ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

PHẠM TRUNG KIÊN

ĐƯỜNG CONG PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

PHẠM TRUNG KIÊN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS-TS: ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - Năm 2013

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Mục lục

Lời nói đầu **2**

1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ **5**

1.1 Nhóm 5

1.2 Vành đa thức và nghiệm đa thức 6

1.3 Kết thức và biệt thức 8

2 ĐƯỜNG CONG PHẲNG **21**

2.1 Khái niệm đường cong phẳng 21

2.2 Tham số hóa đường cong phẳng 22

2.3 Điểm hữu tỷ trên đường cônic 25

2.4 Cấu trúc nhóm trên đường cong bậc ba không có điểm kỳ dị . . . 28

3 MỘT SỐ ỨNG DỤNG **31**

3.1 Một vài bài hình sơ cấp qua tham số hóa 31

3.2 Một vài phương trình nghiệm nguyên qua tham số hóa 35

3.3 Phép biến hình N_{ab} 38

3.4 Một vài bài toán về đường cong bậc 3 44

Kết luận **52**

Tài liệu tham khảo **53**

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

LỜI NÓI ĐẦU

Đã từ lâu, người ta rất quan tâm đến những phương trình kiểu $x^2 + y^2 = z^2$ hay $x^3+y^3 = z^3$ với x, y, z nguyên. Việc giải các bài toán này khi $z \neq 0$ cũng chính là việc tìm các điểm hữu tỷ trên đường cong phẳng $x^2 + y^2 = 1$ hay $x^3 + y^3 = 1$. Chính vì vậy một vấn đề nẩy sinh là xác định các điểm hữu tỷ trên đường cong phẳng. Để có thể xác định được hầu hết các điểm hữu tỷ, người ta thường tham số hóa đường cong phẳng trong $\mathbb{R}^2$.

Một vấn đề nữa cũng được nhiều người quan tâm là: Một kết quả trong hình học đúng cho đường tròn thì còn đúng cho đường elip, hypecbol, parabol không? Để có được kết quả đúng cho đường conic thì các hệ thức phải có các hệ số tương ứng kèm theo.

Vấn đề thứ ba là: Mô tả một tập hợp điểm trong hình học phẳng không phải cứ dùng thước kẻ và compa là dựng được. Khi đó muốn tìm quỹ tích các điểm trong mặt phẳng ta có thể mô tả qua đường cong phẳng.

Với ba vấn đề đặt ra ở trên luận văn này tập trung nghiên cứu về đường cong phẳng và mở rộng một vài kết quả đã biết từ lâu. Luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Trình bày một vài kiến thức chuẩn bị về nhóm, vành đa thức, kết thức và biệt thức.

Chương 2. Tập trung trình bày về đường cong phẳng. Mục 2.1 trình bày khái niệm đường cong phẳng. Chúng tôi đã chứng minh được mệnh đề 2.1.2. về giao hữu hạn điểm của hai đường cong phẳng. Mục 2.2 trình bày việc tham số hóa các đường conic và một vài đường cong phẳng khác. Chúng tôi tham số hóa theo

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

kiểu phân thức hữu tỷ để áp dụng vào xác định điểm hữu tỷ trên đường cong phẳng. Cạnh đó chúng tôi cũng tham số hóa hàm lượng giác để chuyển một vài kết quả từ đường tròn sang elip. Mục 2.3 chúng tôi trình bày một phương pháp xác định điểm hữu tỷ trên đường conic. Mục 2.4 trình bày cấu trúc nhóm trên đường cong bậc ba không có điểm kỳ dị. .

Chương 3. Một số ứng dụng

Mục 3.1 trình bày một vài bài hình sơ cấp qua tham số hóa. Trong mục này tôi đã sử dụng tham số hóa để giải quyết một số bài toán tập hợp điểm mà quỹ tích của chúng là một đường cong phẳng bậc ba. Mục 3.2 đưa ra cách giải một vài phương trình nghiệm nguyên sử dụng phương pháp tham số hóa. Mục 3.3 trình bày về khái niệm và một vài tính chất của phép biến hình N_{ab}. Trong mục này tôi trình bày định lý Ptolemy và định lý Newton đối với đường tròn. Từ kết quả này sử dụng phép biến hình N_{ab} phát hiện ra một số kết quả tương tự cho elip. Mục 3.4 tôi trình bày một số bài toán về đường cong phẳng bậc ba đặc biệt là bài toán đường cong phẳng 21- điểm K_3.

Đích cuối cùng luận văn muốn đạt được là:

1. Kết thức và phép khử với những tính chất cơ bản và ứng dụng.

2. Đường cong phẳng trong mặt phẳng và một vài tính chất.

3. Tham số hóa đường cong phẳng và sử dụng tham số hóa đường cong phẳng trong một số bài toán về phương trình nghiệm nguyên, điểm hữu tỷ và một số bài hình sơ cấp.

4. Phương pháp tìm điểm hữu tỷ trên đường conic và cấu trúc nhóm trên đường cong phẳng bậc ba không kỳ dị.

5. Trình bày phép biến hình N_{ab} và một vài tính chất.

6. Bài toán đường cong phẳng 21 - điểm K_3.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ . Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy. Em xin cảm ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn căn bản sau đại học. Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học cao học và viết luận văn.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2013

Người viết

Phạm Trung Kiên

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Nhóm

Giả sử X là một tập khác rỗng. Xét tích $X \times X = \{(a, b) \,|a, b \in X\}$. Một ánh xạ $* : X \times X \to X$ được gọi là một *phép toán hai ngôi* trên X. Giả thiết $*$ là một phép toán hai ngôi trên X. Phép toán $*$ được gọi là có tính chất *kết hợp* nếu $(a * b) * c = a * (b * c)$ thỏa mãn cho mọi $a, b, c \in X$. Phép toán $*$ được gọi là có tính chất *giao hoán* nếu $a * b = b * a$ thỏa mãn cho mọi $a, b \in X$. Giả sử A là một tập con của X. Tập A được gọi là *ổn định* với phép toán $*$ nếu $a * b \in A$ với mọi $a, b \in A$.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử *trung hòa* nếu $a * e = e * a = a$ thỏa mãn cho mọi $a \in X$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$ và phần tử trung hòa e. Giả sử phần tử $a \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là phần tử *ngược* của a nếu $a * b = b * a = e$.

Định nghĩa 1.1.3. Cho tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$ và phần tử trung hòa e. Giả sử phần tử $a \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là phần tử ngược của a nếu $a * b = b * a = e$ và ta nói a có phần tử ngược là b.

Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi kết hợp $*$ mà có phần tử trung hòa e thì phần tử e là duy nhất và nếu phần tử $a \in X$ có phần tử ngược $b \in X$ thì b cũng là duy nhất.

Định nghĩa 1.1.4. Cho tập $X \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $*$. X được gọi là

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

một *nhóm* nếu X cùng phép toán $*$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) X có phần tử trung hòa e.

(ii) Phép toán $*$ có tính chất kết hợp, có nghĩa: $(a*b)*c = a*(b*c)$ thỏa mãn cho mọi $a, b, c \in X$.

(iii) Mọi phần tử $a \in X$ đều có phần tử ngược, có nghĩa: Có $b \in X$ để $a*b = b*a = e$.

Nhóm X với phép toán $*$ được gọi là nhóm *giao hoán* nếu $x*y = y*x$ thỏa mãn cho mọi phần tử $x, y \in X$.

Nếu phép toán hai ngôi $*$ trên nhóm X được kí hiệu bởi phép cộng $+$ thì thay cho việc viết $a*b$ ta viết $a+b$ và được gọi là *tổng* của a và b. Nhóm $(X,+)$ gọi là *nhóm cộng*. Phần tử trung hòa e của nhóm này là *phần tử không* và được kí hiệu là 0. Phần tử ngược của a được gọi là *phần tử đối* và kí hiệu qua $-a$. Do vậy $a-a = a+(-a) = 0$.

Nếu phép toán hai ngôi $*$ trên nhóm X được kí hiệu bởi phép nhân . thì thay cho việc viết $a*b$ ta viết $a.b$ hoặc viết đơn giản ab và gọi là *tích* của a và b. Nhóm $(X,.)$ được gọi là *nhóm nhân*. Phần tử trung hòa e của nhóm này được gọi là *phần tử đơn vị* và được kí hiệu là e. Phần tử ngược của a được gọi là *phần tử nghịch đảo* và được kí hiệu qua a^{-1}. Do vậy $aa^{-1} = e$.

1.2 Vành đa thức và nghiệm đa thức

1.2.1 Khái niệm vành đa thức

Giả sử R là vành giao hoán với đơn vị 1. Kí hiệu $P \subset R^{\mathbb{N}}$ là tập hợp tất cả các dãy $f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0...)$ với các $a_i \in R$ và chỉ có một số hữu hạn thành phần khác 0. Như vậy phần tử thuộc P hoặc có dạng$(0, 0, ..., 0, 0, ...)$ hoặc $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ với thành phần cuối cùng $a_n \neq 0$. Ta đưa phép toán vào P để biến P thành một vành. Với $f = (a_0, ..., a_n, 0, ...)$, $g = (b_0, ..., b_m, 0, ...) \in P$, định nghĩa:

$f = g$ khi và chỉ khi $a_i = b_i, i = 0, 1, 2, ...$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_k + b_k, ..., 0, ...)$

$f.g = (a_0b_0, a_1b_0 + a_0b_1, a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, ..., 0, ...)$

Bổ đề 1.2.1. *Tập $(P, +, .)$ là một vành giao hoán với đơn vị $(1, 0, 0, ...)$ và ánh xạ $\phi : R \to (P, +, .)\,, a \mapsto (a, 0, 0, ...)$ là một đơn cấu.*

Chứng minh: Dễ dàng kiểm tra các kết quả trên.

Đặt $x = x^1 = (0, 1, 0, 0, ...)$ và quy ước $x^0 = (1, 0, 0, ...)$. Ta có biểu diễn

$$\begin{aligned}
&x^0 = (1, 0, 0, ...)\\
&x = (0, 1, 0, 0, ...)\\
&x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, ...)\\
&x^3 = (0, 0, 0, 1, 0...)\\
&... = ...\\
&f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)\\
&= (a_0, 0, 0, ...) + (0, a_1, 0, 0, ...) + ... + (0, 0, ..., 0, a_n, 0, ...)\\
&= (a_0, 0, ...)\, x^0 + (a_1, 0, ...)\, x + ... + (a_n, 0, 0, ...)\, x^n
\end{aligned}$$

Nếu đồng nhất $a \in R$ với ảnh $\phi\,(a) = (a, 0, 0, ...)\,, x^0 = (1, 0, 0, ...) = \phi\,(1)$ ta có biểu diễn $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Lúc này vành $(P, +, .)$ được kí hiệu qua $R[x]$ và ta có

$$R\,[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \,|a_i \in R\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \,|a_i \in R\right\}$$

Mỗi phần tử $f \in R\,[x]$ được gọi là một *đa thức* của x với các hệ số a_i thuộc vành R. Hệ số $a_n \neq 0$ được gọi là *hệ số cao nhất*, còn hệ số a_0 được gọi là *hệ số tự do* của f, n được gọi là *bậc* của đa thức f và kí hiệu là $degf(x)$. Riêng đa thức 0 được quy định có bậc là $-\infty$ hoặc -1. Vì tính chất đặc biệt của x nên đôi khi ta gọi x là một *biến* trên R và đa thức f còn được viết qua $f(x)$.

Nếu $f\,(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ix^i, g\,(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_ix^i \in K\,[x]$ thì

$f(x) = g(x)$ khi và chỉ khi $m = n, a_i = b_i$ với $0 \leq i \leq n$

$f\,(x) + g\,(x) = \sum\limits_{i=0} (a_i + b_i)\, x^i, f\,(x)\, g\,(x) = \sum\limits_{i=0} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} (a_{i-j}b_j)\right) x^i$

Ta có các kết quả sau đây:

Định lý 1.2.2. *Với trường K, $K[x]$ là một vành giao hoán. Hơn nữa, $K[x]$ còn là một miền nguyên.*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Định lý 1.2.3. *Với các đa thức* $f(x), g(x) \in K[x]$ *và* $g(x) \neq 0$ *có hai đa thức duy nhất* $q(x), r(x)$ *sao cho* $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ *với* $degr(x) < degg(x)$.

Định lý 1.2.4. *Giả sử K là một trường. Khi đó vành* $K[x]$ *là một vành chính và nó là vành nhân tử hóa.*

Ví dụ 1.2.5. *Cho hai số tự nhiên* n *và* p *với* $n > p \geq 1$. *Tìm điều kiện cần và đủ để* $x^n - a^n$ *chia hết cho* $x^p - a^p$ *với* $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Bài giải: Biểu diễn $n = qp + r$ trong $\mathbb{Z}$ với $0 \leq r < p$. Khi đó có thể viết

$$x^n - a^n = (x^p - a^p)\left(x^{n-p} + a^p x^{n-2p} + ... + a^{(q-1)p} x^{n-qp}\right) + a^{qp}(x^r - a^r).$$

Vậy, điều kiện cần và đủ để $x^n - a^n$ chia hết cho $x^p - a^p$ là n chia hết cho p.

Giả sử trường K là trường con của trường K^*. Với $\alpha \in K^*$ và đa thức $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in K[x]$. Biểu thức $f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha^i \in K^*$ được gọi là *giá trị* của $f(x)$ tại α trong K^*. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì α được gọi là một *nghiệm* của $f(x)$ trong K^*. Giả sử số nguyên $m \geq 1$. Phần tử $\alpha \in K^*$ được gọi là một *nghiệm bội cấp* m của $f(x)$ trong K^* nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-\alpha)^{m+1}$ trong $K^*[x]$. Khi $m = 1$ thì α được gọi là *nghiệm đơn*.

Định lý 1.2.6. *Đa thức* $f(x) \in K[x]$ *bậc* $n \geq 1$. *Khi đó ta có kết quả sau:*

(i) Nếu $\alpha \in K$ *là nghiệm của* $f(x)$ *thì* $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ *với* $g(x) \in K[x]$.

(ii) $f(x)$ *có không quá n nghiệm trong K.*

1.3 Kết thức và biệt thức

Kết thức của hai đa thức được biết đến và ứng dụng mạnh mẽ trong đại số máy tính. Nó đặc trưng cho việc xác định tính chất đặc trưng của hai đa thức một biến trên trường K có nghiệm chung thông qua hệ số của hai đa thức đó mà không đòi hỏi phải tìm nghiệm của chúng. Kết thức là công cụ đáng ngạc nhiên trong việc giải quyết các bài toán về hệ phương trình đại số.

1.3.1. Khái niệm kết thức

Giả sử $u_0, u_1, ..., u_m$ và $v_0, v_1, ..., v_n$ là một họ gồm $m + n + 2$ biến độc lập đại số

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

trên trường K. Xét hai đa thức với biểu diễn dưới đây:

$$f_u(x) = u_o x^m + u_1 x^{m-1} + ... + u_m$$
$$g_v(x) = v_o x^n + v_1 x^{n-1} + ... + v_n$$

thuộc vành đa thức $K[u,v][x]$. Khi đó định thức cấp $m+n$ dưới đây:

$$Res(f_u, g_v) := \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_m & & & \\ & u_0 & u_1 & \cdots & u_{m-1} & u_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & u_0 & u_1 & \cdots & u_{m-1} & u_m \\ v_0 & v_1 & v_2 & \cdots & v_n & & & \\ & v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{vmatrix}$$

gồm n dòng cho các u_i và m dòng cho các v_j được gọi là kết thức hay định thức ***Sylvester*** của hai đa thức $f_u(x)$ và $g_v(x)$. Từ định nghĩa ta suy ra một vài tính chất :

(i) $Res(f_u, g_v)$ là đa thức thuần nhất với hệ số nguyên bậc $m+n$ và là đa thức thuần nhất bậc n của các u_i và là đa thức thuần nhất bậc m của các v_j.

(ii) $Res(f_u, g_v)$ có hạng tử là đơn thức $u_0^n v_n^m$.

(iii) Giả sử $m \geq n$ và $c \in K$. Khi đó $Res(f_u + cg_v, g_v)$=$Res(f_u, g_v)$.

(iv) Với đa thức h_t ta có $Res(f_u, g_v h_t)$ =$Res(f_u, g_v).Res(f_u, h_t)$.

