BẤT ĐẲNG THỨC "KẸP GIÁ TRỊ"

Nguyễn Anh Tuyến Toán 08-11 Chuyên Thái Bình

I. ĐIỀU KIỆN MỘT SỐ KHÔNG SỐ CHÍNH PHƯƠNG

1. Chứng minh tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không thể là một số chính phương.
   Lời giải
   Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là: $a, a+1, a+2, a+3$.
   Xét
   $$A = a(a+1)(a+2)(a+3)$$
   $$\Leftrightarrow A = \left[a(a+3)\right]\left[(a+1)(a+2)\right]$$
   $$\Leftrightarrow A = (a^2+3a)(a^2+3a+2)$$
   Ta dề dàng nhận thấy $(a^2+3a)^2 < (a^2+3a)(a^2+3a+2) < (a^2+3a+1)^2$
   nên: $A = (a^2+3a)(a^2+3a+2)$ không thể là số chính phương.
   Suy ra điều phải chứng minh.

2. Chứng minh rằng không tồn tại hai số nguyên dương x và y sao cho x^2+y và y^2+x là số chính phương.
   Lời giải
   Vì x và y có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y$. Khi đó ta có: $x^2 < x^2+y \le x^2+x < (x+1)^2$.
   Suy ra x^2+y không là số chính phương.
   Vậy ta có điều phải chứng minh.

3. Tìm số tự nhiên a để phương trình $x^2 - a^2x + a + 1 = 0$ có nghiệm nguyên.
   Lời giải
   Để phương trình có nghiệm nguyên, điều kiện là $\Delta = a^4 - 4a - 4$ là số chính phương.
   - Nếu a = 0 hoặc a = 1 thì $\Delta < 0$.
   - Nếu a = 2 thì $\Delta = 2^2$, phương trình có nghiệm x = 1; x = 3.
   - Nếu a ≥ 3 ta có:
     $\Delta > (a^2-1)^2 \Leftrightarrow a^4 - 4a - 4 > a^4 - 2a^2 + 1$
     $\Leftrightarrow 2a^2 - 4a - 5 > 0 \Leftrightarrow 2(a-2) > 5$, luôn đúng vì $2a \ge 6$; $a - 2 \ge 1$.

   Dễ thấy $\Delta < (a^2)^2$. Vậy A không là số chính phương với $a \ge 3$ vì $(a^2-1)^2 < \Delta < (a^2)^2$.
   Vậy với a = 2, phương trình có nghiệm x = 1; x = 3.

4. (Cuộc thi Toán học liên quốc gia Kürschák,1953)

Cho n, d là các số nguyên dương sao cho $2n^2$ chia hết cho d. Chứng minh rằng $n^2 + d$ không thể là số chính phương.

<u>Lời giải</u>

Giả sử $2n^2 = kd$ (k là số nguyên dương) vì $2n^2$ chia hết cho d.

Giả sử $n^2 + d$ là số chính phương, tức là bình phương của số nguyên x thì ta có: $x^2 = n^2 + d = n^2 + \dfrac{2n^2}{k}$

$\Rightarrow k^2x^2 = m^2k^2 + 2n^2k = n^2\left(k^2 + 2k\right)$

Từ đây suy ra $\left(k^2 + 2k\right)$ là bình phương của một số nguyên (*)

Vì $k^2 < k^2 + 2k < \left(k+1\right)^2$ nên $\left(k^2 + 2k\right)$ không thể là bình phương của một số nguyên, mâu thuẫn với (*). Do đó giả sử là sai.

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

5. (IMO 1987)

Cho n là một số nguyên không nhỏ hơn 3. Chứng minh rằng có một tập hợp n điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì là một số vô tỉ và mỗi tập 3 điểm bất kỳ đều xác định một tam giác không suy biến mà diện tích của nó là 1 số hữu tỉ.

<u>Lời giải</u>

Trước hết ta chứng minh bổ đề: "Nếu M không là số chính phương thì $\sqrt{M}$ là số vô tỉ".

Thật vậy, ta giả sử $\sqrt{M}$ là số hữu tỉ.

Vì M không là số chính phương nên ta có thể tìm được số nguyên p sao cho M chia hết cho p^{2a+1}, nhưng M không chia hết cho p^{2a+2}, với $a \geq 0$.

Ta đặt: $N = \dfrac{M}{p^{2a}}$ thì khi đó $\sqrt{N} = \dfrac{\sqrt{M}}{p^a}$ cũng là số hữu tỉ.

Do đó tồn tại số nguyên tố q sao cho N chia hết cho q, nhưng N không chia hết cho q^2.

