

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Phạm Minh Hưng

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐA THỨC
MỘT BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mục lục	1
Lời cảm ơn	1
Mở đầu	2
1 Kiến thức cơ sở	3
1.1 Một số khái niệm mở đầu.	3
1.2 Nghiệm của đa thức	11
1.3 Đa thức với hệ số nguyên	14
1.4 Đa thức bất khả quy	16
1.5 Đa thức nội suy	18
2 Một số bài toán liên quan đến đa thức một biến	25
2.1 Một số bài toán xác định đa thức và tìm nghiệm của đa thức	25
2.2 Một số bài toán về đa thức với hệ số nguyên.	27
2.3 Một số bài toán về tính khả quy của đa thức.	30
2.4 Một số bài toán áp dụng công thức nội suy	33
Kết luận	40
Tài liệu tham khảo	41

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được trình bày dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo GS. TSKH Hà Huy Khoái. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy giáo cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2011 - 2013, những người đã đem tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho tôi nhiều kiến thức cơ sở.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K5B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Hải Phòng, tháng 06 năm 2013.

Tác giả

Phạm Minh Hưng

MỞ ĐẦU

Đa thức một biến là vấn đề quan trọng trong kiến thức toán học của học sinh. Lý thuyết về đa thức một biến đã được phát triển từ lâu, và được đề cập tới nhiều trong các sách giáo khoa bậc phổ thông, đặc biệt là phần quan trọng khi ôn thi học sinh giỏi hay dạy các lớp nâng cao. Do đó thầy cô giáo cần có hiểu biết chuyên sâu về lĩnh vực này để có thể nâng cao hiệu quả giảng dạy.

Mục đích của luận văn này là trình bày một cách có hệ thống những kiến thức cơ bản về lý thuyết đa thức gồm các vấn đề về: nghiệm của đa thức, đa thức với hệ số nguyên, tính khả quy của đa thức, đa thức nội suy. Đồng thời luận văn cũng cố gắng xây dựng một hệ thống bài tập liên quan, có thể làm tài liệu chuyên đề cho giáo viên và học sinh, nhằm góp phần bồi dưỡng học sinh giỏi, nâng cao chất lượng giảng dạy.

Với mục đích trên luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1. Kiến thức cơ sở

Chương này nhắc lại một cách có hệ thống các kiến thức cơ sở về đa thức một biến, nghiệm của đa thức một biến, đa thức với hệ số nguyên, đa thức nội suy, tính khả quy của đa thức, có trình bày kèm theo một số ví dụ.

Chương 2. Một số bài toán liên quan đến đa thức.

Chương này áp dụng lý thuyết về đa thức một biến để phân loại và giải một số loại toán liên quan.

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Mục đích của chương là nhắc lại các kiến thức cơ sở về đa thức một biến, nghiệm của đa thức một biến, đa thức với hệ số nguyên, đa thức nội suy, tính khả quy của đa thức. Từ đó áp dụng vào giải các bài toán của chương sau.

1.1 Một số khái niệm mở đầu.

1.1.1. Khái niệm đa thức một biến.

Một đơn thức biến x là một biểu thức dạng cx^k , trong đó c là một hằng số và k là một số nguyên không âm. c có thể là một số nguyên, số hữu tỉ, số thực hay số phức.

Định nghĩa 1:

Đa thức biến x là tổng hữu hạn đơn thức biến x . Nói cách khác, nó là một biểu thức dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Nếu chỉ có hai hoặc ba số hạng trên là khác không, P được gọi là một nhị thức, hoặc tương ứng tam thức.

Các hằng số $a_0, \dots, a_n$ trong (*) là các hệ số của đa thức P . Tập hợp các đa thức với các hệ số trong A được ký hiệu là $A[x]$. Ví dụ: $R[x]$ là tập hợp của các đa thức với hệ số thực.

Chúng ta có thể giả thiết trong (*) $a_n \neq 0$ (nếu $a_n = 0$, $a_n x^n$ có thể bị xóa mà không cần thay đổi các đa thức). Khi đó, số mũ n được gọi là bậc của đa thức P và ký hiệu $\deg P$. Đặc biệt, đa thức bậc một được gọi là tuyến tính. Đa thức không $P(x) \equiv 0$ được gán bậc $-\infty$

Ví dụ 1

$$P(x) = x^3(x+1) + (1-x^2)^2 = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$$

là một đa thức với hệ số nguyên bậc 4.

$$Q(x) = 0x^2 - \sqrt{2}x + 3$$

là một đa thức tuyến tính với hệ số thực.

$$R(x) = \sqrt{x^2} = |x|, S(x) = \frac{1}{x} \text{ và } T(x) = \sqrt{2x+1}$$

không là đa thức.

Tổng, hiệu hoặc tích các đa thức là một đa thức:

$$A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots,$$

$$A(x)B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

Ví dụ 2

Cho các đa thức:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$g(x) = 4x^2 - x + 3$$

Khi đó:

$$f(x) + g(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 1) + (4x^2 - x + 3) = x^3 + 2x^2 + 2$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (4x^2 - x + 3)$$

$$= 4x^5 - 9x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 4x - 3$$

1.1.2. Định lý 1

Nếu A và B là hai đa thức, khi đó:

$$(i) \deg(A \pm B) \leq \max(\deg A, \deg B),$$

$$(ii) \deg(A.B) = \deg A + \deg B.$$

Một thương của hai đa thức không nhất thiết phải là một đa thức. Thay vào đó, như số nguyên, chúng có thể được chia với dư.

Ví dụ 3

Tìm đa thức $f(x)$ thỏa mãn các quan hệ sau:

- a) $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = (x^2 + 4)f(x)$
- b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (f(x))^2$
- c) $\deg f = 2, f(x) - f(x-1) = x$

Giải

a) Vì bậc của vế trái là 4 và hệ số cao nhất của x bằng 1 nên $f(x) = x^2 + bx + c$.

Ta khai triển đồng nhất :

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 &= (x^2 + 4)(x^2 + bx + c) \\ &= x^4 + bx^3 + (4 + c)x^2 + 4bx + 4c \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{cases} b = -2 \\ 4 + c = 6 \\ 4b = -8 \\ 4c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^2 - 2x + 2$

b) Xét $f(x) = x^2 + ax + b$

Ta khai triển đồng nhất:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 &= (x^2 + ax + b)^2 \\ &= x^4 + 2ax^3 + (2b + a)x^2 + 2ax + b^2 \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b + a = 3 \\ 2a = 2 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^2 + x + 1$

c) Bậc của $f(x)$ bằng 2 nên $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Khi đó $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$.

Đồng nhất hệ số ta được kết quả: $a = b = \frac{1}{2}$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$, c tùy ý.

1.1.3. Định lý 2

Với các đa thức A và $B \neq 0$, có duy nhất đa thức Q (thương) và đa thức R (dư) sao cho $A = BQ + R$ và $\deg R < \deg B$.

Chứng minh

Cho

$$A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

và

$$B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k.$$

Giả sử k là cố định và n thay đổi.

Đối với $n < k$ thì $Q=0$.

Giả sử $n = N \geq k$ và điều cần chứng minh là đúng đối với $n < N$.

Khi đó

$$A_1(x) = A(x) - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}B(x),$$

trong đó $B(x)$ là một đa thức bậc nhỏ hơn n (hệ số tại x^n bằng không).

Do đó theo giả thiết quy nạp, tồn tại duy nhất đa thức Q_1 và R mà $A_1 = BQ_1 + R$ và $\deg R < \deg B$. Nhưng điều này cũng có nghĩa $A = BQ + R$, khi đó

$$Q(x) = \frac{a_n}{b_k}x^{n-k} + Q_1(x).$$

Ví dụ 4

Thương khi chia $A(x) = x^3 + x^2 - 1$ cho $B(x) = x^2 - x - 3$ là $x+2$

với dư $5x + 5$, hay:

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x - 3} = x + 2 + \frac{5x + 5}{x^2 - x - 3}.$$

Chúng ta nói rằng đa thức A chia hết cho đa thức B nếu phần dư R khi chia A cho B bằng 0, nghĩa là nếu có một đa thức Q mà $A = BQ$.

