

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (m+1)x^2 + 2m+1$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 1$.

b) Cho $I\left(0; -\frac{5}{2}\right)$. Tìm m để (C_m) có điểm cực đại là A , hai điểm cực tiểu là B và C sao cho tứ giác $ABIC$ là hình thoi.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sin 4x + 2\sin^3 x = \sin x + \sqrt{3} \cos x \cos 2x$.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{1+\sqrt{4-3x}}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$ xung quanh trục hoành.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

Câu 6 (1,0 điểm). Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x > y$ và $xy + (x+y)z + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2}$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần a hoặc phần b)

a. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ và đường thẳng $d: x - 3y - 9 = 0$. Từ điểm M thuộc d kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với (C) lần lượt tại A và B . Tìm tọa độ điểm M sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ và $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc d , cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho IAB là tam giác vuông và $AB = 2\sqrt{11}$.

Câu 9.a (1,0 điểm). Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số đều có mặt các chữ số 8 và 9?

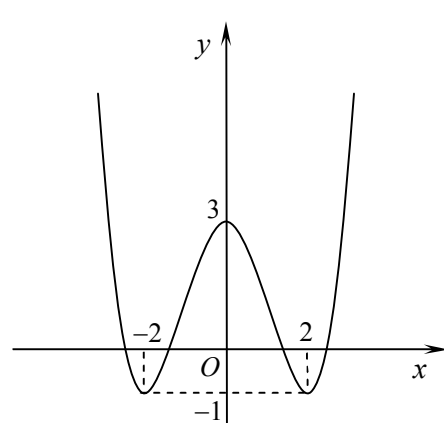
b. Theo chương trình Nâng cao

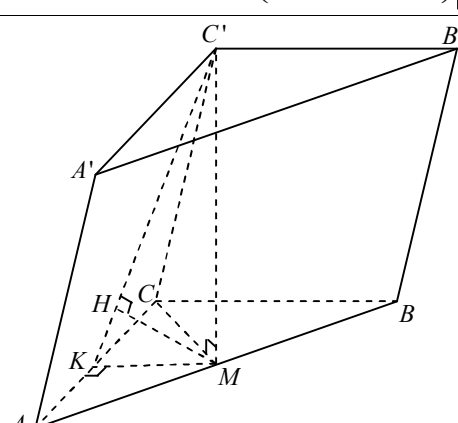
Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip (E) có tâm sai bằng $\frac{3}{5}$, biết diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của (E) bằng 24.

Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 0; -2)$, $B(3; -1; -4)$, $C(-2; 2; 0)$. Tìm điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1.

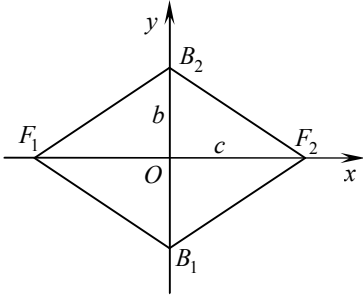
Câu 9.b (1,0 điểm). Tìm số phức z thỏa mãn $|\bar{z} + 2i| = 2\sqrt{3}$ và $(\sqrt{3} + i)\bar{z}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{3}$.

----- Hết -----

Câu	Đáp án	Điểm																								
Câu 1. (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm) Khi $m = 1$ hàm số trở thành $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; y là hàm số chẵn. b) Sự biến thiên: * Giới hạn tại vô cực: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. * Chiều biến thiên: Ta có $y' = x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}; y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < 0 \end{cases}; y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 0 < x < 2 \end{cases}.$ Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 0), (2; +\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2), (0; 2)$. * Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 3$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 2, y_{CT} = -1$.	0,5																								
	* Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> c) Đồ thị: Đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng. 	x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	y	$+\infty$		-1		3		-1		$+\infty$
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$																					
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$																		
y	$+\infty$		-1		3		-1		$+\infty$																	
	b) (1,0 điểm) Ta có $y' = x^3 - 2(m+1)x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. (C_m) có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -1. \tag{1}$ Khi đó 3 nghiệm phân biệt của $y' = 0$ là $x = 0, x = -\sqrt{2(m+1)}$ và $x = \sqrt{2(m+1)}$. Điểm cực đại của (C_m) là $A(0; 2m+1)$, hai điểm cực tiểu là $B(-\sqrt{2(m+1)}; -m^2) \text{ và } C(\sqrt{2(m+1)}; -m^2).$	0,5																								
	Nhận thấy rằng AI vuông góc với BC tại $H(0; -m^2)$ và H là trung điểm của BC. Do đó tứ giác $ABIC$ là hình thoi khi và chỉ khi H là trung điểm của AI. Hay là $\begin{cases} 2x_H = x_A + x_I \\ 2y_H = y_A + y_I \end{cases} \Leftrightarrow -2m^2 = 2m+1 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{3}{2}.$ Đối chiếu điều kiện (1) ta được giá trị của m là $m = \frac{1}{2}$.	0,5																								
Câu 2. (1,0 điểm)	Phương trình đã cho tương đương với $2\sin 2x \cos 2x + \sin x(2\sin^2 x - 1) - \sqrt{3} \cos x \cos 2x = 0$ $\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 2x - \sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0.$ *) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.	0,5																								

