\alpha_2^c} + \cdots + \frac{u_n^{c+1}}{\alpha_n^c} \\
 & \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{c+1}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)^c}.
 \end{aligned}$$

□

2.5 Một số bài tập áp dụng

Ví dụ 2.1. Cho $2n$ số thực dương $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ thỏa mãn các điều kiện sau $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n, a_1 \geq b_1, a_1 a_2 \geq b_1 b_2, \dots, a_1 a_2 \dots a_n \geq b_1 b_2 \dots b_n$. Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Lời giải.

Đặt $x_i = \ln a_i, y_i = \ln b_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Với các điều kiện đã cho, ta dễ dàng kiểm tra được rằng $(x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Dễ thấy rằng $f(x) = e^x$ là hàm lồi trên $(0, +\infty)$, do đó, áp dụng bất đẳng thức Karamata, ta có

$$e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n} \geq e^{y_1} + e^{y_2} + \cdots + e^{y_n}$$

hay

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Ví dụ 2.2. Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Xác định khi nào xảy ra đẳng thức?

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \geq B \geq C$. Khi đó $A \geq \frac{\pi}{3}, C \leq \frac{\pi}{3}$.
 Vì $\frac{\pi}{2} \geq A \geq \frac{\pi}{3}$ và $\pi \geq A + B = \pi - C \geq \frac{2\pi}{3}$ nên

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \succ (A, B, C) \succ \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

Xét hàm $f(x) = \cos x$, dễ thấy $f(x)$ là hàm lõm thật sự trên đoạn $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, do đó, theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) \leq f(A) + f(B) + f(C) \leq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

hay

$$1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Ở bất đẳng thức thứ nhất, dấu đẳng thức không xảy ra (vì hai góc của tam giác không thể cùng vuông). Ở bất đẳng thức thứ hai, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 2.3. Cho ABC là tam giác không nhọn. Chứng minh rằng

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 2\sqrt{2} - 1.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \geq B \geq C$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra được

$$\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right) \succ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = \tan x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} > 0$ với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ đó suy ra $f(x)$ là hàm số lồi trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta nhận được

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{8} + \tan \frac{\pi}{8} \geq 2\sqrt{2} - 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(A, B, C) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ và các hoán vị.

Ví dụ 2.4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra được

$$(2a, 2b, 2c) \succ (a+b, a+c, b+c).$$

Vì $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm lồi trên khoảng $(0, +\infty)$, nên theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$f(2a) + f(2b) + f(2c) \geq f(a+b) + f(a+c) + f(b+c)$$

hay

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.5 (IMO 2000, Bài 2). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) + \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) + \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Lời giải.

Vì $abc = 1$ nên tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz.$$

Ta để ý rằng, $(x - y + z) + (y - z + x) = 2x > 0$, do đó, trong ba số $x - y + z, y - z + x, z - x + y$ không thể có trường hợp hai số cùng âm. Nếu trong ba số trên có một hoặc ba số âm, hiển nhiên ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Trường hợp cả ba số đều dương, bằng cách lấy logarit hai vế, ta có

$$\ln(x - y + z) + \ln(y - z + x) + \ln(z - x + y) \leq \ln x + \ln y + \ln z.$$

Vì $f(x) = \ln x$ là hàm lõm trên $(0, +\infty)$, do đó, sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta được

$$\ln(y - z + x) + \ln(x - y + z) + \ln(z - x + y) \leq \ln x + \ln y + \ln z.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.6. Cho a, b là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{b}} \leq \sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{a}}.$$

Lời giải.

Giả sử $b \geq a \geq 0$.

Giữa các số $x_1 = b + \sqrt[3]{b}, x_2 = b + \sqrt[3]{a}, x_3 = a + \sqrt[3]{b}, x_4 = a + \sqrt[3]{a}$, thì x_1 là số lớn nhất, x_4 là số nhỏ nhất. Vì $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ nên $(x_1, x_4) \succ (x_2, x_3)$ hoặc $(x_1, x_4) \succ (x_3, x_2)$. Dễ thấy $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là hàm lõm trên $[0, +\infty)$, do đó, theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$f(x_1) + f(x_4) \leq f(x_2) + f(x_3)$$

hay

$$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{b}} \leq \sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{a}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2.7. Cho $-1 \leq a, b, c \leq 1, a + b + c = -\frac{1}{2}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = a^{12} + b^{12} + c^{12}.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó $1 \geq a, \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \geq -c - \frac{1}{2} = a + b$.