Ví dụ 5

Cho $P(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$

Tìm dư trong phép chia P(x) cho:

a) $x-1$

b) $x^2 - 1$

Giải

a) Ta có

$$P(x) = (x - 1)Q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg(x - 1) = 1$$

nên $r(x) = c$.

Do đó: Chọn $x = 1 \Rightarrow P(1) = c \Rightarrow c = 6$

Vậy $r(x) = 6$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 1)H(x) + s(x), \deg s(x) < 2 \\ \Rightarrow s(x) &= ax + b \end{aligned}$$

Chọn

$$x = 1 \Rightarrow P(1) = a + b = 6$$

$$x = -1 \Rightarrow P(-1) = -a + b = -6$$

Do đó : $a=6, b=0$.

Vậy $s(x) = 6x$.

1.1.4. Định lí 3 (định lý Bezout)

Đa thức $P(x)$ chia hết cho nhị thức $x-a$ khi và chỉ khi $P(a) = 0$.

Chứng minh

Theo phép chia đa thức, tồn tại một đa thức Q và một hằng số c sao cho

$$P(x) = (x - a)Q(x) + c.$$

Như vậy $c = 0$ khi và chỉ khi $P(a) = 0$.

Một số a gọi là *nghiệm* của đa thức $P(x)$ nếu $P(a) = 0$, tức là $(x - a) \mid P(x)$.

Việc tìm nghiệm của đa thức f , có nghĩa là giải phương trình $f(x) = 0$ không phải là luôn luôn thực hiện được. Ví dụ, việc tìm nghiệm chính xác của một đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 5 không phải luôn thực hiện được. Tuy nhiên, luôn luôn có thể tìm được nghiệm gần đúng với độ chính xác tùy ý. Cụ thể, $f(a) < 0 < f(b)$ cho thấy rằng f có một nghiệm giữa a và b .

Ví dụ 6

Đa thức $x^2 - 2x - 1$ có hai nghiệm thực:

Đa thức $x^2 - 2x + 2$ không có nghiệm thực, nhưng nó có hai nghiệm phức: $x_{1,2} = 1 \pm i$.

Đa thức $x^5 - 5x + 1$ có một nghiệm trong khoảng $[1,44; 1,441]$ mà không thể tính toán chính xác được.

Tổng quát hơn, có định lý dưới đây .

1.1.5. Định lý 4

Nếu đa thức P chia hết cho đa thức Q , thì tất cả các nghiệm của Q cũng là nghiệm của P .

Điều ngược lại không đúng. Mặc dù tất cả các nghiệm của x^2 là nghiệm của x , nhưng x không chia hết cho x^2 .

Mỗi đa thức với hệ số phức có một phân tích thành nhân tử tuyến tính. Khẳng định sau đây là tương tự như định lý phân tích duy nhất số nguyên thành tích các thừa số nguyên tố.

1.1.6. Định lý 5

Đa thức $P(x)$ bậc $n > 0$ có thể biểu diễn duy nhất dạng

$$P(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

không kể thứ tự, trong đó $c \neq 0$ và $x_1, \dots, x_n$ là những số phức, không nhất thiết phải khác biệt.

Như vậy, đa thức $P(x)$ có nhiều nhất là $\deg P = n$ nghiệm khác nhau.

Chứng minh

Trước tiên, ta chứng minh sự duy nhất.

Giả sử rằng

$$P(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = d(x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_n).$$

Dễ thấy $c = d$. Ta có thể giả thiết rằng không có i, j mà $x_i = y_j$ (nếu ngược lại, các nhân tử $x-x_i$ có thể bỏ ở cả hai bên). Khi đó $P(x_i) = 0$. Mặt khác: $P(x_i) = d(x_i-y_1)\dots(x_i-y_n)$, (mâu thuẫn). Sự tồn tại được chứng minh bằng cách sử dụng định lý Liouville trong giải tích phức, hoặc theo cách trực quan hơn sẽ được chứng minh về sau.

Hệ quả: Nếu các đa thức P và Q có bậc không quá n và trùng ở $n+1$ điểm phân biệt thì chúng bằng nhau.

Nếu nhóm các nhân tử như nhau lại, ta được biểu diễn chính tắc

$$P(x) = c(x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_k)^{\alpha_k},$$

trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là các số tự nhiên sao cho $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$. Số mũ α_i được gọi là bội của nghiệm a_i . Như vậy ta có định lý sau:

1.1.7. Định lý 6

Đa thức bậc n có đúng n nghiệm phức nếu tính cả bội của chúng.

Chúng ta nói rằng hai đa thức Q và R là nguyên tố cùng nhau nếu chúng không có nghiệm chung.

Định lý sau đây là hệ quả trực tiếp của những điều đã chứng minh trên.

1.1.8. Định lý 7

Nếu đa thức P chia hết cho hai đa thức nguyên tố cùng nhau Q và R , thì nó chia hết cho $Q.R$.

Ghi chú:

Điều nói trên có thể chứng minh mà không sử dụng sự tồn tại nghiệm. Theo thuật toán Euclide, tồn tại đa thức K và L mà $KQ + LR = 1$. Bây giờ nếu $P = QS = RT$, khi đó $R(KQ + LS) = KQS + LRS = S$, và do đó $R \mid S$ và $QR \mid QS = P$.

Nếu đa thức $P(x) = x^n + \dots + a_1x + a_0$ với hệ số thực có một nghiệm phức ξ thì $P(\bar{\xi}) = \bar{\xi}^n + \dots + a_1\bar{\xi} + a_0 = \overline{P(\xi)} = 0$. Như vậy:

1.1.9. Định lý 8

Nếu ξ là một nghiệm của đa thức $P(x)$ hệ số thực, thì $\bar{\xi}$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Trong khai triển đa thức hệ số thực $P(x)$ thành nhân tử tuyến tính, chúng ta có thể nhóm các thừa số liên hợp

$$P(x) = (x - r_1) \dots (x - r_k) (x - \xi_1) (x - \bar{\xi}_1) \dots (x - \xi_l) (x - \bar{\xi}_l)$$

trong đó r_i là các nghiệm thực, ξ là nghiệm phức, và $k+2l = n = \deg P$. Đa thức $(x - \xi)(x - \bar{\xi}) = x^2 - 2\operatorname{Re}\xi x + |\xi|^2 = x^2 - p_i x + q_i$ có hệ số thực thỏa mãn $p_i^2 - 4q_i < 0$. Điều này cho thấy:

1.1.10. Định lý 9.

Đa thức $P(x)$ hệ số thực có biểu diễn duy nhất (sai khác thứ tự)

$$P(x) = (x - r_1) \dots (x - r_k) (x^2 - p_1x + q_1) \dots (x^2 - p_lx + q_l)$$

trong đó r_i, p_i, q_i là những số thực với $p_i^2 < 4q_i$ và $k+2l = n$

Từ đó suy ra rằng, đa thức hệ số thực có bậc lẻ luôn luôn có một số lẻ nghiệm (và có ít nhất một nghiệm).

1.2 Nghiệm của đa thức

Trong phần đầu tiên, chúng tôi mô tả một số đặc tính cơ bản của các đa thức. Trong phần này chúng tôi mô tả thêm một số tính chất và cuối cùng chúng tôi chứng minh rằng mỗi đa thức phức thực sự có một nghiệm.

Như chúng ta đã chỉ ra, trong một số trường hợp nghiệm của một đa thức nhất định có thể xác định chính xác.

Trường hợp của các đa thức bậc 2 đã được biết đến từ lâu. Công thức nổi tiếng về nghiệm của phương trình bậc hai có dạng

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Khi f có bậc 3 hoặc 4, các công thức mô tả phương pháp giải đã được đưa ra bởi các nhà toán học Ý Tartaglia và Ferrari trong thế kỷ thứ 16. Ta mô tả phương pháp Tartaglia giải một phương trình bậc ba.

