ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC THÁI NGUYÊN

NGÔ ANH TUẤN

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên – Năm 2013

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC THÁI NGUYÊN

NGÔ ANH TUẤN

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – Năm 2013

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC THÁI NGUYÊN

NGÔ ANH TUẤN

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC THÁI NGUYÊN

NGÔ ANH TUẤN

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên - Năm 2013

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

LỜI CÁM ƠN

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại Học Khoa Học- Đại Học Thái Nguyên, Đại Học Hải Phòng. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn trực tiếp của TS Vũ Hoài An. Qua đây tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS Vũ Hoài An, tới các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua. Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2013

Tác giả

Ngô Anh Tuấn

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Mục lục

Các kí hiệu và Danh mục các từ viết tắt **iii**

Mở đầu **1**

1 Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập **4**

1.1 **Hàm số liên tục** 4

1.1.1 **Các định lí của hàm số liên tục liên quan đến vấn đề nhận giá trị** 4

1.1.2 **Các định lí cơ bản của hàm số khả vi liên quan với vấn đề nhận giá trị.** 7

1.1.3 **Bài tập áp dụng** 9

1.2 **Các phương pháp xác định tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm -tập** 12

1.2.1 **Phương pháp thứ nhất và ví dụ áp dụng.** . . . 12

1.2.2 **Phương pháp thứ hai và ví dụ áp dụng** 16

1.2.3 **Phương pháp thứ ba và ví dụ áp dụng.** 21

2 Ứng dụng Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm -tập vào phương trình, bất phương trình. **27**

2.1 **Ứng dụng vào phương trình.** 28

2.1.1 **Các phương pháp ứng dụng.** 28

2.1.2 **Bài tập áp dụng** 28

2.2 **Ứng dụng vào bất phương trình.** 35

2.2.1 **Các phương pháp ứng dụng.** 36

2.2.2 **Bài tập ứng dụng.** 36
2.3 **Bài tập tổng hợp** 40

Kết Luận **66**

Tài liệu tham khảo **67**

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Các kí hiệu và Danh mục các từ viết tắt

- $\mathbb{R}$: Tập số thực.
- f: Hàm số thực.
- $[a;b]$: Đoạn đóng của tập hợp số thực với các đầu mút a, b và $a < b$.
- (a;b): Khoảng mở của tập hợp số thực với các đầu mút a, b và $a < b$.
- $\forall$: Với mọi.
- $\exists$: Tồn tại
- $A \bigcup B$: Hợp của hai tập hợp A và B.
- $A \bigcap B$:Giao của hai tập hợp A và B.
- TXĐ: Tập xác định.
- SBT: Sự biến thiên.
- BBT: Bảng biến thiên.
- CĐ: Cực đại.
- CT: Cực tiểu.
- TCĐ: Tiệm cận đứng.
- TCN: Tiệm cận ngang.
- GTLN: Giá trị lớn nhất.
- GTNN: Giá trị nhỏ nhất.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

MỞ ĐẦU

1.Lý do chọn đề tài

Chúng ta bắt đầu từ vấn đề sau:

Vấn đề A

Giả sử A, B là hai tập khác rỗng, f là ánh xạ từ A đến B và $b \in B$.Khi đó, f có nhận giá trị b?

Trong trường hợp tổng quát, thông tin cho vấn đề A là ít ỏi. Trong trường hợp ít tổng quát hơn, giải quyết Vấn đề A được gắn kết với các lí thuyết toán học đẹp đẽ .

Trong trường hợp A là tập hợp $\mathbb{C}$ các số phức, B là mặt phẳng phức mở rộng và f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, Nevanlinna đã giải quyết triệt để Vấn đề A từ năm 1925. Vấn đề A là hệ quả trực tiếp của lý thuyết phân bố giá trị do Nevanlinna xây dựng. Lý thuyết phân bố giá trị được xem là thành tựu toán học đẹp đẽ nhất của giải tích toán học thế kỷ XX, ngày nay còn được gọi là *Lý thuyết Nevanlinna.*

Nội dung chính của Lý thuyết phân bố giá trị là hai Định lý chính. Định lý chính thứ nhất mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Định lý chính thứ hai là mở rộng của Định lý Picard, mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đến sự phân bố giá trị của hàm phân hình. Hà Huy Khoái là người đầu tiên xây dựng tương tự Lý thuyết phân bố giá trị cho trường hợp p-adic. Ông đã đưa ra hai định lý chính cho hàm phân hình p-adic. Khi áp dụng hai định lý chính của Hà Huy Khoái, ta nhận được lời giải cho vấn đề A trong trường hợp A là tập hợp $\mathbb{C}_p$ các số phức p-adic, B là mặt phẳng p-adic mở rộng và f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chú ý rằng, Vấn đề A được phát biểu theo ngôn ngữ phương trình như sau:

Vấn đề B.

Giả sử A, B là hai tập khác rỗng, f là ánh xạ từ A đến B và $b \in B$. Khi đó, phương trình $f(x) = b$ có nghiệm trong A?

Đối với hàm số thực, trong Báo Toán học tuổi trẻ, trong các Đề thi đại học, nhiều tác giả xét A là một tập cố định của đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Trong luận văn, chúng tôi xét tập A là tập có thể thay đổi được bằng cách coi A là hợp hoặc giao của các nghịch ảnh hoặc ảnh của các tập đối với các hàm số thực nào đó. Cụ thể ý tưởng này là vấn đề sau đây:

Vấn đề C.

Giả sử A, B là hai tập khác rỗng của $\mathbb{R}$, ở đó A là hợp hoặc giao của các nghịch ảnh hoặc ảnh của các tập $A_j, j = 1, 2, ..,$đối với các hàm số thực $g_i, i = 1, 2, ..,$nào đó và f là hàm số từ A vào B. Khi đó, xét phương trình $f(x) = b$?

Quy trình giải quyết vấn đề C gồm hai bước :

Bước 1. Xác định $g_i(A_j)$ hoặc $g_i^{-1}(A_j)$ để xác định A.

Bước 2. Xét phương trình $f(x) = b$ trên A.

Chú ý rằng, khi cho $A_j = A$ và g_i là ánh xạ đồng nhất ta nhận được vấn đề B trong trường hợp hàm thực. Ta gọi A trong Vấn đề C là tập xác định của hàm số xác định bởi hàm-tập.

Với cách tiếp cận trên đây, chúng ta thấy rằng: các vấn đề của phương trình với ẩn số thực được gắn kết với các vấn đề của hàm số thực dưới góc độ của Lý thuyết phân bố giá trị.

Theo hướng tiếp cận trên đây, luận văn nghiên cứu vấn đề:

Tập xác định của hàm số và Ứng dụng

Đây là một trong những vấn đề cơ bản của Toán học sơ cấp.

2. **Mục tiêu nghiên cứu:**

2.1 **Vấn đề nghiên cứu:**Tập xác định của hàm số và Ứng dụng bao gồm:

Vấn đề 1: Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Vấn đề 2: Ứng dụng Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập vào phương trình, bất phương trình.

2.2 **Nội dung nghiên cứu và Phương pháp nghiên cứu :**

Để nghiên cứu hai vấn đề nêu trên , Luận văn

Tổng hợp và trình bày các phương pháp tìm Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập.

Tổng hợp và trình bày các ứng dụng Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập vào phương trình, bất phương trình.

2.3 **Kết quả nghiên cứu**

Luận văn tổng hợp và trình bày các phương pháp tìm Tập xác định của hàm số được xác định bởi hàm-tập cùng các ứng dụng vào phương trình, bất phương trình sẽ là tài liệu tham khảo, tài liệu luyện thi đại học dành cho học sinh Trung học phổ thông, giáo viên toán Trung học phổ thông, học viên cao học chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp.

3. **Bố cục Luận văn**

Luận văn được chia làm hai chương cùng với phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trong chương này chúng tôi nghiên cứu **Vấn đề 1**. Mục tiêu là Tổng hợp và trình bày các phương pháp tìm Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập.

Chương 2: Trong chương này, chùng tôi nghiên cứu **Vấn đề 2**. Mục tiêu là Tổng hợp và trình bày các ứng dụng Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập vào phương trình, bất phương trình.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chương 1

Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập

Trước tiên chúng tôi trình bày các kiền thức của Toán học cao cấp (xem[1]) để làm cơ sở cho nội dung tiếp theo của luận văn.

1.1 Hàm số liên tục

1.1.1 Các định lí của hàm số liên tục liên quan đến vấn đề nhận giá trị

Định nghĩa 1.1. *Cho hàm* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}; x_0 \in A$.
Nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$,*sao cho* $\forall x \in A : |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *thì ta nói* f *liên tục tại điểm* x_0.
Nếu f liên tục tại mọi điểm $x_0 \in A$ *thì ta nói f liên tục trên A.*
Nếu f không liên tục tại điểm $x_0 \in A$ *thì ta nói f gián đoạn tại điểm* x_0.

Nhận xét 1.2.
1. f liên tục tại x_0 *khi và chỉ khi với mọi lân cận V của* $f(x_0)$ *bao giờ cũng tồn tại một lân cận U của* x_0 *sao cho:* $f(U \cap A) \subset V$.
2. Nếu $x_0 \in A$ *và là điểm cô lập đối với A thì f liên tục tại* x_0.

Định lý 1.3. *Điều kiên cần và đủ để f liên tục tại* x_0 *là mọi dãy* $\{x_n\} \subset A$ *mà* $x_n \longrightarrow x_0$ *thì* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Định lý 1.4. *Nếu f và g là hai hàm cùng xác định trên A và liên tục tại* $x_0 \in A$ *thì f+g; a.f (với a là hằng số); f.g đều là những hàm số liên tục tại* x_0. *Nếu* $g(x) \neq 0$ *thì* $\dfrac{f}{g}$ *cũng liên tục tại* x_0.

Định lý 1.5. *Một hàm liên tục trên* [a; b] *thì nó bị chặn.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử hàm f liên tục trên [a;b] nhưng không bị chặn. Khi đó $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in$ [a,b] sao cho $|f(x_n)| > n$. Ta có thể xem $\{x_n\}$ là dãy phân biệt. Ta trích ra dãy con $\{x_{nk}\}$ hội tụ đến $x_0 \in$[a,b], vì [a,b] là một tập đóng nên : $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} |f(x_{nk})| = +\infty$ khác $|f(x_0)|$. Điều này trái với giả thiết f liên tục tại x_0. Vậy f phải bị chặn. □

Định lý 1.6. *Nếu f liên tục trên* [a; b] *thì nó đạt cân trên đúng và cận dưới đúng , tức là tồn tại hai số* x_0 *và* x_0' *thuộc* [a; b] *sao cho :*

$$f(x_0) = \max f(x) \text{ và } f(x_0') = \min f(x).$$

Chứng minh. Đặt $M = \sup f(x) < +\infty$, f bị chặn trên [a,b] . Theo định nghĩa supremum:$\exists \{x_n\} \subset$[a;b] sao cho :$M = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$.
Từ dãy $\{x_n\}$ ta trích ra dãy con $\{x_{nk}\}$ hội tụ : $x_{nk} \longrightarrow x_0$. Do $a \leq x_{nk} \leq b$ nên $x_0 \in$[a,b] và $M = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} f(x_{nk}) = f(x_0)$.
Tương tự : $\exists x_0' \in [a, b]$ sao cho : $f(x_0') = \inf(f(x)) \Leftrightarrow f(x_0') = \min f(x)$. □

Định lý 1.7. *(Định lí về không điểm)*
Nếu f liên tục trên [a; b] *và* $f(a).f(b) < 0$ *thì tồn tại ít nhất một điểm* $c \in$ [a; b] *sao cho* $f(c) = 0$.

