

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ VĂN LỢI

TIẾP CẬN LỜI GIẢI MỘT SỐ
BÀI TOÁN SƠ CẤP THEO
QUAN ĐIỂM TRIẾT HỌC DUY
VẬT BIỆN CHỨNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS.TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên - Năm 2013

LỜI CAM ĐOAN

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Trịnh Thanh Hải. Tôi xin cam đoan các kết quả được trình bày trong luận văn là do tôi làm và không sao chép các luận văn đã được công bố trước đó.

Tác giả

Lê Văn Lợi

Mục lục

0.1	Lí do chọn đề tài	3
0.2	Mục tiêu nghiên cứu	4
0.3	Giới hạn nghiên cứu	4
0.4	Nhiệm vụ nghiên cứu	4
0.5	Cấu trúc luận văn	4
1	MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁI CHUNG VÀ CÁI RIÊNG TRONG GIẢI TOÁN	6
1.1	Tổng quan về mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng trong giải toán	6
1.2	Một số ví dụ minh họa	8
1.2.1	Tìm ra hướng giải quyết bài toán bằng cách xét các trường hợp riêng	8
1.2.2	Xem xét bài toán dưới góc độ là cái riêng của nhiều cái chung khác nhau.	13
2	MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA MỐI LIÊN HỆ GIỮA LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN TRONG GIẢI TOÁN	25
2.1	Mối quan hệ giữa lý luận và thực tiễn	25
2.2	Một số ví dụ minh họa mối liên hệ giữa lý luận và thực tiễn	26
	Kết luận	40
	Tài liệu tham khảo	41

MỞ ĐẦU

0.1 Lí do chọn đề tài

Trong lịch sử hình thành và phát triển của xã hội loài người, triết học được coi là một trong những khoa học được hình thành sớm nhất. Triết học là công cụ, là phương pháp luận để loài người nhìn nhận, khám phá thế giới.

Triết học duy vật, đặc biệt là triết học duy vật biện chứng (DVBC) đã và đang là phương pháp luận quan trọng để loài người khám phá thế giới tự nhiên và cải tạo xã hội. Trong quá trình hình thành và phát triển của các lĩnh vực khoa học, triết học nói chung và triết học DVBC nói riêng có mối quan hệ biện chứng và sâu sắc với toán học. Triết học DVBC là phương pháp luận để nghiên cứu toán học, ngược lại sự phát triển của toán học cũng thúc đẩy sự phát triển của triết học DVBC.

Hiện nay vận dụng các quan điểm của triết học DVBC vào môn toán cũng như việc phát triển tư duy biện chứng cho học sinh trong học tập môn toán là đề tài được rất nhiều nhà toán học cũng như nhà triết học quan tâm và nghiên cứu. Tiêu biểu trong số đó có các cuốn sách Nguyễn Cảnh Toàn (1992), *Tập cho học sinh giỏi toán làm quen dần với nghiên cứu toán học*, Nhà xuất bản Giáo Dục; Nguyễn Cảnh Toàn (1997), *Phương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy, nghiên cứu toán học*, Tập 1, 2, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội; Cao Thị Hà (2007), *Phát triển tư duy biện chứng cho học sinh trong dạy học toán*, (Tài liệu dành cho học viên cao học); Đào Tam (chủ biên), Trần Trung (2010), *Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn Toán ở trường Trung học phổ thông*, Nhà xuất bản Đại học sư phạm Hà Nội.

Việc vận dụng triết học DVBC trong quá trình dạy học là một quá trình lâu dài, kéo suốt cả quá trình học tập, với nhiều hình thức phong phú từ mức độ thấp đến cao, từ đơn giản đến phức tạp bằng việc vận dụng

các quy luật, các cặp phạm trù.

Với mong muốn tìm hiểu một phần nhỏ của việc vận dụng triết học DVBC vào giải toán chúng tôi lựa chọn đề tài: "**Tiếp cận lời giải một số bài toán sơ cấp theo quan điểm triết học duy vật biện chứng**".

0.2 Mục tiêu nghiên cứu

Thông qua lời giải một số bài toán trong chương trình phổ thông để phát hiện ra mối liên hệ giữa quá trình giải toán với nội dung của triết học duy vật biện chứng.

0.3 Giới hạn nghiên cứu

Luận văn tập trung vào tìm hiểu mối liên hệ giữa việc giải toán với cặp phạm trù cái chung- cái riêng và mối quan hệ giữa lý luận-thực tiễn của triết học DVBC.

0.4 Nhiệm vụ nghiên cứu

Tìm hiểu và đưa ra được các ví dụ minh họa cụ thể cho việc vận dụng mối liên hệ giữa cái chung-cái riêng và lý luận-thực tiễn của triết học DVBC trong việc giải toán.

0.5 Cấu trúc luận văn

Luận văn ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo bao gồm có hai chương:

Chương I: Một số ví dụ minh họa mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng trong giải toán.

Chương II: Một số ví dụ minh họa mối liên hệ giữa lý luận và thực tiễn trong giải toán.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định, tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Trịnh Thanh Hải. Tôi xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tiếp theo tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo phản biện đã đọc và góp ý để tôi hoàn thiện luận văn của mình. Tôi xin được cảm ơn chân thành nhất tới Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, nơi tôi đã nhận được một học vấn sau Đại học căn bản. Xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông, chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong thời gian tôi học Cao học và viết luận văn. Lời cuối tôi xin chúc sức khỏe các thầy, cô giáo và đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 05 năm 2013

Người thực hiện

Lê Văn Lợi

Chương 1

MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁI CHUNG VÀ CÁI RIÊNG TRONG GIẢI TOÁN

1.1 Tổng quan về mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng trong giải toán

Theo GS.Nguyễn Cảnh Toàn thì "Cái riêng là phạm trù chỉ về một sự vật hiện tượng, một quá trình nhất định"; "Cái chung là phạm trù chỉ những mặt, thuộc tính được lặp lại trong nhiều sự vật hiện tượng, nhiều quá trình riêng lẻ" [13].

Ví dụ 1.1.1. Xét khái niệm tứ giác thì tứ giác lồi, tứ giác lõm, tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp, tứ giác có số đo bốn cạnh cụ thể là những khái niệm cụ thể nhất định. Các thuộc tính được lặp lại trong tứ giác lồi, tứ giác lõm, tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp, tứ giác có số đo bốn cạnh cụ thể tạo nên "cái chung" là tứ giác. Khi đó trong mối quan hệ với "cái chung" là tứ giác thì tứ giác lồi, tứ giác lõm, tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp đóng vai trò là "cái riêng".

Triết học DVBC cũng khẳng định giữa cái chung và cái riêng có mối quan hệ biện chứng với nhau. Cụ thể là: Cái riêng luôn tồn tại khách quan, cái chung chỉ tồn tại và biểu hiện thông qua cái riêng, không có cái chung trừu tượng chung chung. Cái riêng chỉ tồn tại trong mối quan hệ với cái chung, cái riêng phong phú đa dạng, cái chung sâu sắc bản chất.

Ví dụ 1.1.2. Trong ví dụ 1.1.1, các tứ giác lồi, tứ giác lõm, tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp là tồn tại khách quan, phong phú và đa dạng. Khái

niệm tứ giác chỉ tồn tại khi có các đối tượng tứ giác lồi, tứ giác lõm,...Nếu không tồn tại các đối tượng tứ giác lồi, tứ giác lõm,...thì cũng không tồn tại đối tượng tứ giác.

Như vậy, cái chung và cái riêng có mối quan hệ biện chứng không tách rời. Ta không thể lấy ví dụ về cái riêng mà tách rời ra khỏi cái chung nào đó, cũng không thể có cái chung nào nằm ngoài mà không biểu hiện qua những cái riêng.

Trong môn toán, mối quan hệ giữa cái riêng và cái chung được thể hiện như sau:

- Mỗi đối tượng toán học đều là một cái riêng có thể nằm trong nhiều đối tượng toán học khác nhau có thể coi là những cái chung.

Ví dụ 1.1.3. Ta có thể xem hình thoi là trường hợp đặc biệt:

Nếu ta nhìn hình thoi dưới góc độ các cặp cạnh đối song song thì hình thoi là "cái riêng" nằm trong "cái chung" là hình bình hành.

Nếu ta nhìn hình thoi dưới góc độ có đường tròn nội tiếp thì hình thoi là "cái riêng" nằm trong "cái chung" là tứ giác có đường tròn nội tiếp.

Nếu ta nhìn hình thoi dưới góc độ có hai đường chéo vuông góc thì hình thoi là "cái riêng" nằm trong "cái chung" là tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Với cách nhìn như vậy, GS.Nguyễn Cảnh Toàn đã xây dựng được hàng loạt định lý hay về tứ giác xuất phát từ các tính chất đơn giản của hình thoi [13].

- Ngược lại, mỗi đối tượng toán học là một "cái chung" lại được biểu hiện thông qua những "cái riêng" khác nhau. Những "cái riêng" này chính là các trường hợp đặc biệt của "cái chung" ban đầu được xét trường hợp riêng theo từng bộ phận.

Ví dụ 1.1.4. Xét đối tượng tứ giác: Xét trường hợp riêng hai cặp cạnh đối song song ta có hình bình hành.

Xét trường hợp riêng bốn cạnh bằng nhau ta được hình thoi.

Xét trường hợp riêng hai cặp cạnh đối song song và hai cạnh liền kề vuông góc ta được hình chữ nhật.