Đầu tiên, thay thế $x = y - \frac{a}{3}$ để đưa phương trình bậc ba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ với hệ số thực về dạng $y^3 + py + q = 0$ trong đó $p = b - \frac{a^2}{3}, q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$

Đặt $y = u + v$, biến đổi phương trình này thành $u^3 + v^3 + (3uv + p)y + q = 0$. Tuy nhiên, vì u và v biến thiên, ta được phép ràng buộc bởi điều kiện $3uv + p = 0$. Do đó, phương trình trên trở thành hệ $uv = -\frac{p}{3}, u^3 + v^3 = -q$, được giải quyết một cách dễ dàng: u^3, v^3 là các nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$ và $uv = -p/3$ phải là số thực. Vì vậy ta có nghiệm:

1.2.1. Định lý 10 (công thức Cardano).

Công thức nghiệm của phương trình $y^3 + py + q = 0$ với $p, q \in \mathbb{R}$ là:

$$y_i = \varepsilon^j \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^{-j} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad j = 0, 1, 2$$

trong đó ε là một căn nguyên thủy bậc ba của đơn vị.

Một đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ được gọi là *đối xứng* nếu $a_{n-i} = a_i$ với mọi i .

Nếu $\deg f = n$ là số lẻ thì -1 là một nghiệm của f và đa thức $f(x) / (x + 1)$ là đối xứng.

Nếu $n = 2k$ chẵn, thì

$$f(x) / x^k = a_0 (x^k + x^{-k}) + \dots + a_{k-1} (x + x^{-1}) + a_k$$

là một đa thức của $y = x + x^{-1}$, vì mỗi biểu thức $x^i + x^{-i}$ đều là đa thức của y . Đặc biệt, $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$, $x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y$, ... Điều này đưa phương trình $f(x) = 0$ thành một phương trình bậc $n/2$.

Bài toán 1. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đúng bốn nghiệm mô đun bằng 1.

Giải. Đặt $y = x + x^{-1}$. Khi đó

$$\frac{f(x)}{x^3} = g(y) = y^3 - 2y^2 - 2y + 2.$$

Nhận xét rằng x có mô đun bằng 1 nếu và chỉ nếu $x = \cos t + i \sin t$, khi đó $y = 2 \cos t$; ngược lại từ $y = 2 \cos t$ suy ra rằng $x = \cos t \pm i \sin t$. Nói cách khác, $|x| = 1$ nếu và chỉ nếu y thực với $-2 \leq y \leq 2$, trong đó mỗi y như vậy tương ứng với hai giá trị của x nếu $y \neq \pm 2$. Do đó còn phải chỉ ra rằng $g(y)$ có đúng hai nghiệm thực trong khoảng $(-2, 2)$. Để làm điều đó, chỉ cần nhận xét rằng $g(-2) = -10$, $g(0) = 2$, $g(2) = -2$, và do đó g có nghiệm trong mỗi khoảng $(-2, 0)$, $(0, 2)$ và $(2, \infty)$.

Các nghiệm của đa thức liên quan đến các hệ số của chúng như thế nào? Xét đa thức mônic sau đây:

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

bậc $n > 0$. Chẳng hạn khi so sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế ta được $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$. Tương tự, khi so sánh các từ hằng số ta được: $x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_n$.

Các quan hệ tổng quát được cho bởi công thức Vieta dưới đây:

Định nghĩa 2

Đa thức đối xứng sơ cấp của các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các đa thức $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, trong đó

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

tổng lấy trên tất cả các tập con k phần tử $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ của $1, 2, \dots, n$.

Đặc biệt, $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ và $\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$. Ngoài ra, ta thường đặt $\sigma_0 = 1, \sigma_k = 0$ cho $k > n$.

1.2.2. Định lý 11 (công thức Vieta)

Nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các nghiệm của đa thức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$, thì $a_k = (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ với $k = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh

Quy nạp theo n . Trường hợp $n = 1$ là tầm thường. Giả sử rằng $n > 1$ và viết $P(x) = (x - x_n)Q(x)$, trong đó $Q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$. Ta tính toán hệ số a_k của $P(x)$ tại x_k . Vì các hệ số của $Q(x)$ tại x^{k-1} và x^k tương ứng là $a'_{k-1} = (-1)^{k-1} \sigma_{k-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ và $a'_k = (-1)^k \sigma_k(x_1, \dots, x_{n-1})$, ta có

$$a_k = -x_n a'_{k-1} + a'_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n).$$

Ví dụ 7 Các nghiệm x_1, x_2, x_3 của đa thức $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ thỏa mãn $a = x_1 + x_2 + x_3, b = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, c = x_1 x_2 x_3$

Bây giờ chúng ta chứng minh mọi đa thức đều có nghiệm phức.

1.2.3. Định lý 12 (Định lý cơ bản của Đại số)

Mọi đa thức khác hằng $P(x)$ đều có nghiệm phức

Chứng minh

Viết

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Giả sử $P(0) = a_0 \neq 0$. Đối với $r > 0$, ta gọi C_r là đường tròn trong mặt phẳng phức tâm 0 và bán kính r . Xét các đường cong liên tục $\gamma_r = P(C_r) = \{P(x) | |x| = r\}$. Đường cong mô tả bởi đơn thức x^n , tức là $\{x^n | x \in C_r\}$

bao quanh 0 n lần. Nếu r là đủ lớn, ví dụ $r > 1 + |a_0| + \dots + |a_{n-1}|$, chúng ta có $|x^n| > |a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0| = |P(x) - x^n|$, có nghĩa là phần còn lại $P(x) - x^n$ trong $P(x)$ không thể "gặp" điểm 0. Vì vậy, đường cong γ_r cũng bao quanh 0 n lần, do đó, nó chứa điểm 0 bên trong nó.

Với những r rất nhỏ γ_r gần điểm $P(0) = a_0$ và để lại 0 điểm bên ngoài nó. Như vậy, tồn tại $r = r_0$ nhỏ nhất mà điểm 0 không phải là ở bên ngoài của γ_r . Vì đường cong γ_r biến thiên liên tục như là một hàm của r , nó không thể nhảy qua điểm 0, do đó, điểm 0 nằm trên đường cong γ_{r_0} . Do đó, có một nghiệm của đa thức $P(x)$ với mô đun r_0 .

1.3 Đa thức với hệ số nguyên

Hãy xem xét một đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với hệ số nguyên. Hiệu $P(x) - P(y)$ có thể được viết dưới dạng

$$a_n(x^n - y^n) + \dots + a_2(x^2 - y^2) + a_1(x - y)$$

trong đó tất cả các số hạng là bội của đa thức $x - y$. Điều này dẫn đến tính chất số học đơn giản nhưng quan trọng của các đa thức trên $\mathbb{Z}[x]$:

1.3.1. Định lý 13

Nếu P là một đa thức với hệ số nguyên, thì $P(a) - P(b)$ chia hết cho $a - b$ với mọi số nguyên khác nhau a và b .

Đặc biệt, tất cả các nghiệm nguyên của P chia hết $P(0)$.

Có một khẳng định tương tự về nghiệm hữu tỷ của các đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$

1.3.2. Định lý 14

Nếu một số hữu tỷ p/q ($p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \text{gcd}(p, q) = 1$) là một nghiệm của đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với hệ số nguyên, thì $p | a_0$ và $q | a_n$

Chứng minh.

Ta có

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n.$$

Tất cả số hạng không kể số hạng đầu tiên là bội số của q , và tất cả không kể số hạng cuối cùng là bội số của p . Do đó $q \mid a_n p^n$ và $p \mid a_0 q^n$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.

Xét các đa thức phức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ với các nghiệm $x_1, \dots, x_n$, và $Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$ với các nghiệm $x_1^2, \dots, x_n^2$.

Chứng minh rằng nếu $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ và $a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ là các số thực, thì $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ cũng là số thực

Giải.

Chú ý rằng

$$Q(x^2) = \prod (x^2 - x_i^2) = \prod (x - x_i) \cdot \prod (x + x_i) = (-1)^n P(x) P(-x).$$

Bây giờ chúng ta có $b_1 + b_2 + \dots + b_n = Q(1) - 1 = (-1)^n P(1) P(-1) - 1 = (-1)^n (1 + B - A)(1 + B + A)$, Trong đó $A = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ và $B = a_2 + a_4 + \dots$

1.3.3. Định lý 15

Nếu giá trị của đa thức $P(x)$ là nguyên tại mỗi số nguyên x , thì có tồn tại các số nguyên $c_0, \dots, c_n$ sao cho

$$P(x) = c_n \binom{x}{n} + c_{n-1} \binom{x}{n-1} + \dots + c_0 \binom{x}{0}$$

trong đó ta kí hiệu $\binom{x}{n}$ là số tổ hợp C_x^n

Điều ngược lại cũng đúng.