Chứng minh. Ta xét trường hợp $f(a) > 0, f(b) < 0$,trường hợp còn lại ta chứng minh tương tự.
Đặt $A = \{t \in [a; b] : f(x) > 0, \forall x \in [a; t]\}$.Hiển nhiên $a \in A$ nên $A \neq \emptyset$.
Gọi $t^* = \sup A \longrightarrow t^* \in [a; b]$. Ta chứng minh $f(t^*) = 0$.
Theo định nghĩa của Sup: $\exists \{t_n\} \subset A$ sao cho $t^* = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} t_n$. Vì f liên tục

tại t^* nên

$$f(t^*) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(t_n) \geq 0.$$

Do $f(b) < 0$ nên $t^* \neq b \Rightarrow t^* < b$. Nếu $f(t^*) > 0$ thì theo tính liên tục của f tại t^* sẽ $\exists \delta > 0$ sao cho $f(x) > 0, \quad \forall x \in [t^* - \delta; t^* + \delta] \subset [a; b]$ trái với tính Sup $A = t^*$. Vậy $f(t^*) = 0$. □

Định lý 1.8. *(Định lí về quan hệ giữa tính đơn điệu và tính liên tục) Cho f là một hàm đơn điệu. Điều kiện cần và đủ để hàm f liên tục trên $[a; b]$ là miền giá trị của nó là một đoạn với hai đầu mút là $f(a)$ và $f(b)$.*

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp f là hàm tăng, trường hợp f là hàm giảm chứng minh tương tự.
Điều kiện cần: Nếu f tăng trên $[a; b]$, ta cần chứng minh:$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$. Lấy $x \in [a; b]$, khi đó $a \leq x \leq b$.Vì f là hàm tăng nên $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f([a; b]) \subset [f(a); f(b)]$.
Ngược lại, với $\lambda \in [f(a); f(b)]$. Vì f liên tục trên $[a; b]$ nên $\exists c \in [a; b]$: $\lambda = f(c) \Rightarrow [f(a); f(b)] \subset f([a; b])$. Vậy $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
Điều kiện đủ: Giả sử f là hàm tăng trên $[a; b]$ và có miền giá trị là $[f(a); f(b)]$, ta sẽ chứng minh f liên tục trên $[a; b]$.
Giả sử f không liên tục trên $[a; b]$ và $x_0 \in [a; b]$ là điểm gián đoạn của nó. Khi đó gọi $\alpha = \sup_{x<x_0} f(x); \quad \beta = \inf_{x>x_0} f(x)$.
Do f tăng và gián đoạn tại x_0, nên $\alpha < f(x_0)$ hoặc $\beta > f(x_0)$ trong trường hợp đầu $f([a; b])$ không chứa $(\alpha; f(x_0))$. Còn trường hợp sau $f([a; b])$ không chứa $(f(x_0); \beta)$. Điều này mâu thẫu với giả thiết $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$. Do đó f phải liên tục trên $[a; b]$. □

Ví dụ 1.9.
Hàm $y = x$ liên tục tại mọi điểm của nó.
Thật vậy, lấy $x_0 \in \mathbb{R}$ bất kì ,$\forall \varepsilon > 0$ chọn $\delta = \varepsilon$ thì khi $|x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ví dụ 1.10.
Hàm $y = \cos x$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$.
Thật vậy ta có

$$|\cos x - \cos x'| = 2|\sin\frac{x+x'}{2}||\sin\frac{x-x'}{2}| \leq 2|\frac{x-x'}{2}| = |x-x'|.$$

Vì $|\sin t| \leq |t|$, *khi* $0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}$. *Do đó* $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \min(\varepsilon; \frac{\pi}{2})$
nên $|\cos x - \cos x'| < \varepsilon$, *khi* $|x - x'| < \delta$.

Nhận xét: Tính liên tục của hàm $y = sinx$, ta chứng minh tương tự.

1.1.2 Các định lí cơ bản của hàm số khả vi liên quan với vấn đề nhận giá trị.

Định nghĩa 1.11. *Ta nói hàm* f *có cực đại địa phương (hay cực tiểu địa phương)tại điểm* x_0 *nếu* f *xác định trong một lân cận* (a, b) *của* x_0 *và tồn tại số* $\delta > 0$ *đủ bé sao cho*
$f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ $(hay f(x) \geq f(x_0)\,\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta))$.
Điểm mà tại đó đạt cực đại hay cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.
Nếu $f(x) < f(x_0) \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta), x \neq x_0$ *thì* x_0 *gọi là điểm cực đại địa phương thực sự.*
Nếu $f(x) > f(x_0) \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta), x \neq x_0$ *thì* x_0 *gọi là điểm cực tiểu địa phương thực sự.*

Định lý 1.12 (Định lí Fermat)**.**
Giả sử $f : (a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *. Nếu hàm số* f *đạt cực trị tại điểm* $c \in (a; b)$ *và* f *có đạo hàm tại điểm* c *thì* $f'(c) = 0$.

Chứng minh. Xét trường hợp f đạt cực đại tại c. Khi đó $\forall h > 0$ đủ nhỏ ta có

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad ; \qquad \frac{f(c-h)-f(c)}{h} \geq 0.$$

Mặt khác f có đạo hàm tại điểm c nên $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$.
Từ đó suy ra $f'(c) = 0$.

Trường hợp f đạt cực tiểu tai c ta chứng minh tương tự. □

Định lý 1.13 (Định lí Rolle)**.**
Giả sử $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *có tính chất :*
i. *f liên tục trên* $[a; b]$.
ii. *f khả vi trên* $[a; b]$.
iii. $f(a) = f(b)$.
Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$.

Chứng minh. Do f liên tục $[a; b]$ nên lấy $x_1, x_2 \in [a, b]$ sao cho $f(x_1) = \sup f = M$ và $f(x_2) = \inf f = m$. Ta xét hai trường hợp có thể xảy ra :
Trường hợp 1: M=m.
Khi đó $f(x) = m \ \ \forall x \in [a; b]$ nên $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in [a; b]$.
Trường hợp 2: M>m.
Vì $f(a) = f(b)$ nên xảy ra $f(x_1) \neq f(a) = f(b)$ hoặc $f(x_2) \neq f(a) = f(b)$.
Nếu $f(x_1) \neq f(a)$ thì $a < x_1 < b$. theo Định lí Fermat thì $f'(x_1) = 0$.
Nếu $f(x_2) \neq f(a)$ thì $a < x_2 < b$. theo Định lí Fermat thì $f'(x_2) = 0$. □

Định lý 1.14 (Định lí Lagrange)**.** *Giả sử* $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *có tính chất*
i) f *liên tục trên* $[a; b]$.
ii) f *khả vi trên* $[a; b]$.
Khi đó, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ *sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Chứng minh.
Nếu $a = b$ thì định lí luôn đúng.
Nếu $a < b$, xét hàm $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Khi đó $F(b) = F(a) = 0$, thỏa mãn định lí Rolle nên $\exists c \in (a; b)$ sao cho

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Định lý 1.15 (Cauchy)**.** *Giả sử*
i) f và g là hai hàm liên tục trên $[a;b], a<b$.
ii) f và g đều khả vi trên $(a;b)$.
iii) $g'(x)\neq 0 \forall x\in(a;b)$.
Khi đó, tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ *sao cho*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (*)$$

Chứng minh. Xét hàm $h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$. Hàm $h(x)$ có $h(a)=h(b)$ và thỏa mãn các điều kiện của định lí Rolle nên tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

□

Nhận xét 1.16. *Một trường hợp riêng của định lí Cauchy là khi ta lấy* $g(x)=x$ *thì ta nhận được Định lí Lagrange.*

1.1.3 Bài tập áp dụng

Bài 1

Cho hàm số $f_1=x^3-3x^2, \quad f_2=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}, \quad f=x^4-2x^2+2.$

$$A_1=\{x\in\mathbb{R}: 2\leq x\leq 4\}, \quad A_2=\{x\in\mathbb{R}: 3\leq x\leq 5\}.$$

1) Tìm $f_1(A_1)$.
2) Tìm $f_2(A_2)$.
3) Tìm $B=f_1(A_1)\bigcap f_2(A_2)$.
4) Tìm $f(B)$.

Lời giải.
1) Ta có :$f_1'(x)=3x^2-6x$.
$f_1'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	-	0	+		
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	16	$+\infty$

Vậy $f_1(A_1) = [-4; 16]$.

2) Tìm $f_2(A_2) = \{f_2(x) | x \in A_2\} = \{\dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} | 3 \le x \le 5\}$.

Ta có $f_2'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		5	$+\infty$
$f_2'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+		
$f_2(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$ ‖	↘	3	↗	4	$+\infty$

Vậy $f_2(A_2) = [3; 4]$.

3) Tìm $f_1(A_1) \bigcap f_2(A_2) = B$. Vậy $B = [3; 4]$.

4) Tìm $f(B) = \{f(x) | x \in B\} = \{x^4 - 2x^2 + 2 | 3 \le x \le 4\}$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		3		4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0		+			
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗		↘	1	↗	65	↗	226	$+\infty$

Vậy $f(B) = [65; 226]$. □

Bài 2:

Cho $g(x) = \cos^4 x - 2\cos^2 x + 2, \qquad C = \{x \in R | \frac{5}{4} \leq x \leq 2\}$.

1). Tìm tập giá trị của g.

2) Tìm tập giá trị của $g_\circ f_1$ trên $A_3 = \{x \in R : 0 \leq x \leq 2\}$.

Lời giải.

với $f_1(x)$ là hàm ở bài tập 1. 1) Đặt $\cos x = t (t \in [-1, 1])$.

Khi đó $g(x) = t^4 - 2t^2 + 2 = h(t). \Rightarrow h(t) = t^4 - 2t^2 + 2$.

Ta có: $h'(t) = 4t^3 - 4t$.

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = -1; t = 0; t = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$h'(t)$		+	0	-	0	+	0	
$h(t)$	$-\infty$	↗	1	↘	2	↗	1	↗ $+\infty$

Vậy tập giá trị của hàm g là: $[1; 2]$.

2) Tìm tập giá trị của $g_\circ f_1$ trên $A_3 = \{x \in R : 0 \leq x \leq 2\}$.

Ta có :

$g_\circ f_1(A_3) = g(f_1(x)) : 0 \leq x \leq 2\} = \{\cos^4(x^3 - 3x^2) - 2\cos(x^3 - 3x^2) + 2 :$
$0 \leq x \leq 2\} = \{\cos^4 t - 2\cos^2 t + 2 : -4 \leq t \leq 0\}$.

Đặt $z = \cos t$. Do $[-\pi; 0]$ chứa trong đoạn $[-4; 0]$ nên $-1 \leq \cos t \leq 1$.

Vậy $-1 \leq z \leq 1$

Từ bảng biến thiên ta được tập giá trị của $g_\circ f_1$ trên A_3 là $[-1; 1]$. □

1.2 Các phương pháp xác định tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm -tập

Giả sử A, B là hai tập khác rỗng của $\mathbb{R}$, ở đó A là hợp hoặc giao của các nghịch ảnh của các tập hợp $A_j, j = 1, 2, ...,$ đối với các hàm số liên tục $g_i, i = 1, 2, ...,$nào đó và f là hàm số từ A vào B. Khi đó A xác định từ A_j và g_i. Ta gọi A là tập xác định của f được xác định bởi hàm-tập (các hàm g_i, các tập A_j).
Sau đây chúng tôi trình bày các phương pháp xác định tập xác định của hàm số được xác định bởi hàm-tập.

1.2.1 Phương pháp thứ nhất và ví dụ áp dụng.

Ở đây phương pháp thứ nhất là dùng định nghĩa và các định lý về hàm liên tục để tìm tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập.
Trước tiên ta nhắc lại điều kiện có nghiệm của phương trình:
$a\cos x + b\sin x = c; \quad a^2 + b^2 > 0$ là: $a^2 + b^2 \geq c^2$.
Sau đây chúng tôi đưa ra các ví dụ minh họa cho phương pháp thứ nhất:

Ví dụ 1.17. *Cho $f(y)$ là hàm số thực xác định trên D. Xác định y biết $y = f_i(x), i = 1, 2, ..., 6$, với :*
$f_1(x) = \dfrac{cosx}{cos(x) + sinx + 2}; \quad f_2x = \dfrac{cosx + 1}{cosx + sinx + 2};$
$f_3(x) = \dfrac{cosx + sinx}{cosx + sinx + 2}; \quad f_4(x) = \dfrac{sinx}{cosx + sinx - 2};$
$f_5(x) = \dfrac{sinx + 1}{cos(x) + sinx - 2}; \quad f_6(x) = \dfrac{cosx - sinx}{cosx + sinx - 2}.$

Lời giải.
1) $f_1(x) = \dfrac{cosx}{cosx + sinx + 2}$. Đặt $y = \dfrac{cosx}{cosx + sinx + 2}$.
Xét phương trình

$$y = \frac{cosx}{cosx + sinx + 2}. \tag{1.1}$$

y thuộc tập giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình (1.1) với ẩn x tham số y có nghiệm.Ta có

$$(1.1) \Leftrightarrow cosx = ycosx + ysinx + 2y \Leftrightarrow (1-y)cosx - ysinx = 2y \Rightarrow$$
$$(1-y)^2 + y^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow y \in G_1 = [\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}] \bigcap D.$$

2) $f_2(x) = \dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2}$. Đặt $y = \dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2}$.
Xét phương trình

$$y = \frac{cosx+1}{cosx+sinx+2}. \tag{1.2}$$

y thuộc tập giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình (1.2) với ẩn x tham số y có nghiệm.Ta có

$(1.2) \Leftrightarrow cosx+1 = ycosx+ysinx+2y \Leftrightarrow (1-y)cosx-ysinx = 2y-1 \Rightarrow$
$(1-y)^2 + y^2 \geq (2y-1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$
$\Rightarrow y \in G_2 = [0;1] \bigcap D.$

3) $f_3(x) = \dfrac{cosx+sinx}{cosx+sinx+2}$. Đặt $y = \dfrac{cosx+sinx}{cosx+sinx+2}$.
Xét phương trình

$$y = \frac{cosx+sinx}{cosx+sinx+2}. \tag{1.3}$$

y thuộc tập giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình (1.3) với ẩn x tham số y có nghiệm.Ta có
$(1.3) \Leftrightarrow cosx+sinx = ycosx+ysinx+2y \Leftrightarrow (1-y)cosx+(1-y)sinx =$
$2y \Rightarrow 2(1-y)^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 4y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2} \leq y \leq -1+\sqrt{2}.$
$\Rightarrow y \in G_3 = [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}] \bigcap D.$