Định lí 1.3.1 *Với hai đa thức $f_u(x)$ và $g_v(x)$ luôn có hai đa thức $h(u,v,x), k(u,v,x) \in K[u,v][x]$ thỏa mãn hệ thức biểu diễn sau:*

$$Res(f_u(x), g_v(x)) = h(u,v,x) f_u(x) + k(u,v,x) g_v(x).$$

Chứng minh: Sử dụng một hệ các đồng nhất thức dưới đây:

$$\begin{cases} x^{n-1} f_u(x) = u_0 x^{m+n-1} + u_1 x^{m+n-2} + ... + u_m x^{n-1} \\ x^{n-2} f_u(x) = u_0 x^{m+n-2} + u_1 x^{m+n-3} + ... + u_m x^{n-2} \\ ... \\ f_u(x) = u_0 x^m + u_1 x^{m-1} + ... + u_m \\ x^{m-1} g_v(x) = v_0 x^{m+n-1} + v_1 x^{m+n-2} + ... + v_n x^{m-1} \\ x^{m-1} g_v(x) = v_0 x^{m+n-2} + v_1 x^{m+n-3} + ... + v_n x^{m-2} \\ ... \\ g_v(x) = v_0 x^n + v_1 x^{n-1} + ... + v_n \end{cases}$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Ta coi $z_i = x^{m+n-1-i}, i = 0, 1, ..., m+n-1$, là các ẩn và định thức của hệ phương trình tuyến tính này là $Res(f_u(x), g_v(x))$. Kí hiệu $\overrightarrow{k_i}, i = 0, 1, ..., m+m-1$, là các vectơ cột của ma trận ngay dưới

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_m & & & \\ & u_0 & u_1 & \ldots & u_{m-1} & u_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & u_0 & u_1 & \cdots & u_{m-1} & u_m \\ v_0 & v_1 & v_2 & \cdots & v_n & & & \\ & v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & v_0 & v_0 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix}$$

Và

$$\overrightarrow{k} = \left(x^{n-1}f\left(x\right), ..., f_u\left(x\right), x^{m-1}g_v\left(x\right), ..., g_v\left(x\right)\right)^T$$

Khi đó ta có hệ thức

$$z_0\overrightarrow{k_0} + z_1\overrightarrow{k_1} + ... + z_{m+n-1}\overrightarrow{k}_{m+n-1} = \overrightarrow{k}$$

Giải hệ này qua định thức và khai triển định thức ta có hệ thức :

$$\text{Res}\left(f_u\left(x\right), g_v\left(x\right)\right) = \det\left(\overrightarrow{k_0}, \overrightarrow{k_1}, ..., \overrightarrow{k}_{m+n-2}, \overrightarrow{k}\right)$$

Do đó $\text{Res}\left(f_u\left(x\right), g_v\left(x\right)\right) = h\left(u, v, x\right) f_u\left(x\right) + k\left(u, v, x\right) g_v\left(x\right)$.

Tiếp theo, thực hiện phép đặc biệt hóa $K\left[u, v\right]\left[x\right] \to K\left[x\right]$ qua việc thế

$$\left(u_0, u_1, ..., u_m\right) \mapsto \left(a_0, a_1, ..., a_m\right), \left(v_0, v_1, ..., v_n\right) \mapsto \left(b_0, b_1, ..., b_n\right)$$

Khi đó có đa thức $f_a(x), g_b(x)$ và kết thức $Res(f_a, g_b)$ sau đây:

$$\begin{aligned} f_a\left(x\right) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m \\ g_b\left(x\right) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n \ , a_0b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$$Res(f_a, g_b) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Định lý 1.3.2. *Hai đa thức $f_a(x)$ và $g_b(x)$ có ước chung khác hằng số khi và chỉ khi có hai đa thức thuộc $K[x]$ biểu diễn dạng*

$$p(x) = c_0x^{m-1} + c_1x^{m-2} + ... + c_{m-1}$$
$$q(x) = d_0x^{n-1} + d_1x^{n-2} + ... + d_{n-1}$$

không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $q(x) f(x) = p(x) g(x)$.

Chứng minh: Giả sử ta có quan hệ $q(x) f(x) = p(x) g(x)$. Khi đó mọi nhân tử của $f(x)$ không thể chỉ là các nhân tử của $p(x)$, vì $degp(x) \leq m - 1 < m$, mọi nhân tử của $g(x)$ không thể chỉ là các nhân tử của $q(x)$, vì $degq(x) \leq n - 1 < n$. Vậy hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ phải có ít nhất một nhân tử chung bất khả quy.
Ngược lại, giả sử $f(x)$ và $g(x)$ có nhân tử chung là $d(x)$ khác hằng số. Đặt $f(x) = d(x)p(x)$ và $g(x) = d(x)q(x)$.
Khi đó $q(x) f(x) = q(x) p(x) d(x) = p(x) g(x)$
với $m - 1 \geq \deg p(x)$, $n - 1 \geq \deg q(x)$.
Chú ý rằng, phương trình $q(x)f(x) = p(x)g(x)$ tương đương với hệ phương trình tuyến tính $m + n$ ẩn c_i, d_j sau đây:

$$\begin{cases} d_0a_0 = c_0b_0 \\ d_0a_1 + d_1a_0 = c_0b_1 + c_1b_0 \\ d_0a_2 + d_1a_1 + d_2a_0 = c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0 \\ ... \\ d_{n-2}a_m + d_{n-1}a_{m-1} = c_{m-2}b_n + c_{m-1}b_{n-1} \\ d_{n-1}a_m = c_{m-1}b_n \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm $m + n$ phương trình với các ẩn $c_0, c_1, ..., c_{m-1}, d_0, d_1, ..., d_{n-1}$. Hệ này có nghiệm không tầm thường khi và chỉ

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

khi định thức cấp $m+n$ sau đây phải bằng 0 :

$$\begin{vmatrix} a_0 & & & & -b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & -b_1 & -b_0 & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & & -b_2 & -b_1 & \ddots & \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & -b_2 & \ddots & -b_0 \\ a_m & \vdots & \ddots & a_1 & -b_n & \vdots & \ddots & -b_1 \\ & a_m & & a_2 & & -b_n & & -b_2 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_m & & & & -b_n \end{vmatrix} = 0$$

Hay ta có

$$Res(f_a, g_b) := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = 0$$

với những vị trí trắng đều bằng 0.

Hệ quả 1.3.3. *Cho đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có hai đa thức $\alpha(x), \beta(x) \in K[x]$ để $\alpha(x) f(x) + \beta(x) g(x) = \mathrm{Res}(f,g)$.*

Chứng minh: Đa thức $f(x)$ và $g(x)$ sẽ có được qua đặc biệt hóa hai đa thức $f_u(x)$ và $g_v(x)$ tương ứng. Từ định lí 1.3.1 suy ra sự tồn tại của hai đa thức $\alpha(x), \beta(x) \in K[x]$ để $\alpha(x) f(x) + \beta(x) g(x) = \mathrm{Res}(f,g)$ qua đặc biệt hóa.

Hệ quả 1.3.4. *Cho đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung trong một mở rộng K^* của K khi và chỉ khi $Res(f,g) = 0$.*

Chứng minh: Giả sử hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung $\xi \in K^*$. Khi đó $f(\xi) = 0$ và $g(\xi) = 0$. Theo hệ quả 1.3.3, nhận được phương trình $\mathrm{Res}(f,g) = \alpha(\xi) f(\xi) + \beta(\xi) g(\xi) = 0$. Ngược lại, giả thiết $Res(f,g) = 0$. Khi đó $f(x)$ và $g(x)$ có nhân tử chung khác hằng số (theo định lí 1.3.2). Vậy $f(x)$ và $g(x)$ có một nghiệm chung trong một mở rộng K^* của K.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Ví dụ 1.3.5. *Xác định điều kiện cần và đủ để* $f(x) = x^2+ax+1$ *và* $g(x) = px+q$ *có nghiệm chung.*

Bài giải: Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung khi và chỉ khi $Res(f,g) = 0$.

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung khi và chỉ khi $0 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ p & q & 0 \\ 0 & p & q \end{vmatrix} = p^2 + q^2 - apq$ hay $p^2 + q^2 = apq$.

Ví dụ 1.3.6. *Xác định điều kiện cần và đủ để* $f(x) = x^2 + ax + b$ *và* $g(x) = x^2 + px + q$ *có nghiệm chung.*

Bài giải: Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung khi và chỉ khi $Res(f,g) = 0$. Vậy $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung khi và chỉ khi

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & p & q \end{vmatrix} = (b-q)^2 + (a-p)(aq-bp).$$

Cho hai đa thức thuần nhất hai biến ta có kết quả tương đương định lý 1.3.1 sau đây:

Định lý 1.3.7. *Cho hai đa thức thuần nhất hai biến* x_o *và* x_1 *là*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x_1^m + a_1x_1^{m-1}x_0 + ... + a_mx_0^m \\ g(x) &= b_0x_1^n + b_1x_1^{n-1}x_0 + ... + b_nx_0^n \qquad a_0b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

có hai đa thức thuần nhất $u(a,b,x)$,$v(a,b,x)$ với hệ số nguyên của các a_i, b_j và x_0, x_1 để

$$Res(f,g)x_0^{m+n-1} = u(a,b,x)f(x) + v(a,b,x)g(x).$$

1.3.2 Biểu diễn kết thức qua nghiệm

Giả sử $u_0, z_1, ..., z_m$ và $v_0, t_1, ..., t_n$ là những biến độc lập đại số trên K. Xét hai đa thức

$$\begin{aligned} f_u(x) &= u_0(x-z_1)...(x-z_m) = u_0x^m + u_1x^{m-1} + ... + u_m \\ g_v(x) &= v_0(x-t_1)...(x-t_n) = v_0x^n + v_1x^{n-1} + ... + v_n \end{aligned}$$

thuộc vành đa thức $K[u,v][x]$.

Vấn đề đặt ra: Biểu diễn kết thức $Res(f_u(x), g_v(x))$ qua các z_i, t_j . Trước tiên

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1.3.8. *Cho đa thức* $p(y_1, ..., y_s) \in K[y]$. *Khi đó ta có đồng nhất thức* $p(y_1, y_2, ..., y_s) - p(z_1, z_2, ..., z_s) = \sum\limits_{i=1}^{s} \gamma_i (y_i - z_i)$, *trong đó* $\gamma_i \in K[y_1, ..., y_s, z_1, ..., z_s]$.

Chứng minh: Coi $p(y_1, y_2, ..., y_s)$ như là một đa thức thuộc vành đa thức $K[y_2, ..., y_s][y_1]$. Khi đó ta có thể biểu diễn

$$p(y_1, y_2, ..., y_s) = q(y_1) = \sum_i c(y)\, y_1^i$$

với $c(y) \in K[y_2, ..., y_s]$ và ta có ngay

$$q(y_1) - q(z_1) = \sum_i c(y) \left(y_1^i - z_1^i\right) = d(y, y_1, z_1)(y_1 - z_1)$$

vận dụng kết quả này ta được

$$\begin{aligned} p(y) - p(z) &= p(y_1, y_2, ..., y_{s-1}, y_s) - p(z_1, z_2, ..., z_{s-1}, z_s) \\ &= p(y_1, y_2, ..., y_{s-1}, y_s) - p(z_1, y_2, ..., y_{s-1}, y_s) \\ &+ p(z_1, y_2, ..., y_{s-1}, y_s) - p(z_1, z_2, ..., y_{s-1}, y_s) \\ &+ ... \\ &+ p(z_1, z_2, ..., z_{s-1}, y_s) - p(z_1, z_2, ..., z_{s-1}, z_s) \end{aligned}$$

Từ kết quả vừa chỉ ra ở trên suy ra $p(y_1, y_2, ..., y_s) - p(z_1, z_2, ..., z_s) = \sum\limits_{i=1}^{s} \gamma_i (y_i - z_i)$, trong đó $\gamma_i \in K[y_1, ..., y_s, x_1, ..., z_s]$.

Vận dung bổ đề này ta sẽ chỉ ra công thức biểu diễn kết thức qua các z_i và t_j

Định lí 1.3.9. *Giả sử* $f_u(x) = u_0 \prod\limits_{i=1}^{m} (x - z_i) = u_0 x^m + u_1 x^{m-1} + ... + u_m$ *và* $g_v(x) = v_0 \prod\limits_{j=1}^{n} (x - t_j) = v_0 x^n + v_1 x^{n-1} + ... + v_n$. *Khi đó ta có đồng nhất thức* $\mathrm{Res}(f_u, g_v) = u_0^n v_0^m \prod\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1}^{n} (z_i - t_j)$.

Chứng minh: Theo tính chất của kết thức, $Res(f_u, g_v)$ là đa thức thuần nhất cậc n của các u_i và bậc m của các v_j. Chú ý rằng, các u_r là những đa thức đối xứng cơ bản của các z_i nhân với u_0 và các v_s là những đa thức đối xứng cơ bản của các t_j nhân với v_0. Do vậy có thể viết $\mathrm{Res}(f_u, g_v) = u_0^n v_0^m h(z, t)$, trong đó $h(z, t) \in \mathbb{Z}[z_1, ..., z_m, t_1, ..., t_n]$. Xét đa thức $h(z, t)$. Khi cho $z_i = t_j$ thì hai đa thức f_u và g_v có nghiệm chung. Theo hệ quả 1.3.4 khi đó ta có $Res(f_u, g_v) = 0$ hay

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$h(z,t)=0$. Vậy $h(z,t)$ chia hết cho z_i-t_j theo bổ đề 1.3.8. Với mỗi cặp (i,j) ta có z_i-t_j là bất khả quy và ứng với hai cặp (i,j) khác nhau có z_i-t_j khác nhau. Như vậy $Res(f_u,g_v)$ chia hết cho $u_0^n v_0^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(z_i-t_j)$ trong $\mathbb{Z}[z_1,...,z_m,t_1,...,t_n]$. Viết $S=u_0^n v_0^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(z_i-t_j)=u_0^n\prod_{i=1}^{m}g_v(z_i)=(-1)^{mn}v_0^m\prod_{j=1}^{n}f_u(t_j)$. Ta suy ra S là đa thức thuần nhất bậc m của các v_j và bậc n của các u_i. Từ đây suy ra S và $Res(f_u,g_v)$ sai khác nhau chỉ một hằng số thuộc $\mathbb{Z}$. Vì hệ tử của $u_0^n v_0^m$ ở S và $Res(f_u,g_v)$ đều bằng 1 nên $\mathrm{Res}(f_u,g_v)=u_0^n v_0^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(z_i-t_j)$

Hệ quả 1.3.10. *Giả sử hai đa thức $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m$ và $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n$ thuộc $K[x]$ với $a_0b_0\neq 0$ và có các nghiệm $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_m$ và $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ trong K . Khi đó ta có đồng nhất thức $\mathrm{Res}(f,g)=a_0^n b_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j)$.*

Chứng minh: Thực hiện phép đặc biệt hóa $\mathbb{Z}[u_0,v_0,z,t]\to K$ sau đây:
$u_0\mapsto a_0, v_0\mapsto b_0$ và $(z_i)\mapsto(\alpha_i),(t_j)\mapsto(\beta_j)$.
Ta suy ra đồng nhất thức $\mathrm{Res}(f,g)=a_0^n b_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j)$.

Hệ quả 1.3.11. *Giả sử α,β là hai số đại số trên $\mathbb{Q}$ với đa thức tối tiểu tương ứng là $f(x)$ và $g(x)$ thuộc $\mathbb{Q}[x]$. Đặt $\gamma=\alpha+\beta,\delta=\alpha.\beta$. Khi đó γ,δ lần lượt là nghiệm của các đa thức $p(z)=Res_x(f(x),g(z-x))$ và $q(z)=Res_x(f(x),g(z/x)x^{degg(x)})$, tương ứng. Từ đó suy ra các đa thức tối tiểu của γ và δ là ước của $p(z)$ và $q(z)$, tương ứng.*

Chứng minh: Giả sử $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m$ và $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n$ thuộc $\mathbb{Q}[x]$ với $a_0b_0\neq 0$ và có các nghiệm $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ và $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ tương ứng. Vì $g(z-x)=b_0(z-x)^n+b_1(z-x)^{n-1}+...+b_n$ nên $g(z-x)$ có nghiệm là $z-\beta_j$ với $j=1,2,...,n$. Theo hệ quả 1.3.10 ta nhận được hệ thức sau đây bởi biểu diễn $p(z)$:

$$p(z)=\mathrm{Res}_x(f(x),g(z-x))=a_0^n b_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i+\beta_j-z)$$

Với cặp (i,j) để $\alpha=\alpha_i;\beta=\beta_j$ ta có $\gamma=\alpha_i+\beta_j$. Khi đó $p(\gamma)=0$. Vì $g(z/x)x^{\deg g(x)}=b_0z^n+b_1z^{n-1}x+...+b_nx^n$ nên $g(z/x)x^{\deg g(x)}$ có nghiệm là z/β_j

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

với $j = 1, 2, ..., n$. Ta nhận được hệ thức sau đây biểu diễn $q(z)$:

$$q\left(z\right) = \mathrm{Res}_x\left(f\left(x\right), g\left(z/x\right) x^{\deg g(x)}\right) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i\beta_j - z}{\beta_j}\right)$$

Với cặp (i, j) để $\alpha = \alpha_i; \beta = \beta_j$ ta có $\delta = \alpha_i\beta_j$. Khi đó $q\left(\delta\right) = 0$.