Xét trường hợp riêng tứ giác thành một góc bằng 180^0 ta được tam giác.

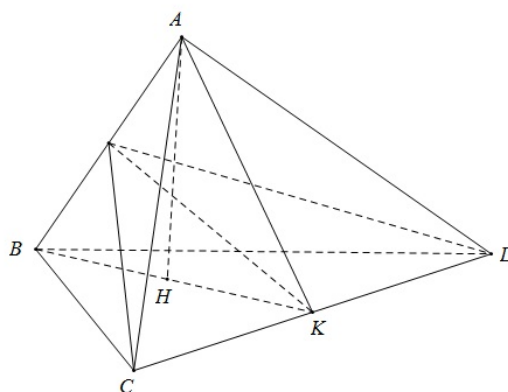
1.2 Một số ví dụ minh họa

1.2.1 Tìm ra hướng giải quyết bài toán bằng cách xét các trường hợp riêng

Ta biết rằng, một "cái chung" khi đặt trong một hoàn cảnh cụ thể sẽ trở thành "cái riêng", vì vậy một cái chung khi xét trường hợp riêng theo từng bộ phận sẽ thu được nhiều cái riêng khác nhau. Trong dạy học toán vấn đề này thể hiện năng lực đặc biệt hóa bài toán, phát triển năng lực sáng tạo toán học.

Ví dụ 1.2.1. Chứng minh rằng các cạnh đối diện của tứ diện đều $ABCD$ đôi một vuông góc với nhau.

Giải



Hình 1.1

Ta cần chứng minh: $AB \perp CD, AD \perp BC, AC \perp BD$.

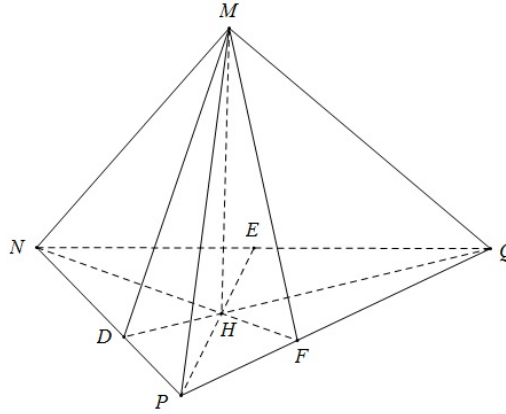
Ta gọi H là hình chiếu của A lên $mp(BCD)$, $K = BH \cap CD$. Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow CD \perp BK$.

Mặt khác, $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$.

Do đó: $CD \perp (ABK) \Rightarrow CD \perp AB$.

Tương tự ta cũng chứng minh được: $AD \perp BC, AC \perp BD$.

Từ bài toán ví dụ trên, ta có bài toán là các trường hợp riêng của bài toán trên là: "*Chứng minh rằng nếu tứ diện $MNPQ$ có hai cặp cạnh đối đôi một vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại vuông góc với nhau*". Điều dễ nhận thấy ở hai bài toán này là có giả thiết khác nhau, nhưng phần kết luận và phương pháp giải lại giống nhau.

Giải**Hình 1.2**

Ta giả sử hai cặp cạnh đối đôi một vuông góc với nhau là $MN \perp PQ$ và $MP \perp NQ$. Ta sẽ đi chứng minh $MQ \perp NP$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống $mp(NPQ)$, nghĩa là $MH \perp (NPQ)$ nên $MH \perp PQ$.

Theo giả thiết thì $MN \perp PQ \Rightarrow PQ \perp (MNH) \Rightarrow PQ \perp NH$. Ta cũng chứng minh tương tự được $NQ \perp PH$.

Gọi F, E, D theo thứ tự là giao điểm của các tia NH, PH, QH với các cạnh PQ, NQ, NP . Theo chứng minh ở trên thì NF, PE là đường cao của tam giác NPQ . Suy ra QD cũng là đường cao của tam giác $NPQ \Rightarrow QD \perp NP$. Do $MH \perp (NPQ)$ nên $MH \perp NP \Rightarrow NP \perp (MQD) \Rightarrow MQ \perp NP$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.2.2. Tính khoảng cách giữa hai cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$ biết $AC = CB = DA = DB = a; AB = p; CD = q$.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB và J là trung điểm của CD .

Ta có tam giác BCD cân tại B nên suy ra $BJ \perp CD$.

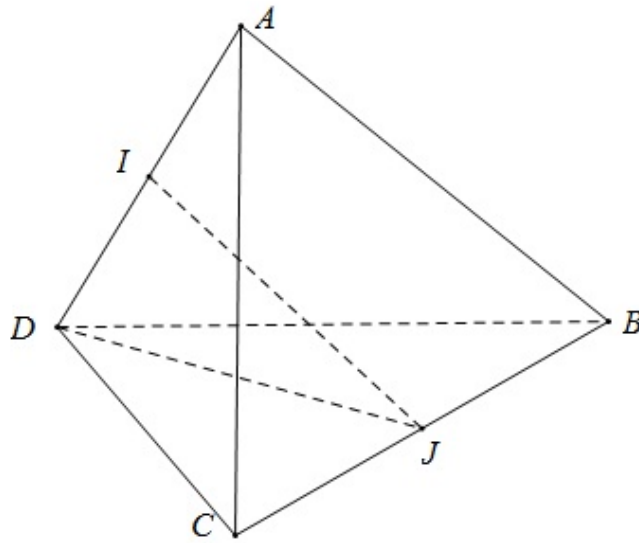
Hơn nữa, vì $AC = BD \Rightarrow AJ \perp CD$ (vì tam giác ACD cân tại A).

Do đó $IJ \perp AB$.

Suy ra IJ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD , nên IJ chính là khoảng cách của AB và CD .

Xét trong tam giác vuông BIJ , vuông tại I .

Ta có



Hình 1.3

$$\begin{aligned}
 IJ^2 &= BJ^2 - BI^2 \\
 &= BC^2 - CJ^2 - BI^2 \\
 &= a^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
 &= a^2 - \frac{p^2 + q^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Suy ra $IJ = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (p^2 + q^2)}$.

Vậy IJ là khoảng cách cần tìm của bài toán.

Từ bài toán ví dụ trên, ta có bài toán là các trường hợp riêng của bài toán trên là: "*Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a* ".

Giải

Từ lời giải trên ta có $p = q = a$ nên $IJ = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (p^2 + q^2)} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cũng có thể giáo viên ra bài toán: "*Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a* " hướng dẫn học sinh giải, rồi khái quát bài toán này lên ta được bài toán mới như trên.

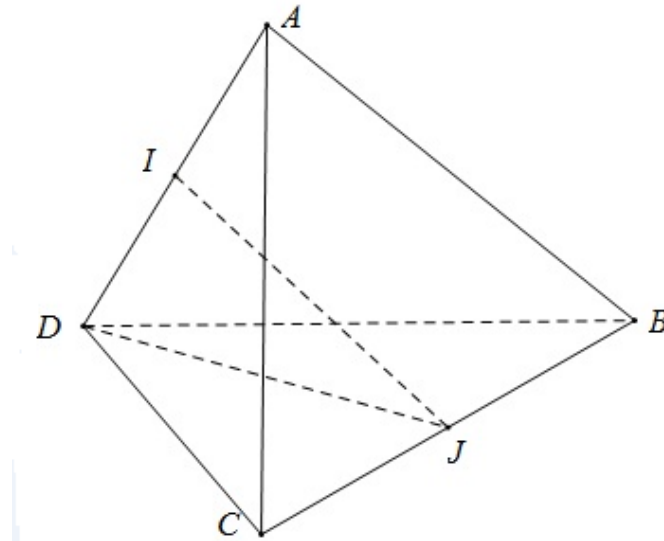
Giải

Cho tứ diện $ABCD$ đều, cạnh a nên các cặp cạnh đối diện có vai trò

như nhau.

Do đó ta chỉ cần tính khoảng cách giữa cặp cạnh đối AB và CD , rồi suy ra khoảng cách hai cặp cạnh đối còn lại.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .



Hình 1.4

Khi đó, ta có: $d(AB; CD) = IJ$.

Xét trong tam giác vuông BIJ , vuông tại I ta có

$$IJ^2 = BJ^2 - BI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 1.2.3. Xét hằng đẳng thức sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \quad (*)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] \quad (**)$$

Xét các trường hợp riêng của hằng đẳng thức trên chẳng hạn:

- +) Với a, b, c thỏa mãn: $a + b + c \geq 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.
 - +) Với $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ thì $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.
 - +) Với a, b, c là các số dương thì
- $$a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
- ...

Từ đó ta có được nhiều bài toán là các trường hợp riêng của bài toán ban đầu:

Bài 1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Bài 2. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ (Bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương).}$$

Bài 1, bài 2 suy ra trực tiếp từ hằng đẳng thức ().*

Bài 3. Giả sử phương trình $x^3 + a^2x^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm thực α, β, γ . Chứng minh rằng: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq -3c$.

Giải

Theo định lý Viet ta có

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= -a^2 \geq 0 \\ \alpha\beta\gamma &= -c\end{aligned}$$

Theo bài toán 1, ta có

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma = -3c$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\alpha = \beta = \gamma$.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh rằng: $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

Giải

Theo (**) ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right].$$

Suy ra: $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$ (đpcm).

Bài 5. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

.