4) $f_4(x) = \dfrac{sinx}{cos(x)+sin(x)-2}$. Đặt $y = \dfrac{sinx}{cosx+sinx-2}$.
Xét phương trình

$$y = \frac{sinx}{cosx+sinx-2}. \tag{1.4}$$

y thuộc tập giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình (1.1) với ẩn x tham số y có nghiệm.Ta có

$(1.4) \Leftrightarrow sinx = ycosx + ysinx - 2y \Leftrightarrow ycosx + (y-1)sinx = 2y$
$\Rightarrow (1-y)^2 + y^2 \geq 4y^2 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$
$\Rightarrow y \in G_4 = [\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}] \bigcap D.$

5) $f_5(x) = \frac{sinx+1}{cosx+sinx-2}$. Đặt $y = \frac{sinx+1}{cos(x)+sinx-2}$.
Xét phương trình

$$y = \frac{sinx+1}{cosx+sinx-2}. \tag{1.5}$$

y thuộc tập giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình (1.5) với ẩn x tham số y có nghiệm.Ta có
$(1.5) \Leftrightarrow sinx+1 = ycosx+ysinx-2y \Leftrightarrow ycosx+(y-1)sinx = 2y+1 \Rightarrow$
$(1-y)^2 + y^2 \geq (1+2y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0.$
$\Rightarrow y \in G_5 = [-3;0] \bigcap D.$

6) $f_6(x) = \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx-2}$. Đặt $y = \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx-2}$.
Xét phương trình

$$y = \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx-2}. \tag{1.6}$$

y thuộc tập giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình (1.6) với ẩn x tham số y có nghiệm.Ta có
$(1.6) \Leftrightarrow cosx-sinx = ycosx+ysinx-2y \Leftrightarrow (1-y)cosx-(y+1)sinx =$
$-2y \Rightarrow (1-y)^2(1+y)^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 2y^2 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$
$\Rightarrow y \in G_6 = [-1;1] \bigcap D.$ □

Nhận xét 1.18. *Việc tìm G_i ở ví dụ 1.17 là dùng định nghĩa, định lý về hàm liên tục và điều kiện có nghiệm.*

Ví dụ 1.19. *Cho f là hàm số thực với tập xác định là D. Xác định các tập*
1) $A_1 = \{z \in D | z = x.y; \quad 0 < x, y; \quad x + y = 1\}.$
2) $A_2 = \{z \in D | z = x + y; \quad x^2 + y^2 = 1\}.$
3) $A_3 = \{z \in D | z = \sin x + \cos x\}.$

4) $A_4 = \{z \in D | z = \sqrt{x} + \sqrt{y}; \quad x + y = 1\}$.
5) $A_5 = \{z \in D | z = \cos^4 x + \sin^4 x\}$.
6) $A_6 = \{z \in D | z = \sqrt{x(1-x)}\}$.

Lời giải.
1) Theo bất đẳng thức Côsi có :$\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow 0 < xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.
Suy ra $A_1 = (0; \dfrac{1}{4}] \bigcap D$.

2) Theo bất đẳng thức BunhiaCôpxki có:
$(x+y)^2 \leq (1+1)(x^2+y^2) = 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$.
Suy ra $A_2 = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \bigcap D$.

3) Có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}.\sin(x + \pi/4) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.
Suy ra $A_3 = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \bigcap D$.

4)Theo bất đẳng thức BunhiaCôpxki có:
$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq (1+1)(x+y) = 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2}$.
Suy ra $A_4 = [0; \sqrt{2}] \bigcap D$.

5) Ta có
$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2} sin^2 2x$.
Lại có $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq -\dfrac{1}{2}\sin^2 2x \leq 0$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1$.
$\Rightarrow A_5 = [\dfrac{1}{2}; 1] \bigcap D$.

6) Do $z = \sqrt{x(1-x)}$ suy ra điều kiện là: $x \in [0; 1]$.
Theo bất đẳng thức BunhiaCôpxki có:
$\sqrt{x(1-x)} \leq \dfrac{x+1-x}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x(1-x)} \leq \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $A_6 = [0; \frac{1}{2}] \bigcap D$. □

Nhận xét 1.20. *Việc tìm A_i ở* ***Ví dụ 1.19*** *là dùng định nghĩa và các đánh giá, các định lý về hàm liên tục.*

1.2.2 Phương pháp thứ hai và ví dụ áp dụng

Ở đây phương pháp thứ hai là dùng bảng biến thiên và các định lý về hàm liên tục để tìm tập xác định của hàm được xác định bởi ham-tập.
Tiếp theo chúng tôi đưa ra các ví dụ áp dụng cho phương pháp thư hai.

Ví dụ 1.21. *Cho hàm số $g(y)$ với tập xác định là D và các hàm số sau*
$f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 6.$
$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}.$
$f_2(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$
$f_3(x) = -x^4 - x^2 + 6.$
Các tập $A = [0; 2]; A_1 = [-\frac{1}{2}; 1]; A_2 = [\frac{-1}{2}; 3]; A_3 = [-2; 2];$
$B_1 = [0; 3]; B_2 = [1; \frac{3}{2}]; B_3 = [4; 6].$
1.Khảo sát sự biến thiên của các hàm số $f, f_i, i = 1, 2, 3.$
2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm $f, f_i, i = 1, 2, 3$ trênA, A_i, B_i với $i = 1, 2, 3.$
3.Tìm tập giá trị của hàm số $f, f_i, i = 1, 2, 3$ trên $A, A_i, B_i, i = 1, 2, 3.$
4. Tìm $y \in D$ và y thuộc tập giá trị của $f, f_i, i = 1, 2, 3.$ trên tập $A, A_i, B_i, i = 1, 2, 3.$

Lời giải.
* Xét hàm f(x).
- TXĐ:D=R.
-Giới hạn: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$
-SBT: $f'(x) = 6x^2 - 3x - 3.$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{55}{8}$	↘	$\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

Hàm số ĐB trên $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số NB trên $(-\frac{1}{2}; 1)$.

Điểm CĐ của đồ thị là :$(-\frac{1}{2}; \frac{55}{8})$.

Điểm CT của đồ thị là :$(1; \frac{7}{2})$.

* Xét $f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$.

- TXĐ: D=R.

- Giới hạn: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- SBT :

$f'(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Hàm số NB trên khoảng $(-1; 2)$.

Hàm số ĐB trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Điểm CĐ là :$(-1; 3)$; Điểm CT là:$(2; -6)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-6	↗	$+\infty$

* Xét hàm $f_2(x)$

- TXĐ :D=R-$\{-1\}$.

- Giới hạn : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_2(x) = 2$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f_2(x) = 2$.

Đồ thị có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} f_2(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^+} f_2(x) = -\infty$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$.

- SBT: $f_2'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ với $\forall x \in D$. $\Rightarrow$ Hàm số luôn ĐB trên D

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	+	
y	2 $\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$	2

* Xét hàm $f_3(x)$.

- TXĐ :D=R.

- Giới hạn: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_3(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f_3(x) = -\infty$.

- SBT: $f_3'(x) = -4x^3 - 2x$; $f_3'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\Rightarrow$ Hàm số ĐB trên $(-\infty; 0)$ và NB trên khoảng $(0; +\infty)$.

Điểm cực đại của đồ thị là A(0;6).

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	+	0 -	0	+
y	$-\infty$ $\nearrow$	3 $\searrow$ -6	$\nearrow$	$+\infty$

2. Tìm giá trị lớn nhất,giá trị nhỏ nhất của các hàm đã cho trênA, A_i, B_i với $i = 1, 2, 3$.

* Xét với hàm $f(x)$.

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2], max $f(x) = f(2) = 10$; min$f(x) = \frac{7}{2}$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$, max$f(x) = f(2) = 10$; min$f(x) = \frac{7}{2}$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$, max$f(x) = f(3) = \frac{75}{2}$; min$f(x) = \frac{7}{2}$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$, max$f(x) = f(3) = \frac{75}{2}$; min$f(x) = \frac{7}{2}$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$, max$f(x) = \frac{39}{8}$; min$f(x) = \frac{7}{2}$.

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$, max$f(x) = f(6) = 366$; min$f(x) = f(4) = 98$.

* Xét với hàm $f_1(x)$

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2], max $f_1(x) = \frac{2}{3}$; min$f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$, max $f_1(x) = \frac{7}{3}$; min$f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$, max $f_1(x) = \frac{7}{3}$; min$f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$, max$f_1(x) = \frac{2}{3}$; min$f_1(x) = -6$

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$, max$f_1(x) = -\frac{11}{3}$; min$f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$, max$f_1(x) = \frac{254}{3}$; min$f_1(x) = \frac{34}{3}$.

* Xét với hàm $f_2(x)$.

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2]: max $f_2(x) = \frac{5}{3}$; min $f_2(x) = 1$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$:max$f_2(x) = \frac{5}{3}$; min $f_2(x) = 0$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$:max$f_2(x) = \frac{7}{4}$; min $f_2(x) = 0$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$:max $f_2(x) = \frac{7}{4}$; min $f_2(x) = 1$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$:max $f_2(x) = \frac{8}{5}$; min $f_2(x) = \frac{3}{2}$.

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$:max $f_2(x) = \frac{13}{7}$; min $f_2(x) = \frac{9}{5}$.

* Xét với hàm $f_3(x)$.

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2]: max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -11$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$:max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -14$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$:max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -84$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$:max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -84$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$:max $f_3(x) = 4$; min $f_3(x) = -\frac{21}{16}$.

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$:max $f_3(x) = -266$; min $f_3(x) = -1326$.

3.Tìm tập giá trị của hàm số trên $A, A_i; B_i, i = 1, 2, 3$.

* Xét hàm $f(x)$.

+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; 10]$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; 10]$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; \frac{75}{2}]$.

+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-10; 10]$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; \frac{75}{2}]$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; \frac{39}{8}]$.

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[98; 366]$.

* Xét hàm $f_1(x)$.

+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[-6; \frac{7}{3}]$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[-6; \frac{7}{3}]$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[-6; \frac{7}{3}]$.

+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-6; 3]$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[-6; \frac{2}{3}]$

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[-6; -\frac{11}{3}]$

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[\frac{34}{3}; \frac{254}{3}]$

* Xét hàm $f_2(x)$

+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[1; \frac{5}{3}]$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[0; \frac{5}{3}]$.
+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[0; \frac{7}{4}]$.
+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-\infty; 3]$-$\{2\}$.
+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[1; \frac{7}{4}]$.
+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[\frac{3}{2}; \frac{8}{5}]$.
+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[\frac{9}{5}; \frac{13}{7}]$.

* Xét hàm $f_3(x)$.
+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[-14; 6]$.
+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[-14; 6]$.
+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[-84; 6]$.
+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-14; 6]$.
+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[-84; 6]$.
+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[-\frac{21}{6}; 4]$.
+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[-1326; -266]$.

4. y thuộc giao của D và tập giá trị của $f, f_i, i = 1, 2, 3$, trên tập $A, A_i, B_i, i = 1, 2, 3$.

□

1.2.3 Phương pháp thứ ba và ví dụ áp dụng.

Ở đây phương pháp thứ ba là dùng định nghĩa, bảng biến thiên và các định lý về hàm liên tục để xác định tập xác định của hàm được xác định bởi các hàm-tập.
Trong mục này chúng tôi đưa ra các ví dụ cho phương pháp thứ ba.

Ví dụ 1.22.
Cho hàm số:
$f(x) = x^4 - 2x^2$
$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$f_2(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

Các tập $A = [-1;2]; A_1 = [0;3]; A_2 = [0;3]; A_3 = [-1;1]$

$B = f(cosx + sinx); C = f((cosx + sinx)^2)$

1. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số đã cho.

2. Tìm GTLN;GTNN của các hàm số trên các tập.

3. Cho $g(y)$ là hàm số thực với tập xác định là D. Tìm y biết y thuộc tập giá trị của $f\left(\dfrac{\cos x + 1}{\cos x + \sin x + 2}\right); f_i\left(\dfrac{\cos x + 1}{\cos x + \sin x + 2}\right), i = 1, 2.$

4. Xác định các tập B, C.

Lời giải.