Do đó $\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) \succ (a, b, c)$. Vì hàm $f(x) = x^{12}$ lõm trên $[-1, 1]$, theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} = f(a) + f(b) + f(c) \leq f(1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1) = 2 + \frac{1}{2^{12}}.$$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = -1$. Do đó giá trị lớn nhất của F là $2 + \frac{1}{2^{12}}$.

Ví dụ 2.8 (IMO 1999, Bài 2). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm, $n \geq 2$. Hãy xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4.$$

Lời giải.

Nếu $x_1 = x_2 = \dots = 0$ thì bất đẳng thức đúng với mọi $C \geq 0$. Nếu có ít nhất một số $x_i > 0$, suy ra $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$. Vì bất đẳng thức trên ở dạng thuần nhất nên ta có thể giả sử rằng $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^3 \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i), \\ &\text{với } f(x) = x^3 - x^4. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta cần xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho $\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq C$, với $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, trong đó $f(x) = x^3 - x^4$ là hàm lồi trên $[0, 1/2]$ (vì $f'(x) = 3x^2 - 4x^3$, $f''(x) = 6x - 12x^2$).

Do tính đối xứng, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Ta sẽ xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\frac{1}{2} \geq x_1$. Khi đó, kiểm tra được $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) \succ (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta có

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) + \dots + f(0) = \frac{1}{8}.$$

Trường hợp 2. $\frac{1}{2} \leq x_1$. Ta kiểm tra được $(1 - x_1, 0, \dots, 0) \succ (x_2, \dots, x_n)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) &= f(x_1) + \sum_{i=2}^n f(x_i) \leq f(x_1) + f(1 - x_1) + f(0) + \dots + f(0) \\ &= f(x_1) + f(1 - x_1). \end{aligned}$$

Mặt khác, bằng cách đặt $y = x_1 - \frac{1}{2} \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(1 - x_1) &= (x_1^3 - x_1^4) + [(1 - x_1)^3 - (1 - x_1)^4] \\ &= x_1(1 - x_1) [x_1^2 + (1 - x_1)^2] \\ &= \left(\frac{1}{2} + y\right) \left(\frac{1}{2} - y\right) \left[\left(\frac{1}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{4} - y^2\right) \left(\frac{1}{2} + 2y^2\right) = 2 \left(\frac{1}{16} - y^4\right) \leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Do đó $\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \frac{1}{8}$. Vậy hằng số C nhỏ nhất cần xác định là $\frac{1}{8}$.

2.6 Bài toán tương tự

Bài tập 2.9. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng

- a) $\sin^\alpha \frac{A}{2} + \sin^\alpha \frac{B}{2} + \sin^\alpha \frac{C}{2} \geq \frac{3}{2^\alpha}$ với $\alpha < 0$.
- b) $1 < \sin^\alpha \frac{A}{2} + \sin^\alpha \frac{B}{2} + \sin^\alpha \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2^\alpha}$ với $1 \geq \alpha > 0$.
- c) $\cos^\alpha \frac{A}{2} + \cos^\alpha \frac{B}{2} + \cos^\alpha \frac{C}{2} \geq \frac{3^{1+\frac{\alpha}{2}}}{2^\alpha}$ với $\alpha < 0$.
- d) $2 < \cos^\alpha \frac{A}{2} + \cos^\alpha \frac{B}{2} + \cos^\alpha \frac{C}{2} \leq \frac{3^{1+\frac{\alpha}{2}}}{2^\alpha}$ với $0 < \alpha \leq 1$.

Bài tập 2.10. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Bài tập 2.11 (APMO 1996). Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Bài tập 2.12. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Chứng minh rằng

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n.$$

Bài tập 2.13. Chứng minh rằng với cặp số x_1, x_2 , ta có bất đẳng thức

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3(xyz)^2 \geq 2(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3).$$

Bài tập 2.14. Chứng minh rằng với mọi bộ số dương x, y, z , ta có bất đẳng thức

$$\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{2x_1 + 3x_2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}\right)^2.$$

Bài tập 2.15. Chứng minh rằng với mọi cặp số dương x_1, x_2 , ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{4x_1 + x_2}} + \frac{1}{\sqrt{x_1 + 4x_2}} \right) &\geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2x_1 + x_2}} + \frac{1}{\sqrt{x_1 + 2x_2}} \right) \\ &\geq \sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{x_1 + x_2}}. \end{aligned}$$

