ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Phạm Công Đỉnh

BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ TRONG TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.0113

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Lời cảm ơn

Luận văn "Bất đẳng thức đại số trong tam giác" được tác giả hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Để hoàn thành được luận văn này tác giả đã nhận được rất nhiều sự động viên, giúp đỡ của nhiều cá nhân và tập thể. Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu người thầy đã hướng dẫn tôi thực hiện luận văn của mình. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy cô giáo đã giảng dạy chúng tôi trong lớp cao học trong hai năm học vừa qua. Tôi xin gửi lời cám ơn chân thành tới các thầy cô trong Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Ban Chủ nhiệm khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và trường THPT Chu Văn An - Thái Nguyên đã tạo những điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập. Cuối cùng tôi xin gửi lời cám ơn đến gia đình, bạn bè, những người đã luôn bên tôi, động viên và khuyến khích tôi trong quá trình thực hiện luận văn của mình.

Tác giả

Phạm Công Đỉnh

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức trong tam giác là một phần quan trọng của toán sơ cấp. Bất đẳng thức đại số trong tam giác là một phần chiếm vị trí quan trọng trong các bài toán về bất đẳng thức trong tam giác. Có rất nhiều các dạng toán loại khó liên quan đến chuyên đề này.

Trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic toán quốc tế, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức đại số trong tam giác cũng hay được đề cập và thường thuộc loại khó. Các bài toán về chứng minh bất đẳng thức, cực trị trong tam giác hay các bài toán về nhận dạng tam giác đã được đề cập ở các tài liệu bồi dưỡng giáo viên và học sinh chuyên toán bậc trung học phổ thông.

Các kết quả nghiên cứu về nội dung này tương đối đầy đủ và hoàn thiện. Chính vì vậy để thu được kết quả mới có ý nghĩa về nội dung này là rất khó. Tuy vậy cho đến những năm gần đây một số nhà toán học vẫn thu được một số kết quả mới có ý nghĩa về nội dung này.

Luận văn Bất đẳng thức đại số trong tam giác nhằm cung cấp một số kiến thức cơ bản về các hệ thức đại số của các yếu tố bên trong tam giác, bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác. Đồng thời cũng đưa ra được một số cách xây dựng các bất đẳng thức đại số mới trong tam giác.

Trong quá trình hoàn thành luận văn, tác giả đã không ngừng nỗ lực để học hỏi, tìm tòi và sưu tầm các bài toán về bất đẳng thức đại số trong tam giác.

Luận văn gồm phần mở đầu và ba chương.

Chương 1. Các đẳng thức đại số liên quan đến tam giác. Nội dung của chương này nhằm trình bày các định lí cơ bản về tam giác. Đồng thời trình bày các hệ thức đại số của các yếu tố bên trong tam giác.

Chương 2. Bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác.

Chương này nhằm giới thiệu một số bất đẳng thức đại số trong tam giác được xây dựng được từ các hệ thức đại số trong chương 1. Đồng thời đưa ra một số dạng hệ quả quen thuộc của bất đẳng thức AM-GM để chứng minh một số dạng bất đẳng thức đại số trong tam giác. Chương này cũng đưa ra một số bài thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế có liên quan đến bất đẳng thức đại số trong tam giác.

Chương 3. Một số ứng dụng vào bài toán cực trị và nhận dạng tam giác. Chương này đưa ra các bài toán về nhận dạng các loại tam giác: Tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

Một số ký hiệu dùng trong luận văn

- MO - National Mathematical Olympiad.
- IMO - International Mathematical Olympiad.
- APMO - Asian Pacific Mathematical Olympiad.
- AM - GM - Arithmetic mean - Geometric mean.
- $\sum_{sym}$ - Tổng đối xứng, *sym* là viết tắt của *symmetric*.
- $\sum_{cyc}$ - Tổng hoán vị, *cyc* là viết tắt của *cyclic*.
- m_a; m_b; m_c - lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C.
- l_a; l_b; l_c - lần lượt là độ dài các đường phân giác xuất phát từ các đỉnh A, B, C.
- h_a; h_b; h_c - lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C.
- r : - là bán kính đường tròn nội tiếp.
- R : - là bán kính đường tròn ngoại tiếp.
- r_a; r_b; r_c - là bán kính đường tròn bàng tiếp.

- p - là nửa chu vi của tam giác.
- S - là diện tích của tam giác.

Chương 1

Các đẳng thức đại số liên quan đến tam giác

1.1 Các định lý cơ bản về tam giác

Trong luận văn này, ta sẽ sử dụng một số ký hiệu thống nhất trong tam giác như sau.

Cho tam giác ABC, ta kí hiệu $AB = c;\ AC = b;\ BC = a$.

Định lý 1.1 (Định lý hàm số sin trong tam giác, xem [4],[6]). Trong tam giác ABC luôn có đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Định lý 1.2 (Định lý hàm số cosin trong tam giác xem [4],[6]). Trong tam giác ABC luôn có đẳng thức sau

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Định lý 1.3 (Định lý hàm số tang trong tam giác, xem [4],[6]). Trong tam giác ABC luôn có đẳng thức sau

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} = \tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2};$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}=\tan\frac{B-C}{2}\tan\frac{A}{2};$$
$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\dfrac{C-A}{2}}{\tan\dfrac{C+A}{2}}=\tan\frac{C-A}{2}\tan\frac{B}{2}.$$

Định lý 1.4 (Công thức tính độ dài đường cao trong tam giác, xem [4],[6]).

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a};$$
$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b};$$
$$h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

Định lý 1.5 (Công thức tính độ dài đường trung tuyến trong tam giác, xem [4],[6]).

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};$$
$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4};$$
$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Định lý 1.6 (Công thức tính độ dài đường phân giác trong tam giác, xem [4],[6]).

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\mathrm{A}}{2};$$
$$l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\mathrm{B}}{2};$$
$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}.$$

Định lý 1.7 (Công thức tính độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp, xem [4],[6]).

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Định lý 1.8 (Công thức tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp, xem [4],[6]).

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Định lý 1.9 (Công thức tính độ dài bán kính đường tròn bàng tiếp, xem [4],[6]).

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}};$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2} = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}};$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2} = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Định lý 1.10 (Công thức tính diện tích tam giác, xem [4],[6]).

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\
&= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\text{casinB} = \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= pr = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&= \sqrt{rr_ar_br_c} \\
&= p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 2R^2\sin A\sin B\sin C \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}.
\end{aligned}$$

Định lý 1.11 (Công thức hình chiếu, xem [4],[6]).

$$a = b\cos C + c\cos B = r(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2});$$

$$b = c\cos A + a\cos C = r(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2});$$

$$c = a\cos B + b\cos A = r(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}).$$

1.2 Hệ thức đại số của các yếu tố bên trong tam giác

Trong mục này, trình bày các hệ thức đại số của các yếu tố bên trong tam giác được xây dựng từ phương trình bậc ba và định lý Vi-ét. Nội dung chủ yếu được hình thành từ các tài liệu [4], [5] và [6].

Mệnh đề 1.1. Cho ΔABC với độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi, r và R lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác. Khi đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình dưới đây

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Chứng minh. Từ

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, a = 2R\sin A,$$

ta có

$$a = 2R\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

hay

$$a = 4R\frac{\frac{r}{p-a}}{1+(\frac{r}{p-a})^2} = 4Rr\frac{p-a}{r^2+(p-a)^2}.$$

Như vậy, ta có quan hệ

$$a(a^2 - 2pa + p^2 + r^2) = 4Rr(p-a),$$

hay

$$a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0.$$

Do đó a là một nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được b và c cũng là nghiệm của phương trình này.

Hệ quả 1.1. Cho ΔABC với độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi, r và R lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác. Khi đó, ta có
(i) $a + b + c = 2p$.
(ii) $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$.
(iii) $abc = 4Rrp$.

Chứng minh. Áp dụng định lí Vi-ét cho phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0,$$

ta có (i), (ii), (iii).

Hệ quả 1.2. Cho ΔABC với độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi, r và R lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác. Khi đó ta có các kết quả sau đây
(i) $(a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) = 2Rr(ab + bc + ca - 2Rr)^2$.
(ii) $p = (a^2+2Rr)(b^2+2Rr)+(b^2+2Rr)(c^2+2Rr)+(c^2+2Rr)(a^2+2Rr)$
$= (p^2 + 2Rr + r^2)^2 - 2Rr$.