Cho $\sqrt{N} = \dfrac{r}{s}$, với (r, s) = 1, ta có: $r^2 = s^2N$. (*)

Vì N chia hết cho q, nên r^2 chia hết cho q; mà q là số nguyên tố nên r chia hết cho q, suy ra r^2 chia hết cho q^2. Kết hợp với (*) có s^2 chia hết cho q; mà q là số nguyên tố nên s chia hết cho q.

Vậy r và s có thừa số chung, mâu thuẫn với (r, s) = 1.

Suy ra điều giả sử là sai.

Như vậy bổ đề đã được chứng minh.

Bây giờ ta đi giải bài toán.

Trong mặt phẳng ta gọi x_n là điểm có toạ độ (n, n^2) với n = 1, 2, 3,....Ta sẽ chứng minh rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kì như thế là một số vô tỉ, và tam giác được xác định bởi 3 điểm bất kì trong chúng là một số hữu tỉ khác 0.

Lấy n > m. Ta có $\left|x_n - x_m\right|$ là độ dài cạnh huyền của một tam giác có hai cạnh vuông góc là $n - m$ và $n^2 - m^2 = \left(n-m\right)\left(n+m\right)$.

Do đó, $\left|x_n - x_m\right| = \left(n-m\right)\sqrt{1+\left(n+m\right)^2}$. Ta lại có:

$\left(n+m\right)^2 < \left(n+m\right)^2 + 1 < \left(n+m+1\right)^2 = \left(n+m\right)^2 + 1 + 2\left(n+m\right)$

Nên $\left(n+m\right)^2 + 1$ không phải là số chính phương.

Do đó $\sqrt{\left(n+m\right)^2 + 1}$ là số vô tỉ.

Để tiếp tục giải bài toán, ta lấy 3 số a, b, c sao cho a < b < c.
Gọi B là điểm (b, a^2), C là điểm (c, a^2) và D là điểm (c, b^2). Ta có:

$$S_{x_a x_b x_c} = S_{x_a x_c C} - S_{x_a x_b B} - S_{x_b x_c D} - S_{x_b DCB}$$

$$= (c-a)\frac{(c^2-a^2)}{2} - (b-a)\frac{(b^2-a^2)}{2} - (c-b)\frac{(c^2-b^2)}{2} - (c-b)(b^2-a^2)$$

là số hữu tỉ. Ta có điều phải chứng minh.

6. (T_3/372THTT)

Tìm các số nguyên x, y thoả mãn điều kiện $\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+...+\sqrt[n]{x}}} = y$ (1) (gồm m dấu căn) với m, n là các số tự nhiên lớn hơn 2.

Lời giải

- Nhận xét nếu (1) có nghiệm âm (x; y) (x < 0; y < 0) (n lẻ) thì (-x; -y) là nghiệm dương của (1).
- Ta có (x; y) = (0; 0) là một nghiệm của (1).
- Nếu 1) có nghiệm dương x > 0; y > 0.

Rõ ràng $x < y^n$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+...+\sqrt[n]{x}}} = y^n - x$ (m – 1 dấu căn) (2)

Vì x, y nguyên dương nên hai vế của (2) đều là các số nguyên dương. Lập luận tương tự dẫn đến $\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}$ và $\sqrt[n]{x}$ là hai số nguyên dương.

Đặt $a = \sqrt[n]{x}$, $b = \sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}$ thì $a, b \in N^*$.

Do n > 2 nên $(a+1)^n > a^n + a > a^n \Rightarrow a+1 > \sqrt[n]{a^n+a} > a$, tức là a + 1 > b > a (3)

Rõ ràng (3) không xảy ra với a, b nguyên dương. Vậy (1) không có nghiệm nguyên dương. Do đó theo nhận xét trên (1) cũng không có nghiệm âm.

Như vậy: (x; y) = (0; 0) là nghiệm cần tìm.
Nhận xét: Bài toán trên có thể giải với n = 2.