1. * Hàm $f(x) = x^4 - 2x^2$

- TXĐ: D=R

- Giới hạn: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f_3(x) = +\infty$

- SBT :

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 1$

Hàm số ĐB trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số NB trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Điểm CĐ của đồ thị là $A(0;0)$

Điểm CT của đồ thị là $B(-1;-1)$ và $C(1.-1)$

x	$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$
y'	- 0 + 0 - 0 +
y	$+\infty$ ↘ -1 ↗ 0 ↘ -1 ↗ $+\infty$

* Xét hàm $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

- TXĐ: D=R

-Giới hạn : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_3(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f_3(x) = -\infty$

- SBT:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

Hàm số ĐB trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

Hàm số NB trên $(0; 2)$

Điểm CĐ của đồ thị là $A(0; 4)$

Điểm CT của đồ thị là $B(2; 0)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

* Xét hàm $f_2(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

- TXĐ D=R-$\{-1\}$

- Giới hạn: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_2(x) = 2$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f_2(x) = 2$

$\Rightarrow$ TCN:$y = 2$

$\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} f_2(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^-} f_2(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ TCĐ:$x = -1$

- SBT: Hàm sô ĐB trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	+	
y	2 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 2	

2. Tìm GTLN;GTNN của các hàm số trên các tập.

* Xét trên tập A:

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

+ GTLN của $f(x)$ là :8 khi $x = 2$.

+ GTNN của $f(x)$ là :-1 khi $x = -1$ hoặc $x = 1$.

+ GTLN của $f_1(x)$ là :4 khi $x = 0$.

+ GTNN của $f_1(x)$ là :0 khi $x = -1$ hoặc $x = 2$.

+ GTLN của $f_2(x)$ là :$\frac{4}{3}$ khi $x = 2$.

+ Không xác định được GTNN của $f_2(x)$.

* Xét trên A_1:

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

+ GTLN của $f(x)$ là :63 khi $x = 3$.

+ GTNN của $f(x)$ là :-1 khi $x = 1$.

+ GTLN của $f_1(x)$ là :4 khi $x = 0$ hoặc $x = 3$.

+ GTNN của $f_1(x)$ là :0 $x = 2$.

+ GTLN của $f_2(x)$ là :$\frac{3}{2}$ khi $x = 3$.

+ GTNN của $f_2(x)$f la: 0 khi $x = 0$.

* Xét trên A_2:

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

+ GTLN của $f(x)$ là :0 khi $x = 0$.

+ GTNN của $f(x)$ là :-1 khi $x = 1$.

+ GTLN của $f_1(x)$ là :4 khi $x = 0$.

+ GTNN của $f_1(x)$ là :2 $x = 1$.

+ GTLN của $f_2(x)$ là :1 khi $x = 1$.
+ GTNN của $f_2(x)$ là: 0 khi $x = 0$.
* Xét trên A_3:
+ GTLN của $f(x)$ là :0 khi $x = 0$.
+ GTNN của $f(x)$ là :-1 khi $x = 1$ hoặc $x = -1$.
+ GTLN của $f_1(x)$ là :4 khi $x = 0$.
+ GTNN của $f_1(x)$ là :0 khi $x = -1$.
+ GTLN của $f_2(x)$ là :1 khi $x = 1$.
3. Theo trên hàm $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{\cos x + \sin x + 2}$ có tập giá trị là $G_1 = [0; 1]$.
Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số trên tập G_1 ta được y theo thứ tự thuộc các tập sau:
+ $y \in [-1; 0] \bigcap D$.
+ $y \in [2; 4] \bigcap D$.
+ $y \in [0; 1] \bigcap D$

4. Xác định các tập B; C.
Đặt $t = cosx + sinx$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.
Khi đó :$B = f(t)$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.
Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta được:$B = [-1; 0]$.
Đặt $u = (cosx + sinx)^2$ với $u \in [0; 2]$.
Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta được $C = [-1; 8]$.

□

Kết Luận Chương I

Trong Chương I, chúng tôi đã trình bày ba phương pháp tìm tập xác định của hàm số được xác định bởi hàm-tập cùng các ví dụ áp dụng. Cụ thể là:
Phương Pháp thứ nhất: Dùng định nghĩa và các định lý về hàm liên để tìm tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập.
Phương pháp thứ hai: Dùng bảng biến thiên và các định lý về hàm liên tục để tìm tập xác định của hàm được xác định bởi hàm-tập.
Phương pháp thứ ba: Dùng định nghĩa,bảng biến thiên và các định lý về

hàm liên tục để xác định tập xác định của hàm được xác định bởi hàm tập.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chương 2

Ứng dụng Tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm -tập vào phương trình, bất phương trình.

Trong chương này, chúng tôi trình bày các ứng dụng tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm tập vào phương trình, bất phương trình. Cụ thể là: Xét phương trình, bất phương trình (gọi tắt là hệ) dạng $f(g(x)) = m; f(g(x)) \geq m; f(g(x)) > m; f(g(x)) < m; f(g(x)) \geq m; f(g(x)) \leq m$ với x thuộc tập D của $\mathbb{R}$.

Có hai cách tiếp cận đối với các hệ nói trên chẳng hạn với $f(g(x)) = m; f(g(x)) \geq m$ (Tương tự cho các hệ còn lại).

Cách 1: Xác định hàm hợp $f_0 g$ và dùng các định lý về hàm số liên tục.

Cách 2: Gồm 3 bước.

Bước 1: Đặt $y = g(x)$. Khi đó các hệ trên trở thành:

$$\begin{cases} \text{f(y)=m} \\ \text{y=g(x)} \\ x \in D \end{cases} ; \begin{cases} \text{f(y)} \geq m \\ \text{y=g(x)} \\ x \in D \end{cases}$$

Bước 2:Dùng các định lý của hàm số thực liên tục để tìm tập hợp tất cả y mà $y = g(x)$, $x \in D$.

Bước 3: Dùng các định lý của hàm số thực liên tục để xét $f(y) = m$.

Ở cách 2, Bước 2 là bước then chốt.Thực tế cho thấy rằng, giải bài toán kiểu này thường sai ở Bước 2.
* Nhận xét: Nhìn chung việc xác định hàm hợp f_0g là khó. Vì vậy khi xem xét các hệ trên ta thường dùng Cách 2.
Trước tiên, chúng tôi trình bày sự ứng dụng vào phương trình.

2.1 Ứng dụng vào phương trình.

Bây giờ chúng tôi trình bày các phương pháp ứng dụng.

2.1.1 Các phương pháp ứng dụng.

Chúng ta có định lý sau.

Định lý 2.1. *:Giả sử f là hàm số liên tục trên D, D là tập con của R. Khi đó phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên D khi và chỉ khi m thuộc vào tập giá trị của $f(x)$ với $x \in D$.*

Từ Định lý 2.1 và các phương pháp xác định của hàm số được xác định bởi hàm-tập chúng ta có:
Ba phương pháp ứng dụng đối với phương trình $f(g(x)) = m$,$x \in D$, D là tập con của R.
- Phương pháp thứ nhất: Dùng Định lý 2.1 và phương pháp thứ nhất của vấn đề tìm tập xác định của hàm số thực được xác định bởi các hàm-tập.
- Phương pháp thứ hai: Dùng Định lý 2.1 và phương pháp thứ hai của vấn đề tìm tập xác định của hàm số thực được xác định bởi các hàm-tập.
- Phương pháp thứ ba: Dùng Định lý 2.1 và phương pháp thứ ba của vấn đề tìm tập xác định của hàm số thực được xác định bởi các hàm-tập.

2.1.2 Bài tập áp dụng

Ví dụ 2.2. *: Tìm m để mỗi phương trình sau có nghiệm:*
1. $(\dfrac{sinx+1}{sinx+cosx-2})^3 + (\dfrac{sinx+1}{sinx+cosx-2})^2 + 2 = m.$

2. $\dfrac{-3(\dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2})-1}{\dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2}-2}=m.$

3. $\dfrac{(\dfrac{sinx+1}{cosx+sinx-2})^2-2(\dfrac{sinx+1}{cosx+sinx-2})+4}{\dfrac{sinx+1}{cosx+sinx-2}-2}=m.$

4. $(\dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2})^4-8(\dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2})^2+10=m.$

5. $\dfrac{(x^3-3x^2+4)^2}{x^3-3x^2+3}=m$ *với* $x\in[0;1]$.

6. $\dfrac{-3(x^3-3x^2+4)-1}{x^3-3x^2+3}=m$ *với* $x\in[0;1]$.

7. $(x^3-3x^2+4)^4-8(x^3-3x^2+4)^2+4=m$ *với* $x\in[0;1]$.

Lời giải.

1. Đặt t=$\dfrac{sinx+1}{sinx+cosx-2}$.

The Ví dụ 1.17 ta được:$t\in[-3;0]$.

Phương trình trở thành: $t^3+t^2+2=m(1)$.

Bài toán qui về tìm m để phương trình (1) có nghiệm $t\in[-3;0]$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+2$ với $t\in[-3;0]$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2t$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=\dfrac{-2}{3}$.

BBT

x	$-\infty$ -3 $-\frac{2}{3}$ 0 $+\infty$
y'	+ 0 - 0 +
y	$-\infty$ ↗ -16 ↗ $\frac{58}{27}$ ↘ 2 ↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được $m \in [-16; \frac{58}{27}]$

2. Đặt t=$\frac{cosx+1}{cosx+sinx+2}$.

Theo Ví dụ 1.17 ta được:$t \in [0;1)$.

Phương trình trở thành:

$$\frac{-3t-1}{t-1} = m \tag{2.1}$$

Bài toán thỏa mãn khi phương trình (2.1) có nghiệm $t \in [0;1)$.

Xét $f(t) = \frac{-3t-1}{t-1}$ với $t \in [0;1)$.

Ta có :$f'(t) = \frac{4}{(t-1)^2} > 0$ với $\forall t \in [0;1)$.

BBT

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
y'	+ ‖ +
y	-3 ↗ 1 ↗ $+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗ -3

Từ bảng biến thiên ta được $m \geq 1$.

3. Đặt t=$\frac{sinx+1}{sinx+cosx-2}$.

Theo Ví dụ 1.17 ta được :$t \in [-3;0]$.

Phương trình có dạng:

$\frac{t^2-2t+4}{t-2} = m$.

$f'(t) = \dfrac{t^2 - 4t}{(t-2)^2}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 4$.

BBT

x	$-\infty$	-3		0		4	$+\infty$
y'		0	+	0		0	
y		$-\frac{19}{5}$	↗	-2			

Từ bảng biến thiên ta được $m \in [-\dfrac{19}{5}; -2]$

4. Đặt t=$\dfrac{cosx + 1}{cosx + sinx + 2}$.

Theo Ví dụ 1.17 ta được: $t \in [0; 1)$.

Phương trình có dạng: $t^4 - 8t^2 + 10 = m$.

Xét hàm $f(t) = t^4 - 8t^2 + 10$ với $t \in [0; 1]$.

Ta có $f'(t) = 4t^3 - 16t$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -2$ hoặc $t = 2$.

BBT

x	$-\infty$	-2		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-		0	+	
y	$+\infty$		↘		↗ 10		↘ 3		↗	$+\infty$

Vậy $m \in [3; 10]$.

5. Đặt t=$x^3 - 3x^2 + 4$.

Xét $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ với $x \in [0; 1]$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

BBT

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘		↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được $t \in [2; 4]$.

Phương trình có dạng :$\dfrac{t^2}{t-1} = m$.

Xét $g(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ với $t \in [2; 4]$.

$g'(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 2$.

BBT

x	$-\infty$		0		1		2		4	$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+		
y		↗		↘	‖	↘	4	↗	$\frac{16}{3}$	

Từ bảng biến thiên ta được :$m \in [4; \dfrac{16}{3}]$.

6. Đặt t=$x^3 - 3x^2 + 4$.

Theo trên ta được :$t \in [2; 4]$.

Phương trình có dạng :$\dfrac{-3t-1}{t-1}=m$.

Dựa vào bảng biến thiên ở ý 2 trên $[2;4]$ ta được :$m\in[-7;\dfrac{13}{3}]$.

7. Đặt t=x^3-3x^2+4.

Theo trên ta được :$t\in[2;4]$.

Phương trình có dạng:$t^4-8t^2+4=m$.

Xét hàm số $f(t)=t^4-8t^2+4$ với $t\in[2;4]$.

$f'(t)=4t^3-16t$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=-2$ hoặc $t=2$

BBT

x	$-\infty$	-2	0	2	4	$+\infty$
y'		- 0	+ 0	- 0	+	
y	$+\infty$	↘	↗	↘ -12	↗ 142	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được :$m\in[-12;142]$.

□

Ví dụ 2.3. *Tìm m để hệ phương trình có nghiệm:*

$$\begin{cases} x+2y=2 & (1.1)\\ 5y^2-8y+4-m=0 & (1.2)\end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình trên tương đương với:

$$\begin{cases} x=2-2y\\ 5y^2-8y+4-m=0\end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $5y^2-8y+4-m=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow\triangle=5m-4\geq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{4}{5}$. □

Chú ý 2.4. *Phương trình (1.1) biểu thị mỗi $x \in \mathbb{R}$ tương ứng với một giá trị của y nên chỉ cần tìm điều kiện để phương trình (1.2)có nghiệm $x \in \mathbb{R}$*

Ví dụ 2.5. *Tìm m để hệ phương trình có nghiệm*

$$\begin{cases} x + y = m \\ \sqrt{x-2} + 2\sqrt{y+3} = 2 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 2, y \geq -3$

Đặt $u = \sqrt{x-2}, v = \sqrt{y+3}, (u \geq 0, v \geq 0)$

Suy ra ta có: $u + 2v = 2, u \leq 2, v \leq 1.$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} u + 2v = 2 \\ u^2 + v^2 - 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - 2v & (2.1) \\ 5v^2 - 8v + 3 = m & (2.2) \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2.2) có nghiệm $v \in [0; 1]$.