Chứng minh. a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0.$$

Xét phép biến đổi $y = x^2 + 2Rr$. Đặt $T = p^2 + 2Rr + r^2$. Khử x để được phương trình đa thức bậc ba cho y sau đây.

$$y^3 - (4p^2 + 2Rr - 2T)y^2 + (T^2 - 2Rr)y - 2RrT^2 = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Vì $ab+bc+ca = T+2Rr$ nên $y_1y_2y_3 = 2RrT^2 = 2Rr(ab + bc + ca - 2Rr)^2$. Do đó ta có (i), (ii).

Hệ quả 1.3. Cho ΔABC với độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi, S là diện tích, r và R lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác, r_1, r_2, r_3 là bán kính các đường tròn bàng tiếp của tam giác. Khi đó, ta có đồng nhất thức sau

$$S = \frac{\sqrt{(a^2 + p^2 + 4Rr + r^2)(b^2 + p^2 + 4Rr + r^2)(c^2 + p^2 + 4Rr + r^2)}}{r_1 + r_2 + r_3 + r}.$$

Chứng minh. a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0.$$

Xét phép biến đổi $y = x^2 + p^2 + 4Rr + r^2$. Xác định phương trình nhận

$$y_1 = a^2 + p^2 + 4Rr + r^2,$$

$$y_2 = b^2 + p^2 + 4Rr + r^2,$$

$$y_3 = c^2 + p^2 + 4Rr + r^2$$

làm ba nghiệm. Khử x từ hệ

$$\begin{cases} x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0 \\ x^2 + p^2 + 4Rr + r^2 - y = 0. \end{cases}$$

Ta có ngay hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0 \\ x^3 + p^2x + 4Rrx + r^2x - yx = 0. \end{cases}$$

và được $2px^2 - yx + 4Rrp = 0$ hay $2p\left[y - p^2 - 4Rr - r^2\right] - yx + 4Rrp = 0$. Giải ra

$$x = \frac{2py - 4Rrp - 2r^2p}{y}.$$

Do đó

$$\left(\frac{2py - 4Rrp - 2r^2p}{y}\right)^2 + p^2 + 4Rr + r^2 = y,$$

hay

$$y^3 - (p^2 + 4Rr + r^2)y^2 - (2py - 4Rrp - 2r^2p)^2 = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm y_1, y_2, y_3.
Do đó, $y_1y_2y_3 = (4R + 2r)^2r^2p^2$. Từ hệ thức này suy ra đồng nhất thức

$$(a^2+p^2+4Rr+r^2)(b^2+p^2+4Rr+r^2)(c^2+p^2+4Rr+r^2) = (4Rr + 2r^2)^2p^2.$$

Thay $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$, ta có đồng nhất thức cần chứng minh.

Mệnh đề 1.2. Cho ΔABC với diện tích S và độ dài bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp lần lượt là r, R. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao. Khi đó, h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của phương trình đa thức bậc ba sau đây

$$y^3 - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \frac{2S^2}{Rr}y - \frac{2S^2}{R} = 0.$$

Hơn nữa, ta còn có
(i) $h_a + h_b + h_c = \dfrac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}$.
(ii) $h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a = \dfrac{2S^2}{Rr}$ và $h_ah_bh_c = \dfrac{2S^2}{R}$.
(iii) $(h_a - r)(h_b - r)(h_c - r) = \dfrac{S^2 + 2Rr^3 + r^4}{2R}$.

Chứng minh. Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0$$

nên $\dfrac{2S}{a}, \dfrac{2S}{b}, \dfrac{2S}{c}$ là ba nghiệm của phương trình

$$2S^2 - \frac{2S^2}{r}y + \frac{\dfrac{S^2}{r^2} + 4Rr + r^2}{2}y^2 - Ry^3 = 0.$$

Do vậy, h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của phương trình đa thức bậc ba sau đây

$$y^3 - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \frac{2S^2}{Rr}y - \frac{2S^2}{R} = 0.$$

(i) và (ii) được suy ra từ phương trình trên theo Định lý Vi-ét.
(iii) Vì

$$y^3 - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \frac{2S^2}{Rr}y - \frac{2S^2}{R} = (y - h_a)(y - h_b)(y - h_c).$$

nên khi cho $y = r$, ta có

$$(h_a - r)(h_b - r)(h_c - r) = \frac{S^2 + 2Rr^3 + r^4}{2R}.$$

Mệnh đề 1.3. Cho ΔABC với nửa chu vi p, bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp lần lượt là r, R và bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Khi đó, r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0.$$

Hơn nữa, ta còn có
(i) $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$ [Steiner].
(ii) $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = p^2$.

(iii) $r_1r_2r_3 = p^2r$.
(iv) $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$.

Chứng minh. Từ
$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r_1}{p}, a = 2R\sin A$$
ta có
$$a = 2R\frac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}},$$
hay
$$a = 4R\frac{\dfrac{r_1}{p}}{1+\dfrac{r_1^2}{p^2}} = 4Rr_1\frac{p}{r_1^2+p^2}.$$
Bởi vì $r_1(p-a) = S = rp$ nên ta có quan hệ
$$\frac{(r_1-r)p}{r_1} = a = 4Rr_1\frac{p}{r_1^2+p^2},$$
hay
$$(r_1 - r)(r_1^2 + p^2) = 4Rr_1^2.$$
Do đó r_1 là một nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Tương tự, r_2 và r_3 cũng là nghiệm của phương trình này.
(i), (ii), (iii) được suy ra từ phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ theo Định lý Vi-ét.
(iv) Từ
$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3),$$
suy ra
$$(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2.$$

Hệ quả 1.4. Cho ΔABC với các đường cao h_a, h_b, h_c, bán kính đường tròn nội tiếp r và bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Khi đó, ta có

(i) $4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}$.

(ii) $h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a=\frac{2r}{R}(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)$.

Chứng minh. Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=0$ nên $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$ là ba nghiệm của $p^2rx^3-p^2x^2+(4R+r)x-1=0$.
Như vậy

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{r^2}-2\frac{4R+r}{p^2r}.$$

Do a, b, c là ba nghiệm của

$$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4Rrp=0$$

nên

$$a^2+b^2+c^2=4p^2-2(p^2+r^2+4Rr)=2p^2-2r^2-8Rr$$

và nhận được

$$4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\frac{2p^2-2r^2-8Rr}{p^2r^2}=\frac{2}{r^2}-2\frac{4R+r}{p^2r}.$$

Từ hai hệ thức trên suy ra

$$4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}.$$

(ii) Ta có

$$h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a=r\frac{2S^2}{Rr^2}=2r\frac{p^2}{R}=\frac{2r}{R}(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1).$$

Hệ quả 1.5. Cho ΔABC với nửa chu vi p, bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp r, R và bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3.
Khi đó
(i) $\left(\frac{r_1}{r}-1\right)\left(\frac{r_2}{r}-1\right)\left(\frac{r_3}{r}-1\right)=4\frac{R}{r}$.
(ii) $d_a^2+d_b^2+d_c^2=11R^2+2Rr$, trong đó, d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến tâm ba đường tròn bàng tiếp ΔABC .

Chứng minh.
(i) Do

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

nên khi lấy $x = r$ được $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$.
Chia hai vế cho r^3, ta có

$$\left(\frac{r_1}{r} - 1\right)\left(\frac{r_2}{r} - 1\right)\left(\frac{r_3}{r} - 1\right) = 4\frac{R}{r}.$$

(ii) Vì $d_a^2 = R^2 + 2Rr_1, d_b^2 = R^2 + 2Rr_2$ và $d_c^2 = R^2 + 2Rr_3$ nên

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 11R^2 + 2Rr.$$

Hệ quả 1.6. Cho ΔABC với bán kính các đường tròn bàng tiếp là $r_1, r_2, r_3; r$ là bán kính đường tròn nội tiếp. Khi đó ta có
$$2.\frac{r_1 - r}{r_1 + r}.\frac{r_2 - r}{r_2 + r}.\frac{r_3 - r}{r_3 + r} + \frac{r_1 - r}{r_1 + r}.\frac{r_2 - r}{r_2 + r} + \frac{r_2 - r}{r_2 + r}.\frac{r_3 - r}{r_3 + r} + \frac{r_3 - r}{r_3 + r}.\frac{r_1 - r}{r_1 + r} = 1.$$

Chứng minh. r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \qquad (1).$$

Xét phép biến đổi $y = \dfrac{x - r}{x + r}$. Dễ thấy $y \neq 1$ và $x = \dfrac{r(y + 1)}{1 - y}$. Thay x vào phương trình (1) ta nhận được phương trình đa thức bậc ba sau đây

$$(r^2 + 2Rr + p^2)y^3 + (2r^2 + 2Rr - 2p^2)y^2 + (r^2 - 2Rr + p^2)y - 2Rr = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Khi đó, ta có hệ thức

$$2y_1y_2y_3 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{4Rr + r^2 - 2Rr + p^2}{r^2 + 2Rr + p^2} = 1.$$

