Một số bài tập về nguyên lý Dirichlet

Trần Lê Bách
Lớp 11A1 trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng

Tóm tắt nội dung

Dưới đây là một số bài toán áp dụng nguyên tắc Dirichlet được sưu tầm từ nhiều nguồn khác nhau. Hy vọng tuyển tập này sẽ giúp các bạn nắm sâu hơn các ứng dụng của nguyên lý Dirichlet.

1 Đề toán

♡♡♡

1.
Các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ được chia làm ba tập hợp khác rỗng. Chứng minh rằng có một tập hợp mà tích tất cả các phần tử vượt quá 77.

♡♡♡

2.
Một kiện tướng cờ vua có 77 ngày để xếp lịch du đấu. Anh ta muốn chơi ít nhất một ván mỗi ngày, nhưng không chơi quá 132 ván. Chứng minh rằng có một số ngày liên tục anh ta đã chơi 21 ván cờ.

♡♡♡

3.
Chứng minh rằng với mọi số nguyên có 16 chữ số bất kì, ta luôn tìm được một chuỗi các chữ số liên tiếp sao cho tích của chúng là một số chính phương.

♡♡♡

4. (Putnam 1978)
Cho A là một tập hợp gồm 20 số bất kì chọn ra từ tiến trình số học $1, 4, 7, ..., 100$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai số thuộc A có tổng là 104.
Nhận xét: Ta có thể thay số 20 bằng 9.

♡♡♡

5.
Chọn một tập hợp gồm 10 số nguyên bất kì từ 1 đến 99. Chứng minh rằng tồn tại hai tập con không giao nhau của tập đó có tổng các phần tử bằng nhau.

♡♡♡

6.
Cho S là một tập gồm k số nguyên phân biệt chọn từ dãy $1, 2,...,10^n - 1$. Chứng minh rằng nếu
$$n < \log_{10}\left(\frac{2^k - 1}{k} + \frac{k+1}{2}\right)$$
thì ta có thể tìm được hai tập con của S sao cho tổng tất cả các phần tử của chúng bằng nhau.

♡♡♡

7. (BAMO)
Tất cả những chiếc ghế trong lớp được xếp theo một bảng vuông $n \times n$. Trên mỗi chiếc ghế có một học sinh. Thầy giáo muốn sắp xếp lại các học sinh theo những quy tắc sau:
1. Mỗi học sinh phải dời sang ghế khác
2. Mỗi học sinh chỉ được chọn chỗ trong hàng hoặc cột của chỗ cũ.
Chứng minh rằng tiến trình này chỉ có thể hoàn thành nếu n chẵn, và không thể xảy ra khi n lẻ.

♡♡♡

8.
Có n thực khách tại một bữa tiệc. Chứng minh rằng có hai thực khách, mà trong số $n-2$ người còn lại, có ít nhất $\left\lfloor \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor$ trong số đó mỗi người quen cả hai người hoặc không quen cả hai. Giả sử rằng "quen" là một quan hệ có tính đối xứng.

♡♡♡

9.
Có một số đội tham gia tranh giải bóng đá theo thể thức vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm, tồn tại hai đội đã đá cùng số trận.

♡♡♡

10. (CMO)
Các kì thủ, cả chuyên nghiệp lẫn nghiệp dư, n người tổng cộng, cùng tham gia một giải đấu theo thể thức vòng tròn một lượt. Mỗi trận thắng được 1 điểm, hòa được $\frac{1}{2}$ điểm và thua không được điểm nào. Sau khi cuộc chơi kết thúc, người ta nhận thấy rằng mỗi người nhận được một nửa số điểm tổng cộng có thể có khi đấu với những kì thủ nghiệp dư. Chứng minh rằng $\sqrt{n}$ là một số nguyên.

♡♡♡

11. (CMO)
Mỗi thành viên của một đội cờ 7 người phải thi đấu với mỗi thành viên của một đội cờ khác. Chứng minh rằng ngay khi đã có 22 ván đấu diễn ra, ta có thể chọn 4 kì thủ ngồi quanh một bàn tròn mà mỗi cặp ngồi cạnh đã đấu với nhau.

♡♡♡

12. (USAMO)
Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại một số nguyên n chữ số chia hết cho 5^n, với tất cả các chữ số đều lẻ.

♡♡♡

13.
Cho S là tập n số nguyên. Chứng minh tồn tại một tập con của S sao cho tổng tất cả các phần tử của chúng là bội số của n.

♡♡♡

14.
Lấy bất kì 10 tập con 8 phần tử từ tập $1, 2, ..., 38$. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 tập có số phần tử phần giao không nhỏ hơn 2.

♡♡♡

15.
Chọn $n + 1$ số nguyên bất kì từ tập $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$. Khi đó tồn tại 2 số sao cho số này chia hết cho số kia.