Chứng minh

Ta chứng minh quy nạp theo n . Trường hợp $n = 1$ là tầm thường. Bây

giờ giả sử rằng $n > 1$. Đa thức $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ bậc $n-1$ và nhận giá trị nguyên ở tất cả các số nguyên, như vậy bởi giả thiết quy nạp, tồn tại các số nguyên $a_0, \dots, a_n$ mà

$$Q(x) = a_{n-1} \binom{x}{n-1} + \dots + a_0 \binom{x}{0}$$

Đối với mỗi số nguyên $x > 0$ ta có $P(x) = P(0) + Q(0) + Q(1) + \dots + Q(x-1)$. Sử dụng $\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \dots + \binom{x-1}{k} = \binom{x}{k+1}$ với mọi số nguyên k , ta có điều phải chứng minh.

1.4 Đa thức bất khả quy

Định nghĩa 3

Đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên được gọi là bất khả quy trên $Z[x]$ nếu nó không thể phân tích thành tích hai đa thức với hệ số nguyên bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Ví dụ 8

Mỗi đa thức bậc hai hoặc đa thức bậc ba không có nghiệm hữu tỷ là bất khả quy trên Z . ví dụ $x^2 - x - 1$ và $2x^3 - 4x + 1$.

Có thể định nghĩa tương tự về khả quy và bất khả quy trên tập hợp của các đa thức với hệ số hữu tỷ, thực hay phức. Tuy nhiên, chỉ khả quy trên $Z[x]$ là đáng quan tâm. Bổ đề Gauss dưới đây chỉ ra rằng tính khả quy trên $Q[x]$ là tương đương với khả quy trên $Z[x]$. Ngoài ra, chúng ta đã thấy rằng một đa thức thực luôn luôn được phân tích thành các thừa số tuyến tính và bậc hai trên $R[x]$, trong khi một đa thức phức luôn luôn được phân tích thành các thừa số tuyến tính trên $C[x]$.

1.4.1. Định lý 16

Nếu đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên là khả quy trên $Q[x]$, thì nó cũng khả quy trên $Z[x]$.

Chứng minh.

Giả sử $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = Q(x) R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ trong đó $Q(x)$ và $R(x)$ là các đa thức khác hằng với hệ số hữu tỷ. Giả sử q và r là những số tự nhiên nhỏ nhất mà $qQ(x) = q_k x^k + \dots + q_0$ và $rR(x) = r_m x^m + \dots + r_0$ có hệ số nguyên. Khi đó, $qrP(x) = qQ(x) \cdot rR(x)$ là phân tích của đa thức $qrP(x)$ thành hai đa thức từ $\mathbb{Z}[x]$. Căn cứ vào điều này, chúng ta sẽ xây dựng một phân tích của $P(x)$.

Cho p là một ước nguyên tố tùy ý của q . Tất cả các hệ số của $P(x)$ chia hết cho p . Giả sử i là chỉ số sao cho $p|q_0, q_1, \dots, q_{i-1}$, nhưng $p \nmid q_i$. Chúng ta có $p|a_{i+1} = q_0 r_i + \dots + q_i r_0 \equiv q_i r_0 \pmod{p}$, suy ra $p|r_0$. Hơn nữa, $p|a_{i+1} = q_0 r_{i+1} + \dots + q_i r_1 + q_{i+1} r_0 \equiv q_i r_1 \pmod{p}$ dẫn đến $p|r_1$. Tiếp tục theo cách này, chúng ta suy ra rằng $p|r_j$ cho tất cả j . Do đó $rR(x) / p$ có hệ số nguyên. Như vậy chúng ta thu được một phân tích của $qrP(x)$ thành hai đa thức từ $\mathbb{Z}[x]$. Tiếp tục quy trình này và lấy giá trị khác cho p chúng ta cuối cùng sẽ kết thúc với một phân tích của chính $P(x)$.

Từ nay trở đi, trừ khi có quy định khác, "tính khả quy" có nghĩa là tính khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Ví dụ 9 Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là số nguyên, chứng minh rằng đa thức $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$ là bất khả quy.

Giải

Giả sử $P(x) = Q(x)R(x)$ đối với những đa thức khác hằng nào đó $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$. Vì $Q(a_i)R(a_i) = -1$ với $i = 1, \dots, n$, chúng ta có $Q(a_i) = 1$ và $R(a_i) = -1$ hoặc $Q(a_i) = -1$ và $R(a_i) = 1$, suy ra $Q(a_i) + R(a_i) = 0$. Theo đó đa thức $Q(x) + R(x)$ (hiển nhiên là khác không) có n nghiệm $a_1, a_2, \dots, a_n$, điều không thể vì bậc của nó là nhỏ hơn n .

1.4.2. Định lý 17 (Tiêu chuẩn Eisenstein mở rộng)

Giả sử $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ là một đa thức với các hệ số nguyên. Nếu tồn tại một số nguyên tố p và một số nguyên $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sao cho :

$a_0, a_1, \dots, a_k$ chia hết cho p ,

a_{k+1} không chia hết cho p ,

a_0 không chia hết cho p^2 thì $P(x)$ có một thừa số bất khả quy bậc lớn hơn k .

Đặc biệt, nếu p có thể chọn sao cho $k = n - 1$, thì $P(x)$ là bất khả quy.

Chứng minh

Giống như trong sự chứng minh bổ đề Gauss, giả sử rằng $P(x) = Q(x)R(x)$, trong đó $Q(x) = q_k x^k + \dots + q_0$ và $R(x) = r_m x^m + \dots + r_0$ là các đa thức từ $\mathbb{Z}[x]$. Do $a_0 = q_0 r_0$ là chia hết cho p và không chia hết cho p^2 , có đúng một trong q_0, r_0 là bội số của p . Giả sử rằng $p|q_0$ và $p \nmid r_0$.

Hơn nữa, $p|a_1 = q_0 r_1 + q_1 r_0$, chỉ ra rằng $p|q_1 r_0$, tức là $p|q_1$, và vân vân. Chúng ta kết luận rằng tất cả các hệ số $q_0, q_1, \dots, q_k$ đều chia hết cho p , trừ $p \nmid q_{k+1}$. Theo đó $\deg Q \geq k + 1$.

Ví dụ 10

Cho một số nguyên $n > 1$, xét đa thức $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$. Chứng minh rằng không có đa thức $g(x), h(x)$ với hệ số nguyên mà $f(x) = g(x)h(x)$.

Cách giải.

Chọn $p = 5$ ta có:

$a_n = 1$ không chia hết cho 5

$a_0 = 3, a_1 = a_2 = \dots = a_{n-2} = 0, a_{n-1} = 5$ đều chia hết cho 5

$a_0 = 3$ không chia hết cho 25

Vậy theo tiêu chuẩn Eisenstein (mở rộng) thì $f(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

1.5 Đa thức nội suy

Một đa thức a bậc n được xác định duy nhất, nếu cho giá trị của nó tại $n + 1$ điểm. Vì vậy, giả sử rằng P là một đa thức bậc n và $P(x_i) = y_i$ tại các điểm khác nhau $x_0, x_1, \dots, x_n$. Tồn tại các đa thức duy nhất $E_0, E_1, \dots, E_n$ bậc n sao cho $E_i(x_i) = 1, E_i(x_j) = 0$ với $j \neq i$. Khi đó đa thức $P(x) = y_0 E_0(x) + y_1 E_1(x) + \dots + y_n E_n(x)$ có các tính chất đòi hỏi.