Hệ quả 1.7. ΔABC với bán kính các đường tròn bàng tiếp là $r_1, r_2, r_3; r$ là bán kính đường tròn nội tiếp. Đặt

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{2r_1 - r}{r_1 + r} + \frac{2r_2 - r}{r_2 + r} + \frac{2r_3 - r}{r_3 + r},\\
T_2 &= \frac{2r_1 - r}{r_1 + r}.\frac{2r_2 - r}{r_2 + r} + \frac{2r_2 - r}{r_2 + r}.\frac{2r_3 - r}{r_3 + r} + \frac{2r_3 - r}{r_3 + r}.\frac{2r_1 - r}{r_1 + r},\\
T_3 &= \frac{2r_1 - r}{r_1 + r}.\frac{2r_2 - r}{r_2 + r}.\frac{2r_3 - r}{r_3 + r}.
\end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$4T_3 + T_2 - 2T_1 = 5.$$

Chứng minh. r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0, \qquad (1).$$

Xét phép biến đổi $y = \dfrac{2x - r}{x + r}$. Dễ thấy $y \neq 2$ và $x = \dfrac{r(y+1)}{2-y}$. Thay x vào phương trình (1) ta nhận được phương trình đa thức bậc ba sau đây

$$2(r^2 + 2Rr + p^2)y^3 + 3(r^2 - 3p^2)y^2 - 2(6Rr - 6p^2)y - (r^2 + 8Rr + 4p^2) = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Khi đó, ta có các hệ thức

$$\begin{aligned} 2T_1 &= 2(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{9p^2 - 3r^2}{r^2 + 2Rr + p^2}, \\ T_2 &= y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{6p^2 - 6Rr}{r^2 + 2Rr + p^2}, \\ 4T_3 &= 4y_1y_2y_3 = \frac{2r^2 + 16Rr + 8p^2}{r^2 + 2Rr + p^2}. \end{aligned}$$

Từ ba hệ thức này ta suy ra $4T_3 + T_2 - 2T_1 = 5$.

Hệ quả 1.8. Cho ΔABC với độ dài ba cạnh là $a, b, c; p$ là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp là r. Ta có kết quả sau đây

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{p^2 + r^2}{2Rr} - 7.$$

Chứng minh.
Ta biết, nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ thì

$$(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_3x_1)(x_3^2 - x_1x_2) = a_1^3a_3 - a_2^3.$$

$$\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{x_3x_1} = \frac{a_1a_2}{a_3} - 9.$$

Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$$

nên

$$(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 32p^4Rr - (p^2 + r^2 + 4Rr)^3.$$

Từ hệ thức trên, ta có

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2p(p^2 + r^2 + 4Rr)}{4Rrp} - 9.$$

Suy ra

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{p^2 + r^2}{2Rr} - 7.$$

Hệ quả 1.9. Cho ΔABC với độ dài ba cạnh a, b, c; bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp là r, R; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3; nửa chu vi là p và diện tích là S. Chứng minh rằng

$$\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 r_2} + \frac{(r_2 - r_3)^2}{r_2 r_3} + \frac{(r_3 - r_1)^2}{r_3 r_1} = \frac{4R}{r} - 8.$$

Chứng minh. Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Khi đó

$$\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 r_2} + \frac{(r_2 - r_3)^2}{r_2 r_3} + \frac{(r_3 - r_1)^2}{r_3 r_1} = \frac{(4R + r)p^2}{p^2 r} - 9 = \frac{4R}{r} - 8.$$

Hệ quả 1.10. Cho ΔABC với bán kính các đường tròn ngoại tiếp là R; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3; nửa chu vi là p. Chứng minh

$$\left(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\right)\left(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\right)\left(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\right) = \frac{16R^2}{p^2}.$$

Chứng minh. r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0.$$

Xác định phương trình nhận $y_1 = r_1^2 + p^2, y_2 = r_2^2 + p^2, y_3 = r_3^2 + p^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ

$$\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^2 + p^2 - y = 0. \end{cases}$$

Ta có ngay hệ

$$\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^3 + p^2x - yx = 0. \end{cases}$$

và

$$(4R+r)x^2 - yx + p^2r = 0;$$

hay phương trình

$$(4R+r)(y-p^2) - yx + p^2r = 0.$$

Đặt $T = 4R + r$. Khi đó $x = \dfrac{Ty - 4Rp^2}{y}$.

Vậy

$$\frac{(Ty-4Rp^2)^2}{y^2} + p^2 - y = 0.$$

Hay

$$y^3 - (T^2+p^2)y^2 + 8RTp^2y - 16R^2p^4 = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm là y_1, y_2, y_3. Do đó

$$\frac{(r_1^2+p^2)(r_2^2+p^2)(r_3^2+p^2)}{p^6} = \frac{y_1y_2y_3}{p^6} = \frac{16R^2p^4}{p^6}.$$

Từ hệ thức cuối suy ra đồng nhất thức

$$\left(\frac{r_1^2}{p^2}+1\right)\left(\frac{r_2^2}{p^2}+1\right)\left(\frac{r_3^2}{p^2}+1\right) = \frac{16R^2}{p^2}.$$

Hệ quả 1.11. Cho ΔABC với bán kính đường tròn ngoại tiếp là R; bán kính đường tròn nội tiếp là r; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3; nửa chu vi là p. Chứng minh rằng

(i) $\left(\dfrac{r_1^2}{p^2}-1\right)\left(\dfrac{r_2^2}{p^2}-1\right)\left(\dfrac{r_3^2}{p^2}-1\right) = 4\left[\dfrac{(2R+r)^2}{p^2}-1\right].$

(ii) $\left(\dfrac{r_1^2}{p^2}-1\right)\left(\dfrac{r_2^2}{p^2}-1\right) + \left(\dfrac{r_2^2}{p^2}-1\right)\left(\dfrac{r_3^2}{p^2}-1\right) + \left(\dfrac{r_3^2}{p^2}-1\right)\left(\dfrac{r_1^2}{p^2}-1\right)$

$$= 8 - 4\frac{(2R+r)(r_1+r_2+r_3)}{p^2}.$$

Chứng minh.

(i) r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Xác định phương trình nhận $y_1 = r_1^2 - p^2, y_2 = r_2^2 - p^2, y_3 = r_3^2 - p^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ

$$\begin{cases} x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^2 - p^2 - y = 0. \end{cases}$$

Ta có ngay hệ

$$\begin{cases} x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^3 - p^2x - yx = 0. \end{cases}$$

và

$$(4R+r)x^2 - yx - 2p^2x + p^2r = 0.$$

Hay ta có phương trình

$$(4R+r)(y+p^2) - (y+2p^2)x + p^2r = 0.$$

Đặt $T = 4R + r$. Khi đó $x = \dfrac{Ty + (T+r)p^2}{y+p^2}$. Vậy

$$\frac{(Ty + (T+r)p^2)^2}{(y+2p^2)^2} - p^2 - y = 0.$$

Hay

$$y(y+2p^2)^2 + p^2(y+2p^2)^2 - (Ty + (T+r)p^2)^2 = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm là y_1, y_2, y_3.
Do đó,

$$\frac{(r_1^2 - p^2)(r_2^2 - p^2)(r_3^2 - p^2)}{p^6} = \frac{y_1y_2y_3}{p^6} = \frac{(4R+2r)^2p^4 - 4p^6}{p^6}.$$

Từ hệ thức cuối cùng ta suy ra được đồng nhất thức

$$\left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1\right)\left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1\right)\left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1\right) = 4\left[\frac{(2R+r)^2}{p^2} - 1\right].$$

(ii) được suy ra từ hệ số của y bằng $8p^4 - 4(2R+r)(4R+r)p^2$.

Chương 2

Bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác

2.1 Xây dựng các bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác

Trong mục này, ta xây dựng các bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác từ các mệnh đề, hệ quả trong chương 1. Nội dung chủ yếu được hình thành từ các tài liệu [3], [5] và [6].

Trước khi phát biểu các kết quả chúng ta cần bài toán sau đây

Bài toán 2.1 (Yugoslav Federal Competition 1991)**.** Với ba số thực dương a, b, c ta có

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Chứng minh.
Hiển nhiên, ta có $(a-b)(a^2-b^2)\geq 0$, suy ra $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.
Do đó $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\dfrac{1}{ab(a+b)+abc}=\dfrac{c}{abc(a+b+c)}$.
Tương tự, ta có $\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\dfrac{a}{abc(a+b+c)}$
và $\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{b}{abc(a+b+c)}$.
Cộng cả ba bất đẳng thức này lại, ta thu được

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Đó chính là điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2.1.1 Sử dụng mệnh đề 1.1

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

(i) $\dfrac{1}{R^2} \leq \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab}$.