♡♡♡

16.
Chọn 16 số nguyên bất kì trong 30 số nguyên từ 1 đến 30. Chứng minh rằng tồn tại 2 số mà độ lệch của chúng bằng 3.

♡♡♡

17.
Chọn $n + 2$ số trong $3n$ số tự nhiên đầu tiên. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được 2 số a,b sao cho $n < a - b < 2n$.

♡♡♡

18. (BAMO)
Cho n số thực bất kì, không đồng thời bằng 0 nhưng tổng của chúng bằng 0. Chứng minh luôn tồn tại cách đánh chỉ số các phần tử trong dãy sao cho

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0$$

♡♡♡

19.
Cho $a_1, a_2, ..., a_{44}$ là các số nguyên thỏa mãn

$$0 < a_1 < a_2 < ... < a_{44} \leq 125$$

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong số 43 hiệu $d_j = a_{j+1} - a_j$ lặp lại ít nhất 10 lần.

♡♡♡

20.

Chọn 51 số nguyên bất kì trong các số nguyên từ 1 đến 100. Chứng minh rằng tồn tại 2 số nguyên tố cùng nhau trong đó.

♡♡♡

21.

Chứng minh tồn tại số nguyên $k > 1$ sao cho 3^k kết thúc bằng 0001.

♡♡♡

22.

Có n thực khách tại một bữa tiệc. Chứng minh rằng có hai thực khách có cùng số người quen.

♡♡♡

23.

Có n chữ số 0 và 1 được đánh dấu thành một vòng tròn. Chứng minh rằng nếu số lượng của một trong hai chữ số vượt quá $\frac{(k-1)n}{k}$ thì tồn tại một chuỗi độ dài k của chữ số đó.

♡♡♡

24.

Cho một ma trận A $m \times n$ số thực thỏa mãn $a_{i1} \leq a_{i1} \leq ... \leq a_{in}$ với $i = \overline{1, m}$. Các phần tử trên mỗi cột sau đó được sắp xếp để tạo thành một ma trận B mới thỏa mãn $b_{1j} \leq b_{2j} \leq ... \leq b_{nj}$ với $j = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng $b_{i1} \leq b_{i2} \leq ... \leq b_{im}$ với $i = \overline{1, n}$.

♡♡♡

25.

Cho một bàn cờ $n \times n$ được đánh dấu bởi các chữ số bất kì từ 1 đến n^2. Chứng minh rằng tồn tại 2 hình vuông liền nhau có nhãn lệch ít nhất n đơn vị.

♡♡♡

26.

Các số nguyên được điền vào bảng 10×10 sao cho các số ở 2 ô liền kề không lệch quá 5 đơn vị. Chứng minh tất cả các số đó phải bằng nhau.

♡♡♡

27.

Một bàn cờ gồm có 4 hàng và 7 cột. Chọn 2 hàng liên tiếp và 2 hoặc nhiều hơn số cột liên tiếp tạo thành một bàn cờ con. Giả sử cả 28 ô vuông đều được tô màu trắng hoặc đen. Chứng minh rằng tồn tại một bàn cờ con mà cả 4 góc đều có cùng màu.

♡♡♡

28. (Putnam 1971)
Cho 9 điểm nguyên trong không gian Euclide 3 chiều. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nguyên trên một trong các đường thẳng nối các điểm đã cho.

♡♡♡

29. (Putnam 2003)
Cho 5 điểm bất kì trong một hình cầu. Chứng minh tồn tại 4 điểm trong số đó cùng thuộc một bán cầu.

♡♡♡

30. (Olympic 30-4 2006)
Cho một ngũ giác lồi với các đỉnh nguyên. Chứng minh tồn tại một điểm nguyên- nằm trên các cạnh hoặc miền trong của ngũ giác.

♡♡♡

31.
Tại mỗi điểm nguyên khác 0 thuộc $\mathbb{R}^2$ vẽ các đường tròn bán kính $\frac{1}{10}$. Chứng minh rằng mỗi tia xuất phát từ gốc tọa độ luôn đi qua ít nhất một đường tròn.

♡♡♡

32. (Putnam 1974)
Gọi một tập hợp các số nguyên là "conspiratorial-có âm mưu" khi 3 số bất kì của chúng đều tạo thành một bộ nguyên tố cùng nhau (ước chung lớn nhất của 3 số bằng 1). Tìm số phần tử lớn nhất của một tập "conspiratorial" là tập con của các số nguyên từ 1 đến 16.

♡♡♡

33. (Putnam 1977)
Tìm tất cả các số thực x,y,z,w là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + z = w \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w} \end{cases}$$

♡♡♡

34.
Chứng minh tồn tại số nguyên $k > 1$ sao cho 3^k kết thúc bằng 0001.

♡♡♡

35.
Cho 41 quân xe đặt trên một bàn cờ 10×10. Chứng minh tồn tại 5 quân xe không thể tấn công nhau.

♡♡♡

36.