Xét hàm số $f(v) = 5v^2 - 8v + 3, v \in [0; 1]$

Ta có $f'(v) = 10v - 8, \quad f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{4}{5}$ Bảng biến thiên

v	$-\infty$	0	$4/5$	1	$+\infty$
$f'(v)$		-	0	+	
$f(v)$	$-\infty$	$\searrow$ 3	-1/5	$\nearrow$ 0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(v) \in [\frac{-1}{5}; 3]$ với $v \in [0; 1]$.Vậy$\frac{-1}{5} \leq m \leq 3$ □

Chú ý 2.6.

- Phương trình (2.1) biểu thị mỗi $v \in [0; 1]$ tương ứng với một giá trị của u nên cần tìm điều kiện để phương trình (2.2) có nghiệm $\in [0; 1]$.

- Đa số học sinh thường quên đi điều kiện ẩn nên vẫn giải theo ví dụ 1.

-Học sinh dễ nhầm chỉ cần điều kiện $v \geq 0$, nên kết quả vẫn sai.

Ví dụ 2.7. *Tìm m để hệ phương trình*

$$\begin{cases} xy(x+y) = 3(x+y) + xy \\ (x+y)^2 + xy - (m-5)(x+y) - xy(x+y) + m + 33 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm dương.

Lời giải. Đặt $S = x + y, P = xy$, với S, P dương và $S^2 \geq 4P$, ta có hệ:

$$\begin{cases} SP = 3S + P \\ S^2 + P - (m-5)S - SP + m + 33 = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $S \neq 1$.

Ta có $\dfrac{3S}{S-1} = P \leq \dfrac{S^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{S^3 - S^2 - 12S}{4(S-1)} \geq 0 \Leftrightarrow S \in (0;1) \bigcup [4;+\infty)$,vì $S > 0$ và $S \neq 1$.

Lại có $\dfrac{3S}{S-1} = P > 0 \Leftrightarrow S \in (-\infty;0) \bigcup (1;+\infty)$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $m = \dfrac{S^2 + 2S + 33}{S-1}$ có nghiệm $S \in [4;+\infty)$.

Xét hàm số $f(S) = \dfrac{S^2 + 2S + 33}{S-1}, S \in [4;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên hàm $f(S)$ trên $[4;+\infty)$ suy ra $m \in [16;+\infty)$. □

Chú ý 2.8. *Khi giải hệ trên, học sinh chỉ quan tâm điều kiện $S^2 \geq 4P$ và S, P dương nên kết quả dẫn tới $S \in (0;1) \bigcup [4;+\infty)$, nhưng đúng phải là $S \in [4;+\infty)$.*

Sử dụng các kết quả của lời giải bài toán này chúng ta có thể trả lời câu hỏi như: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất; tìm m để hệ phương trình có 4 nghiệm phân biệt...

2.2 Ứng dụng vào bất phương trình.

Tiếp theo chúng tôi trình bày sự ứng dụng vào bất phương trình.

Chúng ta có định lý sau

Định lý 2.9. *Giả sử f là hàm số liên tục trên $[a;b]$ của $\mathbb{R}$. Khi đó*

1. $f(x) \geq m$ với $\forall x \in [a;b]$ khi và chỉ khi $\min\{f(x), x \in [a;b]\} \geq m$.

2. $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in [a;b]$ khi và chỉ khi $\max\{f(x), x \in [a;b]\} \geq m$.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

3. $f(x) \leq m$ *với* $\forall x \in [a;b]$ *khi và chỉ khi* $\max\{f(x), x \in [a;b]\} \leq m$.
4. $f(x) \leq m$ *có nghiệm* $x \in [a;b]$ *khi và chỉ khi* $\min\{f(x), x \in [a;b]\} \leq m$.

Nhận xét 2.10.
Định lý trên vẫn đúng nếu thay " $\geq$"; " $\leq$" *thành* " $>$"; " $<$".

Chú ý 2.11. *Trong Định lý 2.9, khi thay* $[a,b]$ *thành (a;b) thì ta xử lý theo cách sau*
- Chọn (a_n);(b_n) *sao cho :*$a_1 > a_2 > a_3 > ...; b_1 < b_2 < ...$ *và* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = a$; $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = b$.
-Dùng các Định lý 2.9 đối với $[a_n; b_n]$ *và xét* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(A_n)$; $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(B_n)$ *với*
$A_n = \min\{f(x), x \in [a_n; b_n]\}$.
$B_n = \max\{f(x), x \in [a_n; b_n]\}$.

2.2.1 Các phương pháp ứng dụng.

Từ định lý trên và các phương pháp xác định tập xác định của hàm số được xác định bởi hàm-tập chúng ta có các phương pháp ứng dụng sau vào bất phương trình.
Phương pháp thứ nhất:Dùng Định lý 2.9 và phương pháp thứ nhất tìm tập xác định đã nêu ở Chương 1.
Phương pháp thứ hai:Dùng Định lý 2.9 và phương pháp thứ hai tìm tập xác định đã nêu ở Chương 1.
Phương pháp thứ ba:Dùng Định lý 2.9 và phương pháp thứ ba tìm tập xác định đã nêu ở Chương 1.

2.2.2 Bài tập ứng dụng.

Bài 1: Cho $f(x) = (\dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2})^3 - 2(\dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2})^2 + 1$.
1. Tìm m để $f(x) \geq m$ với $\forall x$.
2. Tìm m để $f(x) \geq m$ có nghiệm.
3. Tìm m để $f(x) \leq m$ với $\forall x$.
4. Tìm m để $f(x) \leq m$ có nghiệm.

Lời giải.

Đặt t=$\dfrac{cosx+1}{cosx+sinx+2}$.

Theo trên ta được $t \in [0;1]$

1. Bài toán qui về tìm m để $g(t)=t^3-2t^2+1 \geq m$ với $\forall t \in [0;1]$.

Xét hàm $g(t)$ với $t \in [0;1]$, ta có

$g'(t)=3t^2-4t, g'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=\dfrac{4}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g'(t)$		+	0	-		-	0	+	
$g(t)$	$-\infty$	↗	1	↘		↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được $m \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

2. Bài toán qui về tìm m để $g(t)=t^3-2t^2+1 \geq m$ có nghiệm$t \in [0;1]$.

Từ bảng biến thiên ta được $m \leq 1$ là những giá trị cần tìm.

3. Bài toán qui về tìm m để $g(t)=t^3-2t^2+1 \leq m$ với $\forall t \in [0;1]$.

Từ bảng biến thiên ta được $m \geq 1$ là những giá trị cần tìm.

Bài toán qui về tìm m để $g(t)=t^3-2t^2+1 \leq m$ có nghiệm $t \in [0;1]$.

Từ bảng biến thiên ta được $m \geq 0$ là những giá trị cần tìm. □

Bài 2: Cho $f(x)=\dfrac{\dfrac{sinx+1}{cosx+sinx-2}+2}{2.\dfrac{sinx+1}{cox+sinx-2}+3}$.

1. Tìm m để $f(x) \geq m$ với $\forall x$.

2.Tìm m để $f(x) \geq m$ có nghiệm.

3.Tìm m để $f(x) \leq m$ với $\forall x$.

4.Tìm m để $f(x) \leq m$ có nghiệm.

Lời giải.

Đặt $t=\dfrac{sinx+1}{cosx+sinx-2}$.

Theo trên ta được:$t \in [-3;0]\backslash\{-\frac{3}{2}\}$.

1. Bài toán qui về tìm m để:$g(t) = \frac{t+2}{2t+3} \geq m$ với $\forall t \in [-3;0] - \{-\frac{3}{2}\}$.

Ta có :$g'(t) = \frac{-1}{(2t+3)^2} < 0$ với $\forall t \in [-3;0] - \{-\frac{3}{2}\}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$ -3	$-\frac{3}{2}$	0 $+\infty$
$g'(t)$	-		-
$g(t)$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $=\infty$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy không có m thỏa mãn.

2 .Bài toán qui về tìm m để: $g(t) = \frac{t+2}{2t+3} \geq m$ có nghiệm $t \in [-3;0]\backslash\{-\frac{3}{2}\}$.

Từ bảng biên thiên ta thấy bài toán thỏa mãn với mọi m.

3. Bài toán qui về tìm m để: $g(t) = \frac{t+2}{2t+3} \leq m$ với $\forall\ t \in [-3;0]\backslash\{-\frac{3}{2}\}$.

Từ bảng biến thiên không có m nào thỏa mãn.

4. Bài toán qui về tìm m để: $g(t) = \frac{t+2}{2t+3} \leq m$ có nghiệm $t \in [-3;0]\backslash\{-\frac{3}{2}\}$.

Từ bảng biến thiên ta thấy bài toán thỏa mãn với mọi m. □

Bài 3: Cho hàm số

$f_1(x) = \frac{cosx}{cosx + sinx + 2}$.

$f_2(x) = \frac{cosx + 1}{cosx + sinx + 2}$.

$f_3(x) = \frac{cosx + sinx}{cosx + sinx + 2}$.

$f_4(x) = \frac{sinx}{cosx + sinx - 2}$.

$f_5(x) = \frac{sinx + 1}{cosx + sinx - 2}$.

$f_6(x) = \frac{cosx - sinx}{cosx + sinx - 2}$.

Tìm m để mỗi BPT sau có nghiệm: $f_i(x) \geq m$ với i=1,2,...6.

Lời giải.

Dựa vào Ví dụ 1.17 ta có kết quả như sau:

1. $f_1(x) \geq m$ có nghiệm khi $m \leq \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
2. $f_2(x) \geq m$ có nghiệm khi $m \leq 1$.
3. $f_3(x) \geq m$ có nghiệm khi $m \leq -1+\sqrt{2}$.
4. $f_4(x) \geq m$ có nghiệm khi $m \leq \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
5. $f_5(x) \geq m$ có nghiệm khi $m \leq 0$.
6. $f_6(x) \geq m$ có nghiệm khi $m \leq 1$. □

Bài tập 4: Cho các hàm số

$$f_1(x) = \frac{cosx}{cosx+sinx+2}; \qquad f_2(x) = \frac{cosx+1}{cosx+sinx+2};$$
$$f_3(x) = \frac{cosx+sinx}{cosx+sinx+2}; \qquad f_4(x) = \frac{sinx}{cosx+sinx-2};$$
$$f_5(x) = \frac{sinx+1}{cosx+sinx-2}; \qquad f_6(x) = \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx-2}.$$

Tìm m để mỗi BPT sau có nghiệm: $f_i(x) \leq m$ với i=1,2,...6.

Lời giải.

Dựa vào Ví dụ 1.17 ta có kết quả như sau:

1. $f_1(x) \leq m$ có nghiệm khi $m \geq \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.
2. $f_2(x) \leq m$ có nghiệm khi $m \geq 0$.
3. $f_3(x) \leq m$ có nghiệm khi $m \geq -1-\sqrt{2}$.
4. $f_4(x) \leq m$ có nghiệm khi $m \geq \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.
5. $f_5(x) \leq m$ có nghiệm khi $m \geq -3$.
6. $f_6(x) \leq m$ có nghiệm khi $m \geq -1$. □

Bài tập 5: Cho các hàm số

$$f_1(x) = \frac{cosx}{cosx+sinx+2}; \qquad f_2(x) = \frac{cosx+1}{cosx+sinx+2};$$
$$f_3(x) = \frac{cosx+sinx}{cosx+sinx+2}; \qquad f_4(x) = \frac{sinx}{cosx+sinx-2};$$
$$f_5(x) = \frac{sinx+1}{cosx+sinx-2}; \qquad f_6(x) = \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx-2}.$$

Tìm m để mỗi BPT sau nghiệm đúng với $\forall x$: $f_i(x) \geq m$ với i=1,2,...6.

Lời giải.

Dựa vào Ví dụ 1.17 ta có kết quả như sau:

1. $f_1(x) \geq m$ với $\forall x$ khi $m \leq \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.
2. $f_2(x) \geq m$ với $\forall x$ khi $m \leq 0$.
3. $f_3(x) \geq m$ với $\forall x$ khi $m \leq -1-\sqrt{2}$.
4. $f_4(x) \geq m$ với $\forall x$ khi $m \leq \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.
5. $f_5(x) \geq m$ với $\forall x$ khi $m \leq -3$.
6. $f_6(x) \geq m$ với $\forall x$ khi $m \leq -1$. □

Bài tập 6: Cho các hàm số

$$f_1(x) = \frac{cosx}{cosx+sinx+2}; \qquad f_2(x) = \frac{cosx+1}{cosx+sinx+2};$$
$$f_3(x) = \frac{cosx+sinx}{cosx+sinx+2}; \qquad f_4(x) = \frac{sinx}{cosx+sinx-2};$$
$$f_5(x) = \frac{sinx+1}{cosx+sinx-2}; \qquad f_6(x) = \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx-2}.$$

Tìm m để mỗi BPT sau nghiệm đúng với $\forall x$: $f_i(x) \leq m$ với i=1,2,...6

Lời giải.