(ii) $\dfrac{1}{R^2} \leq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \leq \dfrac{1}{4r^2}$.

(iii) $\dfrac{\ell_a \ell_b \ell_c}{abc} \geq \dfrac{64S^3}{(p^2+r^2+4Rr-bc)(p^2+r^2+4Rr-ca)(p^2+r^2+4Rr-ab)}$.

(iv) $\dfrac{1}{a^3+b^3+4RS} + \dfrac{1}{b^3+c^3+4RS} + \dfrac{1}{c^3+a^3+4RS} \leq \dfrac{1}{4r^2(a+b+c)}$.

Chứng minh.
(i) Theo mệnh đề 1.1, ta có a, b, c là ba nghiệm của phương trình dưới đây

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ là ba nghiệm của phương trình

$$-1 + 2px - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4Rrpx^3 = 0,$$

nên $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = \dfrac{2p}{4Rrp} = \dfrac{1}{2Rr} \geq \dfrac{1}{R^2}$.

(ii) Đặt $f(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = (x-a)(x-b)(x-c)$.
Lấy hai lần đạo hàm của $f(x)$ ta được $3x - 2p = (x-a) + (x-b) + (x-c)$.

Từ đây được $\dfrac{3x-2p}{f(x)} = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)} + \dfrac{1}{(x-b)(x-c)} + \dfrac{1}{(x-c)(x-a)}$.
Cho $x = p$, ta có

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{p}{r^2p} = \frac{1}{r^2}.$$

Tóm lại

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{1}{4(p-a)(p-b)} + \frac{1}{4(p-b)(p-c)} + \frac{1}{4(p-c)(p-a)} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Lại có $\dfrac{1}{R^2} \leq \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} \leq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Suy ra $\dfrac{1}{R^2} \le \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \le \dfrac{1}{4r^2}$.

(iii) Vì $\ell_a = \dfrac{2\sqrt{bc(p-a)p}}{b+c}, \ell_b = \dfrac{2\sqrt{ca(p-b)p}}{c+a}, \ell_c = \dfrac{2\sqrt{ab(p-c)p}}{a+b}$.
Ta có

$$\ell_a\ell_b\ell_c = \frac{32Rrabcp^2S}{(p^2+r^2+4Rr-bc)(p^2+r^2+4Rr-ca)(p^2+r^2+4Rr-ab)}.$$

Vì $R \ge 2r$ nên

$$\frac{\ell_a\ell_b\ell_c}{abc} \ge \frac{64S^3}{(p^2+r^2+4Rr-bc)(p^2+r^2+4Rr-ca)(p^2+r^2+4Rr-ab)}.$$

(iv) Từ $\dfrac{1}{a^3+b^3+4RS} + \dfrac{1}{b^3+c^3+4RS} + \dfrac{1}{c^3+a^3+4RS} \le \dfrac{1}{4Rrp}$.
Theo bài toán 2.1 và $\dfrac{1}{4Rrp} \le \dfrac{1}{4r^2(a+b+c)}$,
suy ra $\dfrac{1}{a^3+b^3+4RS} + \dfrac{1}{b^3+c^3+4RS} + \dfrac{1}{c^3+a^3+4RS} \le \dfrac{1}{4r^2(a+b+c)}$.

2.1.2 Sử dụng mệnh đề 1.2

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có
(i) $\dfrac{S^2+5r^4}{2R} \le (h_a-r)(h_b-r)(h_c-r) \le \dfrac{S^2+5r^4}{4r}$.
(ii) $\dfrac{1}{h_a^3+h_b^3+\dfrac{2S^2}{R}} + \dfrac{1}{h_b^3+h_c^3+\dfrac{2S^2}{R}} + \dfrac{1}{h_c^3+h_a^3+\dfrac{2S^2}{R}} \le \dfrac{1}{h_ah_bh_c}$.

Chứng minh.
Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2+4Rr+r^2)x - 4Rrp = 0$$

nên $\dfrac{2S}{a}, \dfrac{2S}{b}, \dfrac{2S}{c}$ là ba nghiệm của phương trình

$$2S^2 - \frac{2S^2}{r}y + \frac{\dfrac{S^2}{r^2}+4Rr+r^2}{2}y^2 - Ry^3 = 0$$

.

Do vậy h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của phương trình đa thức bậc ba sau đây

$y^3 - \dfrac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \dfrac{2S^2}{Rr}y - \dfrac{2S^2}{R} = 0.$

Vì $y^3 - \dfrac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \dfrac{2S^2}{Rr}y - \dfrac{2S^2}{R} = (y - h_a)(y - h_b)(y - h_c)$

nên khi cho $y = r$ ta có $(h_a - r)(h_b - r)(h_c - r) = \dfrac{S^2 + 2Rr^3 + r^4}{2R}$.

(i) Vì $R \geq r$ nên $\dfrac{S^2 + 5r^4}{2R} \leq (h_a - r)(h_b - r)(h_c - r) \leq \dfrac{S^2 + 5r^4}{4r}$.

(ii) Được suy ra từ bài toán 2.1.

2.1.3 Sử dụng mệnh đề 1.3

Bài toán 2.4. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

(i) $8r^3 \leq (r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) \leq R^3$.

(ii) $81r^2 \leq (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\dfrac{r_1r_2r_3}{r} \leq \dfrac{81}{4}R^2$.

(iii) $ab + bc + ca \geq 4r(r_1 + r_2 + r_3)$.

(iv) $729r^3 - 3R(a + b + c)^2 \leq r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 \leq \dfrac{729}{8}R^3 - 6r(a + b + c)^2$.

(v) $\dfrac{1}{r_1^3 + r_2^3 + Sp} + \dfrac{1}{r_2^3 + r_3^3 + Sp} + \dfrac{1}{r_3^3 + r_1^3 + Sp} \leq \dfrac{1}{r_1r_2r_3}$.

Chứng minh.
(i) Từ $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$ và $R \geq 2r$
suy ra $8r^3 \leq (r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) \leq R^3$.

(ii) Do bởi $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)$
nên $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (4R + r)^2 - 2\dfrac{r_1r_2r_3}{r}$
hay $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\dfrac{r_1r_2r_3}{r} = (4R + r)^2$.

Vậy $\dfrac{81}{4}R^2 \geq r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\dfrac{r_1r_2r_3}{r} \geq 81r^2$.

(iii) Vì $4(ab + bc + ca) = 4p^2 + 4r^2 + 16Rr$
và $4p^2 \geq 3(ab + bc + ca)$
nên $ab + bc + ca \geq 4r(4R + r) = 4r(r_1 + r_2 + r_3)$.

(iv) Từ $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = (4R + r)^3 - 3R(a + b + c)^2$ và $R \geq 2r$
suy ra $729r^3 - 3R(a + b + c)^2 \leq r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 \leq \dfrac{729}{8}R^3 - 6r(a + b + c)^2$.

(v) Áp dụng kết quả của bài toán 2.1 ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh .

Bài toán 2.5. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

$$\frac{4R}{r_1 - r} + \frac{4R}{r_2 - r} + \frac{4R}{r_3 - r} \leq \frac{r_1r_2r_3}{r^3} - 15.$$

Chứng minh.
Theo mệnh đề 1.3, ta có r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$$

nên $\dfrac{1}{x - r_1} + \dfrac{1}{x - r_2} + \dfrac{1}{x - r_3} = \dfrac{3x^2 - 2(4R + r)x + p^2}{x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r}$.

Khi cho $x = r$ ta được $\dfrac{1}{r - r_1} + \dfrac{1}{r - r_2} + \dfrac{1}{r - r_3} = \dfrac{r^2 - 8Rr + p^2}{-4Rr^2}$.

Như vậy $\dfrac{4R}{r_1 - r} + \dfrac{4R}{r_2 - r} + \dfrac{4R}{r_3 - r} = 1 - \dfrac{8R}{r} + \dfrac{r_1r_2r_3}{r^3}$.

Mặt khác $p^2 = \dfrac{r_1r_2r_3}{r}$ và $\dfrac{8R}{r} \geq 16$

nên $\dfrac{4R}{r_1 - r} + \dfrac{4R}{r_2 - r} + \dfrac{4R}{r_3 - r} \leq \dfrac{r_1r_2r_3}{r^3} - 15$.

Bài toán 2.6. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có
(i) $\dfrac{1}{(r - r_1)(r - r_2)} + \dfrac{1}{(r - r_2)(r - r_3)} + \dfrac{1}{(r - r_3)(r - r_1)} \leq \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{R^2}$.
(ii) $\dfrac{1}{(r - r_1)(r - r_2)} + \dfrac{1}{(r - r_2)(r - r_3)} + \dfrac{1}{(r - r_3)(r - r_1)} \geq \dfrac{3}{4r^2}$.