1.3.3. Phép khử ẩn

Kết thức được áp dụng nhiều trong Đại số, Hình học, Số học. Chúng ta xét một vài ứng dụng sau đây.

Giả sử các đa thức $f_1, ..., f_s \in K[x]$ với bậc đề không nhỏ hơn 1. Chúng ta xác định điều kiện để các đa thức này có nghiệm chung. Để giải quyết vấn đề đã nêu ra, lấy $2s$ biến $u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_s$ độc lập đại số trên K và xét vành $K^* = K[u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_s]$. Trong $K[x]$ xét hai đa thức

$$f\left(x\right) = u_1 f_1\left(x\right) + ... + u_s f_s\left(x\right)$$
$$g\left(x\right) = v_1 f_1\left(x\right) + ... + v_s f_s\left(x\right)$$

các đa thức $f_1, ..., f_s$ có nghiệm chung $x = \alpha$ thuộc K hay thuộc trường mở rộng của K thì $x = \alpha$ cũng là nghiệm chung của f và g.

Ngược lại, do $u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_s$ độc lập đại số trên K nên nghiệm chung của f và g cũng là nghiệm chung của các f_i. Do đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 1.3.12. *Các đa thức $f_1, ..., f_s \in K[x]$ với bậc đều không nhỏ hơn 1 có nghiệm chung khi và chỉ khi $Res(f, g) = 0$.*

Ví dụ 1.3.13.. *Xác định điều kiện cần và đủ để $f_1(x) = x^2 + ax + 1$ và $f_2(x) = x^2 + bx + 1$ có nghiệm chung.*

Bài giải: *Hai đa thức $f(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x)$ và $g(x) = v_1 f_1(x) + v_2 f_2(x)$ có nghiệm chung khi và chỉ khi $Res(f, g) = 0$. Vậy $f_1(x)$ và $f_2(x)$ có nghiệm chung khi và chỉ khi*

$$\begin{vmatrix} u_1 + u_2 & u_1 a + u_2 b & u_1 + u_2 & 0 \\ 0 & u_1 + u_2 & u_1 a + u_2 b & u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 & v_1 a + v_2 b & v_1 + v_2 & 0 \\ 0 & v_1 + v_2 & v_1 a + v_2 b & v_1 + v_2 \end{vmatrix} = 0$$

Hay $(a - b)^2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = 0$. Do đó $a = b$.

Ví dụ 1.3.14. *Cho hai đa thức $p(x, z)$ của hai biến x, z và đa thức $q(y, z)$ của*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

hai biến y, z. Khi đó hệ phương trình $\begin{cases} p(x,z)=0 \\ q(y,z)=0 \end{cases}$ được đưa về giải phương trình $r(x,y)=0$.

Bài giải: Thật vậy, coi hai đa thức $P(z)=p(x,z)$ và $Q(z)=q(y,z)$ như là hai đa thức của một biến z, còn x, y coi như những hằng số. (x,y,z) thỏa mãn hệ khi và chỉ khi $P(z)$ và $Q(z)$ có nghiệm chung. Do đó $r(x,y)=Res(P,Q)=0$.

Mệnh đề 1.3.15. *Hệ phương trình* (A) $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \\ f,g\in\mathbb{R}[x,y] \end{cases}$ *được giải qua phương trình đa thức một ẩn.*

Chứng minh: Ta coi $F(x,)=f(x,y)$ và $G(x)=g(x,y)$ như là đa thức của x, còn y coi như là hằng số. Giả sử (x_0,y_0) là nghiệm của hệ. Khi đó $F(x)$ và $G(x)$ có nghiệm chung x_0 tương ứng với y_0. Điều này tương đương với $H(y)=Res(F,G)=0$. Khi đó x_0 là nghiệm chung của hai đa thức $f(x,y_0)$ và $g(x,y_0)$. Như vậy ta có phương trình kết thức $Res(F,G)=0$ khi $y=y_0$. Từ đây suy ra: việc giải hệ (A) được đưa về giải phương trình đa thức $Res(F,G)=0$ theo biến y. Với mỗi nghiệm y_0, ta giải hệ $\begin{cases} f(x,y_0)=0 \\ g(x,y_0)=0 \end{cases}$ và như thế giải xong hệ (A).

Ví dụ 1.3.16. *Xác định giá trị của a để hai phương trình* $x^3-ax+2=0$ *và* $x^2+ax+2=0$ *có nghiệm chung trong* $\mathbb{C}$.

Chứng minh: Hai phương trình đã cho có nghiệm chung khi và chỉ khi kết thức tương ứng của chúng bằng 0 hay

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 2 \\ 1 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Giải ra được $a=3$ và $a=-1$. Khi $a=3$ hai phương trình $x^2-3x+2=0$ và $x^2+3x+2=0$ có nghiệm chung $x=-2$. Khi $a=-1$ hai phương trình $x^3+x+2=0$ và phương trình $x^2-x+2=0$ có nghiệm chung $x=\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

Ví dụ 1.3.17. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} xy-1=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases}$ *trong* $\mathbb{R}$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Chứng minh: Giải phương trình kết thức của hệ phương trình đã cho

$$\begin{vmatrix} y & -1 & 0 \\ 0 & y & -1 \\ 1 & 0 & y^2-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y^4 - 4y^2 + 1 = 0$$

Khi đó $y = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, x = \dfrac{1}{y}$.

Ví dụ 1.3.18. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ x^2y + xy^2 - 6 = 0 \end{cases}$ trong $\mathbb{R}$.

Chứng minh: Giải phương trình kết thức của hệ đã cho

$$\begin{vmatrix} 1 & -y & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -y & y^2-3 \\ y & y^2 & -6 & 0 \\ 0 & y & y^2 & -6 \end{vmatrix} = 3y^6 - 12y^4 + 9y^2 - 36y + 36 = 0$$

khi đó $y = 1$ hoăc $y = 2$ hoặc $y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 6 = 0$ hay $\left(y^2 + \dfrac{3}{2}y\right)^2 + 3\left(\dfrac{1}{2}y + 1\right)^2 + 3 = 0$ không có nghiệm thực.

Khi $y = 1$ có hệ $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$ vậy $x = 2, y = 1$

Khi $y = 2$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 4x - 6 = 0 \end{cases}$ Vậy $x = 1, y = 2$

Ví dụ 1.3.19. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0 \\ x^2 + x - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ trong $\mathbb{R}$.

Chứng minh: Giải phương trình kết thức của hệ phương trình đã cho

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -y & -y^3+y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y & -y^3+y \\ 1 & 1 & -y^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -y^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -y^2-1 \end{vmatrix} = 5y^5 - 7y^4 + 6y^3 - 2y^2 - y - 1 = 0$$

Khi đó y=1 hoặc $5y^4 - 2y^3 + 4y^2 + 2y + 1 = 0$ hay $(y^2 - y)^2 + (y+1)^2 + 4y^4 + 2y^2 = 0$ không có nghiệm thực.

Khi $y = 1$ có hệ $\begin{cases} x^3 - x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$ Vậy $x = 1, y = 1$.

1.3.4. Biến đổi phương trình $y = f(x)$

Giả sử phương trình đa thức $f(x) = 0$ có n nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ và phân thức

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

hữu tỷ $y = g(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, trong đó $q(x_k) \neq 0$ với $k = 1, 2, ..., n$ và $(p(x), q(x)) = 1$. Xác định phương trình đa thức $F(y)$ nhận $y_1, ..., y_n$ làm nghiệm, trong đó $y_k = \dfrac{p(x_k)}{q(x_k)}$ với $k = 1, 2, ..., n$

Mệnh đề 1.3.20. *Tồn tại đa thức $h(x)$ bậc không lớn hơn $n-1$ thỏa mãn $g(x_k) = h(x_k)$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$.*

Chứng minh: Do bởi hai đa thức $f(x)$ và $q(x)$ không có nghiệm chung nên $(f(x), q(x)) = 1$. Vậy có hai đa thức $u(x), v(x)$ để $u(x)f(x) + v(x)q(x) = 1$. Từ đây suy ra $v(x_k)q(x_k) = 1$ hay $\dfrac{1}{q(x_k)} = v(x_k)$ với mọi $k = 1, 2, .., n$. Như vậy $y_k = g(x_k) = p(x_k)v(x_k)$ với $k = 1, 2, .., n$. Biểu diễn $p(x)v(x) = t(x)f(x) + h(x)$ với $degh(x) < degf(x)$. Khi đó $g(x_k) = h(x_k)$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$.

Mệnh đề 1.3.21. *Đa thức $F(y)$ có được qua việc khử ẩn x từ hệ phương trình*

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ p(x) - yq(x) = 0 \end{cases}$$

Phép biến đổi thường được sử dụng là $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Khử x qua việc thay $x = \dfrac{dy-b}{a-cy}$ vào $f(x)$ và ta nhận được $h(y) = (a-cy)^2 f\left(\dfrac{dy-b}{a-cy}\right)$.

Chú ý 1.3.22. *Biến đổi phương trình để từ phương trình đã cho xây dựng phương trình mới và các hệ thức mới. Giả sử đa thức $f(x)$ có n nghiệm $x_1, ..., x_n$ và phân thức hữu tỷ $y = g(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, trong đó $p(x_k) \neq 0$ với mọi $k = 1, ..., n$ và $(p(x), q(x)) = 1$. Khi có đa thức mới $F(x)$ nhận $y_k = \dfrac{p(x_k)}{q(x_k)}$ là nghiệm với $k = 1, .., n$ ta sẽ tính được ngay hai biểu thức*

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(x_k)}{q(x_k)}; B = \prod_{k=1}^{n} \frac{p(x_k)}{q(x_k)}$$

Mệnh đề 1.3.23. *Giả sử x_1 là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Khi đó mỗi hàm hữu tỷ của x_1 đều biểu diễn thành dạng $\dfrac{Ax_1 + B}{Cx_1 + D}$*

Chứng minh: Vì $x_1^3 = -ax_1^2 - bx_1 - c$ nên mọi phân thức hữu tỷ của x_1 đều đưa về dạng $\dfrac{a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1}{a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2}$. Từ đồng nhất thức cho dưới đây

$$mx_1^2 + nx_1 + p = \frac{\left(pm - bm^2 + amn - n^2\right)x_1 + \left(amp - np - cm^2\right)}{mx_1 + ma - n}$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

ta có thể đưa về hàm hữu tỷ của x_1 về dạng $\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$.

Ví dụ 1.3.24. *Giả sử* $x^3+ax^2+bx+c=0$ *có ba nghiệm* x_1, x_2, x_3. *Xác định phương trình đa thức bậc ba nhận* $y_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $y_2 = x_2^2 - x_3x_1$, $y_3 = x_3^2 - x_1x_2$ *là nghiệm.*

Bài giải: Thay $y_1 = x_1^2 + \dfrac{c}{x_1}, y_2 = x_2^2 + \dfrac{c}{x_2}, y_3 = x_3^2 + \dfrac{c}{x_3}$ ta sẽ khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 + \mathrm{ax}^2 + bx + c = 0 \\ x^3 - yx + c = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\dfrac{y+b}{a} \\ x^3 - yx + c = 0 \end{cases}$ Từ hệ này suy ra phương trình đa thức $F(y) = y^3 - (a^2-3b)y^2 + (3b^2-a^2)y + b^3 - a^3c = 0$ nhận $y_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $y_2 = x_2^2 - x_3x_1$, $y_3 = x_3^2 - x_1x_2$ là nghiệm.

Ví dụ 1.3.25. *Giả sử* $x^3+ax^2+bx+c=0$ *có ba nghiệm* x_1, x_2, x_3. *Xác định phương trình đa thức bậc ba nhận* $y_1 = -x_1+x_2+x_3, y_2 = -x_2+x_3+x_1, y_3 = -x_3+x_1+x_2$ *là nghiệm.*

Bài giải: Thay $y_1 = -2x_1 - a, y_2 = -2x_2 - a, y_3 = -2x_3 - a$ ta sẽ khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 + \mathrm{ax}^2 + bx + c = 0 \\ 2x + y + a = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x^3 + \mathrm{ax}^2 + bx + c = 0 \\ x = -\dfrac{y+a}{2} \end{cases}$ Từ hệ này ta có phương trình đa thức $y^3 + ay^2 + (4b-a^2)y - a^3 + 4ab - 8c = 0$ nhận $y_1 = -x_1+x_2+x_3, y_2 = -x_2+x_3+x_1, y_3 = -x_3+x_1+x_2$ là nghiệm.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Chương 2

ĐƯỜNG CONG PHẲNG

2.1 Khái niệm đường cong phẳng

Xét một đường cong phẳng quen biết trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ cho bởi phương trình sau: $(l): y^2 = x^2 + x^3$. Đây là đường cong đi qua gốc tọa độ $O(0,0)$. Để mô tả các điểm khác nữa trên đường cong, ta thực hiện phép biến đổi bằng cách đặt $y = tx$ và thay nó vào phương trình đường cong. Ta có $t^2x^2 = x^2 + x^3$. Khi $x = 0$ ta có điểm $O(0,0)$. Khi $x \neq 0$ ta có điểm $(x = t^2 - 1, y = t(t^2 - 1))$. Điểm này sẽ trở thành gốc tọa độ khi $t = 1$ hoặc $t = -1$.Vậy mọi điểm trên đường cong (l) có tọa độ $(t^2 - 1, t(t^2 - 1)), t \in \mathbb{R}$. Một điều làm ta phải chú ý là điểm O(0,0) sẽ tương ứng với hai giá trị khác nhau của t còn những điểm khác chỉ tương ứng với một giá trị của t.

Định Nghĩa 2.1.1

Cho đa thức $f \in \mathbb{R}[x,y] \setminus \mathbb{R}$. Tập $V(f)$ tất cả những điểm $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn phương trình $f(x,y) = 0$ được gọi là một *đường cong phẳng*.
Vì tất cả những đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ với $f = \lambda g, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ hoặc $f^r, r \in \mathbb{N}^*$, xác định cùng một đường cong phẳng nên ta chỉ xét đa thức $f = f_1...f_s$ với các đa thức bất khả quy phân biệt f_i thuộc $\mathbb{R}[x,y]$. Nếu đa thức f là khả quy, chẳng hạn $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$ và cả hai đa thức này có bậc lớn hơn 0, thì $V(f) = V(g) \cup V(h)$ với $V(g)$ được xác định bởi phương trình $g(x,y) = 0$, còn $V(h)$ được xác định bởi phương trình $h(x,y) = 0$ và $V(g) \neq V(h)$.

Mệnh đề 2.1.2. *Cho hai đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ không có nhân tử chung. Khi*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

đó $V(f,g) = V(f) \cap V(g)$ là một tập hữu hạn điểm.

Chứng minh: Vì f và g không có nhân tử chung trong $\mathbb{R}[x,y] = \mathbb{R}[x][y]$ nên chúng cũng không có nhân tử chung trong $\mathbb{R}(x)[y]$. Khi đó ta có $p, q \in \mathbb{R}(x)[y]$ để $pf + qg = 1$. Chọn đa thức $d \in \mathbb{R}[x]/0$ để $F = dp, G = dq \in \mathbb{R}[x,y]$ có

$$Ff + Gg = d.$$

Nếu $(a,b) \in V(f,g)$ thì $d(a) = 0$. Vì $d(x) = 0$ chỉ có một số hữu hạn nghiệm nên tập hợp tất cả các hoành độ của tất cả các điểm thuộc $V(f,g)$ là hữu hạn. Tương tự, cho tập hợp tất cả các tung độ các điểm thuộc $V(f,g)$ cũng là hữu hạn. Tóm lại tập $V(f,g)$ là một tập hữu hạn điểm.

2.2 Tham số hóa đường cong phẳng

Định nghĩa 2.2.1.

Đường cong phẳng $V(f)$ được gọi là *đường cong phẳng hữu tỷ* nếu có hai hàm hữu tỷ $\varphi(t), \psi(t) \in \mathbb{R}(t)$ của biến t và cả hai không đồng thời thuộc $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.

Đường cong phẳng hữu tỷ có quan hệ tới việc tìm các nghiệm $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ của phương trình $f(x,y) = 0$ hoặc tìm các điểm thuộc đường cong phẳng với tọa độ là những số hữu tỷ.