Dựa vào Ví dụ 1.17 ta có kết quả như sau:

1. $f_1(x) \leq m$ với $\forall x$ khi $m \geq \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
2. $f_2(x) \leq m$ với $\forall x$ khi $m \geq 1$.
3. $f_3(x) \leq m$ với $\forall x$ khi $m \geq -1+\sqrt{2}$.
4. $f_4(x) \leq m$ với $\forall x$ khi $m \geq \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
5. $f_5(x) \leq m$ với $\forall x$ khi $m \geq 0$.
6. $f_6(x) \leq m$ với $\forall x$ khi $m \geq 1$. □

2.3 Bài tập tổng hợp

Trong mục này chúng tôi đưa ra một số ví dụ áp dụng cho các phương pháp đã nêu ở Chương 1 và Chương 2.

Ví dụ 2.12. *Cho hàm số $g(y)$ với tập xác định là D và các hàm số sau.*

$f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 6.$
$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}.$
$f_2(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$
$f_3(x) = -x^4 - x^2 + 6.$
Các tập $A = [0;2]; A_1 = [-\frac{1}{2};1]; A_2 = [\frac{-1}{2};3]; A_3 = [-2;2];$
$B_1 = [0;3]; B_2 = [1;\frac{3}{2}]; B_3 = [4;6].$
1.Khảo sát sự biến thiên của các hàm số $f, f_i, i = 1,2,3.$
2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm $f, f_i, i = 1,2,3$ *trên*A, A_i, B_i *với* $i = 1,2,3.$
3.Tìm tập giá trị của hàm số $f, f_i, i = 1,2,3$ *trên* $A, A_i, B_i, i = 1,2,3.$
4. Tìm $y \in D$ *và* y *thuộc tập giá trị của* $f, f_i, i = 1,2,3.$ *trên tập* $A, A_i, B_i, i = 1,2,3.$
5. Tìm m *để mỗi phương trình sau có nghiệm trên* $A; A_i; i = 1,2,3.$
6.Tìm m *để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau* $f(x) \geq m; f_i(x) \geq m (i = 1,2,3)$ *có nghiệm trên* $A; A_i.$
7.Tìm m *để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau* $f(x) \leq m; f_i(x) \leq m (i = 1,2,3)$ *có nghiệm trên* $A; A_i.$
8. Tìm m *để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau* $f(x) \geq m; f_i(x) \geq m; i = 1,2,3,$ *nghiệm đúng* $\forall x$ *thuộc một tập bất kỳ trong các tập sau:*$A; A_i; i = 1,2,3.$
9. Tìm m *để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau* $f(x) \leq m; f_i(x) \leq m; i = 1,2,3$ *nghiệm đúng với*$\forall x$ *thuộc một tập bất kỳ trong các tập sau:*$A; A_i; i = 1,2,3.$
10. Tìm m *để mỗi phương trình trong các phương trình sau* $f(x) = m; f_i(x) = m; i = 1,2,3$ *có nghiệm trên* $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3.$
11. Tìm m *để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau* $f(x) \geq m; f_i(x) \geq m; i = 1,2,3$ *có nghiệm trên* $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3.$
12. Tìm m *để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau* $f(x) \leq m; f_i(x) \leq m; i = 1,2,3$ *có nghiệm trên* $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3.$

13. Tìm m để $f(x) = m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
14. Tìm m để $f(x) \geq m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
15. Tìm m để $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3
16. Tìm m để $f(x) \leq m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
17. Tìm m để $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
18. Tìm m để $f_i(x) = m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
19. Tìm m để $f_i(x) \geq m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
20. Tìm m để $f_i(x) \leq m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
21. Tìm m để $f_i(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.
22. Tìm m để $f_i(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.

Lời giải.

* Xét hàm f(x).

- TXĐ:D=R.

-Giới hạn: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

-SBT: $f'(x) = 6x^2 - 3x - 3$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{55}{8}$	↘	$\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

Hàm số ĐB trên $(-\infty; -\dfrac{1}{2})$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số NB trên $(-\dfrac{1}{2}; 1)$.

Điểm CĐ của đồ thị là :$(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{55}{8})$.

Điểm CT của đồ thị là :$(1; \dfrac{7}{2})$.

* Xét $f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$.

- TXĐ: D=R.

- Giới hạn: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- SBT :

$f'(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Hàm số NB trên khoảng $(-1; 2)$.

Hàm số ĐB trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Điểm CĐ là :$(-1; 3)$; Điểm CT là:$(2; -6)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$ ↗	3	↘	-6	↗ $+\infty$

* Xét hàm $f_2(x)$

- TXĐ :D=R-$\{-1\}$.

- Giới hạn : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_2(x) = 2$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f_2(x) = 2$.

Đồ thị có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow (-1)^-} f_2(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow (-1)^+} f_2(x) = -\infty$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$.

- SBT: $f_2'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ với $\forall x \in D$. $\Rightarrow$ Hàm số luôn ĐB trên D

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	+	
y	2 → $+\infty$	$-\infty$ → 2	

* Xét hàm $f_3(x)$.

- TXĐ :D=R.

- Giới hạn: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_3(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f_3(x) = -\infty$.

- SBT: $f_3'(x) = -4x^3 - 2x$; $f_3'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\Rightarrow$ Hàm số ĐB trên $(-\infty; 0)$ và NB trên khoảng $(0; +\infty)$.

Điểm cực đại của đồ thị là A(0;6).

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	+	0 -	0	+
y	$-\infty$ → 3		-6 → $+\infty$	

2. Tìm giá trị lớn nhất,giá trị nhỏ nhất của các hàm đã cho trênA, A_i, B_i với $i = 1, 2, 3$.

* Xét với hàm $f(x)$.

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2], max $f(x) = f(2) = 10$; min$f(x) = \dfrac{7}{2}$.

+ Trên tập $A_1 = [-\dfrac{1}{2}; 2]$, max$f(x) = f(2) = 10$; min$f(x) = \dfrac{7}{2}$.

+ Trên tập $A_2 = [-\dfrac{1}{2}; 3]$, max$f(x) = f(3) = \dfrac{75}{2}$; min$f(x) = \dfrac{7}{2}$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$, max$f(x) = f(3) = \dfrac{75}{2}$; min$f(x) = \dfrac{7}{2}$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \dfrac{3}{2}]$, max$f(x) = \dfrac{39}{8}$; min$f(x) = \dfrac{7}{2}$.

+ Trên tập $B_3 = [4;6]$, $\max f(x) = f(6) = 366$; $\min f(x) = f(4) = 98$.

* Xét với hàm $f_1(x)$

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2], max $f_1(x) = \frac{2}{3}$; $\min f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$, max $f_1(x) = \frac{7}{3}$; $\min f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$, max $f_1(x) = \frac{7}{3}$; $\min f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $B_1 = [0;3]$, $\max f_1(x) = \frac{2}{3}$; $\min f_1(x) = -6$

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$, $\max f_1(x) = -\frac{11}{3}$; $\min f_1(x) = -6$.

+ Trên tập $B_3 = [4;6]$, $\max f_1(x) = \frac{254}{3}$; $\min f_1(x) = \frac{34}{3}$.

* Xét với hàm $f_2(x)$.

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2]: max $f_2(x) = \frac{5}{3}$; min $f_2(x) = 1$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$:$\max f_2(x) = \frac{5}{3}$; min $f_2(x) = 0$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$:$\max f_2(x) = \frac{7}{4}$; min $f_2(x) = 0$.

+ Trên tập $B_1 = [0;3]$:max $f_2(x) = \frac{7}{4}$; min $f_2(x) = 1$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$:max $f_2(x) = \frac{8}{5}$; min $f_2(x) = \frac{3}{2}$.

+ Trên tập $B_3 = [4;6]$:max $f_2(x) = \frac{13}{7}$; min $f_2(x) = \frac{9}{5}$.

* Xét với hàm $f_3(x)$.

Dựa vào BBT ta có các kết luận sau:

+ Trên tập A=[0;2]: max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -11$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$:max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -14$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$:max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -84$.

+ Trên tập $B_1 = [0;3]$:max $f_3(x) = 6$; min $f_3(x) = -84$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$:max $f_3(x) = 4$; min $f_3(x) = -\frac{21}{16}$.

+ Trên tập $B_3 = [4;6]$:max $f_3(x) = -266$; min $f_3(x) = -1326$.

3.Tìm tập giá trị của hàm số trên $A, A_i; B_i, i = 1, 2, 3$.

* Xét hàm $f(x)$.

+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; 10]$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; 10]$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; \frac{75}{2}]$.

+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-10; 10]$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; \frac{75}{2}]$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[\frac{7}{2}; \frac{39}{8}]$.

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[98; 366]$.

* Xét hàm $f_1(x)$.

+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[-6; \frac{7}{3}]$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[-6; \frac{7}{3}]$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[-6; \frac{7}{3}]$.

+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-6; 3]$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[-6; \frac{2}{3}]$

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[-6; -\frac{11}{3}]$

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[\frac{34}{3}; \frac{254}{3}]$

* Xét hàm $f_2(x)$

+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[1; \frac{5}{3}]$.

+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[0; \frac{5}{3}]$.

+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[0; \frac{7}{4}]$.

+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-\infty; 3]$-$\{2\}$.

+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[1; \frac{7}{4}]$.

+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[\frac{3}{2}; \frac{8}{5}]$.

+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[\frac{9}{5}; \frac{13}{7}]$.

* Xét hàm $f_3(x)$.

+ Trên tập A=[0;2]. Tập giá trị là :$[-14; 6]$.
+ Trên tập $A_1 = [-\frac{1}{2}; 2]$. Tập giá trị là :$[-14; 6]$.
+ Trên tập $A_2 = [-\frac{1}{2}; 3]$. Tập giá trị là :$[-84; 6]$.
+ Trên tập $A_3 = [-2; 2]$. Tập giá trị là :$[-14; 6]$.
+ Trên tập $B_1 = [0; 3]$. Tập giá trị là :$[-84; 6]$.
+ Trên tập $B_2 = [1; \frac{3}{2}]$. Tập giá trị là :$[-\frac{21}{6}; 4]$.
+ Trên tập $B_3 = [4; 6]$. Tập giá trị là :$[-1326; -266]$.

4. y thuộc giao của D và tập giá trị của $f, f_i, i = 1, 2, 3$, trên tập $A, A_i, B_i, i = 1, 2, 3$. 5. Tìm m để mỗi PT sau có nghiệm trên $A; A_i; i = 1, 2, 3$.

$f(x) = m; f_i(x) = m$.

* Xét phương trình $f(x) = m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có các kết luân sau:

+ Phương trình có nghiệm trên A khi $m \in [\frac{7}{2}; 10]$.
+ Phương trình có nghiệm trên A_1 khi $m \in [\frac{7}{2}; 10]$.
+ Phương trình có nghiệm trên A_2 khi $m \in [\frac{7}{2}; \frac{75}{2}]$.
+ Phương trình có nghiệm trên A_3 khi $m \in [-10; 10]$.

* Xét phương trình $f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3} = m$.

+ Phương trình có nghiệm trên A khi $m \in [-6; \frac{7}{3}]$.
+ Phương trình có nghiệm trên A_1 khi $m \in [-6; \frac{7}{3}]$.
+ Phương trình có nghiệm trên A_2 khi $m \in [-6; \frac{7}{3}]$.
+ Phương trình có nghiệm trên A_3 khi $m \in [-6; 3]$.

* Xét phương trình $f_2(x) = \frac{2x+1}{x+1} = m$.

+ Phương trình có nghiệm trên A khi $m \in [1; \frac{5}{3}]$.
+ Phương trình có nghiệm trên A_1 khi $m \in [0; \frac{5}{3}]$.

+ Phương trình có nghiệm trên A_2 khi $m \in [0; \frac{7}{4}]$.

+ Phương trình có nghiệm trên A_3 khi $m \in [-\infty; 3]$-$\{2\}$.

* Xét phương trình $f_3(x) = -x^4 - x^2 + 6 = m$.

+ Phương trình có nghiệm trên A khi $m \in [-14; 6]$

+ Phương trình có nghiệm trên A_1 khi $m \in [-14; 6]$.

+ Phương trình có nghiệm trên A_2 khi $m \in [-84; 6]$.

+ Phương trình có nghiệm trên A_3 khi $m \in [-14; 6]$.

6.Tìm m để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau $f(x) \geq m; f_i(x) \geq m(i = 1, 2, 3)$ có nghiệm trên $A; A_i$.

* Xét BPT $f(x) \geq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \leq 10$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \leq 10$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \leq \frac{75}{2}$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 khi $m \leq 10$.

* Xét BPT $f_1(x) \geq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \leq \frac{7}{3}$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \leq \frac{7}{3}$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \leq \frac{7}{3}$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 khi $m \leq 3$.