Chứng minh.
(i) Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phươnng trình $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=0$ nên $f(x) = x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$.
Lấy hai lần đạo hàm của $f(x)$ ta được

$$3x-4R-r = (x-r_1)+(x-r_2)+(x-r_3).$$

Từ đây, ta có

$$\frac{3x-4R-r}{f(x)} = \frac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} + \frac{1}{(x-r_2)(x-r_3)} + \frac{1}{(x-r_3)(x-r_1)}.$$

Cho $x = r$ có

$$\frac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \frac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \frac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} = \frac{2R-r}{2Rr^2}.$$

Vậy có $\dfrac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \dfrac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \dfrac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} = \dfrac{2R-r}{2Rr^2}$
và do $\dfrac{2R-r}{2Rr^2} \le \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{R^2}$
nên (i) được chứng minh.

(ii) Vì $\dfrac{2R-r}{2Rr^2} = \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{2Rr} \ge \dfrac{3}{4r^2}$ nên (ii) được chứng minh.

Bài toán 2.7. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có
$\left(\dfrac{3r_1-2r}{2r_1+r}\right)\left(\dfrac{3r_2-2r}{2r_2+r}\right)\left(\dfrac{3r_3-2r}{2r_3+r}\right) \ge \dfrac{100r^2+9p^2}{19r^2+12p^2}$.

Chứng minh.
r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=0$ (*).
Xét phép biến đổi $y = \dfrac{3x-2r}{2x+r}$.
Dễ thấy $y \ne \dfrac{3}{2}$ và $x = \dfrac{r(y+2)}{3-2y}$.
Thay x vào phương trình (*), nhận được phương trình đa thức bậc ba cho y sau đây

$$(3r^2+8Rr+12p^2)y^3 + (11r^2+20Rr-40p^2)y^2 + (8r^2-16Rr+39p^2)y$$
$$-(4r^2+48Rr+9p^2) = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Khi đó, ta có hệ thức

$$y_1y_2y_3 = \frac{4r^2 + 48Rr + 9p^2}{3r^2 + 8Rr + 12p^2}.$$

Vì hàm $z = \dfrac{4r^2 + 48rt + 9p^2}{3r^2 + 8rt + 12p^2}$ là đồng biến khi $t \geq 2r$ nên $z \geq z(2r)$ hay

$$\frac{3r_1 - 2r}{2r_1 + r}\frac{3r_2 - 2r}{2r_2 + r}\frac{3r_3 - 2r}{2r_3 + r} \geq \frac{100r^2 + 9p^2}{19r^2 + 12p^2}.$$

2.1.4 Sử dụng hệ quả 1.2

Bài toán 2.8. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có
(i) $(a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) \leq R^2(ab + bc + ca - 2Rr)^2$.

(ii) $(p^2 + 5r^2)^2 - R^2 \leq P \leq (p^2 + \frac{5}{4}R^2)^2 - 4r^2$,

trong đó $P = (p^2 + 2\mathrm{R}r + r^2)^2 - 2Rr$.

Chứng minh.
(i) a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0.$$

Xét phép biến đổi $y = x^2 + 2Rr$.
Đặt $T = p^2 + 2Rr + r^2$.
Khử x để được phương trình đa thức bậc ba cho y sau đây

$$y^3 - (4p^2 + 2Rr - 2T)y^2 + (T^2 - 2Rr)y - 2RrT^2 = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này.
Vì $ab+bc+ca = T+2Rr$ nên $y_1y_2y_3 = 2RrT^2 = 2Rr(ab + bc + ca - 2Rr)^2$.
Vì $R \geq 2r$ nên ta có $(a^2+2Rr)(b^2+2Rr)(c^2+2Rr) \leq R^2(ab + bc + ca - 2Rr)^2$.

(ii) Vì $(p^2 + 5r^2)^2 - R^2 \leq (p^2 + 2Rr + r^2)^2 - 2Rr \leq (p^2 + R^2 + r^2)^2 - 4r^2$
nên $(p^2 + 5r^2)^2 - R^2 \leq P \leq (p^2 + \frac{5}{4}R^2)^2 - 4r^2$.

2.1.5 Sử dụng hệ quả 1.5

Bài toán 2.9. Cho ΔABC với nửa chu vi p; bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp lần lượt là r, R; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3; gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến tâm ba đường tròn bàng tiếp ΔABC . Khi đó, ta có

(i) $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq 12R^2$.

(ii) $d_a d_b d_c \leq 8R^3$.

Chứng minh.
(i) Áp dụng hệ quả 1.5 ta có $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 11R^2 + 2Rr$.
Vì $R \geq 2r$ nên $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq 12R^2$.

(ii) Ta có $p^2 \leq \dfrac{27}{4}R^2$
và $d_a^2 d_b^2 d_c^2 = R^3(R + 2r_1)(R + 2r_2)(R + 2r_3)$.
Mặt khác $R^3(R+2r_1)(R+2r_2)(R+2r_3) = R^3(9R^3 + 2R^2r + 4Rp^2 + 8rp^2)$
nên $d_a^2 d_b^2 d_c^2 \leq R^3(9R^3 + 2R^2r + 27R^3 + 54R^2r)$
hay $(d_a d_b d_c)^2 \leq R^3(36R^3 + 56R^2r) \leq 64R^6$.
Vậy $d_a d_b d_c \leq 8R^3$.

2.1.6 Sử dụng hệ quả 1.8

Bài toán 2.10. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

$$(a^2 - bc)(b^2 - bc)(c^2 - bc) \leq 8p^3abc - (p^2 + 9r^2)^3.$$

Chứng minh.
Ta biết, nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ thì $(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_3x_1)(x_3^2 - x_1x_2) = a_1^3a_3 - a_2^3$,
$\dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3} + \dfrac{(x_3 - x_1)^2}{x_3x_1} = \dfrac{a_1a_2}{a_3} - 9$.
Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$$

nên $(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=32p^4Rr-(p^2+r^2+4Rr)^3$.
Vì $4Rrp=abc$ và $R\geq 2r$
nên $(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)\leq 8p^3abc-(p^2+9r^2)^3$.

2.2 Các dạng hệ quả của bất đẳng thức AM-GM áp dụng cho các yếu tố đại số của tam giác

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng một số dạng hệ quả quen thuộc của bất đẳng thức AM-GM để chứng minh một số dạng bất đẳng thức đại số trong tam giác. Nội dung chủ yếu được hình thành từ các tài liệu [2] và [6].

2.2.1 Một số bất đẳng thức cơ bản

Bài toán 2.11. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có
(i) $h_a+h_b+h_c\geq 9r$.
(ii) $m_a+m_b+m_c\leq \dfrac{9R}{2}$.
(iii) $l_a+l_b+l_c\leq \sqrt{3}p$.

Chứng minh.
(i) Ta có
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geq \frac{9}{h_a+h_b+h_c}.$$
Suy ra $h_a+h_b+h_c\geq 9r$.

(ii) Ta có
$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)=3R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C).$$
Suy ra $m_a^2+m_b^2+m_c^2\leq \dfrac{27R^2}{4}$.
Ta có $(m_a+m_b+m_c)^2\leq 3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\leq \dfrac{81R^2}{4}\Leftrightarrow m_a+m_b+m_c\leq \dfrac{9R}{2}$.

(iii) Ta có $l_a=\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}=\dfrac{2bc\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}}{b+c}=\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$.

Suy ra $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.
Tương tự $l_b \leq \sqrt{p(p-b)}$; $l_c \leq \sqrt{p(p-c)}$.
Vậy

$$l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{p}(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}) \leq 3\sqrt{p}\sqrt{\tfrac{p-a+p-b+p-c}{3}} = p\sqrt{3}$$

.

2.2.2 Sử dụng bất đẳng thức

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

với $a, b, c \geq 0$.

Bài toán 2.12. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có
(i) $m_a m_b m_c \leq \dfrac{27R^3}{8}$.
(ii) $(l_a + l_b)(l_b + l_c)(l_c + l_a) \leq \dfrac{8p^3}{3\sqrt{3}}$.

Chứng minh.
(i) Ta có

$$m_a m_b m_c \leq (\frac{m_a + m_b + m_c}{3})^3 \leq \left(\frac{3R}{2}\right)^3 = \frac{27R^3}{8}.$$

(ii) Ta có

$$(l_a + l_b)(l_b + l_c)(l_c + l_a) \leq \left[\frac{2(l_a + l_b + l_c)}{3}\right]^3 \leq \left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8p^3}{3\sqrt{3}}$$

(đpcm).