Giải

Theo (**) ta có

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \frac{1}{2}(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\ &\geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2. \end{aligned}$$

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$.
Tính giá trị biểu thức:

$$p = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right).$$

Biết $xy = a; yz = b; zx = c$.

Giải

Do $a = xy, b = yz, c = xz$ khi đó $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Theo (**) suy ra

$$\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Nếu $a = b = c$ suy ra $x = y = z$. Do đó $P = 8$.

Nếu $a + b + c = 0$. Suy ra $xy + yz + zx = 0$ hay $(x + z)y = -zx$.

Nên

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \\ &= \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{z+x}{x} \\ &= \frac{(x+y)z}{yz} \cdot \frac{(y+z)x}{zx} \cdot \frac{(z+x)y}{xy} \\ &= \frac{-xy}{yz} \cdot \frac{-yz}{zx} \cdot \frac{-zx}{xy} \\ &= -1. \end{aligned}$$

1.2.2 Xem xét bài toán dưới góc độ là cái riêng của nhiều cái chung khác nhau.

Trên quan điểm triết học duy vật biện chứng về mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng suy ra mỗi đối tượng toán học đều là một cái riêng nằm trong nhiều cái chung khác nhau, mặt khác mỗi đối tượng toán học

đều gồm nhiều mặt, nhiều khía cạnh. Do đó nhìn đối tượng toán học dưới nhiều góc độ có thể cho ta thấy đối tượng đó nằm trong những cái chung khác nhau, từ đó tìm được nhiều cách giải quyết tương ứng với mỗi cái chung đó.

Ví dụ 1.2.4.

Bài toán 1: Chứng minh rằng với mọi $x \in [1; 3]$ thì

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \leq 2 \quad (1)$$

Lời giải

Cách 1: (Phương pháp biến đổi tương đương)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(3-x)} \leq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Cách 2: (Phương pháp đánh giá)

$$\text{Đặt } A = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}, \text{ ta có: } A^2 = 2 + 2\sqrt{1 - (x-2)^2} \leq 4 \Rightarrow A \leq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Cách 3: (Áp dụng các BĐT cơ bản)

*) BĐT Cauchy:

$$\text{- Hướng 1: } \sqrt{(x-1) \cdot 1} \leq \frac{x}{2}; \sqrt{(x-3) \cdot 1} \leq \frac{4-x}{2} \text{ sau đó cộng lại.}$$

$$\text{- Hướng 2: } A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \leq 2 + (x-1) + (3-x) = 4 \text{ suy ra } A \leq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

*) BĐT Bunhiacopxki:

$$A^2 = (1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{3-x})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-1 + 3-x) = 4 \Rightarrow A \leq 2.$$

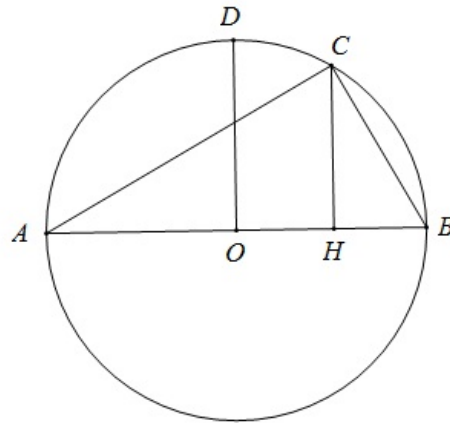
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Cách 4: (Phương pháp vectơ)

Đặt $\vec{a} = (1; 1); \vec{b} = (\sqrt{x-1}; \sqrt{3-x})$. Từ BĐT $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ suy ra $A \leq 2$.

Cách 5: (Phương pháp hình học)

Vẽ đường tròn đường kính $AB = 2$, tâm O (Hình 1.5). Với $x \in [1; 3]$, trên AB lấy điểm H sao cho $AH = x-1; BH = 3-x$. Từ H, O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt nửa tròn (O) lần lượt tại C và D . Ta có $CH = \sqrt{(x-1)(3-x)} \leq OD = 2 \Rightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2 \leq 4$.



Hình 1.5

Suy ra $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \leq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Cách 6: (Sử dụng tập giá trị của hàm số)

Xét hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ với $x \in [1; 3]$.

- Hướng 1: (Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình).

Gọi T là tập giá trị của hàm số $y_0 \in T \Leftrightarrow y_0 = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ có nghiệm $x \in [1; 3]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \geq 0 \\ y_0^2 = 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \end{cases} \text{ có nghiệm } x \in [1; 3].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \geq \sqrt{2} \\ x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{4}(y_0^2 - 2)^2 = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm } x \in [1; 3].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \geq \sqrt{2} \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq y_0 \leq 2.$$

- Hướng 2: (Sử dụng điều kiện có nghiệm của hệ phương trình đối xứng).

Ta tìm y_0 để phương trình $y_0 = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ có nghiệm.

Đặt $u = \sqrt{x-1}; v = \sqrt{3-x}$ ($u \geq 0, v \geq 0$).

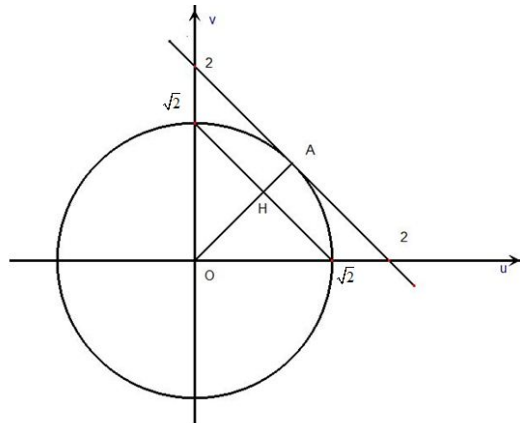
$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u + v = y_0 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = y_0 \\ u \cdot v = \frac{1}{2}(y_0^2 - 2) \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm không âm khi và chỉ khi:

Phương trình: $X^2 - y_0X + \frac{1}{2}(y_0^2 - 2) = 0$ có hai nghiệm không âm.

Điều này tương đương với
$$\begin{cases} \Delta = y_0^2 - 2(y_0^2 - 2) \geq 0 \\ y_0 \geq 0 \\ y_0 - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq y_0 \leq 2.$$

- Hướng 3: (Sử dụng điều kiện có nghiệm của hệ phương trình đối xứng bằng đồ thị).



Hình 1.6

Thực hiện lý luận như hướng 2 ta tìm y_0 để hệ sau có nghiệm bằng phương

pháp đồ thị (Hình 1.6):
$$\begin{cases} u + v = y_0 \\ u^2 + v^2 = 2 \\ u \geq 0; v \geq 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi khoảng cách $d(O, d)$ từ tâm O của đường tròn $u^2 + v^2 = 2$ đến đường thẳng $d: u + v = y_0$ thỏa mãn

$$OH \leq d(O, d) \leq OA \Leftrightarrow 1 \leq \frac{|y_0|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq y_0 \leq 2.$$

Cách 7: (Phương pháp lượng giác)

Từ điều kiện $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq x - 2 \leq 1$. Đặt $x - 2 = \cos \alpha; \alpha \in [0; \pi]$.

Ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \\
 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\
 &= 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\
 &\leq 2.
 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2$.

Cách 8: (Phương pháp phản chứng)

Giả sử $\exists x_0 \in [1; 3] : \sqrt{x_0 - 1} + \sqrt{3 - x_0} > 2$. Ta có:

$\sqrt{x_0 - 1} + \sqrt{3 - x_0} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 1)(3 - x_0)} > 1 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 < 0$. Vô lí.

***) Nhận xét:** Từ một cái chung của bài toán ta tìm ra rất nhiều cái riêng để đưa ra các phương pháp giải khác nhau.

**) Từ bài toán (1) ta có thể mở rộng thành các bài toán như sau:*

Bài toán 1.1:

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$.

Trong các cách giải trên ta đã tìm được tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$ là $T = [\sqrt{2}; 2]$ nên $\min A = \sqrt{2}$ và $\max A = 2$.

Bài toán 1.2:

- Xác định m để bất phương trình $\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} \geq m$ có nghiệm?

- Xác định m để bất phương trình $\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} \geq m$ thỏa mãn với $\forall x \in [1; 3]$?

- Xác định m để bất phương trình $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} \leq m$ có nghiệm?

- Xác định m để bất phương trình $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} \leq m$ thỏa mãn với $\forall x \in [1; 3]$?

Bài toán 1.3:

Tìm m để phương trình có nghiệm: $\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} = m$.

Giải

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} = m; 1 \leq x \leq 3; m > 0.$$

$$\text{Ta có } (\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x})^2 = m^2$$

$$\text{Suy ra } 2 + 2\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{3 - x} = m^2$$

$$\text{Mà } 0 \leq 2 + 2\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{3 - x} = m^2 \leq (x - 1) + (3 - x) = 2$$

Suy ra

$$2 \leq 2 + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{3-x} \leq 4$$

$$\Rightarrow 2 \leq m^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 2$$

Với $m = \sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Với $m = 2$ khi $x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm khi $\sqrt{2} \leq m \leq 2$.

Bài toán 1.4:

Xác định m để phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(x-1)(3-x)} = m$ có nghiệm?

Giải

Đặt $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(x-1)(3-x)}$; $x \in [1; 3]$.