Khi biểu diễn đường cong phẳng $V(f)$ qua $x = \varphi(t), y = \psi(t) \in \mathbb{R}(t)$ ta nói rằng đã *tham số hóa* được $V(f)$. Việc tham số hóa các đường cong phẳng qua các hàm hữu tỷ như sau: Chọn điểm $P \in V$ và viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua P sao cho (d) cắt V tại đúng điểm thứ hai khác P.

Cho $(l) : f(x,y) = 0$ với $f(x,y)$ là đa thức bất khả quy. Khi có hai hàm hữu tỷ $\varphi(t), \psi(t)$ của biến t và cả hai không đồng thời thuộc $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$ thì điểm $(\varphi(t), \psi(t))$ được gọi là *không điểm tổng quát* của (l). Ta thêm ∞ vào $\mathbb{R}$ và coi nó như một phần tử. Ta định nghĩa $\varphi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t), \psi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \psi(t)$. Khi đó tọa độ các điểm của (l) với tọa độ thuộc $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sẽ có dạng $(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Việc tìm không điểm tổng quát của (l) gắn liền với vấn đề giải

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

phương trình $f(x,y)=0$ trên $\mathbb{Q}$ hay phương trình $z^d f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ trên $\mathbb{Z}$, ở đó $d=degf(x,y)$.

Định nghĩa 2.2.2 *Cho đường cong phẳng bất khả quy* (l)*. Những điểm thuộc* (l) *với tọa độ thuộc* $\mathbb{Q}$ *được gọi là những điểm hữu tỷ của* (l).

Mệnh đề 2.2.3 *Đường tròn* $(C): x^2+y^2=1$ *là đường phẳng hữu tỷ được tham số hóa qua* $x(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ *với quy ước* $x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t}{1+t^2}=0;\ \ y(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-1.$

Chứng minh: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(0;1)\in(C)$ với hệ số góc $-t$ có phương trình $(d): y=-tx+1$ cắt (C) tại điểm $(0;1)$ và $A_t\left(\dfrac{2t}{1+t^2};\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$. Điểm $\left(\dfrac{2t}{1+t^2};\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ chạy qua tất cả các điểm thuộc (C) , khác điểm $(0;1)$.
Với quy ước $x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t}{1+t^2}=0;\ \ y(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-1$ thì A_t chạy qua cả điểm $(0;1)$.

Mệnh để 2.2.4 *Đường Elip* $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *là đường cong phẳng hữu tỷ được tham số hóa qua* $x(t)=\dfrac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2};\ \ y(t)=\dfrac{b^3-a^2bt^2}{b^2+a^2t^2}$ *với quy ước* $x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}=0;\quad y(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{b^3-a^2bt^2}{b^2+a^2t^2}=-b.$

Chứng minh: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(0,b)\in(E)$ với hệ số góc $-t$ có phương trình $(d): y=-tx+b$. (d) cắt (E) tại điểm $(0;b)$
và điểm $A_t\left(\dfrac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2};\dfrac{b^3-a^2bt^2}{b^2+a^2t^2}\right)$. Điểm $A_t\left(\dfrac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2};\dfrac{b^3-a^2bt^2}{b^2+a^2t^2}\right)$ chạy qua tất cả các điểm thuộc (E), khác điểm (0;-b). Với quy ước

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}\frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}=0;\quad y(\infty)=\lim_{t\to\infty}\frac{b^3-a^2bt^2}{b^2+a^2t^2}=-b$$

thì A_t cũng chạy qua cả điểm $(0;-b)$.

Chú ý 2.2.5 *Đường tròn* $(C): x^2+y^2=1$ *còn được tham số hóa qua* $x(t)=cost, y(t)=sint$ *và Elip* $(E)\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *còn được tham số hóa qua* $x(t)=acost; y=bsint.$

Mệnh đề 2.2.6 *Đường Hypecbol* $(H): \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *là đường cong phẳng hữu*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

tỷ được tham số hóa qua $x(t) = \dfrac{a + ab^2t^2}{1 - b^2t^2}; y(t) = \dfrac{2b^2t}{1 - b^2t^2}$ *Với quy ước*

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} \frac{a + ab^2t^2}{1 - b^2t^2} = -a; y(\infty) = \lim_{t\to\infty} \frac{2b^2t}{1 - b^2t^2} = -a.$$

Chứng minh: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(a, 0) \in (H)$ với hệ số góc at có phương trình $(d) : x = a(ty + 1)$. (d) cắt (H) tại điểm $(a; 0)$
Và điểm $A_t \left(\dfrac{a + ab^2t^2}{1 - b^2t^2}; \dfrac{2b^2t}{1 - b^2t^2}\right)$. Điểm $A_t \left(\dfrac{a + ab^2t^2}{1 - b^2t^2}; \dfrac{2b^2t}{1 - b^2t^2}\right)$ chạy qua tất cả các điểm thuộc (H) khác điểm $(-a, 0)$. Với quy ước $x(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a + ab^2t^2}{1 - b^2t^2} = -a; y(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2b^2t}{1 - b^2t^2} = -a$ thì A_t chạy qua cả điểm $(-a, 0)$.
Nghiệm tổng quát của $x^2 - dy^2 = 1$ là $x = \dfrac{d + t^2}{d - t^2}, y = \dfrac{2t}{d - t^2}$. Với $t = \dfrac{m}{n}$ có $x = \dfrac{dn^2 + m^2}{dn^2 - m^2}, y = \dfrac{2mn}{dn^2 - m^2}$, ở đó $m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1$.
Hypecbol (H) có hai tiêu điểm $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ với $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tỷ số $e = \dfrac{c}{a} > 1$ được gọi là tâm sai và hai đường thẳng $(d_1) : x - \dfrac{a^2}{c} = 0, (d_2) : x = x + \dfrac{a^2}{c} = 0$ được gọi là hai đường chuẩn của (H). Kí hiệu $d(A_t, d)$ là khoảng cách từ điểm A_t tới đường thẳng d.

Hệ quả 2.2.7. *Ta luôn có* $\dfrac{A_tF_i}{d(A_td_i)} = e$ *và* $|A_tF_1 - A_tF_2| = 2c$.

Chứng minh: Ta có $A_tF_1^2\left(1 - b^2t^2\right)^2 = \left[a\left(1 + b^2t^2\right) - c\left(1 - b^2t^2\right)\right]^2 + 4b^4t^2$
Vậy $A_tF_1^2\left(1 - b^2t^2\right)^2 = a^2 + a^2b^4t^4 + c^2 + c^2b^4t^4 - 2ac\left(1 - b^4t^4\right) + 2b^4t^2$.
Thay $2b^4t^2 = 2b^2\left(c^2 - a^2\right)t^2$ được

$$A_tF_1^2\left(1 - b^2t^2\right)^2 = \left[c\left(1 + b^2t^2\right) - a\left(1 - b^2t^2\right)\right]^2$$

và tỷ số $\dfrac{A_tF_1}{d(A_td_1)} = e$. Tương tự, ta cũng có $\dfrac{A_tF_2}{d(A_td_2)} = e$.
Ta có $A_tF_1 = ed(A_t, d_1)$ và $A_tF_2 = ed(A_t, d_2)$. Từ đây nhận được hiệu $|A_tF_1 - A_tF_2| = e.2\dfrac{a^2}{c} = 2a$.

Ví dụ 2.2.8. *Trong mặt phẳng, đường cong phẳng Lemniscat với phương trình*

$$(L) : \left(x^2 + y^2\right)^2 = b^2\left(x^2 - y^2\right), b \neq 0$$

là một đường cong phẳng hữu tỷ.

Bài giải: Đặt $x^2 + y^2 = t(x - y)$ và thay vào phương trình, ta có $t^2(x - y)^2 =$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$b^2\left(x^2-y^2\right)$.

Nếu $x=y$ thì $x^2+y^2=0$. Từ $x=y$ và $x^2+y^2=0$ ta suy ra $x=y=0$. Ta có $O(0.0)\in(L)$.

Nếu $x\neq y$, ta có $t^2(x-y)=b^2(x+y)$. Ta có $y=\dfrac{t^2-b^2}{t^2+b^2}x$ khi $t^2+b^2\neq 0$.

Vậy $x^2+\left(\dfrac{t^2-b^2}{t^2+b^2}\right)^2x^2=xt\left(1-\dfrac{t^2-b^2}{t^2+b^2}\right)$.

Khi $x\neq 0$, ta có $x=\dfrac{b^2t\left(t^2+b^2\right)}{t^4+b^4}, y=\dfrac{b^2t\left(t^2-b^2\right)}{t^4+b^4}$.

Chú ý rằng, khi cho $t=0$ ta nhận được điểm $O(0,0)$. Tóm lại (L) là một đường cong phẳng hữu tỷ.

Ví dụ 2.2.9. *Chứng minh rằng đường cong phẳng*

$$(l):\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2y}{c^2}$$

với $abc\neq 0$ là đường cong phẳng hữu tỷ.

Bài giải:

Nếu $x=0$ thì $y=0$. Khi $x\neq 0$, đặt $y=\dfrac{b}{a}tx$. Khi đó $x=\dfrac{a^3bt}{c^2{(t^2+1)}^2}$ và $y=\dfrac{a^2b^2t^2}{c^2{(t^2+1)}^2}$. Vậy (l) là một đường cong phẳng hữu tỷ.

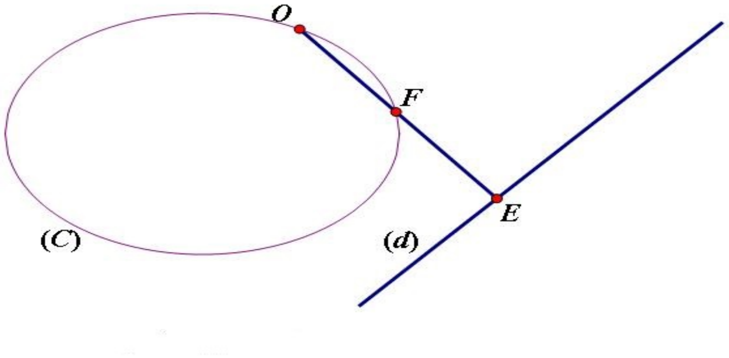
2.3 Điểm hữu tỷ trên đường cônic

2.3.1. Phương pháp tổng quát để tìm điểm hữu tỷ trên đường conic

Cho đường conic (C) có phương trình $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ vấn đề đặt ra là có tồn tại điểm hữu tỷ trên đường conic không và nếu có thì tìm bằng cách nào? Giả sử tồn tại điểm hữu tỷ O trên đường cônic này, ta sẽ thực hiện phép chiếu các điểm trên đường cônic là một đường thẳng. Ta đã biết tập hợp các điểm hữu tỷ trên đường thẳng (d) vì vậy ta lấy điểm hữu tỷ E bất kì trên đường thẳng (d), đường thẳng OE cắt cônic (C) tại F. Ta có F là một điểm hữu tỷ trên (C). Thật vậy đường thẳng OE đi qua hai điểm hữu tỷ nên nó là đường thẳng hữu tỷ.

Ta sẽ rút một ẩn từ phương trình của đường thẳng này thế vào phương trình

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/



Hình 2.1:
Phép chiếu lên đường thẳng.

của đường conic ta được phương trình bậc hai với hệ số hữu tỷ. Vì vậy nghiệm thứ hai sẽ là nghiệm hữu tỷ (nghiệm kép được tính hai lần). Vì vậy F sẽ là điểm hữu tỷ. Ngược lại, khi cho một điểm hữu tỷ F trên (C). Nếu OF song song với (d) thì không tồn tại giao điểm. Nếu OF không song song với (d) thì đường thẳng OF cắt (d) tại điểm E và E là một điểm hữu tỷ trên (d). Như vậy trừ đi điểm F mà OF song song với (d) thì ta có sự tương ứng $1-1$ giữa các điểm hữu tỷ trên đường cônic (C) và trên đường thẳng (d).

Ví dụ 2.3.1: *Tìm các điểm hữu tỷ trên đường tròn* $(C): x^2+y^2=2$.

Bài giải: Ta dễ dàng tìm được một điểm hữu tỷ trên (C) là A(1,1). Ta sẽ chọn đường thẳng (d) là trục Ox có phương trình $y=0$. Lấy một điểm hữu tỷ bất kì trên (d) là B(t,0), với $t \in \mathbb{Q}$.

Phương trình đường thẳng AB :

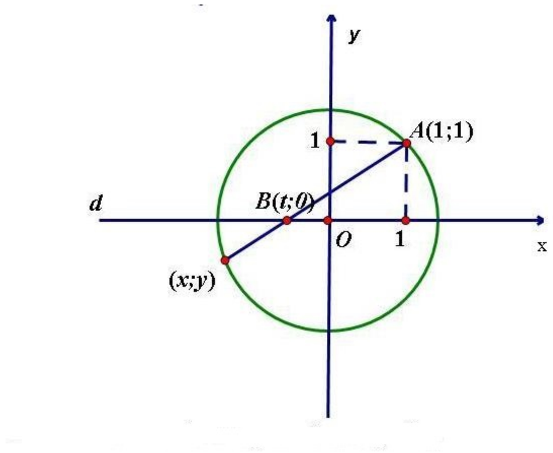
$$x=(t-1)(1-y)+1.$$

Thay x vào phương trình của đường (C) ta được

$$((1-y)(t-1)+1)^2+y^2=2$$

$$\Leftrightarrow (1-y)^2(t-1)^2+2\left(1-y\right)\left(t-1\right)+y^2-1=0$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/



Hình 2.2:
Phép chiếu đường tròn lên đường thẳng.

Nếu $y = 1$, suy ra $x = \pm 1$ ta có ngay hai điểm hữu tỷ trên (C) là $A(1,1), C(-1,1)$
Nếu $y \neq 1$ khi đó ta có

$$(1-y)^2(t-1)^2 + 2(1-y)(t-1) + y^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-y)(t-1)^2 + 2(t-1) - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-t^2+2}{-t^2+2t-2}$$

Suy ra $x = \dfrac{t^2-4t+2}{-t^2+2t-2}$ Thay $t = 2$ vào công thức biểu diễn x, y ở trên ta được điểm $A(1,1)$. Bằng cách loại điểm $C(-1,1)$, ta có sự tương ứng $1-1$ giữa các điểm hữu tỷ trên đường thẳng và đường tròn như sau

$$(t,0) \leftrightarrow \left(\frac{t^2-4t+2}{-t^2+2t-2}, \frac{-t^2+2}{-t^2+2t-2}\right)$$

Chú ý: *Đối với đường cônic có dạng phương trình tổng quát ta sẽ thực hiện phép biến đổi để đưa nó về phương trình đơn giản hơn trước khi tìm các điểm hữu tỷ của nó.*

Ví dụ 2.3.2. *Cho đường cônic (C) có phương trình* $x^2+2xy+2y^2+2y-7=0$.

Bài giải: Ta sẽ thực hiện phép biến đổi để đưa nó về dạng đơn giản hơn như sau

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y - 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 2$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Đặt $\begin{cases} X = \dfrac{x+y}{2} \\ Y = \dfrac{y+1}{2} \end{cases}$ Khi đó phương trình trở thành $X^2 + Y^2 = 2$ Như vậy bằng việc tìm được các điểm hữu tỷ trên đường conic có phương trình $X^2 + Y^2 = 2$, ta sẽ tìm được các điểm hữu tỷ từ phương trình ban đầu.

Ta nhận thấy đường conic tồn tại một điểm hữu tỷ thì có vô số điểm hữu tỷ. Vậy vấn đề đặt ra là khi nào đường conic tồn tại điểm hữu tỷ.

2.3.2. Điều kiện để đường conic tồn tại điểm hữu tỷ

Giả sử m, n là những số nguyên dương, ta nói rằng m là một *thặng dư bậc hai* mudulo n và ta viết mRn nếu có một số x nguyên để $x^2 \equiv m \pmod{n}$.

Định lí Legendre. *Với các số nguyên a, b, c, phương trình $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ có nghiệm nguyên (x, y, z) khác $(0, 0, 0)$ khi và chỉ khi $(-ab)Rc, (-bc)Ra, (-ca)Rb$.*

Từ định lí này ta suy ra kết quả dưới đây:

Phương trình $ax^2 + by^2 = cz^2$, với a, b, c nguyên, có nghiệm nguyên (x, y, z) khác $(0, 0, 0)$ thì phương trình đồng dư $ax^2 + by^2 \equiv cz^2 \pmod{m}$ cũng có nghiệm nguyên (x, y, z) với x, y, z nguyên tố với m.