Bài tập 2.16. Chứng minh rằng với mọi cặp số dương x_1, x_2 , ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1 + 2x_2}} + \frac{1}{\sqrt{2x_1 + x_2}} \right) &\geq \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2x_1 + 3x_2}} + \frac{1}{\sqrt{3x_1 + 2x_2}} \right) \\ &\geq \sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{x_1 + x_2}}. \end{aligned}$$

Bài tập 2.17. Xét bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn điều kiện

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n},$$

Chứng minh rằng khi đó

$$\frac{x_1}{n-1+x_1} + \frac{x_2}{n-1+x_2} + \dots + \frac{x_n}{n-1+x_n} \geq 1.$$

Bài tập 2.18. Chứng minh rằng với mọi bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta có bất đẳng thức

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + n(x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2)^{\frac{1}{n}} \geq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^2.$$

Chương 3

Ứng dụng bất đẳng thức Karamata trong đại số và lượng giác

3.1 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng phân thức

Ví dụ 3.1. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Lời giải. Bài này là bài khá quen thuộc, chúng ta có thể làm bằng bất đẳng thức AM-GM, ở đây tôi muốn dùng bất đẳng thức Karamata để giải quyết bài toán

Xét hàm

$$f(t) = \frac{t}{t+1}, \forall t \in [0, 1]$$

ta có

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(t+1)^2} \\ f''(t) &= -\frac{2}{(t+1)^3} < 0, \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Không giảm tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$.

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x + y \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ x + y + z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có:

$$f(x) + f(y) + f(z) \leq 3f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ hay } P \leq \frac{3}{4}$$

$$P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x + y \leq 1 + 0 \\ x + y + z = 1 + 0 + 0. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có:

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq f(1) + f(0) + f(0) \text{ hay } P \geq \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1, y = z = 0.$$

Vậy

$$\max P = \frac{3}{4} \text{ tại } x = y = z = \frac{1}{3}$$

$$\max P = \frac{1}{2} \text{ tại } x = 1, y = z = 0.$$

Ví dụ 3.2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \leq \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4c^2}$$

Lời giải. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} 2a \geq a + b \\ 2a + 2b \geq a + b + a + c \\ 2a + 2b + 2c = a + b + a + c + b + c. \end{cases}$$

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{t^2}$, $\forall x > 0$ ta có

$$f'(t) = -\frac{2}{t^3}$$

$$f''(t) = \frac{6}{t^4} > 0, \forall x > 0.$$

Theo bất đẳng thức Karamata ta có:

$$f(2a) + f(2b) + f(2c) \geq f(a+b) + f(a+c) + f(b+c)$$

hay

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \leq \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4c^2}$$

Đồng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Lời giải. Gọi m là trung bình cộng của $2n+1$ số $n+1, n+2, \dots, 3n+1$.

Vậy

$$m = \frac{n+1+n+2+\cdots+3n+1}{2n+1}$$

Do đó ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} 3n + 1 > 2n + 1 \\ 3n + 1 + 3n > 2n + 1 + 2n + 1 \\ \dots\dots\dots \\ 3n + 1 + 3n + \dots + n + 1 > 2n + 1 + 2n + 1 + \dots + 2n + 1. \end{array} \right.$$

Xét hàm

$$f(t) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$$

ta có

$$f'(t) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f''(t) = \frac{2}{x^3} > 0, \forall x > 0.$$

Vậy $f(x)$ là hàm lồi, Theo bất đẳng thức Karamata ta có:

$$f(3n+1) + f(3n) + \cdots + f(n+1) > (2n+1)f(2n+1)$$

hay

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Bài tập tương tự

Bài tập 3.1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{(a+b)^n} + \frac{1}{(b+c)^n} + \frac{1}{(c+a)^n} \leq \frac{1}{(2a)^n} + \frac{1}{(2b)^n} + \frac{1}{(2c)^n} \text{ với } n > 1.$$

Bài tập 3.2. Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số thực dương thì

$$\frac{a_1^2}{a_2^2 + \dots + a_n^2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2} \geq \frac{a_1}{a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \dots + a_{n-1}}.$$

Bài tập 3.3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

3.2 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng căn thức

Ví dụ 3.4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}.$$

Lời giải.

Xét hàm

$$f(t) = t\sqrt[3]{2}, t > 0$$

$$f'(t) = \sqrt[3]{2}$$

$$f''(t) = \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} > 0, t > 0,$$

suy ra $f(x)$ là hàm lồi với $x > 0$.