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \geq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \geq \sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = 3$.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(x-1)(3-x)} \\ &\geq \sqrt{2} + \sqrt{(x-1)(3-x)} \geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Suy ra $\min A = \sqrt{2}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2 \leq 2[(x-1) + (3-x)] = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \leq \sqrt{2}. \quad (1)$$

$$\text{Và } (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}) \leq \frac{(x-1) + (3-x)}{2} = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(x-1)(3-x)} \leq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra $\max A = 3$.

Vậy để phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(x-1)(3-x)} = m$ có nghiệm thì

$$\begin{aligned} \min A &\leq m \leq \max A \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} &\leq m \leq 3. \end{aligned}$$

Bài toán 1.5:

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x}$.

Giải

$x \in [1; 3]$, do điều kiện $x-1 \geq 0; 3-x \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt[4]{x-1} = 1.1.1\sqrt[4]{x-1} \leq \frac{1+1+1+(x-1)}{4} = \frac{2+x}{4}$$

$$\sqrt[4]{3-x} = 1.1.1\sqrt[4]{3-x} \leq \frac{1+1+1+(3-x)}{4} = \frac{6-x}{4}.$$

Từ đó có: $y \leq \frac{2+x}{4} + \frac{6-x}{4} = 2.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x-1} = 1 \\ \sqrt[4]{3-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy $\max y = 2$.

Ví dụ 1.2.5.

Bài toán 2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \leq 3$.

Lời giải

Cách 1: Nhìn bài toán dưới góc độ điều kiện thì bài toán nằm trong cái chung là bài toán bất đẳng thức có điều kiện. Từ đó ta có cách giải quyết tương ứng như sau:

Coi điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ như phương trình bậc hai theo a , ta được

$$a = \frac{-bc + \sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}}{2} \quad (*)$$

Do a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

Nên ta có $0 \leq a^2 \leq 4; 0 \leq b^2 \leq 4; 0 \leq c^2 \leq 4$. Áp dụng BĐT Cauchy cho vế phải của (*) ta có

$$a \leq \frac{-bc + \frac{4-b^2+4-c^2}{2}}{2} = \frac{8-(b+c)^2}{4}.$$

Từ đó

$a + b + c = \frac{8 - (b + c)^2 + 4(b + c)}{4} = \frac{12 - (b + c - 2)^2}{4} \leq \frac{12}{4} = 3$ (điều phải chứng minh).

Cách 2: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy).

Chứng minh:

Từ điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ta suy ra $a, b, c \in (0; 2)$.

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số $2 - a, 2 - b, 2 - c$. Ta có

$$27(2 - a)(2 - b)(2 - c) \leq (2 - a + 2 - b + 2 - c)^3$$

$$\Leftrightarrow 27(8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc) \leq (6 - a - b - c)^3$$

$$\Leftrightarrow 27(8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2 - 4) \leq (6 - a - b - c)^3$$

$$\Leftrightarrow 27(s^2 - 4s + 4) \leq (6 - s)^3$$

$$\Leftrightarrow (s - 3)(s^2 + 12s + 36) \leq 0.$$

Từ đó suy ra $s \leq 3$.

Cách 3: Nhìn bài toán dưới góc độ là bài toán có thể dồn biến theo điều kiện, ta có cách giải quyết như sau:

Chứng minh: Đặt $t = \frac{b + c}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} 4 &= a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4 = a^2 + 2t^2 + at^2 + (b^2 + c^2 - 2t^2) + a(bc - t^2) \\ &= a^2 + 2t^2 + at^2 + \frac{(2 - a)(b - c)^2}{4} \geq a^2 + (2 + a)t^2. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra $t^2 \leq 2 - a$.

Vì vậy

$$4 = a + b + c = a + 2t \leq a + 2\sqrt{2 - a} = a + 2\sqrt{2 - a} \leq a + 1 + 2 - a = 3.$$

Cách 4: Phương pháp lượng giác.

Chứng minh:

Do điều kiện $a, b, c \in (0; 2)$ nên có thể đặt $a = 2\cos A$ và $b = 2\cos B$, với A, B là các góc nhọn.

Khi đó, tính c theo a, b ta được

$$\begin{aligned} c &= \frac{-ab + \sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}}{2} \\ &= \frac{-4\cos A \cos B + 4\sin A \sin B}{2} \\ &= -2\cos(A+B) = 2\cos(\pi - A - B). \end{aligned}$$

Vậy $c = 2\cos C$ với $A + B + C = \pi$.

Như thế điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ đã được tham số hóa thành $a = 2\cos A, b = 2\cos B, c = 2\cos C$ với $A + B + C = \pi; A, B, C > 0$. Yêu cầu bài toán trở thành bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác:

$$\begin{aligned} P &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \\ &\leq 2\sin\frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \\ &= \frac{3}{2} - 2\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.6.

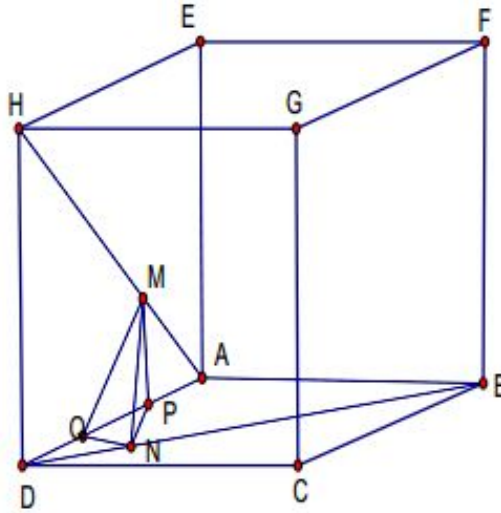
Bài toán 3: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a . Hãy xác định và tính độ dài đường vuông góc chung AH và DB .

Lời giải

Cách 1: Phương pháp tổng hợp

Trên hình vẽ 1.7: M trên AH ; N trên DB ; MN là đường vuông góc chung của AH và DB . Từ M kẻ $MP \perp AD, (P \in AD)$ thì $MP \perp mp(ABCD)$ và $PN \perp DB$ (theo định lý ba đường vuông góc). Tương tự, kẻ $NQ \perp AD, (Q \in AD)$ thì $NQ \perp mp(ADHE)$ và $QM \perp AH$. Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên $DQ = QN = QP = PM = PA = \frac{a}{3}$. Lại có $PN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$;

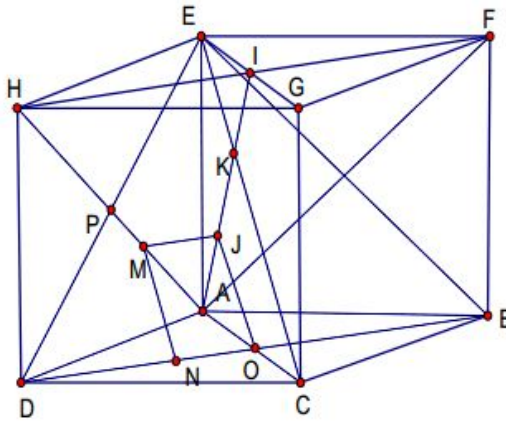
$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 1.7

Cách xác định vị trí các điểm M và N suy ra hai điểm P và Q chia đoạn DA thành ba phần bằng nhau.

Cách 2: Phương pháp tổng hợp



Hình 1.8

Ta có $HF \parallel DB$ và tam giác AHF đều. Mặt phẳng (AHF) qua AH và song song với DB . Gọi I, O, P theo thứ tự là tâm của các hình vuông $EFGH, ABCD, AEHD$. CE cắt mp(AHF) tại K là giao của AI và CE . Dễ thấy K là trọng tâm của tam giác AHF . $FI \perp EC$ nên $FI \perp (EGCA)$ do đó $FI \perp CK$. Tương tự $HP \perp (CDE)$ nên $HP \perp CK$. Suy ra $CK \perp (CHF)$. Từ O kẻ $OJ \parallel CK$. Từ J kẻ $JM \parallel HI$. Từ M kẻ $MN \parallel JO$. Tứ giác $OJMN$ là hình chữ nhật và MN là đường vuông góc chung của AH và DB .

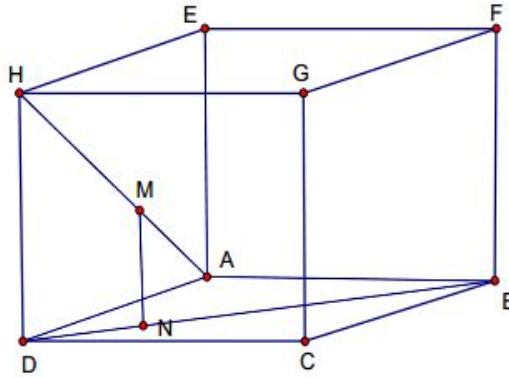
Ta có

$$MN = OJ = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{3}CE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$NO = MJ = \frac{1}{3}HI = \frac{1}{6}CEBD$$

và $DN = \frac{1}{3}DB$; $\frac{AM}{AH} = \frac{AJ}{AI} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3}AH$. Từ đó suy ra cách xác định vị trí các điểm M, N .

Cách 3: Phương pháp vectơ



Hình 1.9

Lấy A làm gốc và ba vectơ cơ sở là

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}; |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$$

và

$$\overrightarrow{AH} = \vec{a} + \vec{c}; \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AH} = k(\vec{a} + \vec{c}),$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{DN} = m.\overrightarrow{DB} = m(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}) - k(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= (1 - m - k)\vec{a} + m\vec{b} - k\vec{c}. \end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ nên

$$\left((1 - m - k)\vec{a} + m\vec{b} - k\vec{c}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = ma^2 + (k + m - 1)a^2 = 0$$

suy ra $2m + k - 1 = 0$.