Ví dụ 2.3.3: *Kiểm tra sự tồn tại của điểm hữu tỷ trên đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 6$.*

Bài giải: Ta xét phương trình đồng dư $x^2 + y^2 \equiv 6z^2$ trong mudulo 3. Ta sẽ chỉ ra phương trình này không có nghiệm (x, y, z) mà cả x, y, z nguyên tố với 3. Thật vậy, giả sử phương trình có nghiệm (x, y, z) mà cả x, y, z đều nguyên tố với 3. Khi đó $x \equiv \pm 1 \pmod 3), y \equiv \pm 1 \pmod 3$. Suy ra $2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 6z^2 \equiv 0$ (vô lí). Vậy không tồn tại điểm hữu tỷ trên đường tròn này.

2.4 Cấu trúc nhóm trên đường cong bậc ba không có điểm kỳ dị

Do mục đích sử dụng đường cong để nghiên cứu toán sơ cấp nên ta giới hạn chỉ xét đường cong $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ trên trường thực R. Sử dụng phép biến đổi $x - \dfrac{a}{3}$ được thay bằng x nên ta chỉ cần xét đường $(l) : y = x^3 + ax + b$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Trên đường cong phẳng (l) bậc ba không có điểm kì dị lấy một điểm P cố định. Với hai điểm A, B thuộc (l), đường thẳng (AB) cắt (l) tại D và $(PD) \times (l) = C$. Định nghĩa $A + B = C$.

Giả sử $P\left(\alpha, \beta = \alpha^3 + a\alpha + b\right)$. Với $A\left(x_1, x_1^3 + \text{ax}_1 + b\right); B\left(x_2, x_2^3 + \text{ax}_2 + b\right)$ ta có phương trình $AB : \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - x_1^3 - \text{ax}_1 - b}{x_2^3 - x_1^3 + \text{ax}_2 - \text{ax}_1}$ hay

$$y = \left(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + a\right)x - x_1x_2^2 - x_1^2x_2 + b$$

AB cắt (l) tại D. Khi đó tọa độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \left(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + a\right)x - x_1x_2^2 - x_1^2x_2 + b \\ y = x^3 + \text{ax} + b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -x_2 - x_1 \\ y = (-x_2 - x_1)^3 + a(-x_1 - x_2) + b \end{cases}.$$

Tọa độ điểm $D\begin{cases} x_3 = -x_2 - x_1 \\ y_3 = (-x_2 - x_1)^3 + a(-x_1 - x_2) + b \end{cases}.$

Tương tự ta tìm được tọa độ điểm $C\begin{cases} x_C = x_2 + x_1 - \alpha \\ y_C = (x_2 + x_1 - \alpha)^3 + a(x_1 + x_2 - \alpha) + b \end{cases}$

Hiển nhiên $A + B = B + A$ và $A + P = A$ với mọi $A, B \in (l)$. Ta coi P là điểm trung hòa.

Chú ý, muốn xét $A + A$ ta dựng tiếp tuyến At với (l) tại A. Giả sử $At \times (l) = Q$ và $(PD) \times (l) = C$. Khi đó $A + A = C$.

Về điểm đối của A: Giả sử tiếp tuyến Pu của (l) tại P $y = \left(3\alpha^2 + a\right)x - 2\alpha^3 + b$ cắt (l) tại P'. Ta có tọa độ $P'\left(-2\alpha, -8\alpha^3 - a\alpha + b\right)$. Đường thẳng $P'A$ cắt (l) tại điểm $A'\left(-x_1 + 2\alpha, (-x_1 + 2\alpha)^3 + a(-x_1 + 2\alpha) + b\right)$, khi đó ta có $A + A' = P$. Vậy điểm đối của A là A'.

Về luật kết hợp: Lấy $A, B, C \in (l)$. Ta chỉ ra $(A + B) + C = A + (B + C)$. Giả sử $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2); C(x_3, y_3)$. Ta có:

$$A + B = \left((x_1 + x_2 - \alpha), (x_1 + x_2 - \alpha)^3 + a(x_1 + x_2 - \alpha) + b\right).$$

Khi đó tọa độ điểm $D = A + B + C$ là:

$$\begin{cases} x_D = x_1 + x_2 + x_3 - 2\alpha \\ y_D = (x_1 + x_2 + x_3 - 2\alpha)^3 + a(x_1 + x_2 + x_3 - 2\alpha) + b \end{cases}$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$$B + C = \Big((x_2 + x_3 - \alpha), (x_2 + x_3 - \alpha)^3 + a(x_2 + x_3 - \alpha) + b\Big)$$

Khi đó tọa độ $D' = A + B + C$ là:

$$\begin{cases} x'_D = x_1 + x_2 + x_3 - 2\alpha \\ y'_D = (x_1 + x_2 + x_3 - 2\alpha)^3 + a(x_1 + x_2 + x_3 - 2\alpha) + b \end{cases}$$

Vậy $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Và ta có định lí dưới đây:

Định lí 2.4.2. *Đường cong phẳng bậc ba (l) cùng phép cộng lập thành một nhóm giao hoán với phần tử trung hòa P.*

Cấp của điểm A là số nguyên dương nhỏ nhất n thỏa mãn $nA = P$. Nếu không có n nào thì A có cấp $+\infty$.

Ví dụ 2.4.3. *Cấp của mỗi điểm thuộc $((l), +)$ với $(l) : y = x^3$ đều bằng vô cùng.*

Bài giải: Giả sử $P(0, 0)$. Giả sử $A(x_1, y_1 = x^3)$ ta có $2A = A + A$ có hoành độ $x_{2A} = 2x_1$. Lặp lại, tổng quát ta có $x_{nA} = nx_1$. Nếu có n để $nA = P$ thì $0 = x_{nA} = nx_1$ hay $x_1 = 0$. Vậy A có cấp vô cùng.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Chương 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG

3.1 Một vài bài hình sơ cấp qua tham số hóa

Ví dụ 3.1.1. *Giả sử hai đường thẳng xx' và yy' vuông góc với nhau tại O. Lấy điểm $P \neq O$ cố định thuộc xx' và điểm A chạy trên yy'. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với PA và đường này cắt xx' tại B. Dựng đường thẳng Bb vuông góc với xx'. Đường thẳng Bb cắt PA ở M. Khi đó hãy*

(i) Xác định quỹ tích điểm M.

(ii) Giải phương trình $x^3 + 29z(x^2 + y^2) = 0$ trong $\mathbb{Z}$.

Bài giải:

(i) Dựng hệ tọa độ Oxy. Gọi $P(a, 0), a \neq 0$. Phương trình đường thẳng PA: $y = t(x - a)$ và tọa độ điểm $A(0, -ta)$. Khi đó phương trình BA: $y = -\frac{1}{t}x - ta$. Tọa độ điểm $B(-t^2a, 0)$. Từ đây suy ra tọa độ điểm M như sau: $M(x = -t^2a, y = t(-t^2a - a))$. Quỹ tích điểm M có phương trình tham số $\begin{cases} x = -t^2a \\ y = t\left(-t^2a - a\right) \end{cases}$ khử t từ hệ phương trình $\begin{cases} x = -t^2a \\ y = -t^3a - ta \end{cases}$ ta có

$$-ay^2 = -t^2a\left(-at^2 - a\right)^2 = x(x - a)^2$$

Hay phương trình $x^3 - 2ax^2 + a^2x + ay^2 = 0$. Thế $x - a$ qua x ta có $x^2(x + a) + ay^2 = 0$ hay $x^3 + a(x^2 + y^2) = 0$.

(ii) Ta có ngay $x = 0, z = 0, y$ tùy ý. Nếu $z \neq 0$ thì

$$\frac{x}{z} = -29t^2, \frac{y}{z} = -29\left(t^3 + t\right)$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

và từ đó suy ra nghiệm.

Ví dụ 3.1.2. *Cho tam giác OBC vuông tại B. Từ giao điểm D giữa một đường thẳng Cc thay đổi, nhưng luôn đi qua C, với đường thẳng OB ta kẻ đường thẳng Dd vuông góc với CD. Từ đỉnh O hạ OM vuông góc với Dd. Khi đó hãy Xác định quỹ tích điểm M khi D chạy trên đường thẳng OB.*

Bài giải:

(i) Dựng hệ tọa độ Oxy với $O(0,0), B(0,b), C(c,b)$. Giả sử phương trình đường thẳng CD: $y = t(x-c)+b$. Khi đó tọa độ điểm $D(0, -tc+b)$. Phương trình Dd: $y = -\frac{1}{t}x - tc + b$ và OM: $y = tx$. Dễ dàng suy ra tọa độ điểm $M\left(x = \frac{tb - t^2c}{t^2+1}, y = \frac{t^2b - t^3c}{t^2+1}\right)$

Quỹ tích điểm Mcó phương trình tham số như sau: $\begin{cases} x = \dfrac{tb - t^2c}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2b - t^3c}{t^2+1} \end{cases}$ khử t từ hệ này ta có $x(x^2+y^2) - y(bx - cy) = 0$.

Ví dụ 3.1.3. *Trong mặt phẳng (P) cho hai điểm cố định A và B với* $AB = 2a > 0$. *Khi đó hãy*

(i) Xác định quỹ tích điểm M thuộc (P) sao cho $MA.MB = a^2$.

(ii) Chứng minh rằng, phương trình $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$ *có nhiều vô hạn nghiệm hữu tỷ.*

Bài giải:

(i) Dựng hệ tọa độ Oxy với $A(-a,0), B(a,0)$. Giả sử $M(x,y)$. Khi đó $MA.MB = a^2$ khi và chỉ khi $[(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y^2] = a^4$ hay $x^4+y^4+2x^2y^2-2a^2x^2+2a^2y^2 = 0$. Vậy quỹ tích các điểm M là đường cong phẳng bậc 4 có phương trình $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$.

(ii) Xét phương trình $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$.

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và ngược lại.

Nếu $xy \neq 0$. Đặt $x^2+y^2 = t(x-y)$ và thay vào phương trình đầu, ta có $t^2(x-y)^2 = 2(x^2-y^2)$. Vì $x \neq y$, nên $t^2(x-y) = 2(x+y)$. Ta có $y = \frac{t^2-2}{t^2+2}x$. Vậy $x^2 + \left(\frac{t^2-2}{t^2+2}\right)^2 x^2 = xt\left(1 - \frac{t^2-2}{t^2+2}\right)$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Vì $x \neq 0$, nên $x = \dfrac{2t\left(t^2+2\right)}{t^4+4}, y = \dfrac{2t\left(t^2-2\right)}{t^4+4}$. Thay $t = \dfrac{m}{n}$ và được $x = \dfrac{2mn\left(m^2+2n^2\right)}{m^4+4n^4}, y = \dfrac{2mn\left(m^2-2n^2\right)}{m^4+4n^4}$. Điều cần chứng minh.

Ví dụ 3.1.4. *Trong mặt phẳng (P), cho 3 đường thẳng d,d_1 và d_2 sao cho d_1, d_2 cùng vuông góc với d và d_1 cắt d tại O, còn d_2 cắt d tại H.Trên d_1 lấy điểm C sao cho $OC = OH$. Khi đó hãy*

(i) Tìm tập hợp các đỉnh A và B của tam giác vuông ABC với $\angle C = \dfrac{\pi}{2}$. Sao cho trung điểm của cạnh huyền AB thuộc d_2 và đường thẳng AB đi qua O.

(ii) ***Vấn đề:*** *Tập nghiệm hữu tỷ của phương trình $(x^2+y^2)(y-2) = y-2x$ là hữu hạn hay vô hạn.*

Bài giải:

(i) Dựng hệ tọa độ Oxy và đặt $a = OH$ sao cho $C(a,0)$. Gọi M là trung điểm cạnh huyền AB và tọa độ $M(m,a)$.

Nếu $m = 0$ thì $M(0,a)$ và ta có ngay $A\left(0, a\left(1-\sqrt{2}\right)\right), B\left(0, a\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.

Nếu $m \neq 0$ thì phươn trình OM: $y = \dfrac{ax}{m}$. Giả sử $A(x, \dfrac{ax}{m})$. Vì M là trung điểm của cạnh huyền AB của tam giác vuông ABC nên $MA^2 = MC^2$ hay

$$(x-m)^2 + \left(\frac{\mathrm{ax}}{m} - a\right)^2 = (m-a)^2 + a^2$$

Khử m qua việc thay $m = \dfrac{ax}{y}$, ta nhận được phương trình

$$(x^2+y^2)(y-2a) = a^2(y-2x).$$

Vậy A và B thuộc đường cong phẳng $(l) : (x^2+y^2)(y-2a) = a^2(y-2x)$.

Hai điểm $\left(0, a\left(1-\sqrt{2}\right)\right), \left(0, a\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ đều thuộc (l). Hiển nhiên (l) đi qua $O(0,0)$. Giả sử điểm $A(x,y) \in (l)$.

Nếu $y = 0$ thì có thể chọn $A(0,0), B(a,2a) \in (l)$, $M\left(\dfrac{a}{2}, a\right)$ và ta có tam giác ABC vuông ở $C(a,0)$ với M là trung điểm của cạnh huyền AB.

Nếu $y \neq 0$, có $\left(x^2+y^2\right)(y-2a) = a^2(y-2x)$ hay $x^2 - 2x\dfrac{\mathrm{ax}}{y} + \dfrac{a^2x^2}{y^2} + y^2 - 2ya + a^2 = \dfrac{a^2x^2}{y^2} - 2a\dfrac{\mathrm{ax}}{y} + a^2 + a^2$. Đặt $t = \dfrac{\mathrm{ax}}{y}$. Khi đó điểm $M(t,a), A\left(x, y = \dfrac{\mathrm{ax}}{t}\right)$ thuộc đường thẳng MO: $y = \dfrac{\mathrm{ax}}{t}$ thỏa mãn phương trình $(x-t)^2 + (y-a)^2 = (t-a)^2 + a^2$ hay

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$MA^2 = MC^2$. Dễ dàng có $B(2t - x, 2a - y)$ thuộc (l).

Ví dụ 3.1.5. *Cho ba điểm cố định P,A,B sao cho $PA = PB$. Đường tròn thay đổi C_t luôn đi qua A và B, và P nằm ngoài đường tròn (C_t). Khi đó hãy*
(i) Tìm tập hợp tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua P của đường tròn (C_t).
(ii) **Vấn đề**: *Tập hợp nghiệm hữu tỷ của phương trình $x\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 - y^2\right) + (x - 1) = 0$ là hữu hạn hay vô hạn.*

Bài giải:

(i) Dựng hệ tọa độ Oxy với $P(a, 0), A(0, b), B(0, -b)$. Giả sử phương trình đường tròn $(C_t) : (x - t)^2 + y^2 = t^2 + b^2$. Giả sử $M(x_0, y_0)$ thuộc (C_t). Ta có $(x_0 - t)^2 + y_0^2 = t^2 + b^2$. Đường thẳng PM tiếp xúc với đường tròn (C_t) khi và chỉ khi $(x_0 - a)^2 + y_0^2 + t^2 + b^2 = (a - t)^2$. Từ $x_0^2 + y_0^2 = 2x_0 t + b^2$ và $x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 + b^2 = -2at$ sy ra $t = \dfrac{\mathrm{ax}_0 - b^2}{x_0 + a}$. Do vậy $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 \dfrac{\mathrm{ax}_0 - b^2}{x_0 + a} = b^2$ hay

$$x_0\left(x_0^2 + y_0^2\right) - a\left(x_0^2 - y_0^2\right) + (x_0 - a)\, b^2 = 0$$

Từ đây suy ra, tập hợp tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua P của đường tròn (C_t) là đường cong phẳng bậc ba

$$x\left(x^2 + y^2\right) - a\left(x^2 - y^2\right) + b^2(x - a) = 0.$$

Ví dụ 3.1.6. *Trong mặt phẳng (P), cho đường thẳng d và điểm $A \notin d$ cố định. Đường tròn (C_t) thay đổi đi qua A và cắt d tại hai điểm M và N sao cho $\angle MAN = \alpha$ không đổi sao cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó hãy*
(i) Tìm tập hợp các tâm đường tròn (C_t) và chỉ ra các đường tròn (C_t) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định (C).
(ii) Giả sử α biến thiên từ 0 đến $\dfrac{\pi}{2}$. Hãy xác định điểm D thuộc đường thẳng đi qua A vuông góc với d sao cho phương tích của D với đường tròn (C) không phụ thuộc vào α.