2.2.3 Sử dụng bất đẳng thức

$\dfrac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq (\dfrac{a+b+c}{3})^n$ (Với $a, b, c \geq 0$, n là số nguyên dương).

Bài toán 2.13. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \geq \frac{4}{3R^2}.$$

Chứng minh.
Ta có

$$\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\geq 3\left(\frac{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}{3}\right)^2\geq 3\left(\frac{3}{m_a+m_b+mc}\right)^2$$

$$\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\geq 3\left(\frac{3}{\frac{9R}{2}}\right)^2=3(\frac{2}{3R})^2=\frac{4}{3R^2}.$$

2.2.4 Sử dụng bất đẳng thức

$\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\leq\sqrt[n]{\dfrac{a+b+c}{3}}$ với $a,b,c\geq 0$.

Bài toán 2.14. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{m_a}}+\frac{1}{\sqrt{m_b}}+\frac{1}{\sqrt{m_c}}\geq\sqrt{\frac{6}{R}}.$$

Chứng minh.
$\dfrac{1}{\sqrt{m_a}}+\dfrac{1}{\sqrt{m_b}}+\dfrac{1}{\sqrt{m_c}}\geq\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{m_a+m_b+m_c}{3}}}\geq\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{3R}{2}}}.$
Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{m_a}}+\dfrac{1}{\sqrt{m_b}}+\dfrac{1}{\sqrt{m_c}}\geq\sqrt{\dfrac{6}{R}}.$

2.2.5 Sử dụng một số bất đẳng thức so sánh với biểu thức

$a+b+c$ hay $ab+bc+ca$.

Bài toán 2.15. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

$$P=\frac{h_b^2}{h_a^3}+\frac{h_c^2}{h_b^3}+\frac{h_a^2}{h_c^3}\geq\frac{1}{r}.$$

Chứng minh.
Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\geq a+b+c$ (Sử dụng bất đẳng thức

$\dfrac{a^3}{b^2} + b + b \geq 3a)$.

Ta thu được $P \geq \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

Bài toán 2.16. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC. Ta có

$$P = \frac{m_b}{m_a^2} + \frac{m_c}{m_b^2} + \frac{m_a}{m_c^2} \geq \frac{2}{R}.$$

Chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c$ (Với $a, b, c > 0$)

Ta thu được $P \geq \dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c} \geq \dfrac{9}{m_a + m_b + m_c} \geq \dfrac{9}{\dfrac{9R}{2}} = \dfrac{2}{R}$.

2.3 Một số bài tập áp dụng

Bài tập 2.1. Các số dương a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

Chứng minh.

Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì ta có theo bất đẳng thức về ba cạnh của tam giác $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$. Ngược lại, nếu có a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, thì ta có thể chọn hai điểm A và B trên mặt phẳng cách nhau một khoảng cách c. Lấy hai điểm A và B làm tâm dựng hai đường tròn bán kính tương ứng là b và a. Từ bất đẳng thức $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$ ta dễ dàng có bất đẳng thức $|a - b| < c < a + b$. Hai đường tròn tâm A và B phải cắt nhau tại một điểm C. Vậy độ dài a, b, c thỏa mãn bất đẳng thức $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$ là độ dài ba cạnh của tam giác ABC theo cách dựng trên. Với bài toán cơ bản trên và các hệ thức cơ bản trong chương 1, chúng ta có thể thiết lập nhiều mối quan hệ về cạnh cũng như các yếu tố cơ sở của tam giác như là đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao, ...

Bài tập 2.2. Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

b) $(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$.

Chứng minh.
a) Ta có

$$a(b + c - a) > 0,$$
$$b(c + a - b) > 0,$$
$$c(a + b - c) > 0.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

b) Ta có

$$(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) < 2(ab + bc + ca).$$

Suy ra

$$(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca).$$

Bài tập 2.3. Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng
$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} < 2[\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(b+c)(c+a)} + \frac{1}{(c+a)(a+b)}]$.

Chứng minh.
Áp dụng bài tập 2.2, để chứng minh bất đẳng thức trên ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$, lập thành ba cạnh của một tam giác.
Ta có $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{2(b+c)} \Leftrightarrow b + 2c > a$ (đúng).
$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{2(b+c)} \Leftrightarrow c + 2b > a$ (đúng).
Cộng hai vế bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{c+a}.$$

$$\frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b}.$$

Vậy $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ là ba cạnh của một tam giác.

Bài tập 2.4 (IMO 1961)**.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh và S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Chứng minh.
Sử dụng công thức Heron, ta có

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}. \end{aligned}$$

Suy ra $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$. Bây giờ, ta viết lại bất đẳng thức (1) dưới dạng $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3.16S^2$.
Dựa vào hằng đẳng thức vừa tìm được, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\left[2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) - \left(a^4 + b^4 + c^4\right)\right] \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \end{aligned}$$

Đây là bất đẳng thức quen thuộc và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập 2.5 (IMO 1964)**.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Chứng minh.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

Đây chính là bất đẳng Schur bậc ba, nó đúng với mọi $a, b, c > 0$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập 2.6 (IMO 1983). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Chứng minh.
Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = y + z, b = z + x, c = x + y$.
Bất đẳng thức cần chứng minh được viết dưới dạng tương đương với

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \geq \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$(y + z + x)(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}) \geq (x + y + z)^2.$$

Đơn giản cả hai vế của bất đẳng thức này cho $x + y + z > 0$, ta thu được ngay bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập 2.7 (UK 1991). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.

Chứng minh.
Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $a + b + c = 2$, nên ta có $0 < a, b, c < 1$. Từ đó dẫn đến $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0$.
Sau khi khai triển, ta thu được

$$\begin{aligned}
&abc < 1 - (a + b + c) + ab + bc + ca \\
\Leftrightarrow\ & abc < ab + bc + ca - 1 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca - 1) \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < (a + b + c)^2 - 2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.
\end{aligned}$$

Bài tập 2.8 (APMO 1996). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Chứng minh.
Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $b+c-a, a+b-c, c+a-b$ là những số dương. Vì vậy, ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz để thu được đánh giá sau

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} \leq 2\sqrt{b}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{a}$,
và $\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{c}$.
Cộng tương ứng vế với vế ba bất đẳng thức này, rồi chia cả hai vế của bất đẳng thức cuối cho 2, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh.
Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập 2.9 (Romania 1999)**.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(b+c-a)(c+a-b)+(a+b-c)(b+c-a)+(c+a-b)(a+b-c) \leq \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Chứng minh.
Trước hết, ta để ý rằng

$$\sum (b+c-a)(c+a-b) = 2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2.$$

Đặt $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geq 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geq xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2).$$

Mặt khác, ta có

$$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2) \geq 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Đó chính là điều phải chứng minh.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập 2.10 (Romania 2001)**.** Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(-a+b+c)(a-b+c)+(a-b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(-a+b+c) \leq \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Chứng minh.
Xét tam giác MNP với độ dài ba cạnh là $m=\sqrt{a}\,, n=\sqrt{b}\,, p=\sqrt{c}$.
Gọi s, R và r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MNP. Khi đó theo hệ quả 1.1, ta có

$$\begin{aligned} & m+n+p=2s \\ & mn+np+pm=s^2+r^2+4Rr \\ & mnp=4Rrs. \end{aligned}$$

Bằng cách biến đổi tương đương bất đẳng thức đã cho, ta có

$$\begin{aligned} & (-m^2+n^2+p^2)(m^2-n^2+p^2)+(m^2-n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2) \\ & +(m^2+n^2-p^2)(-m^2+n^2+p^2) \leq mnp(m+n+p) \\ & \Leftrightarrow 2(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2)-(m^4+n^4+p^4) \leq mnp(m+n+p) \\ & \Leftrightarrow 4(m+n+p)^2(mn+np+pm)-9(m+n+p)mnp-(m+n+p)^2 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow (m+n+p)^3+9mnp \geq 4(m+n+p)(mn+np+pm) \\ & \Leftrightarrow 4Rrs \geq 8sr^2 \Leftrightarrow R \geq 2r. \end{aligned}$$

Đây là bất đẳng thức Ơle đã được chứng minh.