Thật vậy, $P(x_i) = \sum_j y_j E_j(x_i) = y_i E_i(x_i) = y_i$. Còn phải tìm các đa thức $E_0, E_1, \dots, E_n$. Một đa thức bằng không tại các điểm x_j , $j = i$, là chia hết cho $\prod_{j \neq i} (x - x_j)$. Từ đó chúng ta suy ra $E_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$

1.5.1. Đa thức nội suy Lagrange

Cho trước $[a, b]$; $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$ là tập các điểm nút và cho giá trị $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Giả sử $P_n(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$ là đa thức nội suy hàm $f(x)$, nghĩa là: $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n x_0^n + C_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + C_1 x_0 + C_0 = y_0 \\ C_n x_1^n + C_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + C_1 x_1 + C_0 = y_1 \\ \dots \\ C_n x_n^n + C_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + C_1 x_n + C_0 = y_n \end{cases}$$

Hệ có ma trận:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Hệ trên là hệ Crame nên có nghiệm duy nhất. Do đó đa thức nội suy có nghiệm duy nhất và luôn tồn tại nghiệm.

Trong trường hợp không cần phải giải hệ (1) thì người ta đặt :

$$P_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i, j=0}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i, j=0}^n (x_i - x_j)} \text{ có } P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = j \\ 0 & \text{khi } i \neq j \end{cases}$$

Khi đó : $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i P_i(x)$ (Đa thức nội suy Lagrange)

Ví dụ 11

Tìm đa thức bậc ba Q sao cho $Q(i) = 2^i$ cho $i = 0, 1, 2, 3$.

Cách giải

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6} + \frac{2x(x-2)(x-3)}{2} \\ &+ \frac{4(x-1)(x-3)}{-2} + \frac{8x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{x^3 + 5x + 6}{6} \end{aligned}$$

Kết quả nêu trên kèm theo sai số tại mỗi điểm x bất kì.

1.5.2. Đa thức nội suy Newton

***Đa thức nội suy Newton tiến trên lưới không đều nội suy hàm $f(x)$.**

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$, trên đó cho tập các điểm nút nội suy: $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ không cách đều. Khi đó ta có:

Tỉ sai phân bậc 0 của hàm $y = f(x)$ tại nút x_i là $f(x_i)$

Tỉ sai phân bậc 1 của hàm $y = f(x)$ tại nút x_i, x_j là $f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$

Tỉ sai phân bậc 2 của hàm $y = f(x)$ tại nút x_i, x_j, x_k là $f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$

Tỉ sai phân bậc k của hàm $y = f(x)$ tại nút $x_0, \dots, x_k$ là

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{x_0 - x_k}$$

Giả sử $P_n(x)$ là đa thức nội suy hàm $f(x)$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0) + (x - x_0) P_n(x_0, x_1) \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) P_n(x_0, x_1, x_2) \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) P_n(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) P_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Mặt khác, vì $P_n(x)$ là đa thức nội suy hàm $f(x)$ nên ta suy ra:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Đây chính là đa thức nội suy Newton tiến trên lưới không đều xuất phát từ nút x_0 .

Ví dụ 12

Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 0$ của hàm $y = f(x)$ với giá trị được cho bởi:

x	0	1	3	4	6
$f(x)$	1	3	2	6	4

và tính gần đúng $f(1, 25)$.

Ta có:

$$P_4(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Lập bảng tỷ sai phân ta có:

x_i	TSP bậc 0	TSP bậc 1	TSP bậc 2	TSP bậc 3	TSP bậc 4
0	1				
1	3	3			
3	2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-7}{6}$		
4	6	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	
6	4	-1	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-19}{30}$	$\frac{-13}{60}$

Do đó đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 0$ của hàm $y = f(x)$ là:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 1 + 3 \cdot (x - 0) - \frac{7}{6} (x - 0) (x - 1) \\
&\quad + \frac{2}{3} (x - 0) (x - 1) (x - 3) - \frac{13}{60} (x - 0) (x - 1) (x - 3) (x - 4) \\
&= 1 + 3x - \frac{7}{6} x (x - 1) + \frac{2}{3} x (x - 1) (x - 3) \\
&\quad - \frac{13}{60} x (x - 1) (x - 3) (x - 4) \\
&= -\frac{13}{60} x^4 + \frac{12}{5} x^3 - \frac{159}{20} x^2 + \frac{263}{30} x + 1
\end{aligned}$$

Suy ra

$$f(1, 25) \approx P_4(1, 25) = 3,695$$

***Đa thức nội suy Newton tiến trên lưới đều nội suy hàm $f(x)$.**

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$ với các nút nội suy $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ cách đều, trong đó $x_i = x_0 + ih$; $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$

Sai phân tiến cấp 1 tại x_i là $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

Sai phân tiến cấp 2 tại x_i là $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$

Sai phân tiến cấp k tại x_i là $\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i)$

Kết hợp định nghĩa tỉ sai phân ta có:

$$\begin{aligned}
f(x_i, x_{i+1}) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{\Delta f_i}{h} \\
f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) &= \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i+1}, x_{i+2})}{x_i - x_{i+2}} = \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức đa thức nội suy Newton trên lưới không đều xuất phát từ nút x_0 của hàm $y = f(x)$ bằng cách đặt $x = x_0 + th$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P_n(x_0 + th) = f(x_0) + (x_0 + th - x_0) \frac{\Delta f_0}{h} \\
&+ (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h) \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2} \\
&+ (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h) \frac{\Delta^3 f_0}{6h^3} + \dots \\
&+ (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h) \dots (x_0 + th - x_0 - (n-1)h) \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n} \\
&= f_0 + t \frac{\Delta f_0}{1!} + t(t-1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + t(t-1)(t-2) \frac{\Delta^3 f_0}{3!} \\
&+ \dots + t(t-1)(t-2) \dots (t-n+1) \frac{\Delta^n f_0}{n!}.
\end{aligned}$$

***Sai số của nội suy :** Giả sử hàm $f \in C^{n+1}[a, b]$ nghĩa là f khả vi, liên tục đến cấp $n+1$ trên $[a, b]$ và $[a, b]$ chứa tất cả các nút nội suy $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Khi đó sai số của nội suy $R_n(x)$ là:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x)$$

Trong đó: ξ là điểm phụ thuộc vào x và $\xi \in [a, b]$.

$\omega_{n+1}(x)$ là đa thức bậc $n+1$.

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

x : là điểm cần đánh giá sai số.

$$\text{Đặt } M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Ví dụ 13

Nếu P đa thức của bậc n -th nhận giá trị 1 tại các điểm 0, 2, 4, ..., $2n$. Tính $P(-1)$.

Cách giải.

$P(x)$ là tất nhiên giống nhau bằng với 1, do đó, $P(-1) = 1$. Nhưng nếu chúng ta áp dụng các đa thức Newton, đây là những gì chúng ta nhận được:

$$P(1) = \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{1-2i}{(2j-2i)} = \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{-1-2j}{(2j-2i)} = \frac{(2n+1)!}{2^n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n-i}}{(2i+1) i! (n-i)!}$$

Chương 2

Một số bài toán liên quan đến đa thức một biến

2.1 Một số bài toán xác định đa thức và tìm nghiệm của đa thức

Bài tập 1.

Đa thức monic $f(x)$ bậc 4 thỏa mãn $f(1) = 10$, $f(2) = 20$ và $f(3) = 30$. Xác định $f(12) + f(-8)$

Giải.

Đa thức $f(x) - 10x$ bằng 0 tại các điểm $x = 1, 2, 3$ nên nó chia hết cho đa thức $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Do đó, tồn tại một số c sao cho

$$f(x) - 10x = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - c)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} f(12) + f(-8) &= 11 \cdot 10 \cdot 9(12 - c) + 120 + (-9)(-10)(-11)(-8 - c) - 80 \\ &= 19840. \end{aligned}$$

Bài tập 2.

Chứng minh rằng không phải tất cả các nghiệm của đa thức có dạng $x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + \dots$ đều là số thực.

Giải.

Giả sử rằng tất cả các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ đều là số thực. Ta có

$$\sum_i x_i = -2n, \sum_{i < j} x_i x_j = 2n^2$$
tuy nhiên

$$\sum_{i < j} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(\sum_i x_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_i x_i^2 \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_i x_i \right)^2 = 2n(n-1)$$
mâu thuẫn.