Bài tập vận dụng

7. Chứng minh rằng số $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.
8. Chứng minh rằng tổng các bình phương của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.
9. Chứng minh rằng phần nguyên của căn bậc bốn của tích 8 số tự nhiên liên tiếp bằng $n^2 + 7n + 6$, trong đó n là số bé nhất trong 8 số đã cho.
(Từ bài toán này, ta suy ra mệnh đề: "Tích 8 số tự nhiên liên tiếp không phải là luỹ thừa bậc 4 của một số nguyên")
10. (Đề đề nghị Olympic 30 – 4, 2003)
Tìm tất cả các số hữu tỉ dương x, y sao cho x + y và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ là số nguyên.
11. (Balkan , Sennior , 1995)
Cho hai số nguyên dương m, n thoả mãn m > n và m + n là số chẵn. Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình $x^2 - (m^2 - m + 1)(x - n^2 - 1) - (n^2+1)^2 = 0$
đều là các số nguyên, nhưng không là số chính phương.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^4 + x^2 + 1 = y^2$

   Lời giải

   Vì $x^2 \ge 0$ với mọi x nên:

   $\left(x^4 + x^2 + 1\right) - \left(x^2 + 1\right) < x^4 + x^2 + 1 \le \left(x^4 + x^2 + 1\right) + x^2$

   $\Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 < x^4 + x^2 + 1 \le \left(x^2 + 1\right)^2$

   $\Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 < y^2 \le \left(x^2 + 1\right)^2$

   Do đó: $y^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   Suy ra y = 1 hoặc y = - 1.

   Nghiệm nguyên x, y cần tìm là (0; 1); (0; - 1).

2. (Bài 1(61) TTT2)

   Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x^2 + 6x = y^3$. (1)

   Lời giải

   Ta có $(1) \Leftrightarrow (3x + 1)^2 = y^3 + 1$. (2)

   Vì $(3x + 1)^2 \ge 0$ nên $y \ge -1$.

   - Nếu y = -1 thì 3x + 1 = 0, loại.
   - Nếu y = 0 thì x = 0.
   - Nếu y = 1 thì $(3x + 1)^2 = 2$, loại.
   - Xét $y \ge 2$.

   Ta có: $(2) \Leftrightarrow (3x + 1)^2 = (y + 1)\left(y^2 - y + 1\right)$. Đặt $d = \left(y + 1, y^2 - y + 1\right)$.

   Ta có: $\left((y + 1)^2 - \left(y^2 - y + 1\right)\right) \vdots d$, hay $3y \vdots d$.

   Suy ra $\left(3(y + 1) - 3y\right) \vdots d$, hay $3 \vdots d$. Vậy d = 1 hoặc d = 3.

   Theo (1) thì $y^3 \vdots 3$ nên $y \vdots 3$, suy ra d = 1.Vậy có số tự nhiên a, b để: $\begin{cases} y + 1 = a^2 \\ y^2 - y + 1 = b^2 \end{cases}$.

   Với $y \ge 2$ thì $y^2 - 2y + 1 < y^2 - y + 1 < y^2$ nên $(y - 1)^2 < b^2 < y^2$, vô lí.

   Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là (x; y) = (0; 0).

3. Tìm $p \in P$ để tổng các ước tự nhiên của p^4 là số chính phương.

   Lời giải

   Số p^4 có 5 ước tự nhiên là 1, p, p^2, p^3, p^4. Giả sử $1 + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ với n là số tự nhiên.

   Khi đó: $\begin{cases} (2n)^2 = 4n^2 = 4 + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 > 4p^4 + 4p^3 + p^2 = \left(2p^2 + p\right)^2 \\ (2n)^2 = 4n^2 = 4 + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p = \left(2p^2 + p + 2\right)^2 \end{cases}$

   Suy ra: $\left(2p^2 + p\right)^2 < (2n)^2 < \left(2p^2 + p + 2\right)^2$

   $\Rightarrow (2n)^2 = \left(2p^2 + p + 1\right)^2 \Rightarrow 4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$.

   Mặt khác: $4n^2 = 4 + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4$ nên $p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow p = 3$.

   Vậy p = 3 thì thoả mãn đề bài.

4. Chứng minh với mọi số tự nhiên n ta có: $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

<u>Lời giải</u>

Trước hết ta chứng minh $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$ (1)

Thật vậy,

$(1)\Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n}<2n+1$

$\Leftrightarrow 4n^2+4n<4n^2+4n+1$ (luôn đúng).

Từ (1) suy ra $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]\le\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

Giả sử $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]<\left[\sqrt{4n+2}\right]$

Khi đó tồn tại số nguyên dương m để:

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<m\le\sqrt{4n+2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<m^2-(2n+1)\le 2n+1$

$\Rightarrow (2n)^2<4n(n+1)<\left[m^2-(2n+1)\right]^2\le 4n(n+1)+1=(2n+1)^2$

$\Rightarrow m^2-(2n+1)=2n+1$

$\Rightarrow m^2=2(2n+1)$

Suy ra m là số chẵn, m có dạng $m = 2m_1$

$\Rightarrow 2{m_1}^2=2n+1$ (mâu thuẫn).

Vậy $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ với mọi số tự nhiên n.