Không giảm tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Vậy ta có

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ a + b \geq 1 + 1 \\ a + b + c = 1 + 1 + 1. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có:

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f(1) \text{ hay } a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2} \geq 3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$
 Vậy min $P = 3$ tại $x = y = z = 1$.

Ví dụ 3.5. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Lời giải. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.
 Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$a + b - c \geq b + c - a \geq c + a - b > 0$$

Do đó ta có

$$\begin{cases} a + b - c \geq a \\ a + b - c + a + c - b \geq a + b \\ a + b - c + a + c - b + b + c - a = a + b + c. \end{cases}$$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$ ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x}^3} < 0, x > 0,$$

suy ra $f(x)$ là hàm lõm.

Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có:

$$f(a+b-c) + f(b+c-a) + f(c+a-b) \leq f(a) + f(b) + f(c)$$

hay

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập tương tự

Bài tập 3.4. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$x^5 + y^5 + z^5 \leq x^5 \sqrt{\frac{x^2}{yz}} + y^5 \sqrt{\frac{y^2}{zx}} + z^5 \sqrt{\frac{z^2}{xy}}.$$

Bài tập 3.5. Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$T = \frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2 + x_2^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2x_3 + x_3^2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{x_nx_1 + x_1^2}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Bài tập 3.6. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ac = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^8 + a} + \sqrt{b^8 + b} + \sqrt{c^8 + c} \geq 2\sqrt{a + b + c}$$

3.3 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng logarit và mũ

Ví dụ 3.6. Cho bộ ba số x, y, z dương thỏa mãn $x + y + z = 3e$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\ln x + \ln y + \ln z \leq 3.$$

Lời giải. Xét hàm

$$f(t) = \ln t, t > 0$$

ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t}$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0, t > 0.$$

Vậy $f(t)$ là hàm lõm khi $t > 0$

Không giảm tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$.

Vậy ta có

$$\begin{cases} x \geq e \\ x + y \geq e + e \\ x + y + z = e + e + e. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có:

$$f(x) + f(y) + f(z) \leq f(e) + f(e) + f(e)$$

hay

$$f(x) + f(y) + f(z) \leq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = e$.

Ta được

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \cdots + f(\alpha_n) \leq f(\alpha_0) + f(\alpha_0) + \cdots + f(\alpha_0).$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\ln(\sin \alpha_1) + \ln(\sin \alpha_2) + \cdots + \ln(\sin \alpha_n) \leq n \ln(\sin \alpha_0)$$

hay

$$\ln(\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin \alpha_n) \leq \ln(\sin^n \alpha_0)$$

và

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cdots \sin \alpha_n \leq \sin^n \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

b) Sử dụng phép chứng minh tương tự trên với hàm

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

xác định trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ta có thể chứng minh được bất đẳng thức đã cho.

Bài tập tương tự

Bài tập 3.7. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương

Bài tập 3.8. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

Bài tập 3.9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Khi đó ta có

$$a^{a(a+2b)} b^{b(b+2c)} c^{c(c+2a)} \geq \frac{1}{3}.$$

3.4 Ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức có dạng lượng giác

Ví dụ 3.9. Giả sử tam giác ABC là tam giác không nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sin A + \sin B + \sin C$$

Lời giải. Không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $A \geq B \geq C$.

Từ giả thiết tam giác ABC là tam giác không nhọn suy ra

$$\begin{cases} A \geq \frac{\pi}{2} \\ A + B \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ A + B + C = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \sin x, \text{ xác định trên khoảng } (0, \pi)$$

ta có

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(t) = -\sin x < 0, \forall x \in (0, \pi).$$

Vậy $f(x)$ là hàm lõm $\forall x \in (0, \pi)$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

hay

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}.$$

Vậy $\max M = 1 + \sqrt{2}$ khi $A = \frac{\pi}{2}, B = C = \frac{\pi}{4}$,

hay tam giác ABC là tam giác vuông cân.

Ví dụ 3.10. Trong tam giác ABC . Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}, \forall x \in (0, \pi)$$

ta có

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f''(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} > 0, \forall x \in (0, \pi).$$

Do đó $f(x)$ là hàm lồi trên $(0, \pi)$

Không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $A \geq B \geq C$.

Ta có

$$\begin{cases} A \geq \frac{\pi}{3} \\ A + B \geq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ A + B + C = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata ta có

$$f(A) + f(B) + f(C) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

hay

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

suy ra

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

hay tam giác ABC là tam giác đều.