	*) $2\sin 2x - \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.	0,5
Câu 3. (1,0 điểm)	Điều kiện: $x \geq -2, y \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $x^2 = -2y^2 + 2x - y + 2$. Thế vào phương trình thứ nhất, ta được $x^2 + (-2y^2 + 2x - y + 2) + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1}$ $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 + \sqrt{x+2} = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$ $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{(x+1)+1} = (2y)^2 + 2y + \sqrt{2y+1}. \quad (1)$	0,5
	Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}$ với $t \geq -1$. Ta có $f'(t) = 2t+1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}; f''(t) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{(t+1)^3}}; f'''(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}$. Suy ra $f'(t) \geq f'\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$ với mọi $t \in (-1; +\infty)$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$. Suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(2y) \Leftrightarrow x+1 = 2y \Leftrightarrow x = 2y-1$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $(2y-1)^2 + 2y^2 - 2(2y-1) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$ Suy ra nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(1; 1), \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$.	0,5
Câu 4. (1,0 điểm)	Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt{4-3x})^2}$. Đặt $t = \sqrt{4-3x}$, ta có khi $x = 0$ thì $t = 2$, khi $x = 1$ thì $t = 1$ và $x = \frac{4-t^2}{3}$ nên $dx = -\frac{2t}{3}dt$.	0,5
	Khi đó ta có $V = \pi \int_2^1 \frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{-2t}{3} dt = \frac{2\pi}{3} \int_1^2 \frac{t}{(t+1)^2} dt = \frac{2\pi}{3} \int_1^2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$ $= \frac{2\pi}{3} \left(\ln t+1 + \frac{1}{t+1} \right) \Big _1^2 = \frac{2\pi}{3} \left(\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{9} \left(6 \ln \frac{3}{2} - 1 \right).$	0,5
Câu 5. (1,0 điểm)	 $S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB \sin 135^\circ = \frac{a^2}{2}$. Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ABC \Rightarrow AB = a\sqrt{5}$ $\Rightarrow CM^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ $\Rightarrow C'M = \sqrt{C'C^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$ Suy ra thể tích lăng trụ $V = C'M.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.	0,5
	Kẻ $MK \perp AC$ (K thuộc AC), $MH \perp C'K$ (H thuộc $C'K$)	0,5

	Vì $AC \perp (C'MK)$ nên $AC \perp MH \Rightarrow MH \perp (ACC'A')$ $\Rightarrow \widehat{(C'M, (ACC'A'))} = \widehat{MC'H} = \widehat{MC'K}$. (1) Vì M là trung điểm AB nên $S_{CAM} = \frac{1}{2}S_{CAB} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MK = \frac{2S_{MAC}}{AC} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \tan \widehat{MC'K} = \frac{MK}{C'M} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$ Suy ra $\widehat{MC'K} = 30^0$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{(C'M, (ACC'A'))} = 30^0$.												
Câu 6. (1,0 điểm)	Đặt $x + z = a$. Từ giả thiết bài toán ta có $(x + z)(y + z) = 1$, hay $y + z = \frac{1}{a}$. Do $x > y$ nên $x + z > y + z$. Suy ra $a > 1$. Ta có $x - y = x + z - (y + z) = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a}$. Khi đó $P = \frac{a^2}{4(a^2 - 1)^2} + \frac{1}{a^2} + a^2 = \frac{a^2}{4(a^2 - 1)^2} + \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2}\right) \geq \frac{a^2}{4(a^2 - 1)^2} + \frac{3a^2}{4} + 1$. (1)	0,5											
	Đặt $a^2 = t > 1$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{4(t-1)^2} + \frac{3t}{4} + 1$ với $t > 1$. Ta có $f'(t) = \frac{-t-1}{4(t-1)^3} + \frac{3}{4}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t^2 - 3t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$. BBT: <table><tr><td>t</td><td>1</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr></table> Dựa vào BBT ta có $f(t) \geq 3$ với mọi $t > 1$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x + z = \sqrt{2}$, $y + z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3.	t	1	2	$+\infty$	$f'(t)$	-	0	+	$f(t)$		3	
t	1	2	$+\infty$										
$f'(t)$	-	0	+										
$f(t)$		3											
Câu 7.a (1,0 điểm)	(C) có tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$, $d(I, d) = \sqrt{10} > R$ nên d không cắt (C). $M \in d \Rightarrow M(3m + 9; m)$. Từ tính chất tiếp tuyến ta có $MI \perp AB$ tại H là trung điểm AB. Trong tam giác vuông AIM ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2}$ $\Rightarrow AH^2 = \frac{AI^2 \cdot AM^2}{AI^2 + AM^2} = \frac{R^2(IM^2 - R^2)}{IM^2} = R^2 - \frac{R^4}{IM^2}.$	0,5											
	Ta có AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất ($R = \sqrt{5}$ không đổi). Mà $IM^2 = (3m + 7)^2 + (m - 1)^2 = 10(m + 2)^2 + 10 \geq 10$ nên suy ra $IM_{\min} = \sqrt{10}$ khi $m = -2$. Suy ra $M(3; -2)$.	0,5											
Câu 8.a (1,0 điểm)	ΔIAB có $IA = IB$ nên vuông tại I. Suy ra $IH = \frac{1}{2}AB = \sqrt{11}$ (H là hình chiếu của I lên AB) Suy ra $d(I, \Delta) = \sqrt{11}$ (1) Khi đó bán kính mặt cầu $R = IH\sqrt{2} = \sqrt{22}$.	0,5											
	$I \in d \Rightarrow I(2t; -t; -2t + 1); \vec{u}_{\Delta} = (1; 1; -2)$ và $M(0; 1; 2) \in \Delta \Rightarrow \vec{MI} = (2t; -t - 1; -2t - 1)$	0,5											