<u>Nhân xét</u> : Vì "phần nguyên" chính là một <u>giá trị bị kẹp</u> nên có nhiều bài toán sẽ làm chúng ta hiểu nhầm đó là sử dụng phương pháp "kẹp giá trị".

<u>Bài tập áp dụng</u>

Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^4+2x^3+2x^2+x+7=y^2$

b) $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$

c) $x^4-y^4+z^4+2x^2x^2+3x^2+4z^2+1=0$

d) $x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)=t^2$ (x, y, z, t là các số nguyên dương)

<u>Chú ý</u>: Ở bài viết này tôi chỉ trình bày những bài toán liên quan đến số chính phương, nhưng bất đẳng thức "kẹp giá trị" còn để giải nhiều dạng phương trình khác như liên quan đến lập phương của một số, tích của hai số nguyên….

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

1. (Bài 1(63) TTT2)

   Tìm các số nguyên dương x và y sao cho các số $x^2 + 3y$ và $y^2 + 3x$ đều là số chính phương.

   Lời giải

   Giả sử $x \ge y$. Ta có: $x^2 < x^2 + 3y \le x^2 + 3x < (x+2)^2$.

   Suy ra: $x^2 + 3y = (x+1)^2 \Rightarrow 3y = 2x + 1$.

   Do đó 3y lẻ dẫn đến y lẻ.

   Đặt $y = 2z + 1\ (z \in N)$ thì $x = 3z + 1$.

   - Nếu z = 0 thì x = y =1. Khi đó: $x^2 + 3y = y^2 + 3x = 2^2$, thoả mãn.
   - Nếu z > 0. Vì $(2z+2)^2 < 4z^2 + 13z + 4 < (2z+4)^2$

     nên $y^2 + 3x = 4z^2 + 13z + 4 = (2z+3)^2 \Leftrightarrow z = 5$. Khi đó x = 16 và y = 11.

   Vậy phương trình có nghiệm (x, y) là (1, 1); (16, 11).

2. Tìm tất cả các hàm số tăng $f : N^* \to N^*$ thoả mãn hai điều kiện sau:

   1) $f(2n) = n + f(n)\ \forall n \in N^*$.

   2) Nếu f(n) là số chính phương thì n là số chính phương.

   Lời giải

   Giả sử f là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu bài toán. Do f là tăng thực sự nên với mọi $n \in N^*$, ta có:
   $f(n) < f(n+1) < \ldots < f(2n) = f(n) + n$.

   Do $f(n), f(n+1), \ldots, f(2n)$ đều là các số nguyên dương mà $f(2n) - f(n) = n$ nên suy ra:

   $f(n+1) = f(n) + 1\ \forall n = 1, 2, \ldots$ (1)

   Đặt f(1) = a. Dựa vào (1) suy ra: $f(n) = a + n - 1$ (2)

   Trong (2) thay n bởi $a^2 + a + 2$, ta có: $f(a^2 + a + 2) = a + a^2 + a + 2 - 1 = (a+1)^2$.

   Do $(a+1)^2$ là số chính phương, nên từ giả thiết 2) suy ra $a^2 + a + 2$ là số chính phương.

   Mặt khác: $a^2 < a^2 + a + 2 \le (a+1)^2$, nên $a^2 + a + 2 = (a+1)^2 \Rightarrow a = 1$.

   Thay lại vào (2) ta có: $f(n) = n$.

   Đảo lại , hàm số $f(n) = n$ thoả mãn mọi yêu cầu đề bài.

   Vậy f(n) = n là hàm số duy nhất thoả mãn mọi yêu cầu đề bài.

3. (Cuộc thi Toán sinh viên Mĩ và Canađa)

   Với mọi số nguyên dương n, ta định nghĩa $d(n) = n - m^2$,trong đó m là số nguyên dương lớn nhất sao cho $m^2 \le n$. Cho số nguyên dương b_0, ta thiết lập dãy $b_0, b_1, \ldots, b_k, \ldots$ với $b_{k+1} = b_k + d(b_k)$.
   Những giá trị b_0 như thế nào thì dãy trên có b_i là hằng số với i đủ lớn?

   Lời giải

   Trả lời: b_0 là số chính phương.

   Thật vậy, nếu b_k là số chính phương thì $d(b_k) = 0$, do đó $b_{k+1} = b_k + d(b_k) = b_k$ và dãy trên có các số hạng hằng số kể từ vị trí thứ k. Còn nếu b_k không là số chính phương thì có số m để b_k nằm giữa các giá trị m^2 và $(m + 1)^2$, do đó ta có thể viết $b_k = m^2 + r\ (1 \le r \le 2m)$.