Từ bài toán trên ta có thể đi đến bài toán tổng quát sau:

Cho $0 < x_i < \pi, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sin x_1} + \frac{1}{\sin x_2} + \dots + \frac{1}{\sin x_n} \geq \frac{n}{\sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}, \forall x \in (0, \pi)$$

ta có

$$f'(t) = -\sin t$$

$$f''(t) = -\cos t < 0, \forall t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

Do đó $f(x) = \cos t$ là hàm lõm khi $t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

Sắp xếp lại n số $2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, \dots, 2x_n - x_{n+1}$ (Ở đây $x_{n+1} = x_n$). Theo trật tự từ lớn đến nhỏ ta có

$$2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq \dots \geq 2x_{m_n} - x_{m_n+1}$$

ở đây $m_i \neq m_j$ khi $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) và $\{m_1, m_2, \dots, m_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$
Sắp xếp lại n số $x_1, x_2, \dots, x_n$. Theo trật tự từ lớn đến nhỏ ta có

$$x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \dots \geq x_{k_n}$$

ở đây $k_i \neq k_j$ khi $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) và $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$
Như vậy ta có

$$2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq x_{k_1}$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (2x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq x_{k_1} + x_{k_2}$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) + \dots + (2x_{m_{n-1}} - x_{m_{n-1}+1}) \geq x_{k_1} + x_{k_2} + \dots + x_{k_{n-1}}$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) + \dots + (2x_{m_n} - x_{m_n+1}) \geq x_{k_1} + x_{k_2} + \dots + x_{k_n}$$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata vào hàm lõm $f(x) = \cos x$ trên $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

ta có

$$\sum_{i=1}^n \cos(2x_{m_i} - x_{m_i+1}) \leq \sum_{j=1}^n \cos x_{k_j}. \quad (1)$$

Chú ý rằng $(2x_{m_1} - x_{m_1+1} + 2x_{m_2} - x_{m_2+1} + \dots + 2x_{m_n} - x_{m_n+1})$ là một hoán vị của $(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, \dots, 2x_n - x_{n+1})$ và $(x_{k_1} + x_{k_2} + \dots + x_{k_n})$ cũng là hoán vị của $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Nên

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \cos(2x_{m_i} - x_{m_i+1}) \leq \sum_{i=1}^n \cos(2x_i - x_{i+1}) \\ \sum_{j=1}^n \cos x_{k_j} = \sum_{j=1}^n \cos x_j. \end{cases}$$

Thay hệ này vào (1) ta được bất đẳng thức sau

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \cdots + \cos(2x_n - x_{n+1}) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_n$$

do $x_{n+1} = x_1$ (giả thiết) suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự

Bài tập 3.10. Trong tam giác ABC . Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

từ đó đi tới bài toán tổng quát sau: Giả sử $0 \leq \alpha_i \leq \pi, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_n}{n} \leq \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}.$$

Bài tập 3.11. Chứng minh trong tam giác ABC ta có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \cdots + \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

Bài tập 3.12. Cho $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ và $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{n - \sum_{i=1}^n \tan^2 \alpha_i}{n + \sum_{i=1}^n \tan^2 \alpha_i} \leq \cos \frac{2\pi}{n}$$

Bài tập 3.13. Chứng minh trong tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức kép sau

$$\sqrt{3} \leq \frac{\cos \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{1 + \sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{1 + \sin \frac{C}{2}} < 2.$$

Kết luận

" Một số lớp bất đẳng thức dạng Karamata và áp dụng " là một trong những đề tài hấp dẫn, có tính ứng dụng cao đã và đang thu hút được rất nhiều nhà khoa học nghiên cứu. Trong khuôn khổ luận văn, tác giả đã nghiên cứu được một số kết quả sau

1. Biểu diễn lớp các hàm số lồi (lõm) và tựa lồi (lõm) khả vi.
2. Các bất đẳng thức dạng Karamata và các bài toán liên quan.
3. Ứng dụng bất đẳng thức Karamata trong đại số và lượng giác.

Luận văn mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

1. Ứng dụng bất đẳng thức Karamata để chứng minh các bất đẳng thức dạng phức tạp hơn.
2. Mối liên hệ với các bất đẳng thức khác trong toán học.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo dục, 2004.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lý và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2006.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2008.
- [4] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2009.
- [5] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Số phức và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2010.