	$\Rightarrow [\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{MI}] = (-4t - 3; -2t + 1; -3t - 1) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{MI}]}{ \overrightarrow{u_\Delta} } = \frac{\sqrt{29t^2 + 26t + 11}}{\sqrt{6}}. \quad (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow 29t^2 + 26t - 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{55}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(2; -1; -1) \\ I\left(-\frac{110}{29}; \frac{55}{29}; \frac{139}{29}\right) \end{cases}$ Suy ra pt mặt cầu $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 22$ và $\left(x + \frac{110}{29}\right)^2 + \left(y - \frac{55}{29}\right)^2 + \left(z - \frac{139}{29}\right)^2 = 22.$	
Câu 9.a (1,0 điểm)	Giả sử số cần lập là $\overline{abcd}$, $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Xét các trường hợp sau * $d = 0$. Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có các chữ số 8 và 9 là $C_7^1 \cdot 3! = 42$.	0,5
	* $d = 8$. Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có chữ số 9 là $C_8^2 \cdot 3! - C_7^1 \cdot 2! = 154$. * $d \in \{2, 4, 6\}$. Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có các chữ số 8 và 9 là $3 \cdot (C_7^1 \cdot 3! - 2) = 120$. Vậy số các số lập được là $42 + 154 + 120 = 316$.	0,5
Câu 7.b (1,0 điểm)	 Phương trình chính tắc (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Gọi $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ là các tiêu điểm với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, và $B_1(0; -b), B_2(0; b)$ là các đỉnh trên trục bé. $\Rightarrow F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi. Suy ra $S_{F_1B_1F_2B_2} = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot B_1B_2 = \frac{1}{2}2c \cdot 2b = 2bc = 24$ $\Leftrightarrow bc = 12 \Leftrightarrow b^2c^2 = 144 \Leftrightarrow b^2(a^2 - b^2) = 144. \quad (1)$	0,5
	Tâm sai $e = 0,6 \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 25c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow 25(a^2 - b^2) = 9a^2 \Leftrightarrow 4a = 5b$ hay $a = \frac{5}{4}b. \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 5 \\ b = 4. \end{cases}$ Suy ra (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$	0,5
Câu 8.b (1,0 điểm)	$D \in (Oyz) \Rightarrow D(0; y_0; z_0)$, điều kiện $z_0 < 0$. Phương trình $(Oxy): z = 0 \Rightarrow d(D, (Oxy)) = z_0 = -z_0 = 1$. Suy ra $z_0 = -1 \Rightarrow D(0; y_0; -1)$.	0,5
	Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2), \overrightarrow{AC} = (-4; 2; 2), \overrightarrow{AD} = (-2; y_0; 1)$. Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 6; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 6y_0 - 6$ $\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = y_0 - 1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 3 \\ y_0 = -1. \end{cases}$ Suy ra $D(0; 3; -1)$ hoặc $D(0; -1; -1)$.	0,5
Câu 9.b (1,0 điểm)	Đặt $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), r > 0$. Suy ra $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$. Khi đó $(\sqrt{3} + i)\bar{z} = 2r \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \right)$. Theo giả thiết ta có $\frac{\pi}{6} - \varphi = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$. Khi đó $z = \frac{\sqrt{3}r}{2} - \frac{r}{2}i$.	0,5
	Suy ra $\bar{z} + 2i = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left \frac{\sqrt{3}r}{2} + \left(2 + \frac{r}{2}\right)i \right = 2\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \frac{3r^2}{4} + \left(2 + \frac{r}{2}\right)^2 = 12 \Leftrightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow r = 2$, vì $r > 0$. Vậy $z = \sqrt{3} - i$.	0,5