Bài giải:

(i) Gọi I là tâm đường tròn (C_t). Hạ $AJ \perp d, IK \perp d$. Khi đó $\dfrac{IA}{IK} = \dfrac{IM}{IK} = \dfrac{1}{\cos\alpha} := e$. Như vậy, điểm I chạy trên một nhánh của hypecbol (H) với một tiêu điểm là

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

A và một đường chuẩn là d. Giả sử F là tiêu điểm thứ 2 của (H). Đặt $AJ = h > 0$ và $AF = 2c$. Giả sử $A(-c, 0)$ và $O(c, 0)$ và $(d) : x = -\frac{a}{e}$ đối với hệ tọa độ Oxy. Khi đó $\frac{1}{\cos\alpha} = e = \frac{c}{a}$. vì $h = AH = c - \frac{a^2}{c} = c - c\cos^2\alpha$ nên $c = \frac{h}{\sin^2\alpha}$. Như vậy, điểm F nằm trên tia AJ và AF $= 2c = \frac{2h}{\sin^2\alpha}$. Giả sử đường tròn (C_t) tiếp xúc với đường trong tâm F bán kính R. Vì $R = IF - IA = 2a$ nên $R = 2c\cos s\alpha = \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$

(ii) Đặt $AD = t$. Khi đó phương tích của D với đường trong (C) bằng $T = \wp(D, (C)) = DF^2 - R^2 = (2c - x)^2 - R^2$. Do vậy, ta có $T = \left(\frac{2h}{\sin^2\alpha} - x\right)^2 - \frac{4h^2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} = \frac{4h\,(h - x)}{\sin^2\alpha} + x^2$. Từ đây suy ra rằng, T độc lập với α khi và chỉ khi $x = h$ hay $D \equiv J$ và $T = h^2$.

3.2 Một vài phương trình nghiệm nguyên qua tham số hóa

Ví dụ 3.2.1. *Với $a \in \mathbb{Q}^+$, Chứng minh rằng hệ phương trình sau đây có không qua 12 nghiệm hữu tỷ*

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = a\left(x^2 - y^2\right) \\ 29x^2y - y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Bài giải:

Nếu $x - y = 0$ thì $x^2 + y^2 = 0$. Khi đó $x = y = 0 \in \mathbb{Q}$. Nhưng nghiệm này không thỏa mãn phương trình thứ hai. Vậy $x - y \neq 0$. Đặt $x^2 + y^2 = t(x - y)$ và thay vào phương trình đầu, ta có $t^2(x - y)^2 = a\left(x^2 - y^2\right)$. Vì $x \neq y$, nên $t^2(x - y) = a(x + y)$. Ta có $y = \frac{t^2 - a}{t^2 + a}x$. Vậy

$$x^2 + \left(\frac{t^2 - a^2}{t^2 + a^2}\right)x^2 = xt\left(1 - \frac{t^2 - a^2}{t^2 + a^2}\right)$$

Vì $x \neq 0$, nên $x = \frac{at\left(t^2 + a\right)}{t^4 + a^2}; y = \frac{at\left(t^2 - a\right)}{t^4 + a^2}$. Thay x và y vào phương trình thứ hai, ta nhận được phương trình đa thức bậc 12 của t. Vậy hệ phương trình đã cho không quá 12 nghiệm.

Ví dụ 3.2.2 *Giải hệ phương trình sau trong $\mathbb{Z}$* : $\begin{cases} x^3 + x^2z - y^2z = 0 \\ 5x + y = 21z \end{cases}$

Bài giải:

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Nếu $z = 0$ thì $x = 0$ và suy ra $y = 0$. Ta có nghiệm nguyên $(0, 0, 0)$. Xét trường hợp $z \neq 0$ thế $\frac{x}{z}; \frac{y}{z}$ qua u, v tương ứng, ta có $u^3 + u^2 - v^2 = 0$ và $5u + v = 21$ với $u, v \in \mathbb{Q}$. Nếu $x = 0$ hay $u = 0$ sẽ có $v = 0$. khi đó $21 = 0$: vô lý. Vậy $u \neq 0$. Đặt $v = tu$ với $t \in \mathbb{Q}$ thay vào phương trình đầu, ta có $u = t^2 - 1, v = t(t^2 - 1)$. Thay vào phương trình thứ hai ta có $t^3 + 5t^2 - t - 26 = 0$ với $t \in \mathbb{Q}$. Giải ra được $t = 2$. Vậy $u = 3, v = 6$. Khi đó $x = 3z, y = 6z$ và nghiệm $x = 3n, y = 6n, z = n$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3.2.3. *Giải hệ phương trình sau trong* $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z^2 \\ 3x + 7y = 9z \end{cases}$

Bài giải:

Nếu $z = 0$ thì $4x^2 = 9y^2$. Khi đó $x = \pm 3t, y = 2t, 3x + 7y = 0$. Từ đây suy ra $x = y = z = 0$. Nếu $z \neq 0$ thì đặt $u = \frac{x}{z}; v = \frac{y}{z}$. Khi đó $u = \frac{3 + 12t^2}{1 - 4t^2}, v = \frac{8t}{1 - 4t^2}$ với $t = \frac{m}{n}$ có $u = \frac{3n^2 + 12m^2}{n^2 - 4m^2}, v = \frac{8mn}{n^2 - 4m^2}$. Vậy $x = 3n^2 + 12m^2, y = 8mn, z = n^2 - 4m^2$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2m$. Do bởi $3x + 7y = 9z$ nên $9n^2 + 36m^2 + 56mn = 9n^2 - 36m^2$. Vậy $9m^2 + 7mn = 0$. Với $m = 0$ có $y = 0, x = 3n, z = n$ hoặc $n = 9s, m = -7s$ và $x = 831s^2, y = -504s^2, z = -115s^2$, Trong đó $s \in \mathbb{Z}$

Tóm lại $\begin{cases} x = \pm 3n, y = 2n, z = 0 \\ x = 3n, y = 0, z = n \\ x = 831n^2, y = -504n^2, z = -115n^2 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ví dụ 3.2.4. *Xét bội ba Pythagor* $(u, v, w) \in \mathbb{Z}^3$ *với* $uvw \neq 0$, $u^2 + v^2 = w^2$. *Vấn đề đặt ra: Tìm các bộ Pythagor nguyên thủy, có nghĩa* $(u, v, w) = 1$.

Bài giải:

Ta xét đồ thị phẳng $(l) : x^2 + y^2 - 1 = 0$ trong $\mathbb{R}^2$ với phần hữu tỷ

$$\left\{(a, b) \in \mathbb{Q}^2 \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1\right\}.$$

Mỗi bộ ba Pythagor nguyên thủy (u, v, w) tương ứng một điểm hữu tỷ $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \in (l) \setminus \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\} = (l^*)$. Ta biết $(l) : x^2 + y^2 - 1$ có không điểm tổng quát $\left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)$ với t là một biến mới. Khi cho $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ với $(m, n) = 1$ ta có ngay nghiệm $\left\{\left(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2\right) |(m, n) = 1\right\}$. Để có bộ ba nguyên thủy m và n không thể cùng chẵn hay cùng lẻ. Do vậy mà $(m, n) = 1, n = m + 2h + 1, m, h \in$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$\mathbb{N}$.

Ví dụ 3.2.5. *Giải phương trình* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{24}=z^2$ *trong* $\mathbb{N}$.

Bài giải:

Nếu $z=0$ thì $x=y=0$. Nếu $z\neq 0$ thì đặt $u=\dfrac{x}{z}, v=\dfrac{y}{z}$. Khi đó $u=\dfrac{90t}{25+9t^2}, v=\dfrac{125-45t^2}{25+9t^2}$. Với $t=\dfrac{m}{n}$ có $u=\dfrac{90mn}{25n^2+9m^2}, v=\dfrac{125n^2-45m^2}{25n^2+9m^2}$. Vậy$x=90mn, y=125n^2-45m^2, z=25n^2+9m^2$, trong đó $m,n\in\mathbb{N}, 5n\geq 3m$.

Ví dụ 3.2.6. *Chứng minh rằng phương trình* $x^4+y^4+z^4=2$ *có nhiều vô hạn nghiệm trong* $\mathbb{Q}$.

Bài giải:

Xét trường hợp đặc biệt $z=x+y$. Khi đó

$$2=x^4+y^4+z^4=x^4+y^4+(x+y)^4=2\big(x^2+xy+y^2\big)^2$$

Vậy $x^2+xy+y^2=1$.

Đặt $y=1-xt$. Khi đó $\begin{cases} x=\dfrac{2t-1}{t^2-t+1}\\ y=\dfrac{1-t^2}{t^2-t+1}\\ z=\dfrac{2t-t^2}{t^2-t+1}\end{cases}$ với $t\in\mathbb{Q}$. Với mỗi $t\in\mathbb{Q}$ có một nghiệm $\left(\dfrac{2t-1}{t^2-t+1},\dfrac{1-t^2}{t^2-t+1},\dfrac{2t-t^2}{t^2-t+1}\right)$. Từ đó suy ra phương trình đã cho có nhiều vô hạn nghiệm hữu tỷ.

Ví dụ 3.2.7. *Chứng minh rằng phương trình* $x^4+16y^4+x^4=2$ *có nhiều vô hạn nghiệm trong* $\mathbb{Q}$.

Bài giải:

Xét trường hợp đặc biệt $z=x+2y$. Khi đó ta có

$$2=x^4+16y^4+(x+2y)^4=2\big(x^2+2xy+4y^2\big)^2$$

Như vậy $x^2+2xy+4y^2=1$.

Đặt $x=1-yt$. Khi đó $\begin{cases} x=\dfrac{4-t^2}{t^2-2t+4}\\ y=\dfrac{2t-2}{t^2-2t+4}\\ z=\dfrac{-t^2+4t}{t^2-2t+4}\end{cases}$ với $t\in\mathbb{Q}$.

Từ đó suy ra phương trình đã cho có nhiều vô hạn nghiệm hữu tỷ.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

3.3 Phép biến hình N_{ab}

Xuất phát từ hai kết quả dưới đây đối với đường tròn ta muốn phát hiện một vài kết quả tương tự cho Elip. Để có thể giải quyết bài toán đặt ra, ta xây dựng một phép biến hình, tích của hai phép co - giãn.

Định lý Ptolemy và Định lý Newton

Mệnh đề 3.3.1 [ptolemy] *Tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong một đường tròn thì AB.CD+AD.BC=AC.BD.*

Chứng minh: Tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ với

$$\begin{cases} A\left(\cos\alpha;\sin\alpha\right), B\left(\cos\beta;\sin\beta\right), C\left(\cos\gamma;\sin\gamma\right) \\ D\left(1;0\right), 0 \le \alpha \le \beta \le \gamma \le 2\pi \end{cases}$$

Đặt $T = AB.CD + AD.BC - AC.BD$ Khi đó ta biến đổi hiệu

$$\begin{aligned} T = &\sqrt{2 - 2\cos\left(\beta - \alpha\right)}\sqrt{2 - 2\cos\gamma} \\ &+\sqrt{2 - 2\cos\left(\gamma - \beta\right)}\sqrt{2 - 2\cos\alpha} \\ &-\sqrt{2 - 2\cos\left(\gamma - \alpha\right)}\sqrt{2 - 2\cos\beta} \\ &= 4\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 4\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin\frac{\gamma - \alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \\ &= 2[\cos\frac{\gamma - \beta + \alpha}{2} - \cos\frac{\gamma + \beta - \alpha}{2} + \cos\frac{\gamma - \beta - \alpha}{2} \\ &-\cos\frac{\gamma - \beta + \alpha}{2} + \cos\frac{\gamma + \beta - \alpha}{2} - \cos\frac{\gamma - \beta - \alpha}{2}] = 0 \end{aligned}$$

Vậy $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Mệnh đề 3.3.2 [Newton] Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi I,J là trung điểm của AC và BD tương ứng. Khi đó I,O,J thẳng hàng theo thứ tự.

Chứng minh: Dựng hệ tọa độ (Oxy) để đường tròn nộp tiếp tứ giác ABCD

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

là $(l): x^2 + y^2 = 1$. Khi đó phương trình các cạnh và tọa độ các đỉnh:

$$\begin{cases} (AB): x\cos\alpha + \mathrm{y}\sin\alpha = 1 \\ (BC): x\cos\beta - \mathrm{y}\sin\beta = 1 \\ (CD): x\cos\gamma + \mathrm{y}\sin\gamma = 1 \\ (DA): x\cos\delta - \mathrm{y}\sin\delta = 1 \end{cases}; \begin{cases} \left(x_A = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\delta}{2}}; y_A = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\delta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\delta}{2}} \right) \\ \left(x_B = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}; y_B = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \right) \\ \left(x_C = \dfrac{\cos\dfrac{\gamma-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\beta}{2}}; y_C = \dfrac{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma+\beta}{2}} \right) \\ \left(x_D = \dfrac{\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}}; y_D = \dfrac{\sin\dfrac{\gamma-\delta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}} \right) \end{cases}$$

Vì

$$\frac{y_I}{x_I} = \frac{y_A + y_C}{x_A + x_C} = \frac{\sin(t-\delta) - \sin(t-\alpha) + \sin(t-\beta) - \sin(t-\gamma)}{\cos(t-\alpha) + \cos(t-\beta) + \cos(t-\gamma) + \cos(t-\delta)};$$
$$\frac{y_I}{x_I} = \frac{y_B + y_D}{x_B + x_D} = \frac{\sin(t-\delta) - \sin(t-\alpha) + \sin(t-\beta) - \sin(t-\gamma)}{\cos(t-\alpha) + \cos(t-\beta) + \cos(t-\gamma) + \cos(t-\delta)};$$

Với $t = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$ nên ba điểm O,I,J thẳng hàng.

Chú ý 3.3.3 *Với cách chứng minh trên, dễ dàng chỉ ra được O không phải luôn là trung điểm của IJ.*

Phép biến hình N_{ab}

Tất nhiên sẽ có câu hỏi về những mệnh đề tương tự như trên cho Elip. Để xây dựng được kết quả mới ta xét phép biến hình sau:

Với hai số thực a, b thỏa mãn $ab > 0$, Phép biến hình N_{ab} trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biến điểm $M(x, y)$ thành điểm $L(ax, by)$. Khi đó N_{ab}^{-1} biến điểm (x, y) thành điểm $\left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}\right)$. Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.3.4 *Phép biến hình N_{ab} biến*

(i) Ba điểm thẳng hàng A,B,C thành ba điểm thẳng hàng M,N,P và $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$, *trong đó* $M = N_{ab}(A), N = N_{ab}(B), P = N_{ab}(C)$.

(ii) Đường thẳng thành đường thẳng.

(iii) Đặt $\alpha = \angle xOM - \angle xOA$ *và* $\alpha = \angle xOA$, $k = tant$. *Khi đó* $\tan\alpha = \dfrac{k(a-b)}{ak^2 + b}$.

Chứng minh:

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

(i) Giả sử $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ và $M = N_{ab}(A), N = N_{ab}(B), P = N_{ab}(C)$. Nếu A,B,C thẳng hàng thì $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}$. Khi đó $\dfrac{ax_2 - ax_1}{by_2 - by_1} = \dfrac{ax_3 - ax_1}{by_3 - by_1}$. Vậy M,N,P cũng thẳng hàng và $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$

(ii) Giả sử đường thẳng $(d) : mx + ny + l = 0$ và điểm tổng quát $A(x, y) \in (d)$. Khi đó ảnh của A là $M(ax, by)$. Vậy đường thẳng (d) biến thành đường thẳng $(d') : x\dfrac{m}{a} + y\dfrac{n}{b} + l = 0$.

(iii) Ta có $\dfrac{a}{b}k = \tan(t + \alpha) = \dfrac{\tan t + \tan\alpha}{1 - \tan t \tan\alpha} = \dfrac{k + \tan\alpha}{1 - k\tan\alpha}$. Do vậy $\tan\alpha = \dfrac{k(a - b)}{ak^2 + b}$.

Mệnh đề 3.3.5. *Phép biến hình N_{ab} biến*

(i) Đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$ thành đường elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(ii) Điểm $A, B \in (C)$ thành $M, N \in (E)$ với $\dfrac{MN}{OI} = AB$, ở đó $J \in (C)$ và OJ là phân giác ngoài của $\angle AOB$ và $I = N_{ab}(J)$.

(iii) Giả sử $A, B \in (C)$ và $M = N_{ab}(A), N = N_{ab}(B) \in (E)$. Nếu $OA \perp OB$ thì hai đường kính OM và ON là hai đường kính liên hợp.

(iv) Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) thành đường thẳng tiếp xúc với (E) và ngược lại.

Chứng minh:

(i) Hiển nhiên

(ii) Giả sử $A(cost_1, sint_1), B(cost_2, sint_2)$ với $0 < t_1 < t_2 < \pi$ và ảnh $M = N_{ab}(A), N = N_{ab}(B)$.

