1 Đề số 1: Tuyển sinh vào THPT Chuyên SPHN 2014

1.1 Ngày thứ nhất

Bài 1.1. Cho các số dương a, b phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Bài 1.2. Cho quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng, một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu 10 km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Bài 1.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3}$ (với m là tham số).

1. Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m, đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của d và (P), đặt $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$. Chứng minh đẳng thức $f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3$.

Bài 1.4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC = 2R$. Gọi K và M theo thứ tự là chân các đường cao hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE ($K \neq B$, $K \neq E$). Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại P.

1. Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.
2. Chứng minh $KP \perp PM$.
3. Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x.

Bài 1.5. Giải phương trình

$$\frac{x(x^2-56)}{4-7x} - \frac{21x+22}{x^3+2} = 4.$$

1.2 Ngày thứ hai

Bài 1.6. Giả sử rằng a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bài 1.7. Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3.$$

Bài 1.8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 6$ thì

$$a_n = 1 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot (4n-2)}{(n+5)(n+6)\cdots(2n)}$$

là một số chính phương.

Bài 1.9. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}.$$

Bài 1.10. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Các điểm N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng

1. Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\angle NOP = 45^\circ$.
2. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.
3. Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

Bài 1.11. Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ thỏa mãn A có ít nhất hai phần tử và nếu $x, y \in A$ mà $x > y$ thì $\dfrac{y^2}{x-y} \in A$.

1.3 Lời giải

1.1 Vì a, b dương nên $a-b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ và $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)$. Do đó

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{3a+3\sqrt{ab}}{a-b} &= \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}-\frac{3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\\
&= \frac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\\
&= \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

1.2 Quy đổi thời gian: 11 giờ 40 phút bằng $\frac{35}{3}$ giờ; 10 phút bằng $\frac{1}{6}$ giờ.

Gọi C là điểm mà xe máy bị hỏng và v (km/h) là vận tốc mà xe máy đi từ A đến C ($v > 10$). Suy ra $AC = \frac{3}{4}\times 120 = 90$ km. Do đó thời gian mà xe máy đi từ A đến C là $\frac{90}{v}$ giờ.

Vận tốc xe máy đi từ C đến B là $v-10$ (km/h), do đó thời gian xe máy đi từ C về B là $\frac{30}{v-10}$ giờ. Xe máy dừng lại sửa mất 10 phút, tức mất $\frac{1}{6}$ giờ, do đó tổng số thời gian mà xe máy đi từ A đến B là $\frac{90}{v}+\frac{30}{v-10}+\frac{1}{6}$ giờ.

Xe máy xuất phát từ 7 giờ sáng và đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày, nên số thời gian mà xe máy đi từ A đến C là $\frac{14}{3}$ giờ. Vậy ta có phương trình

$$\begin{aligned}
&\frac{90}{v}+\frac{30}{v-10}+\frac{1}{6}=\frac{14}{3}\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{120v-900}{v(v-10)}=\frac{9}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &v=\frac{20}{3}\quad\text{hoặc}\quad v=30.
\end{aligned}$$

Vì $v > 10$ nên $v = 30$. Do đó thời gian xe máy đi từ A đến C là $\frac{90}{30}=3$ giờ. Vậy xe máy bị hỏng lúc 10 giờ sáng cùng ngày.

1.3

1. Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ phương trình

$$x^2=-\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3} \tag{1}$$

có hai nghiệm phân biệt. Ta có (1) tương đương với

$$3x^2+2(m+1)x-1=0 \tag{2}$$

Vì biệt thức của phương trình (2) là $\Delta' = (m+1)^2+3 > 0$ nên (2) luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó phương trình (1) cũng có hai nghiệm phân biệt. Thành thử d luôn cắt (P) ở hai điểm phân biệt.

2. Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của d và (P) nên x_1, x_2 là hai nghiệm của (2). Theo định lý Vieta

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{2m+2}{3}\\ x_1x_2 \;\;= -\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Đặc biệt ta có $m+1 = -\frac{3}{2}(x_1+x_2)$ và $1 = -3x_1x_2$. Vì $f(x) = x^3+(m+1)x^2-x$ nên

$$\begin{aligned}
f(x_1)-f(x_2) =& x_1^3+(m+1)x_1^2-x_1-x_2^3-(m+1)x_2^2+x_2 \\
=& (x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-1+(m+1)(x_1+x_2)\right) \\
=& (x_1-x_2)\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2-1-\frac{3}{2}(x_1+x_2)^2\right) \\
=& (x_1-x_2)\left((x_1+x_2)^2+2x_1x_2-\frac{3}{2}(x_1+x_2)^2\right) \\
=& -\frac{1}{2}(x_1-x_2)^3
\end{aligned}$$

Nhận xét. Để chứng minh đẳng thức ở câu 2. của bài toán có thể vận dụng định lý Vieta biểu diễn các biểu thức $f(x_1)-f(x_2)$ và $(x_1-x_2)^3$ theo m.

1.4 1. Do $KP \parallel BC$ và tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\angle KPA = \angle BCA = \angle BDA$. Vậy $AKPD$ nội tiếp.

2. Theo kết quả câu thứ nhất, $\angle APD = \angle AKD = 90°$ nên $\angle DPC = \angle CMD$ cùng bằng $90°$. Vậy $CPMD$ nội tiếp. Suy ra
$$\angle MPA = \angle CDB = \angle CAB = 90° - ACB = 90° - \angle KPA.$$
Vậy $\angle MPK = 90°$.

3. Ta có $BK = AK\cot\angle ABD = x\cot 60° = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Mặt khác tam giác ACD là vuông và có góc $\angle ACD = 60°$ nên $AD = AC\sin 60° = R\sqrt{3}$. Theo định lý Pythagore $DK = \sqrt{3R^2-x^2}$. Vậy $BD = \sqrt{3R^2-x^2}+\frac{x\sqrt{3}}{3}$.

1.5 Điều kiện xác định của phương trình $x \neq \frac{4}{7}, -\sqrt[3]{2}$.

Cách 1. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& x(x^2-56)(x^3+2)-(21x+22)(4-7x) = 4(4-7x)(x^3+2) \\
\Leftrightarrow\quad & x^6-28x^4-14x^3+147x^2+14x-120 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)(x+4)(x-5) = 0
\end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình là $\pm1, 2, -3, -4, 5$.

Cách 2. Đặt $u = 4-7x$ và $v = x^3+2$ ta rút ra $x^3 = v-2$ và $7x = 4-u$. Phương trình có thể viết lại ở dạng sau

$$\begin{aligned}
& \frac{8u+v-34}{u} - \frac{-3u+34}{v} = 4 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4u+v}{u} + \frac{3u}{v} - 34\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4uv+v^2+3v^2}{uv} - 34\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{(u+v)(3u+v)}{uv} - 34\frac{u+v}{uv} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (u+v)(3u+v-34) = 0
\end{aligned}$$

Với $u+v=0$ ta được phương trình $x^3-7x+6=0$ hay tương đương $(x+3)(x-2)(x-1)=0$. Do đó ta thu được các nghiệm $1, 2, -3$.

Với $3u+v-34=0$ ta được $x^3-21x-20=0$ hay $(x+1)(x+4)(x-5)=0$ ta thu được nghiệm $-1, -4, 5$.

1.6 Theo giả thiết $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ suy ra $ayz+bzx+cxy=0$. Mặt khác từ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, bình phương hai vế cho ta

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} =&1-2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)\\ =&1-\frac{2(ayz+bzx+cxy)}{abc}\\ =&0.\end{aligned}$$

1.7 Ta có $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ với mọi a,b. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. Áp dụng bất đẳng thức trên cho ta

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2} \le \frac{x^2+1-y^2}{2}+\frac{y^2+2-z^2}{2}+\frac{z^2+3-x^2}{2}=3.$$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2}\\ y=\sqrt{2-z^2}\\ z=\sqrt{3-x^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1\\ y^2+z^2=2\\ z^2+x^2=3\\ x,y,z\ge 0\end{cases}$$

Vậy $x=1, y=0, z=\sqrt{2}$.