Vì $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$

(1)

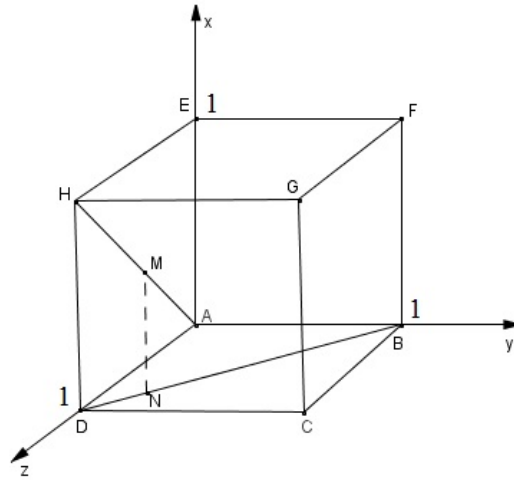
nên $\left((1-m-k)\vec{a} + m\vec{b} - k\vec{c}\right)(\vec{a} + \vec{c}) \Rightarrow 1-m-2k=0. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta thu được $m=k=\frac{1}{3}$, do đó

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}, MN^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Từ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ ta xác định được vị trí các điểm M, N .

Cách 4: Phương pháp tọa độ



Hình 1.10

Lấy góc tam diện vuông đỉnh A của hình lập phương làm hệ trục chuẩn $Axyz$. Các đỉnh D, B, E lần lượt nằm trên Ax, Ay, Az . Để tiện tính toán lấy cạnh hình lập phương $a=1$.

Tọa độ các đỉnh $A(0;0;0), D(1;0;0), B(0;1;0), E(0;0;1), C(1;1;0), G(1;1;1), H(0;1;1)$,

Vì $\overrightarrow{AH} = (1; 0; 1)$ nên phương trình dạng tham số của AH là
$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = 0 \ (t_1 \in \mathbb{R}) \\ z = t_1 \end{cases}$$

Ta lại có $\overrightarrow{AH} = (-1; 1; 0)$ nên phương trình dạng tham số của đường thẳng

DB là
$$\begin{cases} x = -t_2 + 1 \\ y = t_2 \ (t_2 \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$$

Do $MN \perp DB$ và $MN \perp AH$ nên vectơ chỉ phương của $\overrightarrow{MN}$ là

$$\vec{u}_{MN} = [\vec{u}_{AH}, \vec{u}_{DB}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; -1; 1).$$

$M \in AH$, tọa độ của $M(t_1; 0; t_1)$, $N \in DB$, tọa độ của $N(-t_2 + 1; t_2; 0)$.
 $\overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{u}_{MN} = (-k; -k; k)$ nên ta có phương trình

$$\begin{cases} -t_2 - t_1 + 1 = -k \\ t_2 = -k \\ -t_1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ t_1 = \frac{1}{3} \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Do đó $M\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$, $N\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 (khi $a = 1$).

Vậy với a tùy ý thì $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chương 2

MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA MỐI LIÊN HỆ GIỮA LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN TRONG GIẢI TOÁN

2.1 Mối quan hệ giữa lý luận và thực tiễn

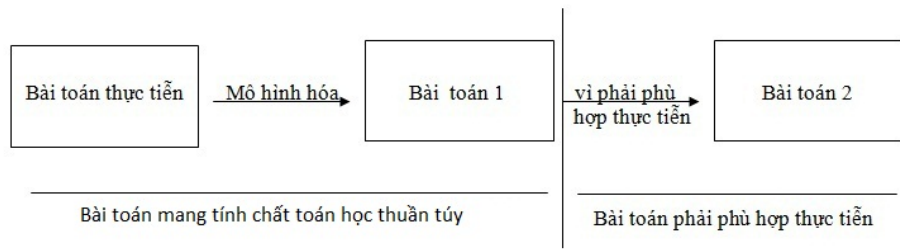
Giữa lý luận và thực tiễn có mối quan hệ biện chứng với nhau, tác động qua lại lẫn nhau. Việc quán triệt mối quan hệ này có ý nghĩa quan trọng trong nhận thức khoa học và hoạt động thực tiễn cách mạng. Con người quan hệ với thế giới bắt đầu từ thực tiễn. Lý luận là hệ thống sản phẩm tri thức được khái quát từ thực tiễn nhờ sự phát triển cao của nhận thức.

Thực tiễn là cơ sở, mục đích và động lực chủ yếu của nhận thức, lý luận. Thực tiễn cung cấp tài liệu cho nhận thức, không có thực tiễn thì không có nhận thức. Mọi tri thức khoa học dù trực tiếp hay gián tiếp thì xét đến cùng đều bắt nguồn từ thực tiễn. Nhận thức, lý luận sau khi ra đời phải quay về phục vụ thực tiễn, hướng dẫn và chỉ đạo thực tiễn. Ngược lại, thực tiễn là công cụ xác nhận, kiểm nghiệm tri thức thu được là đúng hay sai, chân lý hay sai lầm và nghiêm khắc chứng minh chân lý, bác bỏ sai lầm - "Thực tiễn là tiêu chuẩn của chân lý". Cần coi trọng thực tiễn. Việc nhận thức phải xuất phát từ thực tiễn, dựa trên cơ sở thực tiễn, đi sâu đi sát thực tiễn, nghiên cứu lý luận phải liên hệ với thực tiễn, "học đi đôi với hành". Chủ tịch Hồ Chí Minh đã viết: "Thống nhất giữa lý luận và thực tiễn là một nguyên tắc căn bản của chủ nghĩa Mác - Lênin. Thực tiễn không có lý luận hướng dẫn thì thành thực tiễn mù quáng. Lý luận mà không liên hệ với thực tiễn là lý luận suông".

Theo Giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn, trong dạy học không nên đi theo con đường sao chép lý luận ở đâu đó rồi nhồi cho người học, vì học như vậy là kiểu học sách vở. Nên theo con đường có một lý luận hướng dẫn ban đầu rồi bắt tay hoạt động thực tiễn, dùng thực tiễn này mà củng cố lý luận, kế thừa có phê phán lý luận của người khác, rồi lại hoạt động thực tiễn, cứ thế theo mối quan hệ qua lại giữa lý luận và thực tiễn mà đi lên.

2.2 Một số ví dụ minh họa mối liên hệ giữa lý luận và thực tiễn

Việc giải các bài toán có yếu tố thực tiễn có thể triển khai theo sơ đồ hình 2.11.



Hình 2.1

Ví dụ 2.2.1. Cho một con sông giả thiết hai bờ sông song song với nhau và hai ngôi nhà A, B . Hãy xây dựng con đường đi từ A đến B sao cho là ngắn nhất.

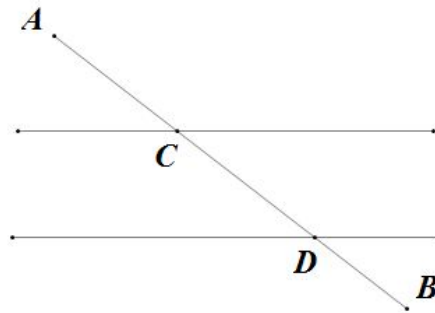
Lời giải

Trường hợp 1: Hai địa điểm cùng một phía bờ sông khi đó con đường cần tìm là đoạn ngắn nhất AB .



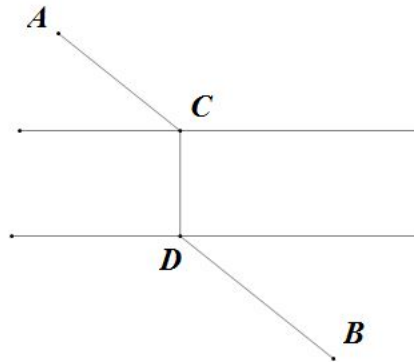
Hình 2.2

Trường hợp 2: Hai địa điểm ở hai bên bờ sông.
Một số học sinh đưa ra lời giải như sau (Hình 2.3)



Hình 2.3

Xét về yếu tố thực tiễn thì không phù hợp vì không ai bắc cầu "chéo" mà thường là bắc vuông góc với nhau (Hình 2.4).



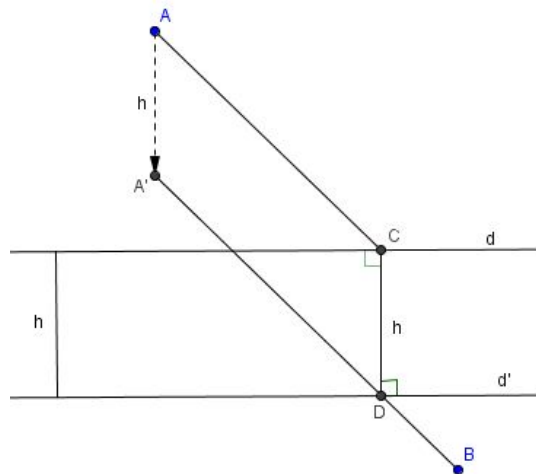
Hình 2.4

Từ A ta tịnh tiến một khoảng bằng h ta được điểm A' (Hình 2.5).

Ta nối $A'B$ cắt d' tại D .

Ta dựng DC vuông góc với d cắt d tại C .