Khi đó tọa độ hai điểm $M(acost_1, bsint_1), N(acost_2, bsint_2)$ và độ dài đoạn MN :

$$MN = 2\sin\frac{t_2 - t_1}{2}\sqrt{a^2\sin^2\frac{t_2 + t_1}{2} + b^2\cos^2\frac{t_2 + t_1}{2}}.$$

Do vậy $\dfrac{MN}{OI} = AB$, ở đó $J \in (C)$ và OJ là phân giác ngoài của góc $\angle AOB$ và $I = N_{ab}(J)$.

(iii) Nếu $OA \perp OB$ thì có thể giả thiết $A(cost, sint), B(-sint, cost)$.

Khi đó $M(acost, bsint), N(-asint, bcost)$ và ta nhận được

$$\tan\angle xOM.\tan\angle xON = -\frac{b^2}{a^2}.$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Do vậy, hai đường kính OM, ON là hai đường kính liên hợp.

(iv) Giả sử $(d): x\cos\alpha + \mathrm{y}\sin\alpha + 1 = 0$ là phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C). Điểm $(x, y) \in (d)$ được biến thành điểm $(ax, by) \in (d')$: $x\dfrac{\cos\alpha}{a} + y\dfrac{\sin\alpha}{b} + 1 = 0$. Dễ dàng có $a^2\dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + b^2\dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} = 1$ và suy ra đường thẳng (d') tiếp xúc với (E). Điều ngược lại là hiển nhiên.

Đồng nhất thức và bất đẳng thức Ptolemy cho đường elip phát biểu như sau:

Mệnh đề 3.3.6. *Cho đường elip* $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Giả sử A,B,C,D thuộc (E) có tọa độ

$$\begin{array}{c} (\mathrm{a}\cos t_1, b\sin t1);(\mathrm{a}\cos t_2, b\sin t_2) \\ (\mathrm{a}\cos t_3, b\sin t_3);(\mathrm{a}\cos t_4, b\sin t_4) \end{array}.$$

với $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 2\pi$ *Gọi 6 điểm*

$$\begin{array}{l} M_{12}\left(\mathrm{a}\sin\dfrac{t_2+t_1}{2}, b\cos\dfrac{t_2+t_1}{2}\right), M_{23}\left(\mathrm{a}\sin\dfrac{t_3+t_2}{2}, b\cos\dfrac{t_3+t_2}{2}\right) \\ M_{34}\left(\mathrm{a}\sin\dfrac{t_4+t_3}{2}, b\cos\dfrac{t_4+t_3}{2}\right), M_{41}\left(\mathrm{a}\sin\dfrac{t_4+t_1}{2}, b\cos\dfrac{t_4+t_1}{2}\right) \\ M_{13}\left(\mathrm{a}\sin\dfrac{t_3+t_1}{2}, b\cos\dfrac{t_3+t_1}{2}\right), M_{24}\left(\mathrm{a}\sin\dfrac{t_4+t_2}{2}, b\cos d\dfrac{t_4+t_2}{2}\right) \end{array}$$

thuộc (E) . Khi đó ta có
(i) $\dfrac{AB}{OM_{12}}.\dfrac{CD}{OM_{34}} + \dfrac{DA}{OM_{41}}.\dfrac{CB}{OM_{23}} = \dfrac{AC}{OM_{13}}.\dfrac{BD}{OM_{24}}$ (ii) $\dfrac{AB.CD + DA.CB}{b^2} \geq \dfrac{AC.BD}{a_2}$
khi $a \geq b$.

Chứng minh:

(i) Được suy ra từ mệnh đề 3.3.1 và mệnh đề 3.3.5.

(ii) $b \leq OM \leq a$ với mọi $M \in (E)$ khi $a \geq b$ nên ta nhận được bất đẳng thức $\dfrac{AB.CD + DA.CB}{b^2} \geq \dfrac{AC.BD}{a^2}$ khi $a \geq b$ theo (i).

Ví dụ 3.3.7. *Trong mặt phẳng* (Oxy) *cho Elip* $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *Giả sử đường thẳng qua tiêu điểm F cắt* (E) *ở M và N và cho I,J thuộc (E) sao cho* $OI \perp \mathrm{OJ}$. *Khi đó*

(i) $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN} = \dfrac{2a}{b^2}$.

(ii) Nếu đường kính AB của (E) song song với MN thì $AB^2 = 2aMN$.

(iii) $\dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{\mathrm{OJ}^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

Bài giải:

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

(i) Không hạn chế có thể coi $a > b > 0$. Khi đó $F\left(c = \sqrt{a^2 - b^2}; 0\right)$. Đặt $\angle \mathrm{AF}M = \alpha$ ở đó $A(a, 0)$. Hạ $MP \perp OA$, $P(x; 0)$. Ta có $x - c = FM\cos\alpha$. Dễ dàng suy ra $FM = \dfrac{b^2}{a + c\cos\alpha}$ và $FN = \dfrac{b^2}{a - c\cos\alpha}$. Vậy $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN} = \dfrac{2a}{b^2}$.

(ii) Kẻ đường kính AB của elip (E) song song với MN và đặt $r = OA$. Khi đó $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. Ta có $r^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$. Từ hệ thức $MN = \dfrac{2ab^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$ suy ra $AB^2 = 2aMN$.

(iii) Giả sử $\angle xOI = t$ và $OI = d$. Khi đó $I(dcost, dsint)$. tương tự $J(-d'sint, d'cost)$. Vì $\dfrac{d^2\cos^2 t}{a^2} + \dfrac{d^2\sin^2 t}{b^2} = 1$ nên $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{d^2} = \dfrac{\cos^2 t}{a^2} + \dfrac{\sin^2 t}{b^2}$. Tương tự $\dfrac{1}{OJ^2} = \dfrac{1}{d'^2} = \dfrac{\sin^2 t}{a^2} + \dfrac{\cos^2 t}{b^2}$. Cộng vế với vế của hai hệ thức ta được $\dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{\mathrm{OJ}^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

Định lý Newton cho Elip được phát biểu như sau:

Ví dụ 3.3.8. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường elip (E):* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *Gọi I,J là trung điểm của AC và BD tương ứng. Khi đó I,O,J thẳng hàng theo thứ tự.*

Bài giải:

Cách 1: Phương trình các cạnh và tọa độ các điểm của tứ giác ABCD là:

$$\begin{cases} (AB): x\dfrac{\cos\alpha}{a} + y\dfrac{\sin\alpha}{b} = 1;\ (BC): x\dfrac{\cos\beta}{a} - y\dfrac{\sin\beta}{b} = 1 \\ (CD): x\dfrac{\cos\gamma}{a} + y\dfrac{\sin\gamma}{b} = 1;\ (DA): x\dfrac{\cos\delta}{a} - y\dfrac{\sin\delta}{b} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\left(x_A = \dfrac{a\cos\dfrac{\alpha-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\delta}{2}}; y_A = \dfrac{b\sin\dfrac{\alpha-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\delta}{2}}\right) \\ B\left(x_B = \dfrac{a\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}; y_B = \dfrac{b\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\right) \\ C\left(x_C = \dfrac{a\cos\dfrac{\gamma-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\beta}{2}}; y_C = \dfrac{b\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\beta}{2}}\right) \\ D\left(x_D = \dfrac{a\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}}; y_D = \dfrac{b\sin\dfrac{\gamma-\delta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}}\right) \end{cases}$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Vì $\dfrac{y_A + y_C}{x_A + x_C} = \dfrac{b\left[\sin(t-\delta)\right] - \sin(t-\alpha) + \sin(t-\beta) - \sin(t-\gamma)}{a\left[\cos(t-\alpha) + \cos(t-\beta) + \cos(t-\gamma) + \cos(t-\delta)\right]}$
và $\dfrac{y_B + y_D}{x_B + x_D} = \dfrac{b\left[\sin(t-\delta)\right] - \sin(t-\alpha) + \sin(t-\beta) - \sin(t-\gamma)}{a\left[\cos(t-\alpha) + \cos(t-\beta) + \cos(t-\gamma) + \cos(t-\delta)\right]}$
Với $t = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$ nên $\dfrac{y_I}{x_I} = \dfrac{y_J}{x_J}$ và như thế ba điểm O,I,J thẳng hàng.
Cách 2: Chuyển bài toán này về bài toán cho đường tròn bởi phép biến hình N_{ab}. Kết quả được suy ra từ mệnh đề 3.4.2.

Ví dụ 3.3.9. *Giả sử ba điểm A,B,C thuộc đường tròn (C) với ảnh* $M = N_{ab}(A), N = N_{ab}(B), P = N_{ab}(C)$. *Khi đó* $S_{MNP} = abS_{ABC}$. *Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của diện tích tam giác với ba đỉnh thuộc (E).*

Bài giải: Giả sử $A(\cos t_1, \sin t_1), B(\cos t_2, \sin t_2), C(\cos t_3, \sin t_3)$.
Khi đó $M(a\cos t_1, b\sin t_1), N(a\cos t_2, b\sin t_2), P(a\cos t_3, b\sin t_3)$ với $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 2\pi$.
Vì $S_{MNP} = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos t_1 & b\sin t_1 & 1 \\ a\cos t_2 & b\sin t_2 & 1 \\ a\cos t_3 & b\sin t_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$ nên ta nhận được $S_{MNP} = abS_{ABC}$.
Ta đã biết, trong số các tam giác nội tiếp đường tròn thì tam giác đều có diện tích lớn nhất. Vậy S_{MNP} có diện tích lớn nhất bằng $\dfrac{3\sqrt{3}ab}{4}$, chẳng hạn:

$$M(a\cos t, b\sin t), N\left(a\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right), b\sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$P\left(a\cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right), b\sin\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Ví dụ 3.3.10. *Cho elip (E):* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *Lấy 4 điểm A,B,C,D thuộc (E) theo thứ tự để tứ giác ABCD lồi. Khi đó ta có kết quả* $S_{ABCD} \le 2ab$. *Từ đây suy ra giá trị lớn nhất của diện tích có 4 đỉnh thuộc elip (E).*

Bài giải:

Tọa độ $(\mathrm{acost}_1, b\sin t_1), (\mathrm{acost}_2, b\sin t_2), (\mathrm{acost}_3, b\sin t_3), (\mathrm{acost}_4, b\sin t_4)$ với $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 2\pi$. Quy ước diện tích tam giác được tính qua định thức theo quy tắc bàn tay phải, có:

$$2S_{ABC} = \begin{vmatrix} a\cos t_1 & b\sin t_1 & 1 \\ a\cos t_2 & b\sin t_2 & 1 \\ a\cos t_3 & b\sin t_3 & 1 \end{vmatrix} = ab\left[\sin(t_3 - t_2) + \sin(t_1 - t_3) + \sin(t_2 - t_1)\right]$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$$2S_{CDA} = \begin{vmatrix} a\cos t_3 & b\sin t_3 & 1 \\ a\cos t_4 & b\sin t_4 & 1 \\ a\cos t_1 & b\sin t_1 & 1 \end{vmatrix} = ab\left[\sin(t_1 - t_4) + \sin(t_3 - t_1) + \sin(t_4 - t_3)\right]$$

Do vậy có

$$S_{ABCD} = \frac{ab}{2}\left[\sin(t_4 - t_3) + \sin(t_3 - t_2) + \sin(t_2 - t_1) + \sin(t_1 - t_4)\right] \le 2ab$$

Dấu = xẩy ra khi

$$A(a\cos t, b\sin t), B\left(a\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), b\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$C\left(a\cos\left(t + \frac{2\pi}{2}\right), b\sin\left(t + \frac{2\pi}{2}\right)\right), D\left(a\cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right), b\sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

.

Ví dụ 3.3.11. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm O, bán kính 1. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích S_{ABC}. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của diện tích ta giác MNP ngoại tiếp elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Bài giải: Từ tâm đường tròn nội tiếp I của ta giác ABC hạ $IH \perp BC, IK \perp CA, IJ \perp AB$. Gọi $\alpha_1, ..., \alpha_6$ là số đo các góc do IH, IK, IJ tạo với IB, IC, IA . Khi đó

$$BC + CA + AB = \sum_{i=1}^{6} \tan\alpha_i \ge 6\tan\frac{\sum_{i=1}^{6}\alpha_i}{6}$$

và nhận được $S_{ABC} \ge 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$. Dấu = xẩy ra khi tam giác ABC đều.

Giả sử MNP ngoại tiếp (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sử dụng phép biến hình N_{ab} để biến tam giác MNP thành tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Vậy $S_{MNP} = abS_{ABC} \ge 3\sqrt{3}ab$. Do vậy S_{MNP} nhỏ nhất là bằng $3\sqrt{3}ab$. Xây dựng một tam giác: Chọn $A(0,2), B\left(-\sqrt{3}, -1\right), C\left(\sqrt{3}, -1\right)$. Khi đó chọn $M(0,2b), B\left(-\sqrt{3}a, -b\right), C\left(\sqrt{3}a, -b\right)$.

3.4 Một vài bài toán về đường cong bậc 3

3.4.1. Một vài ví dụ

Ví dụ 3.4.1. *Giả sử $(l) : y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \ne 0$, là một đường cong phẳng*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

bậc ba trong mặt phẳng Oxy. Qua điểm I tùy ý trong (Oxy) dựng hai đường thẳng cắt (l) tại các điểm A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3 tương ứng. Khi đó tỷ số $\dfrac{IA_1.IA_2.IA_3}{IB_1.IB_2.IB_3}$ không phụ thuộc và việc chọn điểm I.

Bài giải: Giả sử $I(u, v)$ nằm trong mặt phẳng (Oxy). Đổi hệ trục để I là gốc tọa độ qua $X = x - u, Y = y - v$. Khi đó $I(0, 0)$ và $(l) : Y = pX^3 + qX^2 + rX + s$ trong mặt phẳng tọa độ (IXY). Giả sử hai đường thẳng đi qua gốc I có phương trình $Y = tX, Y = t'X$ cắt (l) tại các điểm A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3, tương ứng. Hiển nhiên, hoành độ của các điểm A_1, A_2, A_3 là X_1, X_2, X_3 là nghiệm của phương trình $pX^3 + qX^2 + rX + s = tX$. Khi đó $X_1X_2X_3 = -\dfrac{s}{p}$ và

$$IA_1.IA_2.IA_3 = \sqrt{X_1^2 + t^2X_1^2}.\sqrt{X_2^2 + t^2X_2^2}.\sqrt{X_3^2 + t^2X_3^2}.$$

Như vậy

$$IA_1.IA_2.IA_3 = |X_1X_2X_3| = \sqrt{(1 + t^2)^3} = \left|\frac{s}{p}\right| \sqrt{(1 + t^2)^3}.$$

Tương tự ta có

$$IB_1.IB_2.IB_3 = |X_1X_2X_3| = \sqrt{(1 + t'^2)^3} = \left|\frac{s}{p}\right| \sqrt{(1 + t'^2)^3}.$$

. Vậy $\dfrac{IA_1.IA_2.IA_3}{IB_1.IB_2.IB_3} = \sqrt{\left(\dfrac{1 + t^2}{1 + t'^2}\right)^3}$.

Ví dụ 3.4.2. *Giả sử $(l) : y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, là đường cong phẳng bậc ba trong mặt phẳng (Oxy). Qua hai điểm I và J tùy ý trong trong (Oxy) dựng hai đường thẳng song song cắt (l) tại các điểm A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3, tương ứng. Khi đó tỷ số $\dfrac{IA_1.IA_2.IA_3}{JB_1.JB_2.JB_3}$ không phụ thuộc vào việc chọn hệ số góc của hai đường thẳng song song trên.*

Bài giải: Giả sử hai đường thẳng song song qua $I(u_1, v_1), J(u_2, v_2)$ có hệ số góc t. Khi đó phương trình tương ứng của chúng là $(Id_1) : y = t(x - u_1) + v_1$ và $(Jd_2) : y = t(x - u_2) + v_2$. Giả sử hoành độ của các điểm A_1, A_2, A_3 là x_1, x_2, x_3. Chúng là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = t(x - u_1) + v_1$ hay $ax^3 + bx^2 + (c - t)x + d + tu_1 - v_1 = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ và $A(x_1, t(x_1 - u_1) +$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

$v_1), A_2(x_2, t(x_2 - u_1) + v_1), A_3(x_3, t(x_3 - u_1) + v_1)$.