Bài tập 3.

Tìm tất cả các đa thức dạng $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với $a_j \in \{-1; 1\}$ ($j = 0, 1, \dots, n$) có tất cả các nghiệm đều là nghiệm thực.

Giải.

Đặt $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm của các đa thức đã cho. Khi đó

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \left(\sum_i x_i \right)^2 - 2 \left(\sum_{i < j} x_i x_j \right) = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \leq 3$$
Đồng thời $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq n$ nên $n \leq 3$.

Trường hợp $n = 3$ chỉ có thể xảy ra nếu $x_1, x_2, \dots, x_n = \pm 1$. Bây giờ chúng ta có thể dễ dàng tìm thấy các đa thức thỏa mãn: $x \pm 1, x^2 \pm x - 1, x^3 - x \pm (x^2 - 1)$

Bài tập 4.

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của đa thức

$$f(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$
đều là nghiệm thực.

Giải.

Ta thấy $f(-\infty) = f(+\infty) = +\infty, f(1) < 0, f(3) > 0, f(5) < 0$ đa thức f có mỗi nghiệm thực trong mỗi khoảng $(-\infty; 1), (1; 3), (3; 5), (5; +\infty)$ và đa thức có đúng bốn nghiệm đó.

Bài tập 5.

Khi nào đa thức $x^n + x - 1$ chia hết cho

a) $x^2 - x + 1$

b) $x^3 - x + 1$

Giải

a) Các nghiệm của đa thức $x^2 - x + 1$ là $\varepsilon_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Nếu $x^2 - x + 1$ chia hết $x^n + x - 1$, khi đó $\varepsilon_{1,2}$ là nghiệm của đa thức $x^n + x - 1$, do đó $\varepsilon_i^n = 1 - \varepsilon_i = \varepsilon_i^{-1}$ suy ra $\varepsilon_i^{n+1} = 1$.

Nhận thấy $\varepsilon_i^6 = 1$, do đó $\varepsilon_i^k = 1$ nếu và chỉ nếu $6|k$, tức là $6|(n+1)$ hay $n = 6t-1$.

b) Nếu $f(x) = x^3 - x + 1$ chia hết $x^n + x - 1$, khi đó nó cũng chia hết $x^n + x^3$. Điều này có nghĩa là mỗi nghiệm của $f(x)$ thỏa mãn $x^{n-3} = -1$; đặc biệt, mỗi nghiệm của f có mô đun 1. Tuy nhiên, $f(x)$ có một nghiệm giữa -2 và -1 ($f(-2) < 0 < f(-1)$) mà rõ ràng là không phải của module 1. Do đó không có n như vậy.

Bài tập 6.

Giả sử đa thức P với các hệ số thực thỏa mãn với mọi x : $P(\cos x) = P(\sin x)$. Chứng minh rằng tồn tại một đa thức Q sao cho $P(x) = Q(x^4 - x^2)$ cho mỗi x .

Giải.

Do $P(-\sin x) = P(\sin x)$ và $P(-t) = P(t)$, nên $P(x) \equiv P(-x)$. Do đó, $P(x) = S(x^2)$ đối với đa thức S nào đó.

Bây giờ $S(\cos 2x) = S(\sin 2x)$ với mọi x và $S(1-t) = S(t)$ với mọi t , từ đó suy ra $S(x) = S(1-x)$. Điều này tương đương với $R(x - \frac{1}{2}) = R(\frac{1}{2} - x)$, tức là $R(y) = R(-y)$, với đa thức R nào đó. Do đó $S(x) = R(x - \frac{1}{2})$. Bây giờ $R(x) = T(x^2)$ với đa thức T nào đó, và vì vậy $P(x) = S(x^2) = R(x^2 - \frac{1}{2}) = T(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}) = Q(x^4 - x^2)$ với đa thức Q nào đó.

2.2 Một số bài toán về đa thức với hệ số nguyên.

Bài tập 1.

Tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình

a) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$

$$b) x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$$

Giải

a) Ta xét nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$. Khi đó $p|-2, q|3$ nên $x = \pm 1, x = \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}$

Thế vào phương trình ta thấy nghiệm là: $x = -2, x = \frac{1}{3}$

b)

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0$$

Tương tự ta có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{1}{2}$

Bài tập 2.

Cho đa thức bậc chẵn và tất cả các hệ số lẻ. Chứng minh đa thức không có nghiệm hữu tỉ.

Giải

Xét

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

với n chẵn và các a_i lẻ.

Giả sử đa thức có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$. Khi đó $p|a_n, q|a_0$. Suy ra p, q lẻ.

Thế $x = \frac{p}{q}$ ta có :

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$$

Vô lí, vì vế trái là tổng của một số lẻ các số hạng lẻ nên không thể bằng 0.

Vậy đa thức không có nghiệm hữu tỉ.

Bài tập 3.

Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên. Chứng minh đa thức không có nghiệm nguyên nếu $P(0)$ và $P(1)$ là các số lẻ.

Giải

Giả sử a là nghiệm nguyên của đa thức $P(x)$. Khi đó thì:

$$P(x) = (x - a)Q(x),$$

$Q(x)$ hệ số nguyên.

$$\text{Chọn } x=0 \Rightarrow P(0) = -a \cdot Q(0).$$

Vì $P(0)$ lẻ nên a lẻ. (*)

$$\text{Chọn } x = 1 \Rightarrow P(1) = (1 - a) \cdot Q(1).$$

Vì $P(1)$ lẻ nên $1-a$ lẻ, suy ra a chẵn (**)

(*) và (**) mâu thuẫn.

Vậy đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Bài tập 4.

Có hay không một đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn: $P(26)=1931$ và $P(3)=2005$.

Giải

Giả sử tồn tại một đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn: $P(26)=1931$ và $P(3)=2005$.

$$\text{Đặt } P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$\Rightarrow P(26) - P(3) = a_0(26^n - 3^n) + a_1(26^{n-1} - 3^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(26 - 3)$$

$$\Rightarrow (1931 - 2005) : (26 - 3) \Rightarrow -74 : 23 (vl)$$

Vậy không tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 5 .

Đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ có giá trị ± 1 tại ba điểm nguyên khác nhau. Chứng minh rằng nó không có nghiệm nguyên.

Giải.

Giả sử ngược lại, có a, b, c, d là các số nguyên với $P(a), P(b), P(c) \in \{-1; 1\}$ và $P(d) = 0$. Khi đó:

$$P(x) = (x - d)Q(x)$$

Suy ra:

$$P(a) = (a - d) Q(a) \in \{-1, 1\}$$

$$P(b) = (b - d) Q(b) \in \{-1, 1\}$$

$$P(c) = (c - d) Q(c) \in \{-1, 1\}$$

Do đó các số nguyên khác nhau $a-d$, $b-d$, $c-d$ đều là ước của 1 (vô lý) .

Vậy $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Bài tập 6.

Cho $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(P(\dots P(x)\dots)) = x$ đối với một số số nguyên x (trong đó P được lặp n lần), thì $P(P(x)) = x$.

Giải

Ta xét $x_0 = x$ và $x_{k+1} = P(x_k)$ với $k \geq 0$. Giả sử $x_k = x_0$. Ta biết rằng $d_i = x_{i+1} - x_i \mid P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$ cho tất cả i , cùng với $d_k = d_0$ suy ra $|d_0| = |d_1| = \dots = |d_k|$

Giả sử rằng $d_1 = d_0 = d \neq 0$. Khi đó, $d_2 = d$ (nếu không $x_3 = x_1$ và x_0 sẽ không bao giờ xuất hiện nữa). Tương tự như vậy, $d_3 = d, \dots$, và do đó $x_k = x_0 + kd \neq x_0$ với mọi k (mâu thuẫn). Khi đó $d_1 = -d_0$, nên $x_2 = x_0$.

Lưu ý rằng một đa thức có giá trị nguyên tại tất cả các điểm nguyên không nhất thiết phải có hệ số số nguyên, chẳng hạn đa thức $\frac{1}{2}x(x-1)$

2.3 Một số bài toán về tính khả quy của đa thức.

Bài tập 1.