Vậy đoạn CD chính là cây cầu cần phải dựng.



Hình 2.5

Thật vậy, ta có:

$$AC + CD + DB = AC + DB + h = A'D + DB + h.$$

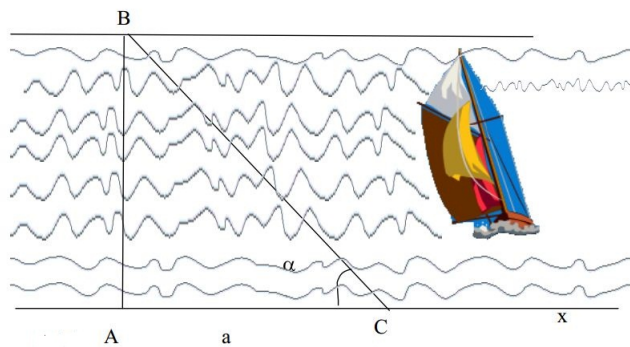
Mà $A'D + DB$ là nhỏ nhất vì A', B, D thẳng hàng.

Ví dụ 2.2.2. Đo khoảng cách.

Hãy xác định chiều rộng của một khúc sông thực tiễn cho thấy không ai đi qua sông để đo, không đo trực tiếp AB mà chỉ đánh AB qua các yếu tố khác là (a, α) để xác định và việc đo đạc chỉ tiến hành bên một bờ sông.

Chuẩn bị dụng cụ: Êke đặc, giác kế, thước cuộn, máy tính bỏ túi hoặc bảng lượng giác.

Hướng dẫn học sinh thực hiện:



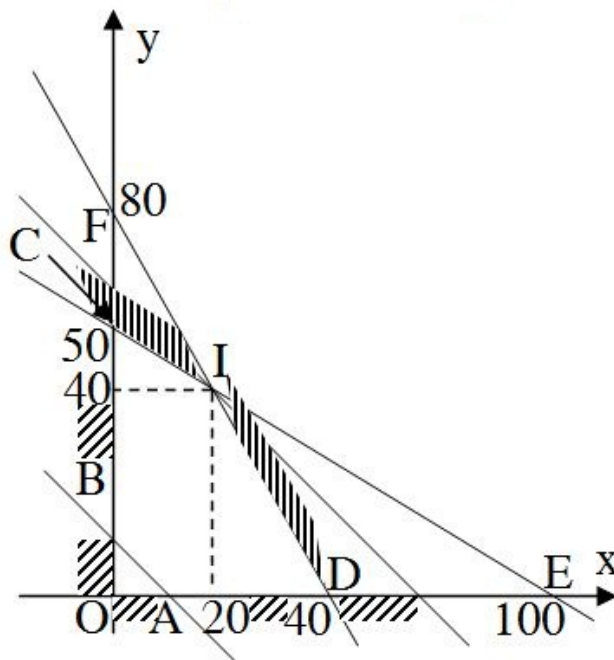
Hình 2.6

Giả thiết hai bờ sông song song với nhau. Chọn một điểm B bên kia sông, lấy một điểm A bên này sông sao cho AB vuông góc với các bờ sông. Dùng Êke đặc kẻ đường thẳng Ax phía bên này sông sao cho Ax vuông góc với AB . Lấy một điểm C trên Ax và đo AC . Giả sử đo $AC = a$, dùng giác kế đo góc ABC , giả sử $\widehat{ABC} = \alpha$. Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng lượng giác để tính $\tan \alpha$. Vậy chiều rộng của khúc sông là:

$$AB = a \cdot \tan \alpha.$$

Ví dụ 2.2.3. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30000 đồng.

Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?



Hình 2.7

Lời giải

Từ bài toán thực tiễn trên ta đưa đến bài toán lý thuyết và tìm giá trị lớn nhất của $L = 40000x + 30000y$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \end{cases}$$

Tuy nhiên trên thực tế thì số nguyên liệu x, y không âm nên ta có bài toán tiếp theo là tìm x, y thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \leq 80 \end{cases}$$

sao cho $4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.

Trên hình 2.14 ta ký hiệu $C(0; 50)$, $D(40; 0)$, $E(100; 0)$, $F(0; 80)$. I là giao điểm của CE và DF . Dễ thấy tọa độ của I là $(20; 40)$, miền nghiệm của hệ phương trình là miền tứ giác $OCID$ (kể cả biên).

Với mỗi L xác định, ta nhận thấy có vô số điểm $M(x; y)$ sao cho $4x + 3y = L$, những điểm M như thế nằm trên đường thẳng AB với $A(L/4; 0)$, $B(0; L/3)$. Hệ số góc của đường thẳng AB là $-4/3$. Cho L lớn dần lên thì đường thẳng AB sẽ "tịnh tiến dần lên" phía trên. Nhìn vào hình vẽ ta nhận thấy rằng: Trong những đường thẳng có hệ số góc $-4/3$, thì đường thẳng đi qua I là đường thẳng ở vị trí "cao nhất" đang còn có điểm chung với tứ giác $OCID$. Chưa đạt tới vị trí này thì L chưa phải là lớn nhất.

Vượt quá ngưỡng này thì tọa độ của mọi điểm trên đường thẳng sẽ không còn thỏa mãn hệ điều kiện ràng buộc nữa. Từ đó dễ dàng đi đến kết luận là khi $x = 20, y = 40$ thì L đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 2.2.4. Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

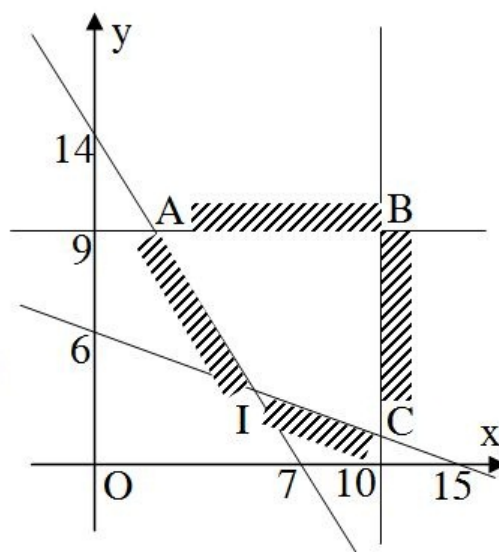
Lời giải

Trước hết ta hãy đặt Bài toán thành hệ bất phương trình.

Gọi $x, y (x, y \in \mathbb{N})$ lần lượt là số xe loại MITSUBISHI, loại FORD cần thuê. Từ bài toán ta được hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases} \quad (*)$$

Tổng chi phí $T(x, y) = 4x + 3y$ (triệu đồng). Vì số lượng xe ô tô phải là số nguyên nên thực chất của Bài toán này là tìm x, y nguyên không âm thỏa mãn hệ (*) sao cho $T(x, y)$ nhỏ nhất.



Hình 2.8

Bước tiếp theo là ta tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Miền nghiệm là miền tứ giác lồi $IABC$.

Ta cần xác định tọa độ x, y của một điểm thuộc miền tứ giác $IABC$ (kể cả biên) sao cho $T(x, y) = 4x + 3y$ đạt cực tiểu. Xét họ đường thẳng cho bởi phương trình: $4x + 3y = T (T \in \mathbb{R})$ hay $y = -\frac{4}{3}x + \frac{T}{3}$, ta thấy đường thẳng này song song với đường thẳng $y = -\frac{4}{3}x (T \neq 0)$. Khi T tăng, đường thẳng này tịnh tiến song song lên phía trên. Khi T giảm, đường thẳng này tịnh tiến song song xuống phía dưới. Giá trị nhỏ nhất của T đạt được tại đỉnh I của tứ giác $IABC$ là giao điểm của hai đường thẳng $2x + 5y = 30$ và $2x + y = 14$. Tọa độ của I là $(x_1 = 5; y_1 = 4)$. Như vậy thuê 5 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD thì chi phí vận tải là thấp nhất.

Ví dụ 2.2.5. Với ý thức tiết kiệm vật liệu, anh (chị) hãy tính xem cần chừng bao nhiêu thanh sắt mỗi thanh dài 7,4m để cắt thành 1000 đoạn, mỗi đoạn dài 0,7m, và 2000 đoạn mỗi đoạn dài 0,5m. Anh (chị) có chứng tỏ được rằng cách tính của anh (chị) là tiết kiệm nhất không?

Lời giải

Ta nhận thấy muốn tiết kiệm vật liệu thì cần phải cắt mỗi thanh 7,4m thành a đoạn 0,7m và b đoạn 0,5m mà không có dư.

Tức là cần giải phương trình nguyên $0,7a + 0,5b = 7,4$.

Hay $7a + 5b = 74$ với a, b nguyên không âm (1).

Từ (1) suy ra: $74 = 7a + 5b \geq 7a \Rightarrow 0 \leq a \leq 10$ và

$$b = \frac{74 - 7a}{5} = 15 - a - \frac{1 + 2a}{5} \rightarrow 1 + 2a : 5.$$

Mà $1 \leq 1 + 2a \leq 21$ và $(1 + 2a)$ lẻ nên suy ra $1 + 2a = 5$ hoặc $1 + 2a = 15$.

Do đó hoặc $a = 2 \rightarrow b = 12$ hoặc $a = 7 \rightarrow b = 5$.

Vậy ta có hai cách cắt một thanh 7,4m lợi nhất:

- 1) Cắt thành 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m.
- 2) Cắt thành 7 đoạn 0,7m và 5 đoạn 0,5m.