* Xét BPT $f_2(x) \geq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \leq \frac{5}{3}$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \leq \frac{5}{3}$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \leq \frac{7}{4}$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 khi $m \leq 3$.

* Xét BPT $f_3(x) \geq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \leq 6$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \leq 6$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \leq 6$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 khi $m \leq 6$.

7..Tìm m để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau $f(x) \leq m; f_i(x) \leq m(i = 1, 2, 3)$ có nghiệm trên $A; A_i$.

* Xét BPT $f(x) \leq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \geq \frac{7}{2}$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \geq \frac{7}{2}$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \geq \frac{7}{2}$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 khi $m \geq -10$.

* Xét BPT $f_1(x) \leq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \geq -6$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \geq -6$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \geq -6$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 khi $m \geq -6$.

* Xét BPT $f_2(x) \leq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \geq 1$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \geq 0$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \geq 0$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 với $\forall m \in R$.

* Xét BPT $f_3(x) \leq m$.

+ BPT có nghiệm trên A khi $m \geq -14$.

+ BPT có nghiệm trên A_1 khi $m \geq -14$.

+ BPT có nghiệm trên A_2 khi $m \geq -84$.

+ BPT có nghiệm trên A_3 khi $m \geq -14$.

8. Tìm m để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau $f(x) \geq m; f_i(x) \geq m; i = 1, 2, 3$ nghiệm đúng với$\forall x$ thuộc một tập bất kỳ trong các tập sau:$A; A_i; i = 1, 2, 3$.

* Xét BPT $f(x) \geq m$

+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \leq \frac{7}{2}$.

+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \leq \frac{7}{2}$.

+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \leq \frac{7}{2}$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_3$ khi $m \leq -10$
* Xét BPT $f_1(x) \geq m$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \leq -6$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \leq -6$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \leq -6$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_3$ khi $m \leq -6$.
* Xét BPT $f_2(x) \geq m$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \leq 1$
+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \leq 0$
+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \leq 0$
* Xét BPT $f_3(x) \geq m$
+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \leq -14$
+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \leq -14$
+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \leq -84$
+ BPT đúng với $\forall x \in A_3$ khi $m \leq -14$

9. Tìm m để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau $f(x) \leq m; f_i(x) \leq m; i = 1, 2, 3$ nghiệm đúng với$\forall x$ thuộc một tập bất kỳ trong các tập sau:$A; A_i; i = 1, 2, 3$.

* Xét BPT $f(x) \leq m$
+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \geq 10$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \geq 10$
+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq \frac{75}{2}$.
* Xét BPT $f_1(x) \leq m$
+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \geq \frac{2}{3}$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \geq \frac{7}{3}$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq \frac{7}{3}$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_3$ khi $m \geq 3$.
* Xét BPT $f_2(x) \leq m$.

+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \geq \frac{5}{3}$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \geq \frac{5}{3}$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq \frac{7}{4}$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_3$ khi $m \geq 3$.

* Xét BPT $f_3(x) \leq m$.

+ BPT đúng với $\forall x \in A$ khi $m \geq 6$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \geq 6$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq 6$.
+ BPT đúng với $\forall x \in A_3$ khi $m \geq 6$.

10. Tìm m để mỗi phương trình trong các phương trình sau $f(x) = m; f_i(x) = m; i = 1, 2, 3$ có nghiệm trên:
$A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$.
Có $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 = [0; 1]$.
+ Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \in [\frac{7}{2}; 6]$.
+ Phương trình $f_1(x) = m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \in [-\frac{11}{3}; \frac{2}{3}]$.
+ Phương trình $f_2(x) = m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \in [1; \frac{3}{2}]$.
+ Phương trình $f_3(x) = m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \in [4; 6]$.

11. Tìm m để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau $f(x) \geq m; f_i(x) \geq m; i = 1, 2, 3$ có nghiệm trên $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$.
Có $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 = [0; 1]$.
+ Phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \leq 6$.
+ Phương trình $f_1(x) \geq m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \leq \frac{2}{3}$.
+ Phương trình $f_2(x) \geq m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \leq \frac{3}{2}$.
+ Phương trình $f_3(x) \geq m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \leq 6$.

12. Tìm m để mỗi bất phương trình trong các bất phương trình sau $f(x) \leq m; f_i(x) \leq m; i = 1, 2, 3$ có nghiệm trên $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$.
Có $A \bigcap A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 = [0; 1]$.
+ Phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm trên $[0; 1]$ khi $m \geq \frac{7}{2}$.

+ Phương trình $f_1(x) \leq m$ có nghiệm trên $[0;1]$ khi $m \geq -\dfrac{11}{3}$.

+ Phương trình $f_2(x) \leq m$ có nghiệm trên $[0;1]$ khi $m \geq 1$.

+ Phương trình $f_3(x) \leq m$ có nghiệm trên $[0;1]$ khi $m \geq 4$.

13. Tìm m để $f(x) = m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta được $f(A) = [\dfrac{7}{2}; 10]$

$f_1(A) = [-6; \dfrac{2}{3}]; f_2(A) = [0; \dfrac{5}{3}]; f_3(A) = [-14; 6]$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \in [\dfrac{503}{8}; 1826]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \in [-462; \dfrac{55}{8}]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \in [\dfrac{7}{2}; \dfrac{329}{54}]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \in [-5734; 366]$

14. Tìm m để $f(x) \geq m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \leq 1826$

+ Bất Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \leq \dfrac{55}{8}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \leq \dfrac{329}{54}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \leq 366$

15. Tìm m để $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \leq \dfrac{503}{8}$

+ Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$ khi $m \leq -426$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \leq \dfrac{7}{2}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \leq -5734$

16. Tìm m để $f(x) \leq m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \geq \dfrac{503}{8}$

+ Bất Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \geq -462$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \geq \frac{7}{2}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \geq -5734$

17. Tìm m để $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \geq 1826$

+ Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$ khi $m \geq \frac{55}{8}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \geq \frac{329}{54}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \geq 366$

18. Tìm m để $f_i(x) = m$ có nghiệm trên $f(A); f_i(A)$,i=1,2,3

* Xét phương trình $f_1(x) = m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_1(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \in [3; \frac{1582}{3}]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \in [-\frac{466}{3}; 3]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \in [-\frac{461}{81}; \frac{2}{3}]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \in [-\frac{5906}{3}; \frac{254}{3}]$

* Xét phương trình $f_2(x) = m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_2(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \in [\frac{16}{9}; \frac{21}{11}]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \in [\frac{7}{5}; +\infty]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \in [1; \frac{13}{8}]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \in [\frac{13}{7}; +\infty]$

* Xét phương trình $f_3(x) = m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_3(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \in [-10094; -\frac{2501}{16}]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \in [-1326; 6]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \in [-\frac{364}{81}; 6]$

+ Phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \in [-38606; 6]$

19. Tìm m để $f_i(x) \geq m$ có nghiệm trên $f(A)$; $f_i(A)$,i=1,2,3

* Xét BPT $f_1(x) \geq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_1(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \leq \dfrac{1582}{3}$

+ Bất Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \leq 3$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \leq \dfrac{2}{3}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \leq \dfrac{254}{3}$

* Xét BPT $f_2(x) \geq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_2(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \leq \dfrac{21}{11}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \in R$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \leq \dfrac{13}{8}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \in R$

* Xét BPT $f_3(x) \geq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_3(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \leq -\dfrac{2501}{16}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \leq 6$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \leq 6$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \leq 6$

20. Tìm m để $f_i(x) \leq m$ có nghiệm trên $f(A)$; $f_i(A)$,i=1,2,3

* Xét BPT $f_1(x) \leq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_1(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \geq 3$

+ Bất Phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \geq -\dfrac{466}{3}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \geq -\dfrac{461}{81}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \geq -\dfrac{5960}{3}$

* Xét BPT $f_2(x) \leq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_2(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \geq \frac{16}{9}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \geq \frac{7}{5}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \geq 1$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \geq \frac{13}{7}$

* Xét BPT $f_3(x) \leq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_3(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f(A)$ khi $m \geq -10094$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_1(A)$ khi $m \geq -1326$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_2(A)$ khi $m \geq \frac{364}{81}$

+ Bất phương trình có nghiệm trên $f_3(A)$ khi $m \geq -38606$

21. Tìm m để $f_i(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3

* Xét BPT $f_1(x) \geq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_1(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \leq 3$

+ Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$ khi $m \leq -\frac{466}{3}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \leq -\frac{461}{81}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \leq -\frac{5960}{3}$

* Xét BPT $f_2(x) \geq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_2(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \leq \frac{16}{9}$

+ Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$ khi $m \leq \frac{7}{5}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \leq 1$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \leq \frac{13}{7}$

* Xét BPT $f_3(x) \geq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_3(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \leq -10094$

+ Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$ khi $m \leq -1326$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \leq -\frac{364}{81}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \leq -38606$

22. Tìm m để $f_i(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in f(A); f_i(A)$,i=1,2,3

* Xét BPT $f_1(x) \leq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_1(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \geq \dfrac{1582}{3}$

+ Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$ khi $m \geq 3$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \geq \dfrac{2}{3}$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \geq \dfrac{254}{3}$

* Xét BPT $f_2(x) \leq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_2(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \geq \dfrac{21}{11}$

+ Không có m để Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \geq 1$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \geq \dfrac{13}{7}$

* Xét BPT $f_3(x) \leq m$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f_3(x)$ ta có các kết luận sau:

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f(A)$ khi $m \geq -\dfrac{2501}{16}$

+ Bất Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_1(A)$ khi $m \geq 6$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_2(A)$ khi $m \geq 6$

+ Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in f_3(A)$ khi $m \geq 6$

□

Ví dụ 2.13.

Cho hàm số:

$f(x) = x^4 - 2x^2$

$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$f_2(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

Các tập $A = [-1; 2]; A_1 = [0; 3]; A_2 = [0; 3]; A_3 = [-1; 1]$

$B = f(cosx + sinx); C = f((cosx + sinx)^2)$

1. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số đã cho.

2. Tìm GTLN;GTNN của các hàm số trên các tập.

3. Cho $g(y)$ là hàm số thực với tập xác định là D. Tìm y biết y thuộc tập giá trị của $f\left(\dfrac{\cos x+1}{\cos x+\sin x+2}\right); f_i\left(\dfrac{\cos x+1}{\cos x+\sin x+2}\right), i=1,2.$

4. Tìm m để các phương trình : $f(x)=m$ và $f_i(x)=m$ với i=1,2 có nghiệm trên A; A_j với j=1,2,3.

5. Tìm m để các bất phương trình : $f(x)\geq m$ và $f_i(x)\geq m$ với i=1,2 có nghiệm trên A; A_j với j=1,2,3.

6. Tìm m để các bất phương trình : $f(x)\geq m$ và $f_i(x)\geq m$ với i=1,2 có nghiệm trên A; A_j với j=1,2,3.

7. Tìm m để các bất phương trình : $f(x)\geq m$ và $f_i(x)\geq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x\in A$; A_j với j=1,2,3.

8. Tìm m để các bất phương trình : $f(x)\leq m$ và $f_i(x)\leq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x\in A$; A_j với j=1,2,3.

9. Xác định các tập B; C.

10. Tìm m để các phương trình : $f(x)=m$ và $f_i(x)=m$ với i=1,2 có nghiệm trên B; C.

11. Tìm m để các BPT : $f(x)\geq m$ và $f_i(x)\geq m$ với i=1,2 có nghiệm trên B; C.

12. Tìm m để các bất phương trình: $f(x)\leq m$ và $f_i(x)\leq m$ với i=1,2 có nghiệm trên B; C.

13. Tìm m để các bất phương trình : $f(x)\geq m$ và $f_i(x)\geq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x\in B$; C.

14. Tìm m để các bất phương trình: $f(x)\leq m$ và $f_i(x)\leq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x\in A$; A_j với j=1,2,3.

* *Hàm $f(x)=x^4-2x^2$*

- *TXĐ: D=R*
- *Giới hạn: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_3(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f_3(x)=+\infty$*
- *SBT :*

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ *hoặc* $x = -1$ *hoặc* $x = 1$

Hàm số ĐB trên $(-1;0)$ *và* $(1;+\infty)$

Hàm số NB trên $(-\infty;-1)$ *và* $(0;1)$

Điểm CĐ của đồ thị là $A(0;0)$

Điểm CT của đồ thị là $B(-1;-1)$ *và* $C(1.-1)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0 +
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1 ↗ $+\infty$

* *Xét hàm* $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

- *TXĐ: D=R*

-*Giới hạn :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f_3(x) = -\infty$

- *SBT:*

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$ *hoặc* $x = 2$

Hàm số ĐB trên $(-\infty;0)$ *và* $(2;+\infty)$

Hàm số NB trên $(0;2)$

Điểm CĐ của đồ thị là $A(0;4)$

Điểm CT của đồ thị là $B(2;0)$

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗ $+\infty$

** Xét hàm* $f_2(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

- TXĐ D=R-$\{-1\}$

- Giới hạn: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_2(x) = 2$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f_2(x) = 2$

$\Rightarrow$ *TCN:*$y = 2$

$\lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f_2(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f_2(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ *TCĐ:*$x = -1$

- SBT: Hàm sô ĐB trên $(-\infty; -1)$ *và* $(-1; +\infty)$

x	$-\infty$ *-1* $+\infty$	
y'	$+$	$+$
y	2 → $+\infty$	$-\infty$ → 2

2. Tìm GTLN;GTNN của các hàm số trên các tập.

** Xét trên tập A:*

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

+ GTLN của $f(x)$ *là :8 khi* $x = 2$.