Dùng tiêu chuẩn Eisenstein để chứng minh đa thức $x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$:

Giải

Chọn $p=2$ ta thấy:

$a_4 = 1$ không chia hết cho 2.

$a_1 = -6, a_2 = 12, a_3 = 8$ chia hết cho 2.

$a_0 = 2$ không chia hết cho 4.

Vậy theo tiêu chuẩn Eisenstein, $x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Bài tập 2.

a) Tìm a nguyên để $P(x) = (x - a)(x - 10) + 1$ khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

b) Tìm a, b, c nguyên để $P(x) = x(x - a)(x - b)(x - c) + 1$ khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Giải

a) Giả sử $P(x) = (x - a)(x - 10) + 1 = (x + m)(x + n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$

Lấy $x = -n \Rightarrow (n + a)(n + 10) = -1$.

Vì $-1 = 1 \cdot (-1) = -1 \cdot 1$ nên

$$\left[\begin{cases} n + a = -1 \\ n + 10 = 1 \\ n + a = 1 \\ n + 10 = -1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a = 8 \\ n = -9 \\ a = 12 \\ n = -11 \end{cases} \right]$$

Thử lại ta thấy:

$$a = 8 : (x - 8)(x - 10) + 1 = (x - 9)^2$$

$$a = 12 : (x - 12)(x - 10) + 1 = (x - 11)^2$$

Vậy $a=8$ hoặc $a=12$.

b) Ta xét hai trường hợp :

+ Nếu

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x - a)(x - b)(x - c) + 1 \\ &= (x + p)(x^3 + qx^2 + rx + s) \end{aligned}$$

Lấy $x=0$, a, b, c và vì $1=1 \cdot 1 = -1 \cdot (-1)$ dẫn tới mâu thuẫn vì a, b, c khác không phân biệt.

+ Nếu

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x - a)(x - b)(x - c) + 1 \\ &= (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) \end{aligned}$$

Ta cũng chọn $x=0$, a , b , c và vì $1=1.1=(-1).(-1)$ nên

$$a^2 + pa + q, b^2 + pb + q, c^2 + pc + q$$

nhận giá trị $-1, 1$. Từ đó suy ra :

$$b^2 - ab = c^2 - ac = -2, (b - c)(b + c - a) = 0$$

Ta có bốn kết quả về hệ số nguyên (a,b,c) gồm: $(3,1,2), (-3,-1,-2), (1,2,-1), (1,-1,2)$.

Bài tập 3.

Cho $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Chứng minh đa thức $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Giải

Với $n=2$ có $f(x) = x^2 + 5x + 3$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Xét $n \geq 3$. Giả sử $f(x)=g(x).h(x)$ với $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Do $\deg g(x) + \deg h(x) \geq 3$ nên trong hai số $\deg f(x), \deg h(x)$ có một số lớn hơn 1.

Vì $f(0)=3$ là số nguyên tố nên $\begin{cases} |g(0)| = 1 \\ |h(0)| = 1 \end{cases}$

Giả sử $g(x) = x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k, (k > 1)$ và $|g(0)| = 1$.

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các nghiệm (nói chung thuộc $\mathbb{C}$) của $g(x)$. Khi đó ta có:

$$g(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$$

Vì $g(0) = 1 \Rightarrow |a_1 a_2 \dots a_k| = 1$. (*)

Do $g(a_i) = 0 \Rightarrow f(a_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Từ đó

$$a_i^{n-1}(a_i + 5) = -3, i = \overline{1, k}$$

Nhân các đẳng thức đó kết hợp với (*) ta được:

$$|(a_1 + 5)(a_2 + 5) \dots (a_k + 5)| = 3^k, (**)$$

Mặt khác $|g(-5)| = |(a_1 + 5)(a_2 + 5) \dots (a_k + 5)|$

và $3=f(-5)=g(-5)h(-5)$ nên $|(a_1 + 5)(a_2 + 5) \dots (a_k + 5)|$ bằng 1 hoặc 3.

Điều này trái với $(**)$ vì $k > 1$.

Vậy đa thức $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài tập 4.

Cho n số $a_i \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$$

bất khả quy trong $\mathbb{Z}$.

Giải

Giả sử $P(x) = G(x) \cdot H(x)$ trong đó $G(x), H(x) \in \mathbb{Z}[x]$;
 $\deg G, \deg H < n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(a_i) &= G(a_i) \cdot H(a_i) = -1 \\ \Rightarrow \begin{cases} G(a_i) = 1 \\ H(a_i) = -1 \\ G(a_i) = -1 \\ H(a_i) = 1 \end{cases} &\Rightarrow G(a_i) + H(a_i) = 0 \end{aligned}$$

nên đa thức $G(x) + H(x)$ có bậc nhỏ hơn n mà có n nghiệm.

$$G(x) + H(x) \equiv 0 \Rightarrow G(x) = -H(x)$$

Suy ra : $P(x) = -H(x)^2$. So sánh hệ số của x^n thì hệ số ở vế trái lớn hơn 0, hệ số ở vế phải nhỏ hơn 0 (vô lí).

Vậy $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

2.4 Một số bài toán áp dụng công thức nội suy

Bài tập 1.

Tìm đa thức bậc 3 nội suy hàm $f(x) = 5^x$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính gần đúng $f(0,5)$

Giải.

* Tính giá trị của hàm tại các nút nội suy:

Nội suy hàm $f(x) = 5^x$ bởi đa thức nội suy Lagrange dựa vào giá trị của

hàm tại 4 nút nội suy $x_0 = -1; x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 0; x_3 = 1$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	1	5

*Áp dụng đa thức nội suy Lagrange:

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 0)(x - 1)}{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)(-1 - 0)(-1 - 1)} \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(x + 1)(x)(x - 1)}{\left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 0\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)} \\
 &+ 1 \cdot \frac{(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{(0 + 1)\left(0 + \frac{1}{2}\right)(0 - 1)} + 5 \cdot \frac{(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 0)}{(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)(1 - 0)} \\
 &= \frac{1}{15\sqrt{5}} \cdot \left[(-2\sqrt{5} + 40)x^3 + 21\sqrt{5}x^2 + (41\sqrt{5} - 40)x + 15\sqrt{5}\right]
 \end{aligned}$$

Tính gần đúng:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{5} &= 5^{\frac{1}{2}} \simeq P_3\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{15\sqrt{5}} \cdot \left[(-2\sqrt{5} + 40)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 21\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (41\sqrt{5} - 40)\frac{1}{2} + 15\sqrt{5}\right] = \frac{27 - 2\sqrt{5}}{10}
 \end{aligned}$$

Bài tập 2.

Tìm đa thức bậc 3 nội suy tốt nhất hàm $f(x) = 5^x$ trên đoạn $[-1;1]$.

Giải

* **Tìm mốc nội suy tối ưu**

Mốc nội suy tối ưu x_k là:

$$x_k = \frac{1}{2} \left\{ (b-a) \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi + (b+a) \right\}; k = 0, 1, \dots, n$$

Theo đề bài ta có 4 mốc nội suy tối ưu:

$$x_k = \frac{1}{2} \left\{ 2 \cos \frac{2k+1}{8} \pi + 2 \right\} = \left\{ \cos \frac{2k+1}{8} \pi + 1 \right\}; k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow x_0 = \cos \frac{\pi}{8} + 1; x_1 = \cos \frac{3\pi}{8} + 1; x_2 = \cos \frac{5\pi}{8} + 1; x_3 = \cos \frac{7\pi}{8} + 1$$

Đặt $a = \cos \frac{\pi}{8}$, ta có:

$$x_0 = a + 1; x_1 = (a + 1)(2a - 1)^2; x_2 = (1 - a)(2a - 1)^2; x_3 = (1 - a)$$

*** Vậy đa thức nội suy cần tìm là:**

$$P_3(x) = 5^{a+1} \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$+ 5^{(a+1)(2a-1)^2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$+ 5^{(1-a)(2a-1)^2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$+ 5^{1-a} \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_0)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_0)}$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= 5^{a+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{16a^3(1-a^2)(2a^2-1)} \\
&+ 5^{(a+1)(2a-1)^2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{16a^3(a^2-1)(2a^2-1)(4a^2-3)} \\
&+ 5^{(1-a)(2a-1)^2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{16a^3(1-a^2)(2a^2-1)(4a^2-3)} \\
&+ 5^{1-a} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_0)}{16a^3(a^2-1)(2a^2-1)}
\end{aligned}$$

Bài tập 3.