Bài tập 2.11 (Japan 2001)**.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) > 4(a^6+b^6+c^6).$$

Chứng minh.
Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$4(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq 4(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$(a^2+b^2+c^2)^3 > 4(a^6+b^6+c^6).$$

Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2$. Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn nên ta suy ra x, y, z cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác khác (nhưng không nhất thiết phải nhọn). Theo phép đặt này, ta phải chứng minh rằng

$$(x+y+z)^3 > 4(x^3+y^3+z^3).$$

Khai triển hằng đẳng thức, sau đó sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta thu được

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(z+x)+3z^2(x+y)+6xyz\\ &> x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(z+x)+3z^2(x+y)\\ &> x^3+y^3+z^3+3x^2x+3y^2y+3z^2z\\ &= 4\left(x^3+y^3+z^3\right).\end{aligned}$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bài tập 2.12 (Belarus 1999)**.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $kabc > a^3+b^3+c^3$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải.
Một cách tương đương, ta thấy rằng yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b \le c$, ta có $kabc \le a^3+b^3+c^3$.
Cho $b = a$ và $c = 2a$, khi đó theo yêu cầu trên, ta phải có $2ka^3 \le 10a^3$, suy ra $k \le 5$. Ta sẽ chứng minh $k = 5$ là giá trị cần tìm.
Thật vậy, với $k = 5$, ta đặt $c = a+b+x$, và khai triển trực tiếp biểu thức $a^3+b^3+c^3-5abc$ đưa đến

$$2a^3+2b^3-2a^2b-2ab^2+abx+3(a^2+b^2)x+3(a+b)x^2+x^3.$$

Do $2a^3+2b^3-2a^2b-2ab^2 = 2(a+b)(a-b)^2$ nên biểu thức trên hiển nhiên không âm, từ đó đưa đến $a^3+b^3+c^3-5abc \ge 0$.
Do vậy, $k = 5$ chính là giá trị lớn nhất của k thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 2.13 (Costa Rica 2006)**.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge 2.$$

Chứng minh.
Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{3\sum\limits_{cyc} x^2}{\left(\sum\limits_{cyc} x\right)^2} + \frac{\sum\limits_{cyc} \sqrt{xy}}{\sum\limits_{cyc} x} \geq 2.$$

Nhân cả hai vế với $(x+y+z)^2$
và chú ý rằng $(x+y+z)\sqrt{xy} \geq (x+y+z)\,.\dfrac{2xy}{x+y} = 2xy + \dfrac{2xyz}{x+y}$, ta được

$$\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} \sqrt{xy}\right) \geq 2\sum_{cyc} xy + 2xyz\sum_{cyc} \frac{1}{x+y} \geq 2\sum_{cyc} xy + \frac{9xyz}{x+y+z}.$$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh được

$$3\sum_{cyc} x^2 + 2\sum_{cyc} xy + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq \left(\sum_{cyc} x\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} x^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2\sum_{cyc} xy,$$

hiển nhiên đúng vì đây chính là bất đẳng thức Schur. Vậy ta có điều phải chứng minh.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập 2.14 (Moldova 2006)**.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2\left(\frac{b}{c} - 1\right) + b^2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + c^2\left(\frac{a}{b} - 1\right) \geq 0.$$

Chứng minh.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau đây

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 - abc(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0.$$

Đặt

$$E\,(a, b, c) = a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 - abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

Ta có

$$2E\left(a,b,c\right)=\sum_{cyc}a^3(b-c)^2-\sum_{cyc}a^2(b^3-c^3),$$

và

$$\sum_{cyc}a^2(b^3-c^3)=\sum_{cyc}a^2(b-c)^3.$$

Do đó

$$2E\left(a,b,c\right)=\sum_{cyc}a^2(b-c)^2(a-b+c)\geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập 2.15 (Greece 2007)**.** Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{(c+a-b)^4}{a\left(a+b-c\right)}+\frac{(a+b-c)^4}{b\left(b+c-a\right)}+\frac{(b+c-a)^4}{c\left(c+a-b\right)}\geq ab+bc+ca.$$

Chứng minh.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{(c+a-b)^4}{a\left(a+b-c\right)}+a\left(a+b-c\right)\geq 2(c+a-b)^2.$$

Suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{(c+a-b)^4}{a\left(a+b-c\right)}\geq\sum_{cyc}\left[2(c+a-b)^2-a\left(a+b-c\right)\right]\geq ab+bc+ca.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Chương 3

Một số ứng dụng vào bài toán cực trị và nhận dạng tam giác

3.1 Nhận dạng tam giác vuông

Bài toán 3.1. Cho $\triangle ABC$ thoả mãn

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.
Lời giải.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{a-c}{2a}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{B}{2} = \frac{a-c}{2a}\\
&\Leftrightarrow \frac{1-\cos B}{2} = \frac{1}{2} - \frac{c}{2a}\\
&\Leftrightarrow \cos B = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos B = \frac{2R\sin C}{2R\sin A} \Leftrightarrow 2\sin A\cos B = 2\sin C\\
&\Leftrightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin C \Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin C\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A-B=C\\ A-B=\pi-C\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B+C\\ A+C-B=\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=\pi/2\\ B=0(\text{loại}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy ΔABC vuông.

Bài toán 3.2. Cho $\triangle ABC$ thoả mãn

$$\sin A + \cos A = \frac{a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)}{abc}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)}{abc}\\
&=\frac{a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)}{2abc}\\
&=\frac{a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}\\
&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\
&=\cos A+\cos B+\cos C.
\end{aligned}$$

Khi đó đẳng thức đã cho

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin A+\cos A=\cos A+\cos B+\cos C\\
&\Leftrightarrow \sin A=\cos B+\cos C\\
&\Leftrightarrow \sin A=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B-C\\ A=C-B\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A+C=B\\ A+B=C\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=\pi/2\\ C=\pi/2.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy ΔABC vuông.

Bài toán 3.3. Cho $\triangle ABC$ thoả mãn

$$S=(p-b)(p-c).$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Lời giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
&S = (p-b)(p-c)\\
&\Leftrightarrow S^2 = (p-b)^2(p-c)^2\\
&\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-b)^2(p-c)^2\\
&\Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c) \Leftrightarrow p^2 - pa = p^2 - (b+c)p + bc\\
&\Leftrightarrow (b+c-a)p = bc \Leftrightarrow (b+c-a)(b+c+a) = 2bc\\
&\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = 2bc \Leftrightarrow (b^2+c^2+2bc) - a^2 = 2bc \Leftrightarrow b^2+c^2 = a^2
\end{aligned}
$$

Vậy ΔABC vuông tại A.

Bài toán 3.4. Cho $\triangle ABC$ thoả mãn

$$r_a = r + r_b + r_c.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.
Lời giải.

$$
\begin{aligned}
&r_a = r + r_b + r_c\\
&\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} = \frac{S}{p} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Leftrightarrow \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\\
&\Leftrightarrow \frac{p-(p-a)}{(p-a)p} = \frac{(p-c)+(p-b)}{(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow \frac{a}{(p-a)p} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}\\
&\Leftrightarrow (p-a)p = (p-b)(p-c)\\
&\Leftrightarrow (b+c-a)p = bc \Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = 2bc \Leftrightarrow b^2+c^2 = a^2.
\end{aligned}
$$

Vậy ΔABC vuông tại A.

Bài toán 3.5. Cho $\triangle ABC$ có

$$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.
Lời giải.
Ta có

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Áp dụng

$$a+b+c=2R\left[\sin A+\sin B+\sin C\right]=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$r_a=ptg\frac{A}{2}=\frac{a+b+c}{2}.tg\frac{A}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$r_b=ptg\frac{B}{2}=\frac{a+b+c}{2}.tg\frac{B}{2}=4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$r_c=ptg\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{2}.tg\frac{C}{2}=4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

Khi đó, đẳng thức

$$r+r_a+r_b+r_c=a+b+c$$

$$\Leftrightarrow 4R\Big[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\Big]$$

$$=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]+\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\left[2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right]\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right]\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{A}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}\\ \\ \cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\frac{A}{2}=1\\ B-C=A\\ C-B=A\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=\pi/2\\ B=\pi/2\\ C=\pi/2.\end{array}\right.$$

Vậy ΔABC vuông.