Gọi x thanh được cắt theo kiểu thứ nhất và y thanh theo kiểu thứ hai (ở đây thanh 7,4m); như vậy số đoạn 0,7m được cắt là $2x + 7y$ và số đoạn 0,5m được cắt là $12x + 5y$: mà ta cần phải cắt 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m nên có phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 1000 \\ 12x + 5y = 2000 \end{cases} \quad (2)$$

Nhưng hệ (2) không có nghiệm nguyên nên ta chỉ cần lấy phần nguyên các nghiệm của hệ (2) là đủ.

Như vậy $x = 121$ và $y = 108$.

Vậy ta cắt được $2x + 7y = 998$ đoạn 0,7m và $12x + 5y = 1992$ đoạn 0,5m nên chỉ cần cắt thêm hai đoạn 0,7m và 8 đoạn 0,5m. Ta chỉ cần cắt thêm 1 thanh 7,4m theo kiểu thứ nhất nữa.

Vậy đã dùng tất cả là: $121 + 108 + 1 = 230$ thanh 7,4m.

Ta còn phải chứng tỏ cách cắt trên là tiết kiệm nhất.

Thật vậy, ta thấy tổng số độ dài của 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m là: $0,7 \cdot 1000 + 0,5 \cdot 2000 = 1700m$: vậy phải dùng ít nhất là $1700/7,4 + 1$ thanh 7,4m hay 230 thanh 7,4m (đpcm).

Tóm lại ta chỉ cần cắt 122 thanh 7,4m theo kiểu thứ nhất và 108 thanh 7,4m theo kiểu thứ hai là xong.

Ví dụ 2.2.6. Một đoàn tàu đánh cá dự định đánh bắt 1800 tấn cá trong một số ngày nhất định. Do bị bão nên trong 3 ngày đầu tiên đoàn đánh bắt được ít hơn kế hoạch mỗi ngày 20 tấn. Trong các ngày còn lại, đoàn đánh bắt vượt hơn kế hoạch 20 tấn mỗi ngày. Vì vậy đoàn đã hoàn thành kế hoạch đánh bắt trước thời hạn 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đoàn tàu đánh bắt bao nhiêu tấn cá và thời gian đánh bắt theo kế hoạch là bao nhiêu ngày?

Lời giải

Gọi x (tấn) là số cá dự định đánh bắt mỗi ngày theo kế hoạch.

Thời gian đánh bắt theo kế hoạch là $\frac{1800}{x}$ (ngày).

Số cá đánh bắt được trong 3 ngày bị bão là $3(x - 20)$ (tấn).

Số cá còn phải đánh bắt trong $\left(\frac{1800}{x} - 3\right)$ ngày còn lại là:

$$1800 - 3(x - 20) = 1860 - 3x$$

tấn.

Số cá đánh bắt được mỗi ngày sau khi bão là: $x + 20$ (tấn).

Số ngày đánh bắt cá sau khi bão là $\frac{1860 - 3x}{x + 20}$ (ngày).

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1800}{x} - 3 \right) - \frac{1860 - 3x}{x + 20} = 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{1800}{x} - \frac{1860 - 3x}{x + 20} = 5 \\ \Leftrightarrow & 2x^2 + 160x - 36000 = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta' = -b'^2 - ac = 78400 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = -180 \end{cases}$$

Thực tế x là nguyên nên lấy một nghiệm $x = 100$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy kế hoạch đánh bắt là 18 ngày, mỗi ngày đoàn tàu phải đánh bắt 100 tấn cá.

Ví dụ 2.2.7. Một nhóm bạn rủ nhau tổ chức một chuyến du lịch sinh thái (chi phí chia đều cho mỗi người). Sau khi đã hợp đồng xong, vào giờ chót có hai người bận việc đột xuất không đi được. Vì vậy mỗi người còn lại phải trả thêm 30000 đồng so với dự kiến ban đầu. Hỏi số người lúc đầu dự định đi du lịch, mỗi người theo dự kiến ban đầu phải trả bao nhiêu tiền và giá của chuyến đi du lịch sinh thái đó?

Biết rằng Bản hợp đồng giá này trong khoảng từ 700000 đồng đến 750000 đồng.

Lời giải

Gọi x (đồng) là số tiền mà mỗi người dự định đóng góp cho chuyến du lịch sinh thái, suy ra $x + 30000$ (đồng) là số tiền mà mỗi người đi đóng góp.

Gọi y (người) là số người dự định đi lúc đầu, suy ra $y - 2$ (người) là số người tham gia chuyến du lịch đó. Điều kiện $y \in \mathbb{N}, y > 2$.

Chi phí dự kiến của chuyến du lịch cũng chính là chi phí ghi trong bản hợp đồng là xy (đồng), Chi phí thực tế do các người tham gia đóng góp là $(x + 30000)(y - 2)$.

$$\text{Ta có phương trình: } xy = (x + 30000)(y - 2), \quad (1)$$

$$\text{với điều kiện } 700 \leq xy \leq 750000. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra

$$xy = xy - 2x + 30000y - 60000 \Leftrightarrow x = 15000y - 30000. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) suy ra $700 \leq y(15000y - 30000) \leq 750000$.

Ta được hệ:

$$\begin{cases} 15000y^2 - 30000y - 700000 \geq 0 \\ 15000y^2 - 30000y - 750000 \leq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 6y - 140 \geq 0 \\ 3y^2 - 6y - 150 \leq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{429}}{3} \leq y \leq \frac{3 + \sqrt{459}}{3}.$$

Vì y là số người nên y là số tự nhiên. Kết quả bài toán thuần túy thực tế nên ta chọn $y = 8$, $y \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra $x = 15000 \cdot 8 - 30000 = 90000$.

Kết luận:

Số người lúc đầu dự định đi Du lịch là 8 người.

Mỗi người dự kiến đóng góp 90000 đồng.

Chi phí chuyến đi du lịch sinh thái là 720000 đồng.

Ví dụ 2.2.8. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II.

Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại II cần dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

- Đại lượng cần quan tâm: lượng (tính bằng tấn) sản phẩm loại I và II sản xuất được.

- Tổng tiền lãi thu được: 2 triệu x lượng sản phẩm loại I + 1,6 triệu x lượng sản phẩm loại II.

- Để có 1 tấn sản phẩm loại I cần: máy M_1 làm 3 giờ + máy M_2 làm 1 giờ.

- Để có 1 tấn sản phẩm loại II cần: máy M_1 làm 1 giờ + máy M_2 làm 1 giờ.

- Như vậy ta có thể biết được thời gian làm việc của từng máy để làm ra được sản lượng của sản phẩm theo kế hoạch nào đó.

Khi đó học sinh sẽ nhận ra rằng: Bắt đầu bằng việc đặt ẩn số cho hai đại lượng chưa biết là Sản phẩm loại I, II. Các yếu tố khác sẽ được biểu

thị qua hai ẩn số này. Cụ thể là:

Gọi sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất theo kế hoạch trong một ngày lần lượt là: x, y ($x \geq 0, y \geq 0$).

Số tiền lãi thu được là: $L = 2x + 1,6y$.

Để có được số lượng hai sản phẩm như trên máy M_1 cần làm việc trong $3x + y$ (giờ) và máy hai cần làm việc trong $x + y$ (giờ).

Máy M_1 làm không quá 6 giờ trong một ngày nên: $3x + y \leq 6$.

Máy M_2 làm không quá 4 giờ trong một ngày nên: $x + y \leq 4$.

Ta có mối quan hệ ràng buộc giữa x, y cho bởi hệ bất phương trình sau vì một máy không thể sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm nên ta có:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành giải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, tìm nghiệm (x_0, y_0) sao cho $L = 2x + 1,6y$ lớn nhất.

Khi $x = 1$ và $y = 3$.

Vậy để có lãi xuất cao nhất, mỗi ngày cần sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II.

Ví dụ 2.2.9. Có một xí nghiệp sản xuất ra 2 loại sản phẩm A và B . Những sản phẩm này được chế tạo từ 3 loại nguyên liệu I, II và III . Dự trữ từng loại nguyên liệu và số lượng từng loại nguyên liệu dùng để sản xuất ra một sản phẩm được ghi trong bảng sau. Biết một sản phẩm A lãi 5 đồng, một sản phẩm B lãi 7 đồng. Nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để lãi nhiều nhất.

Loại nguyên liệu	Dự trữ	Số lượng đơn vị nguyên liệu chi phí cho một đơn vị sản phẩm	
		A	B
I	8	2	1
II	14	3	2
III	25	4	6

Lời giải

Gọi x và y là số sản phẩm loại A và B được sản xuất. Ta cần tìm x, y để: $z = 5x + 7y$ đạt giá trị lớn nhất, và x, y không thể nâng tùy ý vì số lượng dự trữ nguyên liệu có hạn.

Nhìn vào bảng ta thấy số lượng nguyên liệu I để sản xuất x sản phẩm A và y sản phẩm B là: $2x + y$, số lượng này không vượt quá số lượng dự trữ, tức là $2x + y \leq 8$.