Với $x = u_1$ được

$$a\left(u_1 - x_1\right)\left(u_1 - x_2\right)\left(u_1 - x_3\right) = au_1^3 + bu_1^2 + cu_1 + d - v_1 = f\left(u_1\right).$$

Ta có $IA_1.IAL_2.IA_3 = \left|\left(x_1 - u_1\right)\left(x_2 - u_1\right)\left(x_3 - u_1\right)\right| \sqrt{\left(1 + t^2\right)^3}$ và như vậy

$$IA_1.IA_2.IA_3 = \left|\frac{f\left(u_1\right)}{a}\right| \sqrt{\left(1 + t^2\right)^3}.$$

Tương tự ta có

$$JB_1.JB_2.JB_3 = \left|\frac{f\left(u_2\right)}{a}\right| \sqrt{\left(1 + t^2\right)^3}.$$

Vậy $\dfrac{IA_1.IA_2.IA_3}{JB_1.JB_2.JB_3} = \left|\dfrac{f\left(u_1\right)}{f\left(u_2\right)}\right|$ không phụ thuộc vào t.

Ví dụ 3.4.3. *Cho hai đường thẳng Ox và Oy vuông góc với nhau tại O. Từ điểm P cố định thuộc Ox kẻ đường thẳng bất kì cắt Oy tại A. Dựng đường thẳng qua A vuông góc với PA cắt Ox ở B. Từ B dựng đường thẳng vuông góc với Ox cắt PA ở M. Tìm tập hợp tất cả các điểm M khi A chạy trên (Oy).*

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) và điểm $P(a, 0)$ trong mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng qua P với phương trình $y = t(x - a)$ cắt Oy tại điểm $A(0, -ta)$. Hiển nhiên, phương trình $(BA) : y = -\dfrac{x}{t} - ta$ và tọa độ $B(-t^2a; 0)$. Khi đó điểm M có tọa độ $M\left(x_M = -t^2a; y_M = -t^3a - ta\right)$. Vậy ta suy ra quan hệ sau:

$$y_M^2 = a^2\left(t^6 + 2t^4 + t^2\right) = a^2\left(-\frac{x_M^3}{a^3} + 2\frac{x_M^2}{a^2} - \frac{x_M}{a}\right).$$

Do đó, tập hợp các điểm M khi A chạy trên (Oy) là đường cong phẳng bậc ba với phương trình $x^3 + a^2x = a\left(2x^2 + y^2\right)$.

Ví dụ 3.4.4. *Giả sử tam giác ABC có độ dài các cạnh là a,b,c. Khi đó có đúng hai điểm E thỏa mãn $aEA = bEB = cEC$.*

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy). Không làm mất tính tổng quát có thể giả sử bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 1. Giả sử $A(1; 0), B(cosu, sinu)$ với $0 < u < v < 2\pi$ và $C(cosv, sinv)$ và $E(x, y)$. Từ $d = aEA = bEB = cEC > 0$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

suy ra hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \dfrac{d^2}{a^2} \\ (x-\cos u)^2 + (y-\sin u)^2 = \dfrac{d^2}{b^2} \\ (x-\cos v)^2 + (y-\sin v)^2 = \dfrac{d^2}{c^2} \end{cases}$$

Do vậy

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = \dfrac{d^2}{a^2} \\ x^2 + y^2 - 2x\cos u - 2y\sin u + 1 = \dfrac{d^2}{b^2} \\ x^2 + y^2 - 2x\cos v - 2y\sin v + 1 = \dfrac{d^2}{c^2} \end{cases}$$

hay hệ tương đương

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = \dfrac{d^2}{a^2} \\ x(\cos u - 1) + \mathrm{y}\sin u = \dfrac{d^2}{2a^2} - \dfrac{d^2}{2b^2} \\ x(\cos v - 1) + \mathrm{y}\sin v = \dfrac{d^2}{2a^2} - \dfrac{d^2}{2c^2} \end{cases}$$

Vì $d = (cosu - 1)sinv - (cosv - 1)sinu = sin(v-u) - (sinv - sinu)$ hay $d = 2\sin\dfrac{v-u}{2}\left(cos\dfrac{v-u}{2} - cos\dfrac{v+u}{2}\right) \neq 0$ nên hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x(\cos u - 1) + \mathrm{y}\sin u = \dfrac{d^2}{2a^2} - \dfrac{d^2}{2b^2} \\ x(\cos v - 1) + \mathrm{y}\sin v = \dfrac{d^2}{2a^2} - \dfrac{d^2}{2c^2} \end{cases}$$

có đúng một nghiệm (x_0, y_0). Vậy hệ đã cho có đúng hai nghiệm
vì phương trình $\dfrac{d^2}{a^2} = x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + 1 = d^4(...) - 2d^2(...) + 1$ có hai nghiệm d^2.

Ví dụ 3.4.5. *Có đúng hai điểm F nhìn các cạnh của tam giác ABC dưới một góc $\frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{2\pi}{3}$*

Bài giải: Dựng cung chứa góc $\frac{\pi}{3}$ trên BC và trên AC. Hai cung này cắt nhau ở F_1. Khi đó F_1 nhìn AB dưới góc $\frac{2\pi}{3}$. Dựng cung chứa góc $\frac{2\pi}{3}$ trên BC và AC. Hai cung này cắt nhau ở F_2. Khi đó F_2 nhìn AB dưới góc $\frac{2\pi}{3}$. Vậy Có đúng hai điểm F nhìn các cạnh của tam giác ABC dưới một góc $\frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{2\pi}{3}$

3.4.2. Đường cong phẳng 21 - điểm K_3

Giả sử tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $a = BC, b = CA, c = AB$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Kí hiệu a' là đường thẳng cắt đường thẳng AC tại điểm cách đều hai điểm A và B, cắt đường thẳng AB tại hai điểm cách đều hai điểm A và C.
Kí hiệu b' là đường thẳng cắt đường thẳng BA tại điểm cách đều hai điểm B và C, cắt đường thẳng BC tại điểm cách đều hai điểm B và A.
Kí hiệu c' là đường thẳng cắt đường thẳng CB tại điểm cách đều hai điểm C và A, cắt đường thẳng CA tại hai điểm cách đều hai điểm C và B.
Gọi A_0, B_0, C_0 là những điểm đối xứng với A,B,C qua BC,CA,AB tương ứng. Gọi A_1, B_1, C_1 là những điểm đối xứng với A,B,C qua a', b', c' tương ứng. Gọi hai điểm E là những điểm thỏa mãn $aEA = bEB = cEC$, gọi hai điểm F là những điểm nhìn các cạnh của tam giác ABC dưới $\frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{2\pi}{3}$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi A_2, A_3 là các đỉnh của tam giác đều BCA_2, BCA_3, Gọi B_2, B_3 là các đỉnh của tam giác đều CAB_2, CAB_3 và gọi C_2, C_3 là các đỉnh của tam giác đều ABC_2, ABC_3.

Ví dụ 3.4.6. *Xác định phương trình của a' khi biết tọa độ A,B,C.*

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy sao cho $A(0,0), B(x_2, kx_2), C(x_3, hx_3)$. Điểm $P_0(p, hp)$ cách đều A và B khi và chỉ khi

$$p^2 + h^2p^2 = (p - x_2)^2 + (hp - kx_2)^2$$

Vậy

$$P_0\left(\frac{x_2\left(1+k^2\right)}{2\left(1+hk\right)}; \frac{x_2h\left(1+k^2\right)}{2\left(1+hk\right)}\right).$$

Điểm $N_0(n, kn)$ cách đều A và C khi và chỉ khi

$$N_0\left(\frac{x_3\left(1+h^2\right)}{2\left(1+hk\right)}; \frac{x_3k\left(1+h^2\right)}{2\left(1+hk\right)}\right).$$

Đường thẳng a' chính là đường thẳng

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{x_2\left(1+k^2\right)}{2\left(1+hk\right)} & \frac{x_2h\left(1+k^2\right)}{2\left(1+hk\right)} & 1 \\ \frac{x_3\left(1+h^2\right)}{2\left(1+hk\right)} & \frac{x_3k\left(1+h^2\right)}{2\left(1+hk\right)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

hay

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & x_2h & \dfrac{2(1+hk)}{1+k^2} \\ x_3 & x_3k & \dfrac{2(1+hk)}{1+h^2} \end{vmatrix} = 0$$

Ví dụ 3.4.7. *Giả sử tam giác ABC có độ dài các cạnh a,b,c. Khi đó 21 điểm nêu trên đều thuộc tập K_3 gồm tất cả các điểm M thỏa mãn phương trình*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2+MA^2 & a^2MA^2 \\ 1 & b^2+MB^2 & b^2MB^2 \\ 1 & c^2+MC^2 & c^2MC^2 \end{vmatrix} = 0$$

Chứng minh: Khi $M \equiv A$ thì $MA = 0, MB = AB = cMC = AC = b$. Khi đó

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2+MA^2 & a^2MA^2 \\ 1 & b^2+MB^2 & b^2MB^2 \\ 1 & c^2+MC^2 & c^2MC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ 1 & b^2+c^2 & b^2c^2 \\ 1 & c^2+b^2 & c^2b^2 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy $A, A_0 \in K_3$. Tương tự $B, B_0, C, C_0 \in K_3$.

vì $a^2 + HA^2 = b^2 + HB^2 = c^2 + HC^2 = 4R^2$ nên

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2+HA^2 & a^2HA^2 \\ 1 & b^2+HB^2 & a^2HB^2 \\ 1 & c^2+HC^2 & a^2HC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4R^2 & a^2HA^2 \\ 1 & 4R^2 & a^2HB^2 \\ 1 & 4R^2 & a^2HC^2 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy $H \in K_3$.

Vì

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2+OA^2 & a^2OA^2 \\ 1 & b^2+OB^2 & a^2OB^2 \\ 1 & c^2+OC^2 & a^2OC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2+R^2 & a^2R^2 \\ 1 & b^2+R^2 & a^2R^2 \\ 1 & c^2+R^2 & a^2R^2 \end{vmatrix} = 0$$

nên $O \in K_3$

Đặt $aEA = u$. Vì

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2+EA^2 & a^2EA^2 \\ 1 & b^2+EB^2 & b^2EB^2 \\ 1 & c^2+EC^2 & c^2EC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2+EA^2 & u^2 \\ 1 & b^2+EB^2 & u^2 \\ 1 & c^2+EC^2 & u^2 \end{vmatrix} = 0$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

nên E cũng thuộc K_3.

Đặt $v = \mathrm{AA}_2^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\sqrt{3}S$. Vì

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2+A_2A^2 & a^2A_2A^2 \\ 1 & b^2+A_2B^2 & b^2A_2B^2 \\ 1 & c^2+A_2C^2 & c^2A_2C^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2+v & a^2v \\ 1 & b^2+a^2 & b^2a^2 \\ 1 & c^2+a^2 & c^2a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2+v & v \\ 1 & b^2+a^2 & b^2 \\ 1 & c^2+a^2 & c^2 \end{vmatrix} a^2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & v \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & c^2 \end{vmatrix} a^2 = 0$$

nên $A_2 \in K_3$. Tương tự $A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 \in K_3$.

Giả sử F nhìn ba cạnh dưới cùng một góc $\dfrac{2\pi}{3}$. Đặt $x = FA, y = FB, z = FC$. Khi đó

$$a^2 = y^2 + z^2 + yz, b^2 = z^2 + x^2 + zx, c^2 = x^2 + y^2 + xy.$$

Vì

$$F^* := \begin{vmatrix} 1 & a^2+FA^2 & a^2FA^2 \\ 1 & b^2+FB^2 & b^2FB^2 \\ 1 & c^2+FC^2 & c^2FC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2+z^2+xy & a^2x^2 \\ 1 & x^2+y^2+z^2+yz & b^2y^2 \\ 1 & x^2+y^2+z^2+zx & c^2z^2 \end{vmatrix}$$

Nên có

$$F^* = \begin{vmatrix} 1 & xy & a^2x^2 \\ 1 & yz & b^2y^2 \\ 1 & zx & c^2z^2 \end{vmatrix} = c^2xz^3 - b^2xy^3 + a^2x^3y - c^2yz^3 + b^2y^3z - a^2x^3z$$

Và dễ dàng thấy $F^* = 0$ qua việc thay $a^2 = y^2 + yz + z^2, b^2 = z^2 + zx + x^2, c^2 = x^2 + xy + y^2$. Như vậy hai điểm F cũng thuộc K_3.

Và ta dễ dàng kiểm tra được A_1, B_1, C_1 cũng thuộc K_3.

Ví dụ 3.4.8. *Điều kiện cần và đủ để trọng tâm G của tam giác ABC thuộc K_3 là tam giác ABC cân.*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Bài giải: Ta có $a^2 + GA^2 = \dfrac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9} + \dfrac{2a^2}{3}$,..., và biến đổi

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2+GA^2 & a^2GA^2 \\ 1 & b^2+GB^2 & b^2GB^2 \\ 1 & c^2+GC^2 & c^2GC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{2a^2}{3} & a^2GA^2 \\ 1 & \dfrac{2b^2}{3} & b^2GB^2 \\ 1 & \dfrac{2c^2}{3} & c^2GC^2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^2GA^2 \\ 1 & b^2 & b^2GB^2 \\ 1 & c^2 & c^2GC^2 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{2}{3}\left[b^2c^2\left(GC^2-GB^2\right)+c^2a^2\left(GA^2-GC^2\right)+a^2b^2\left(GB^2-GA^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[b^2c^2\left(b^2-c^2\right)+c^2a^2\left(c^2-a^2\right)+a^2b^2\left(a^2-b^2\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{3}\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)\left(a^2-b^2\right)$$

Do vậy $G \in K_3$ khi và chỉ khi tam giác ABC cân.

Mệnh đề 3.4.9.

Nếu tam giác ABC không đều thì bậc của K_3 đúng bằng 3.

Chứng minh: Đặt $u = MA^2, v = MB^2, t = MC^2$ và $\alpha = a^2, \beta = b^2, \gamma = c^2$. Như vậy

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha+u & \alpha u \\ 1 & \beta+v & \beta v \\ 1 & \gamma+t & \gamma t \end{vmatrix}$$
$$= \gamma vt - \beta vt + \alpha ut - \gamma ut + \beta uv - \alpha uv$$
$$+\alpha\gamma u - \alpha\beta u + \alpha\beta v - \beta\gamma v + \beta\gamma t - \alpha\gamma t$$

Biểu diễn $u = x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1; v = x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2; t = x^2+y^2+a_3x+b_3y+c_3$, khi đó hệ số của $\left(x^2+y^2\right)^2$ đúng bằng $\alpha-\beta+\beta-\gamma+\gamma-\alpha = 0$. Vậy K_3 là đồ thị bậc ≤ 3. Dễ dàng kiểm tra bậc của K_3 khi tam giác ABC không đều.

Chú ý 3.4.10. Phương trình K_3 không qua định thức rất phức tạp

$$\left(a^2-b^2\right)MA^2.MB^2+\left(b^2-c^2\right)MB^2.MC^2+\left(c^2-a^2\right)MC^2.MA^2$$
$$= a^2c^2\left(MA^2-MC^2\right)+c^2b^2\left(MC^2-MB^2\right)+b^2a^2\left(MB^2-MA^2\right).$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày được:

1. Kết thúc và phép khử với những tính chất cơ bản và ứng dụng.

2. Đường cong phẳng trong mặt phẳng và một vài tính chất.

3. Tham số hóa đường cong phẳng và sử dụng tham số hóa đường cong phẳng trong một số bài toán về phương trình nghiệm nguyên, điểm hữu tỷ và một số bài hình sơ cấp.

4. Phương pháp tìm điểm hữu tỷ trên đường conic.

5. Trình bày phép biến hình N_{ab}.

6. Bài toán đường cong phẳng 21 - điểm K_3.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/

Tài liệu tham khảo

[1] D. Faddeev et I. Sominski,*Recueil D'Exercices D'Algebre Superieur,* Editions Mir -Moucou 1977.

[2] E. Kunz, *Introduction to plane algebraic curves,* Birkhauser Boston-Basel -Berlin 2004.

[3] N. V. Mau và Đ. V. Nhi,*Đồng nhất thức và phương pháp tọa độ trong hình học,* Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội 2012.

[4] M. B. Nathason,*Elementary Methods in Number Theory,* Springer - Verlag New-York Berlin - Heidelberg SPIN 10742484.

[5] D. V. Nhi,*Proving some geometric identities by using the detterminants,* Journal of Science and Arts, Year 12, No. 4(21) 2012, 385-394.

[6] J. Rivaud,*Exercices D'Algebre 1,* Pari Librairie Vuibert 1964.

[7] D. Q. Viet và Đ. V. Nhi,*Giáo trình đại số sơ cấp,* Nhà xuất bản ĐHSP Hà Nội 2007.

[8] D. Q. Viet và Đ. V. Nhi,*Cơ sở lý thuyết số và đa thức,* Nhà xuất bản ĐHSP Hà Nội 2008.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://lrc.tnu.edu.vn/