1.8 Ta có

$$\begin{aligned}2\cdot 6\cdot 10\cdot\dots\cdot(4n-2) =&2^n\left(1\cdot 3\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n-1)\right)\\ =&\frac{2^n\cdot(2n)!}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n)}\\ =&\frac{(2n)!}{n!}\end{aligned}$$

và

$$(n+5)(n+6)\cdots(2n)=\frac{(2n)!}{(n+4)!}.$$

Suy ra

$$a_n=1+\frac{(n+4)!}{n!}=1+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=(n^2+5n+5)^2.$$

1.9 Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwartz

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\ge\frac{4}{x+y+z+t}$$

với mọi x,y,z,t dương. Áp dụng bất đẳng thức trên ba lần liên tiếp ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2} =&\frac{3}{3(ab+a+1)+3}+\frac{3}{3(bc+b+1)+3}+\frac{3}{3(ca+c+1)+3}\\ \le&\frac{3}{16}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{ab+a+1}+\frac{1}{3}+\frac{3}{bc+b+1}+\frac{1}{3}+\frac{3}{ca+c+1}\right)\\ =&\frac{3}{16}+\frac{9}{16}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\right)\\ =&\frac{3}{16}+\frac{9}{16}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{ab}{a+1+ab}\right)\\ =&\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

1.10 1. Xét hai tam giác vuông ADP và NBM có $\angle APD = \angle PAB = \angle NMB$. Do đó $\Delta ADP \sim \Delta NBM$ (g.g). Từ đây suy ra $\dfrac{AD}{DP} = \dfrac{NB}{BM}$ hay $DP \cdot BN = AD \cdot BM = OB \cdot OD$ (do $ABCD$ là hình vuông). Từ đó ta nhận được tỷ số $\dfrac{DO}{DP} = \dfrac{BN}{BO}$. Vậy $\Delta BNO \sim \Delta DOP$ (c.g.c). Đặc biệt suy ra $\angle NOP = 45°$.

2. Gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác NOP. Suy ra $\angle NIP = 90°$. Do đó tứ giác $CNIP$ nội tiếp. Từ đó suy ra CI là phân giác góc $\angle NCP$. Vậy I nằm trên AC.

3. Giả sử rằng $AN \cap BD = K$ và $MP \cap BD = K'$. Ta có

$$\frac{KB}{KD} = \frac{BN}{AD} = \frac{MB}{DP} = \frac{K'B}{K'D}$$

suy ra $K \equiv K'$.

1.11 Ta chứng minh một tập con A như vậy khi và chỉ khi nó có dạng $\{y, 2y\}$. Giả sử rằng $x > y$ là hai phần tử của A. Nếu $x > 2y$ thì theo giả thiết $z = \dfrac{y^2}{x-y} \in A$ và $z < y$. Do đó ta sẽ có $z < y < x$ thuộc A và $x > 2y > 2z$. Áp dụng giả thiết cho cặp (x, z) ta được $z_1 \in A$ mà $x > z > z_1$. Cứ thế suy ra A có vô số phần tử, mâu thuẫn. Vậy $x \leq 2y$. Đặc biệt ta suy ra $y \leq z$.

Nếu $x < 2y$ thì $y < z$ do đó $z \leq 2y$. Từ đây ta nhận được $y \leq 2(x-y)$ hay $x \geq \dfrac{3y}{2}$. Do đó $z < x$. Vậy $y < z < x$. Do đó cặp (y, z) thuộc A mà $y < z < 2y$. Từ đó suy ra tồn tại $z_1 \in A$ mà $y < z_1 < z$. Cứ thế ta suy ra A có vô số phần tử.

Vậy $x = 2y$. Do đó A có dạng $\{y, 2y\}$ với $y \in \{1, 2, \ldots, 2014\}$. Đảo lại, hiển nhiên mỗi tập con A có dạng đó đều thỏa mãn tính chất đề bài. Số các tập con A có dạng $\{y, 2y\}$ với $y \in \{1, 2, \ldots, 2014\}$ hiển nhiên là 1007.