Tương tự dự trữ nguyên liệu II và III cho ta điều kiện:

$$3x + 2y \leq 14, 4x + 6y \leq 25.$$

Từ điều kiện thực tế, ta có: x, y đều nguyên không âm. Vậy cần tìm $\max(z = 5x + 7y)$ với điều kiện:

$$(I) \begin{cases} 2x + y \leq 8 & (1) \\ 3x + 2y \leq 14 & (2) \\ 4x + 6y \leq 25 & (3) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Từ (1) và $y \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$. Từ (3) và $x \geq 0 \Rightarrow y \leq 4$.

Từ (1) ta có: $6x + 3y \leq 24 \Rightarrow 6x + 4y = 6x + 3y + y \leq 24 + y \leq 28 \Rightarrow 3x + 2y \leq 14$. Tức là từ (1) suy ra (2).

Nhận thấy phương trình $4x + 6y = 25$ không có nghiệm nguyên (vì vế trái là số chẵn còn vế phải là số lẻ). Nên (3) $\Leftrightarrow 4x + 6y \leq 24$ hay $2x + 3y \leq 12$. Nếu $2x + 3y = 12$ thì $4x + 6y = 24$ nếu $x < 4$, tức là nếu $x < 4$ thì (3) suy ra (1); còn nếu $x = 4$ thì phải có $y = 0$.

Vậy hệ (I) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ x \leq 3, y \leq 4 \\ x = 4, y = 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Khi $x = 4 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 20$

$$x = 3 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow z \leq 15 + 14 = 29$$

$$x = 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow z \leq 10 + 14 = 24$$

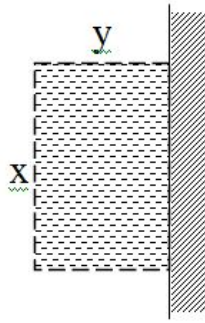
$$x = 1 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow z \leq 5 + 21 = 26$$

$$x = 0 \Rightarrow y \leq 4 \Rightarrow z \leq 28.$$

Vậy ta suy ra $\max(z = 5x + 7y) = 29$ khi $x = 3$ và $y = 2$.

Do đó phải sản xuất 3 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B , khi ấy tiền lãi sẽ nhiều nhất là 29 đồng.

Ví dụ 2.2.10. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là a mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất?



Lời giải

Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu.

Theo bài ra ta có $x + 2y = a$.

Diện tích của miếng đất là $S = y(a - 2y)$. S là cực đại khi và chỉ khi $2y(a - 2y)$ cực đại. Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2S = 2y(a - 2y) \leq \left(\frac{2y + a - 2y}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2y = a - 2y \Leftrightarrow y = \frac{a}{4} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$.

Vậy rào khu đất có diện tích cực đại khi $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{a}{4}$.

Ví dụ 2.2.11. Một người đi xe đạp dự định trong buổi sáng đi hết quãng đường 60km. Khi đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, anh ta thấy vận tốc của mình chỉ bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc dự định, anh ta bèn đạp nhanh hơn vận tốc dự định 3km/h, đến nơi anh ta vẫn chậm mất 45 phút. Hỏi vận tốc dự định của người đi xe đạp là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi v (km/h) là vận tốc dự định của người đi xe đạp ($v > 0$).

Theo bài ra, ta có phương trình

$$\frac{30}{\frac{2}{3}v} + \frac{30}{v+3} = \frac{60}{v} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3v^2 - 51v + 180 = 0$$

Giải phương trình trên ta được hai nghiệm $v = 12$ (thỏa mãn) và $v = 5$ (loại).

Trong bài toán trên, mặc dù nghiệm $v = 5$ thỏa mãn điều kiện bài toán ($v > 0$), nhưng nghiệm này vẫn bị loại vì hai lý do thực tế sau: thứ nhất, vận tốc 5km/h là quá chậm không phù hợp với vận tốc bình thường của xe đạp; thứ hai là, với vận tốc 5km/h, trong buổi sáng không thể đi hết quãng đường 60km như đã dự định.

Vậy vận tốc dự định của người đi xe đạp là 12(km/h).

Một số bài tập ứng dụng kiến thức Toán học vào thực tiễn:

Bài toán 1: Công ty Bao bì Dược phẩm cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1 , đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1 , một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.

Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1 , 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm.

Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao Sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

Bài toán 2: Một xe ô tô đi từ A đến B, cùng lúc có người đi xe đạp từ B đến A. Ba phút sau khi hai xe gặp nhau ô tô quay ngay lại đuổi xe đạp, khi đuổi kịp lại quay ngay để chạy về B. Nếu lúc đầu sau khi gặp một phút ô tô quay lại còn xe đạp sau khi gặp tăng vận tốc $\frac{15}{7}$ lần thì ô tô cũng chỉ mất từng ấy thời gian. Tìm tỉ số vận tốc của xe đạp và ô tô?

Bài toán 3: Với cùng một dây tóc các bóng đèn điện có hơi bên trong cho một độ sáng lớn hơn là các bóng chân không, bởi vì nhiệt độ của dây tóc trong hai trường hợp là khác nhau. Theo một Định luật Vật lý, độ sáng toàn phần phát từ một vật thể bị nung đến trắng tăng tỉ lệ với lũy thừa bậc 12 của nhiệt độ tuyệt đối của nó (độ K).

a) Hãy tính xem một bóng đèn có hơi với nhiệt độ dây tóc là $2000^{\circ}K$ sáng hơn một bóng chân không có nhiệt độ dây tóc là $2200^{\circ}C$ bao nhiêu lần?

b) Phải tăng nhiệt độ tuyệt đối lên chừng nào (tính theo phần trăm) để gấp đôi độ sáng của một bóng đèn?

c) Độ sáng của một bóng đèn tăng lên bao nhiêu (tính theo phần trăm) nếu ta tăng 10% nhiệt độ tuyệt đối dây tóc của nó?

Bài toán 4: Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , l là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, l - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, l là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thủy động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật).

Kết luận

Luận văn đã thu được những kết quả:

1. Qua tìm hiểu em thấy rõ mối quan hệ hữu cơ giữa triết học duy vật biện chứng và toán học.
2. Đã đưa ra được một hệ thống các ví dụ minh họa một cách cụ thể cho việc vận dụng các tư tưởng của triết học duy vật biện chứng vào lời giải toán, mà cụ thể là mối quan hệ giữa cái chung- cái riêng và mối liên hệ giữa lý luận và tiễn.

Chúng tôi cho rằng nếu giáo viên nắm được và biết vận dụng tư tưởng của triết học DVBC vào dạy học toán thì sẽ chắc chắn sẽ góp phần phát triển tư duy sáng tạo, năng lực giải toán cho học sinh.

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Bảo (2010), *Nhiều cách giải cho một bài toán*, toán học tuổi trẻ, Số 395 (5/2010).
- [2] Nguyễn Văn Bảo (2005), *Góp phần rèn luyện cho học sinh năng lực vận dụng kiến thức toán học để giải quyết một số bài toán có nội dung thực tiễn*, Luận văn thạc sĩ giáo dục học, Đại học Vinh.
- [3] Hoàng Chúng (1969), *Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học cho học sinh ở trường phổ thông*, Nhà xuất bản Hà Nội.
- [4] Cao Thị Hà (2007), *Phát triển tư duy biện chứng cho học sinh trong dạy học toán* (Tài liệu dành cho học viên cao học).
- [5] Nguyễn Thanh Hưng, Nguyễn Thị Thu Thủy (2011), *Vận dụng phép biện chứng duy vật trong dạy học toán ở phổ thông*, Tạp chí giáo dục, Số 250 (11/2010), Hà Nội.
- [6] G. Polya (1975), *Sáng tạo toán học*, Bản dịch tiếng việt của Nguyễn Sỹ Tuyển và Phan Tất Đắc, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [7] G. Polya (1995), *Toán học và những suy luận có lí*, NXB Giáo dục.
- [8] Ngô Thúc Lanh (Chủ biên)(2000), *Từ điển toán học thông dụng*, NXB Giáo dục.
- [9] Bùi Văn Nghị (2009), *Vận dụng lý luận vào thực tiễn dạy học môn toán ở trường phổ thông* (Sách chuyên khảo dành cho hệ đào tạo sau đại học), NXB Đại học sư phạm.
- [10] *Tuyển tập 30 năm Tạp trí Toán học và Tuổi trẻ*, NXB Giáo dục.

- [11] Đào Tam (chủ biên), Trần Trung (2010), *Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn toán ở trường Trung học phổ thông*, NXB Đại học sư phạm, Hà Nội.
- [12] Trần Thúc Trình (1998), *Tư duy và hoạt động toán học*, (Đề cương bài giảng), Viện Khoa học Giáo dục Hà Nội.
- [13] Nguyễn Cảnh Toàn (1997), *Phương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy và nghiên cứu toán học*, tập 1, tập 2, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [14] Nguyễn Cảnh Toàn (Chủ biên), Nguyễn Kỳ, Lê Khánh Bằng, Vũ Văn Tảo (2004), *Học và dạy cách học*, NXB - Đại học quốc gia Hà Nội.
- [15] Bộ giáo dục và đào tạo, (Tái bản lần thứ ba có sửa chữa, bổ sung) (2010), *Giáo trình triết học Mác - Lênin*, (Sách dùng trong các trường đại học, cao đẳng).
- [16] R. I. Ruzavin, A. Nuwxanbaesp, G.Sliakhin (1979), *Một số quan điểm Triết học trong toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [17] John Stillwell, (2006), *The Surprising Truth of Mathematiscs*, USA.
- [18] Stieg Mellin-Olsen (2002), *The politics of Mathematiscs education*, USA.