Cho trước một số nguyên $n \geq 1$.
(a) Chứng minh tồn tại một số nguyên chỉ gồm các chữ số 0 và 1 chia hết cho n.
(b) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên chia hết cho 2^n chỉ gồm các chữ số 1 và 2.

♡♡♡

37.

Chứng minh rằng mọi khối đa diện đều tồn tại hai mặt là những đa giác có cùng số cạnh, thực tế là mọi khối đa diện đều tồn tại ít nhất hai mặt không kề nhau là những đa giác có cùng số cạnh.

♡♡♡

38.

Chọn 101 điểm bất kì trên hình vuông đơn vị. Chứng minh tồn tại 3 điểm trong số đó là đỉnh của một tam giác có diện tích không vượt quá 0.01.

♡♡♡

39.

Chọn 5 điểm trong một hình vuông đơn vị. Chứng minh tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Và, tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{\sqrt{5}}{4}$ trong 8 điểm thuộc một hình vuông đơn vị.

♡♡♡

40.

Chọn 6 điểm trong một hình chữ nhật 3×4. Chứng minh tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{5}$.

♡♡♡

41.

Cho a và b là các số thực dương. Chọn r là nghiệm có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất của phương trình $x^3 - ax + b - 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{b}{a} < r \leq \frac{3b}{2a}$$

♡♡♡

42.

Chứng minh rằng trong 9 số thực phân biệt, luôn tìm được 2 số, giả sử là a và b thỏa mãn

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2} - 1$$

♡♡♡

43.
Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Nối tất cả các điểm đó lại. Chứng minh rằng có 2 đường thẳng xuất phát từ một điểm có góc không vượt quá $\frac{\pi}{n}$.

♡♡♡

44. (IMO 1968)
Có n điểm trong mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng khi $n > 4$ tồn tại không ít hơn $\frac{1}{n-4}C_n^5$ tứ giác lồi có các đỉnh là các điểm này.

♡♡♡

45. (IMO 1989)
Cho n, k là 2 số nguyên dương thỏa mãn $n \geq k$ và S là tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng thỏa mãn 2 tính chất:
1. Không có 3 điểm nào của S thẳng hàng.
2. Với mọi điểm $P \in S$ có không ít hơn k điểm của S cách đều P.
Chứng minh rằng $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

♡♡♡

46.
(a) Hãy tìm số ô vuông lớn nhất của một bàn cờ 8×8 có thể tô màu xanh, sao cho bất cứ khối-"L" gồm 3 hình vuông đơn vị ("tromino") đều có một ô vuông không bị tô màu? (b) Hãy tìm số ô vuông bé nhất của một bàn cờ 8×8 có thể tô màu xanh, sao cho bất cứ khối tromino đều có một ô vuông được tô màu?

♡♡♡

47. (Định lý Dirichlet)
Với mọi số vô tỉ a, tồn tại vô hạn cặp số nguyên (h, k) với $k > 0$ thỏa mãn

$$\left|a - \frac{h}{k}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

♡♡♡

48.
Cho u là một số vô tỉ. S là tập hợp tất cả các số dạng $a + bu$ với a,b là các số nguyên. Chứng minh S trù mật trong $\mathbb{R}$, có nghĩa là với mọi số thực x, và với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại phần tử y trong S thỏa mãn $|x - y| < \epsilon$.

♡♡♡

49.
Giả sử α và β là hai số vô tỉ dương. Chứng minh rằng hai tập hợp $A =$

$\{n\alpha|n = 1, 2, ...\}$ và $B = \{n\beta|n = 1, 2, ...\}$ riêng biệt và chứa tất cả các số nguyên dương khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

♡♡♡

50.
Giả sử a là một số vô tỉ. Xét dãy $x_n = na$ (ở đây na là phần thực của na). Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m > 1$, và số nguyên $0 < k < m$, ta đều có $l > 0$ thỏa mãn

$$x_l \in \left(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right)$$

♡♡♡

51. (Định lý Erdos-Szekeres)
Mọi dãy số gồm $(m-1)(n-1)+1$ số thực phân biệt luôn có một dãy con tăng độ dài m hoặc một dãy con giảm độ dài n.

♡♡♡

52. (Hệ quả của định lý Erdos-Szekeres)
Cho một dãy gồm $mn + 1$ số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng luôn tồn tại một dãy con $m + 1$ phần tử sao cho mỗi số không chia hết cho bất kì số nào trong m số còn lại, hoặc một dãy con $n + 1$ phần tử sao cho tồn tại một phần tử là ước chung của tất cả các phần tử còn lại.

♡♡♡

53.
Cho các số nguyên $1 \leq a_1 \leq ... \leq a_m < n$ và $1 \leq b_1 \leq ... \leq b_n < m$. Chứng minh rằng tồn tại p, q, r, s thỏa mãn

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i=r}^{s} b_i.$$