3.2 Nhận dạng tam giác cân

Bài toán 3.6. Cho $\triangle ABC$ có

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=0.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

$$\begin{aligned}0 &= a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)\\ &= a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)\\ &= (b-c)\left[a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\right]\\ &= (b-c)(a-b)(a-c)(ab+bc+ca)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-b=0\\ b-c=0\\ c-a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ b=c\\ c=a\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân.}$$

Bài toán 3.7. Cho $\triangle ABC$ có

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}=\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.
Biến đổi đẳng thức

$$\begin{aligned}
&\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}=\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\\
\Leftrightarrow\ &b^2c+c^2a+a^2b=a^2c+b^2a+c^2b\\
\Leftrightarrow\ &b^2(c-a)+ca(c-a)-b(c^2-a^2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(c-a)(b-c)(b-a)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} a-b=0\\ b-c=0\\ c-a=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=b\\ b=c\\ c=a\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\triangle ABC \text{ cân.}
\end{aligned}$$

Bài toán 3.8. Cho $\triangle ABC$ có

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.
Lời giải.
Ta có

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}.$$

Do đó, đẳng thức

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{a^2}{4bc}$$

$$\Leftrightarrow a^2-(b-c)^2 = a^2 \Leftrightarrow b = c$$

$$\Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân.}$$

Bài toán 3.9. Cho $\triangle ABC$ có $4rr_c = c^2$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.
Lời giải.

$$\begin{aligned} 4rr_c &= 4\frac{S}{p}\frac{S}{p-c} \\ &= 4\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)} = 4(p-a)(p-b) \\ &= 4\frac{b+c-a}{2}\frac{c+a-b}{2} = c^2-(a-b)^2 \end{aligned}$$

Do đó

$$4rr_c = c^2 \Leftrightarrow c^2-(a-b)^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy $\triangle ABC$ cân.

Bài toán 3.10. Cho $\triangle ABC$ có

$$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

$$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{(2a+c)(2a-c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2R\left[2\sin A+\sin C\right]}{2R\left[2\sin A-\sin C\right]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{(1+\cos B)+(1-\cos B)} = \frac{2\sin A+\sin C}{(2\sin A+\sin C)+(2\sin A-\sin C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{2} = \frac{2\sin A+\sin C}{4\sin A} \Leftrightarrow 2\sin A\left[1+\cos B\right] = 2\sin A+\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B)+\sin(A-B) = \sin C \Leftrightarrow \sin(A-B)=0 \Leftrightarrow A=B$$

Vậy $\triangle ABC$ cân.

Bài toán 3.11. Cho $\triangle ABC$ có

$$(p-a)\cot\frac{B}{2} = ptg\frac{A}{2}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

$$(p-a)\cot\frac{B}{2} = ptg\frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{p-a}{p} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{p-a}{p} &= \frac{b+c-a}{b+c+a} = \frac{2R\left[\sin B+\sin C-\sin A\right]}{2R\left[\sin B+\sin C+\sin A\right]}\\ &= \frac{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}-2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right]}{2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2}\right]}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}.$$

Do đó, đẳng thức

$$\frac{p-a}{p} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} \Leftrightarrow tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} \Leftrightarrow tg\frac{C}{2} = tg\frac{A}{2} \Leftrightarrow C = A.$$

Vậy $\triangle ABC$ cân.

3.3 Nhận dạng tam giác đều

Bài toán 3.12. Cho $\triangle ABC$ có $r_a = 3r$ và $m_a = 3r$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

Do

$$\begin{cases} r_a = ptg\dfrac{A}{2} \\ r = (p-a)tg\dfrac{A}{2} \end{cases} \quad \text{nên } r_a = 3r \Leftrightarrow p = 3(p-a) \Leftrightarrow b + c = 2a. \qquad (1)$$

Từ

$$\begin{aligned}
& m_a = 3r \Leftrightarrow m_a^2 = 9r^2 \\
& \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{9S^2}{p^2} = \frac{9p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \\
& \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{9(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{9(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)} \\
& \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = \frac{9(2a-a)\left[a^2 - (b-c)^2\right]}{a+2a} \\
& \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3\left[a^2 - (b-c)^2\right] \\
& \Leftrightarrow 5b^2 + 5c^2 - 6bc = 4a^2 = (b+c)^2 \\
& \Leftrightarrow 4(b-c)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow b = c. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = b = c$. Vậy $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 3.13. Cho $\triangle ABC$ có

$$\begin{cases} \sin B \sin C = \dfrac{3}{4} \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \quad & \Leftrightarrow a^2 \left[a - b - c\right] = a^3 - b^3 - c^3 \\
& \Leftrightarrow a^2(b + c) = b^3 + c^3 \\
& \Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)\left[b^2 + c^2 - bc\right] \\
& \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow bc = b^2 + c^2 - a^2 \\
& \Leftrightarrow \frac{bc}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos A \Leftrightarrow A = \pi/3. \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin B \sin C = \frac{3}{4} \quad & \Leftrightarrow 2\left[\cos(B - C) - \cos(B + C)\right] = 3 \\
& \Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A = \frac{3}{2} \\
& \Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = b = c$. Vậy $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 3.14. Cho $\triangle ABC$ có

$$2(p^2 - r^2 - 4Rr) = ab + bc + ca.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
2(p^2-r^2-4Rr) &= 2p^2 - 2\frac{S^2}{p^2} - 8\frac{abc}{4S}\frac{S}{p}\\
&= 2p^2 - \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} - \frac{2abc}{p}\\
&= 2p^2 - 2\frac{(p-a)(p-b)(p-c)+abc}{p}\\
&= 2p^2 - 2\frac{p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc+abc}{p}\\
&= 2(a+b+c)p - 2(ab+bc+ca)\\
&= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2.
\end{aligned}$$

Do đó đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow a=b=c.$$

Vậy $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 3.15. Cho $\triangle ABC$ có

$$b+c = \frac{a}{2} + h_a\sqrt{3}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải. Ta có

$$b+c = \frac{a}{2}+h_a\sqrt{3} \Leftrightarrow b+c = \frac{a}{2} + (b\sin C)\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2R\left[\sin B + \sin C\right] = R\sin A + 2R\sin B\sin C\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = \frac{1}{2}\sin A + \sqrt{3}\sin B\sin C = \frac{1}{2}\sin(B+C) + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = \frac{1}{2}\left[\sin B\cos C + \sin C\cos B\right] + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[1 - \frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin C\right] + \sin C\left[1 - \frac{1}{2}\cos\mathrm{B} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin B\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-C\right)\right] + \sin C\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-B\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right) = 1 \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \pi/3 \\ B = \pi/3 \end{cases}$$

Vậy $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 3.16. Cho $\triangle ABC$ có

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc} = \frac{R}{r}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

Ta có

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

nên

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Áp dụng

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc} = \frac{8R^3(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}{4.8R^3\sin A\sin B\sin C}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{4\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Từ đó, suy ra đẳng thức đã cho tương đương với

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{C-A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow A = B = C.$$

Vậy $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 3.17. Cho $\triangle ABC$ có

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&\le \sqrt{p\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3} \\
&= \sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2 \\
&\le \tfrac{\sqrt{3}}{36}(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2).
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 3.18. Cho $\triangle ABC$ có $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}Rr$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
S = \frac{3\sqrt{3}}{2}Rr \; &\Leftrightarrow pr = \frac{3\sqrt{3}}{2}Rr \\
&\Leftrightarrow a+b+c = 3\sqrt{3}R \\
&\Leftrightarrow 2R\left[\sin A + \sin B + \sin C\right] = 3\sqrt{3}R \\
&\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\sin A\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin B\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \sqrt{3}\left[\frac{\sin A}{\sqrt{3}}\cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}}\cos A\right]$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A + \frac{3}{4}\right) + \left(\sin^2 B + \frac{3}{4}\right)\right]$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B\right) + \left(\frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A\right)\right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

Phụ lục

• Bất đẳng thức AM - GM

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm , khi đó ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

• Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Với hai dãy số thực tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$, ta luôn có bất đẳng thức $(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là hai bộ tỉ lệ.

• Bất đẳng thức Schur

Với $a, b, c \geq 0$ và k là số thực bất kì ta luôn có

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Kết luận

Luận văn "Bất đẳng thức đại số trong tam giác" trình bày một số kiến thức cơ bản về các hệ thức đại số của các yếu tố bên trong tam giác, các đẳng thức và bất đẳng thức liên quan đến số đo độ dài trong tam giác trong đó có nhiều hệ thức là các kết quả mới có ý nghĩa mới thu được trong những năm gần đây.

Tiếp theo, đưa ra một số cách xây dựng các bất đẳng thức đại số mới trong tam giác.

Xét một số ứng dụng vào bài toán cực trị và nhận dạng tam giác.

Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Đình Hòa, *Bất đẳng thức hình học*, NXB Giáo dục, 2006.

[2] Nguyễn Vũ Lương (chủ biên), *Một số bài giảng về các bài toán trong tam giác*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lí và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2006.

[4] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2009.

[5] Đàm Văn Nhỉ, *Bài giảng một số ứng dụng vành đa thức - chuỗi lũy thừa hình thức vào nghiên cứu toán sơ cấp*, 2012.

[6] Tạ Duy Phượng, *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*, NXB Giáo Dục, 2006.

[7] Trần Phương (chủ biên), *Vẻ đẹp bất đẳng thức trong các kì thi Olympic toán học*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2010.

[8] Trần Phương, *Hệ thức lượng giác*, NXB Hà Nội, 2002.