+ GTNN của $f(x)$ *là :-1 khi* $x = -1$ *hoặc* $x = 1$.

+ GTLN của $f_1(x)$ *là :4 khi* $x = 0$.

+ GTNN của $f_1(x)$ *là :0 khi* $x = -1$ *hoặc* $x = 2$.

+ GTLN của $f_2(x)$ *là :*$\dfrac{4}{3}$ *khi* $x = 2$.

+ Không xác định được GTNN của $f_2(x)$.

** Xét trên* A_1*:*

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

+ GTLN của $f(x)$ *là :63 khi* $x = 3$.

+ GTNN của $f(x)$ *là :-1 khi* $x = 1$.

+ GTLN của $f_1(x)$ *là :4 khi* $x = 0$ *hoặc* $x = 3$.

+ GTNN của $f_1(x)$ là :0 $x = 2$.

+ GTLN của $f_2(x)$ là :$\frac{3}{2}$ khi $x = 3$.

+ GTNN của $f_2(x)f$ la: 0 khi $x = 0$.

** Xét trên A_2:*

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

+ GTLN của $f(x)$ là :0 khi $x = 0$.

+ GTNN của $f(x)$ là :-1 khi $x = 1$.

+ GTLN của $f_1(x)$ là :4 khi $x = 0$.

+ GTNN của $f_1(x)$ là :2 $x = 1$.

+ GTLN của $f_2(x)$ là :1 khi $x = 1$.

+ GTNN của $f_2(x)$ là: 0 khi $x = 0$.

** Xét trên A_3:*

+ GTLN của $f(x)$ là :0 khi $x = 0$.

+ GTNN của $f(x)$ là :-1 khi $x = 1$ hoặc $x = -1$.

+ GTLN của $f_1(x)$ là :4 khi $x = 0$.

+ GTNN của $f_1(x)$ là :0 khi $x = -1$.

+ GTLN của $f_2(x)$ là :1 khi $x = 1$.

3. Theo trên hàm $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{\cos x + \sin x + 2}$ có tập giá trị là $G_1 = [0; 1]$.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số trên tập G_1 ta được y theo thứ tự thuộc các tập sau:

+ $y \in [-1; 0] \bigcap D$.

+ $y \in [2; 4] \bigcap D$.

+ $y \in [0; 1] \bigcap D$

4. Tìm m để các phương trình : $f(x) = m$ và $f_i(x) = m$ với i=1,2 có nghiệm trên A; A_j với j=1,2,3.

** Xét trên A:*

+ Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi $m \in [-1; 8]$.

+ Phương trình $f_1(x) = m$ có nghiệm khi $m \in [0; 4]$.

+ Phương trình $f_2(x) = m$ có nghiệm khi $m \in (-\infty; \frac{4}{3}]$.

** Xét trên A_1:*

+ Phương trình $f(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [-1; 63]$.

+ Phương trình $f_1(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [0; 4]$.

+ Phương trình $f_2(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [0; \frac{3}{2}]$.

** Xét trên* A_2*:*

+ Phương trình $f(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [-1; 0]$.

+ Phương trình $f_1(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [2; 4]$.

+ Phương trình $f_2(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [0; 1]$.

** Xét trên* A_3*:*

+ Phương trình $f(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [-1; 0]$.

+ Phương trình $f_1(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [0; 4]$.

+ Phương trình $f_2(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in (-\infty; 1]$.

5. Tìm m để các bất phương trình : $f(x) \geq m$ *và* $f_i(x) \geq m$ *với i=1,2 có nghiệm trên A;* A_j *với j=1,2,3.*

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** xét trên A:*

+ BPT $f(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 8$.

+ BPT $f_1(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 4$.

+ BPT $f_2(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq \frac{4}{3}$.

** xét trên* A_1*:*

+ BPT $f(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 63$.

+ BPT $f_1(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 4$.

+ BPT $f_2(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq \frac{3}{2}$.

** xét trên* A_2*:*

+ BPT $f(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 0$.

+ BPT $f_1(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 4$.

+ BPT $f_2(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 1$.

** xét trên* A_3*:*

+ BPT $f(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 0$.

+ BPT $f_1(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 4$.

+ BPT $f_2(x) \geq m$ *có nghiệm khi :*$m \leq 1$.

6. Tìm m để các bất phương trình : $f(x) \geq m$ và $f_i(x) \geq m$ với i=1,2 có nghiệm trên A; A_j với j=1,2,3.

: $f(x) \leq m$ và $f_i(x) \leq m$ với i=1,2 có nghiệm trên A; A_j với j=1,2,3.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** xét trên A:*

+ BPT $f(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq -1$

+ BPT $f_1(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq 0$

+ BPT $f_2(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \in R$

** xét trên A_1:*

+ BPT $f(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq -1$.

+ BPT $f_1(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq 0$.

+ BPT $f_2(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq 0$.

** xét trên A_2:*

+ BPT $f(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq -1$.

+ BPT $f_1(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq 2$.

+ BPT $f_2(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq 0$.

** xét trên A_3:*

+ BPT $f(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq -1$.

+ BPT $f_1(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \geq 0$.

+ BPT $f_2(x) \leq m$ có nghiệm khi :$m \in R$.

7. Tìm m để các bất phương trình : $f(x) \geq m$ và $f_i(x) \geq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x \in A$; A_j với j=1,2,3.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** Xét trên A:*

+ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$ khi $m \leq -1$.

+ $f_1(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$ khi $m \leq 0$.

+ Không có m để $f_2(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$.

** Xét trên A_1:*

+ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \leq -1$.

+ $f_1(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \leq 0$.

+ $f_2(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \leq 0$.

** Xét trên A_2:*

+ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \leq -1$.

+ $f_1(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \leq 2$.

+ $f_2(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \leq 0$.

8. Tìm m để các bất phương trình : $f(x) \leq m$ và $f_i(x) \leq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x \in A$; A_j với j=1,2,3.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** Xét trên A:*

+ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$ khi $m \geq 8$.

+ $f_1(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$ khi $m \geq 4$

+ $f_2(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$ khi $m \geq \dfrac{4}{3}$

** Xét trên A_1:*

+ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \geq 63$.

+ $f_1(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \geq 4$.

+ $f_2(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_1$ khi $m \geq \dfrac{3}{2}$.

** Xét trên A_2:*

+ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq 0$.

+ $f_1(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq 4$.

+ $f_2(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq 1$.

** Xét trên A_3:*

+ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq 0$.

+ $f_1(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq 4$.

+ $f_2(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A_2$ khi $m \geq 1$.

9. Xác định các tập B; C.

Đặt $t = cosx + sinx$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Khi đó :$B = f(t)$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta được:$B = [-1; 0]$.

Đặt $u = (cosx + sinx)^2$ với $u \in [0; 2]$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta được $C = [-1; 8]$.

10. Tìm m để các phương trình : $f(x) = m$ và $f_i(x) = m$ với i=1,2 có

nghiệm trên B; C.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** Xét trên* $B = [-1; 0]$

+ Phương trình $f(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [-1; 0]$

+ Phương trình $f_1(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [0; 4]$

+ Phương trình $f_2(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in (-\infty; 0]$

** Xét trên* $C = [-1; 8]$

+ Phương trình $f(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [-1; 3968]$

+ Phương trình $f_1(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in [0; 324]$

+ Phương trình $f_2(x) = m$ *có nghiệm khi* $m \in (-\infty; \frac{16}{9}]$

11. Tìm m để các BPT : $f(x) \geq m$ *và* $f_i(x) \geq m$ *với i=1,2 có nghiệm trên B; C.*

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** Xét trên B:*

+ BPT $f(x) \geq m$ *có nghiệm trên B khi :*$m \leq 0$.

+ BPT $f_1(x) \geq m$ *có nghiệm trên B khi :*$m \leq 4$.

+ BPT $f_2(x) \geq m$ *có nghiệm trên B khi :*$m \leq 0$.

** Xét trên C:*

+ BPT $f(x) \geq m$ *có nghiệm trên C khi :*$m \leq 3968$.

+ BPT $f_1(x) \geq m$ *có nghiệm trên C khi :*$m \leq 324$.

+ BPT $f_2(x) \geq m$ *có nghiệm trên C khi :*$m \leq \frac{16}{9}$.

12. Tìm m để các bất phương trình: $f(x) \leq m$ *và* $f_i(x) \leq m$ *với i=1,2 có nghiệm trên B; C.*

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** Xét trên B:*

+ BPT $f(x) \leq m$ *có nghiệm trên B khi :*$m \geq -1$.

+ BPT $f_1(x) \leq m$ *có nghiệm trên B khi :*$m \geq 0$.

+ BPT $f_2(x) \leq m$ *có nghiệm trên B khi :*$m \in R$.

** Xét trên C:*

+ BPT $f(x) \leq m$ *có nghiệm trên C khi :*$m \geq -1$.

+ BPT $f_1(x) \leq m$ có nghiệm trên C khi :$m \geq 0$.

+ BPT $f_2(x) \leq m$ có nghiệm trên C khi :$m \in R$.

13. Tìm m để các bất phương trình : $f(x) \geq m$ và $f_i(x) \geq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x \in B$; C.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** Xét trên B:*

+ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in B$ khi $m \leq -1$.

+ $f_1(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in B$ khi $m \leq 0$.

+ Không có m để $f_2(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$.

** Xét trên C:*

+ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in B$ khi $m \leq -1$.

+ $f_1(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in B$ khi $m \leq 0$.

+ Không có m để $f_2(x) \geq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in A$.

14. Tìm m để các bất phương trình: $f(x) \leq m$ và $f_i(x) \leq m$ với i=1,2 nghiệm đúng với $\forall x \in A$; A_j với j=1,2,3.

Dựa vào bảng biến thiên của các hàm số ta có các kết luận sau:

** Xét trên B:*

+ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in B$ khi $m \geq 0$.

+ $f_1(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in B$ khi $m \geq 4$.

+ $f_2(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in B$ khi $m \geq 0$.

** Xét trên C:*

+ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in C$ khi $m \geq 3968$.

+ $f_1(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in C$ khi $m \geq 324$.

+ $f_2(x) \leq m$ nghiệm đúng với $\forall x \in C$ khi $m \geq \dfrac{16}{9}$.

Kết Luận Chương 2

Trong Chương 2, chúng tôi đã trình bày các phương pháp ứng dụng tập xác định của hàm số được xác định bởi hàm-tập cùng các ví dụ minh họa. Cụ thể là:

Các phương pháp ứng dụng vào phương trình.

Các phương pháp ứng dụng vào bất phương trình.

Kết luận của Luận văn

Trong luận văn, chúng tôi đã trình bày các phương pháp tìm và ứng dụng Tập xác định của hàm số được xác định bởi hàm-tập vào phương trình, bất phương trình. Cụ thể là:

I. Đối với phương trình.

Phương Pháp thứ nhất: Dùng định nghĩa để tìm tập xác định của hàm số thực được xác định bởi hàm-tập.

Phương pháp thứ hai: Dùng bảng biến thiên để tìm tập xác định của hàm được xác định bởi hàm-tập.

Phương pháp thứ ba: Dùng định nghĩa và bảng biến thiên để xác định tập xác định của hàm được xác định bởi hàm tập.

II.Đối với bất phương trình.

Các phương pháp ứng dụng vào phương trình.

Các phương pháp ứng dụng vào bất phương trình.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Tài liệu tham khảo

[1].Nguyễn Văn Khuê - Phạm Ngọc Thao - Lê Mậu Hải - Nguyễn Đình Sang, *Toán cao cấp-Tập* $I(A_1)$ - *Giải tích một biến*, Nhà xuất bản Giáo Dục-1997.

[2]. *Toán học & Tuổi Trẻ* (9-2012), số 423, Nhà xuất bản Giáo Dục.

[3]. *Toán học & Tuổi Trẻ* (10-2012),số 424, Nhà xuất bản Giáo Dục.

[4]. *Toán học & Tuổi Trẻ* -Đặc san(10-2011), số 1, Nhà xuất bản Giáo Dục.

[5]. *Toán học & Tuổi Trẻ* (8-2012), số 422, Nhà xuất bản Giáo Dục.

[6].Đề thi Đại học-Môn toán-Khối D(2000-2012), Bộ Giáo Dục và Đào Tạo.

[7].Đề thi Đại học-Môn toán-Khối A(2000-2012), Bộ Giáo Dục và Đào Tạo.

[8].Đề thi Đại học-Môn toán-Khối B(2000-2012), Bộ Giáo Dục và Đào Tạo.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/