   Suy ra, $b_{k+1} = m^2 + 2r$.

   Nhưng ta có $m^2 < b_{k+1} < (m+2)^2$ và $b_{k+1} \ne (m+1)^2$, do đó số b_{k+1} không là số chính phương(và lớn hơn b_k).

   Từ đây suy ra câu trả lời.

Bên cạnh các bài toán trên, ta cũng có các bài toán cụ thể khác:

4. Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số $A = \overline{abcd}$, thoả mãn hai điều kiện sau:

1) $\overline{abd} = (b+d-2a)^2$ 2) A + 72 là số chính phương.

<u>Hướng dẫn</u>

Vì $a \ge 1; b \le 9; d \le 9$ nên b + d – 2a, do đó $(b+d-2a)^2 \le 16^2$.

Kết hợp với 1) suy ra: $10^2 \le \overline{abd} \le 16^2$ (1)

Do A + 72 là số chính phương nên chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là một trong các số sau $\{0,1,4,5,6,9\}$. Vì lẽ đó $d \notin \{0,1,5,6\}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\overline{abd} \in \{12^2, 13^2\}$.

+ Nếu $\overline{abd} = 12^2 = 144$ (loại, vì khi đó $144 \ne (4+4-2)^2$).

+ Nếu $\overline{abd} = 13^2 = 169$ (thoả mãn, vì $169 = (9+6-2)^2$).

Đặt A + 72 = n^2. (3)

Do $d = 9 \Rightarrow A$ lẻ $\Rightarrow$ n lẻ. Từ (3) suy ra:

$1609 + 72 \le A + 72 = \overline{16c9} + 72 \le 1699 + 72 \Rightarrow 1681 \le A + 72 \le 1771 \Rightarrow 41^2 \le n^2 \le 43^2$ (4)

Do n lẻ, kết hợp với (4) suy ra n = 41. Vậy A = 1609 là số duy nhất cần tìm.

5. Tìm tất cả các số nguyên dương N có ba chữ số sao cho cộng các chữ số của N với N và với số được viết bởi các chữ số N nhưng theo thứ tự ngược lại, thì ta được một số chính phương.
6. Tìm số chính phương dạng $\overline{aabc}$ (a > c; b lẻ)
7. (IMO 1997) Cho các số nguyên dương a, b thoả mãn $a^2 + b^2$ chia cho a + b có thương là q và số dư là r. Hãy xác định tất cả các cặp (a, b) thoả mãn $q^2 + r = 1977$.

<u>Bài tập vân dung</u>

8. (T_1/369 TH&TT)
Với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 6, gọi A_n là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn n và không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Hãy tìm sao cho trong A_n không có số chính phương nào.
9. Với n là số nguyên dương bất kì, ta viết $\sqrt{n} = m + r$, với m là số nguyên và $0 \le r < 1$. Dĩ nhiên m và r phụ thuộc n. Ví dụ, nếu n = 20, $\sqrt{n} = 4 + 0,4721...$, tức m = 4; r = 0,4721... . Chứng minh rằng nếu n là bội của m thì hoặc n là số chính phương, hoặc n nhỏ hơn một số chính phương 1 đơn vị, hoặc n là tích của hai số nguyên liên tiếp.
10. Tìm bốn số tự nhiên có tính chất : “Bình phương mỗi số trong chúng cộng với ba số còn lại là số chính phương”.
11. (Đề đề nghị Olympic 30 – 4, 2007)
Cho các số nguyên $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số nguyên thoả mãn:
$x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2 + n^3 \le (2n-1)(x_1 + x_2 + ... + x_n) + n^2$ (1)
Chứng minh rằng: $S = x_1 + x_2 + ... + x_n + n + 1$ không là số chính phương.
12. (Vô địch Toán Canađa, 1998)
Cho số nguyên dương m. Xét dãy $\{a_n\}(n \ge 0)$ xác định bởi:
$$a_0 = 0; a_1 = m; a_{n+1} = m^2 a_n - a_n - 1, n \ge 1$$
Chứng minh rằng cặp thứ tự (a, b) các số nguyên không âm, với $a \le b$,là một nghiệm của phương trình $\frac{a^2 + b^2}{ab+1} = m^2$ khi và chỉ khi $(a,b) = (a_n, a_{n+1})$, với $n \ge 0$ nào đó.
13. (APMO 1999) Xác định tất cả các cặp số nguyên (a, b) sao cho hai số a^2 + 4b và b^2 + 4a đều là những số chính phương.