Tỷ trọng của muối ăn ở 3 nhiệt độ khác nhau cho ở bảng sau:

<i>i</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
Nhiệt độ T^0 (C)	94	205	371
Tỷ trọng p (kg/m^3)	929	902	860

Viết đa thức nội suy Lagrange qua 3 điểm trên. Tính tỷ trọng của muối ăn ở nhiệt độ 251^0 .

Giải

Vì số dữ kiện là 3, nên công thức nội suy Lagrange có bậc 2:

$$\begin{aligned}
P_2(T) &= \frac{(T-205)(T-371)}{(94-205)(94-371)}(929) + \frac{(T-94)(T-371)}{(205-94)(205-371)}(902) \\
&+ \frac{(T-94)(T-205)}{(371-94)(371-205)}(860)
\end{aligned}$$

Đặt $T = 251$ vào phương trình trên ta được:

$$\begin{aligned}
P(251^0C) &\approx P_2(251) = \frac{(251-205)(251-371)}{(94-205)(94-371)}(929) \\
&+ \frac{(251-94)(251-371)}{(205-94)(205-371)}(902) + \frac{(251-94)(251-205)}{(371-94)(371-205)}(860) \\
&= \frac{46.(-120).929}{-111.(-277)} + \frac{157.(-120).902}{111.(-166)} + \frac{157.46.860}{277.166} = 890,56 kg/m^3
\end{aligned}$$

Bài tập 4.

Tính tổng $S_n = 1 + 2^4 + \dots + n^4$.

Giải.

Có:

$$S_1 = 1; S_2 = 1^4 + 2^4; S_3 = 1^4 + 2^4 + 3^4$$

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^4$$

$$\Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n$$

$$= (n+2)^4 - (n+1)^4 = (2n+3)[(n+2)^2 + (n+1)^2]$$

$$\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = 2(2n+3)(2n+4) + 2[(n+3)^2 + (n+2)^2]$$

$$\Delta^4 S_n = \Delta^3 S_{n+1} - \Delta^3 S_n = 12(2n+5)$$

$$\Delta^5 S_n = \Delta^4 S_{n+1} - \Delta^4 S_n = 24 = \text{const}$$

Vậy S_n là đa thức bậc 5.

*Bảng sai phân:

n	S_n	ΔS_n	$\Delta^2 S_n$	$\Delta^3 S_n$	$\Delta^4 S_n$	$\Delta^5 S_n$
1	1					
		16				
2	17		65			
		81		110		
3	98		175		84	
		256		194		24
4	354		369		108	
		625		302		
5	979		671			
		1296				
6	2275					

Áp dụng công thức đa thức nội suy Newton tiến trên lưới đều xuất phát từ $x_0 = 1$ ta có $t = n - 1$ Vậy:

$$S_n = 1 + \frac{16}{1!}(n-1) + \frac{65}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{110}{3!}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{84}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \frac{24}{5!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\
& = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}
\end{aligned}$$

Bài tập 5.

Chứng minh rằng nếu đa thức bậc hai nhận giá trị nguyên tại ba giá trị nguyên liên tiếp của biến số x thì đa thức nhận giá trị nguyên tại mọi x nguyên.

Giải

Giả sử $f(k-1)$, $f(k)$, $f(k+1)$ là những số nguyên với k nguyên.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc hai $f(x)$ với ba số nguyên $k-1$, k , $k+1$ ta có:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(k-1) \frac{(x-k)(x-k-1)}{2} + f(k) \frac{(x-k+1)(x-k-1)}{-1} + \\
&+ f(k+1) \frac{(x-k)(x-k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Đặt $m=x-k$ thì:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(k-1) \frac{m(m-1)}{2} + f(k) \frac{(m+1)(m-1)}{-1} \\
&+ f(k+1) \frac{m(m+1)}{2}
\end{aligned}$$

Vì tích hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 nên $f(x)$ nguyên với mọi x nguyên.

Bài tập 6.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ có bậc ba với các hệ số thực thỏa mãn bốn điều kiện:

a) Cả hai đa thức nhận giá trị 0 hoặc 1 tại các điểm $x=1,2,3,4$.

b) Nếu $P(1)=0$ hoặc $P(2)=1$ thì $Q(1)=Q(3)=1$

c) Nếu $P(2)=0$ hoặc $P(4)=0$ thì $Q(2)=Q(4)=0$

d) Nếu $P(3)=1$ hoặc $P(4)=1$ thì $Q(1)=0$

Giải

Giả sử $\alpha_k = P(k)$, $\beta_k = Q(k)$ với $k=1,2,3,4$ còn $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức thỏa mãn đề bài. Khi đó các số có bốn chữ số $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, $\overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$ không thể bằng số 0000, 0110, 1001, 1111 vì các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ có bậc ba. Mặt khác số $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ không thể có dạng $\overline{0\alpha_21\alpha_4}$, $\overline{0\alpha_2\alpha_31}$, $\overline{\alpha_111\alpha_4}$, $\overline{\alpha_11\alpha_31}$, vì nếu không thì từ các điều kiện b) và d) ta có $\beta_1 = 1$, $\beta_1 = 0$. Từ đó theo điều kiện c) ta thấy bài toán thỏa mãn với bảy cặp số $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, $\overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$ gồm (0100;1010), (1000;0010), (1000;1000), (1000;1010), (1010;0010), (1011;0010) và (1100;1010).

Dùng công thức nội suy Lagrange ta thấy mỗi số $\overline{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}$ tương ứng với các đa thức $R(x)$ thỏa mãn các đẳng thức $P(k) = \gamma_i$, $k = 1, 2, 3, 4$. Khi đó ta nhận được sáu đa thức tương ứng:

$$R_1(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 7x + 4$$

$$R_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{19}{2}x - 6$$

$$R_3(x) = \left(-\frac{1}{6}\right)x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4$$

$$R_4(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)x^3 + 5x^2 - \frac{34}{3}x + 8$$

$$R_5(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)x^3 + 4x^2 - \frac{19}{2}x + 7$$

$$R_6(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{31}{6}x - 2$$

Như vậy cặp đa thức $(P(x), Q(x))$ trùng với một trong các cặp sau:

$$(R_2(x); R_4(x)), (R_3(x); R_1(x)), (R_3(x); R_3(x)), (R_3(x); R_4(x)),$$

$$(R_1(x); R_1(x)), (R_5(x); R_1(x)), (R_6(x); R_4(x))$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã đạt được các kết quả sau:

1. Trình bày một số khái niệm, định lí quan trọng về đa thức một biến:

* Khái niệm về đa thức, bậc của đa thức, nghiệm của đa thức.

* Đa thức với hệ số nguyên.

* Tính khả quy của đa thức, tiêu chuẩn Eisenstein mở rộng .

* Đa thức nội suy Lagrange, đa thức nội suy Newton.

2. Xét một số các bài toán liên quan tới đa thức một biến.

Các kết quả của luận văn được trình bày rải rác trong các tài liệu tham khảo. Tác giả đã tập hợp các vấn đề đó theo một hệ thống hợp với chủ đề đã chọn và xét nhiều ví dụ minh họa tương ứng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Hà Huy Khoái, Nhập môn số học thuật toán, Nhà xuất bản khoa học, 1995.
- [2] Nguyễn Minh Chương, Giải tích số, Nhà xuất bản giáo dục, 2001.
- [3] Lê Hoàng Phò , Chuyên khảo đa thức, Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh, 2003.
- [4] Đặng Văn Liệt , Giải tích số, Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh, 2004.
- [5] Hội toán học Việt Nam , Tuyển tập 5 năm tạp chí toán học tuổi trẻ, Nhà xuất bản giáo dục, 2003.
- [6] Dusan Djukic , Polynomials in one Variable, Olympiad Training Materials, 2007.