T. Andreescu, V. Cartoaje, G. Dospinescu, M. Lascu

Biên dịch: Dương Việt Thông

Bất Đẳng Xưa và Nay

Mục lục

Lời nói đầu

Quyển sách kết hợp những kết quả kinh điển về bất đẳng thức với những bài toán rất mới, một số bài toán được nêu chỉ vài ngày trước đây. Làm sao có thể viết được điều gì đặc biệt khi đã có quá nhiều sách về bất đẳng thức? Chúng tôi tin chắc rằng dù đề tài này rất tổng quát và thông dụng, quyển sách của chúng tôi vẫn rất khác biệt. Tất nhiên nói thì rất dễ, vậy chúng tôi nêu vài lý lẽ minh chứng. Quyển sách chứa một số lớn bài toán về bất đẳng thức, phần lớn là khó, các câu hỏi nổi tiếng trong các cuộc thi tài vì độ khó và vẻ đẹp của chúng. Và quan trọng hơn, trong cuốn sách chúng tôi đã sử dụng những lời giải của chính mình và đề xuất một số lớn bài toán độc đáo mới. Trong quyển sách có những bài toán đáng nhớ và cả những lời giải đáng nhớ. Vì thế quyển sách thích hợp với những sinh viên sử dụng thành thạo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và muốn cải tiến kỹ thuật và kỹ năng đại số của mình. Họ sẽ tìm thấy ở đây những bài toán khá hóc búa, những kết quả mới và cả những vấn đề có thể nghiên cứu tiếp. Các sinh viên chưa say mê trong lĩnh vực này có thể tìm được một số lớn bài toán, ý tưởng, kỹ thuật loại vừa và dễ để chuẩn bị tốt cho các kỳ thi toán. Một số bài toán chúng tôi chọn là đã biết nhưng chúng tôi đưa ra những lời giải mới để chứng tỏ sự đa dạng của những ý tưởng liên quan đến bất đẳng thức. Bất kỳ ai cũng tìm thấy ở đây việc thử thách cho những kỹ năng của mình. Nếu chúng tôi chưa thuyết phục nổi bạn, xin hãy xem những bài toán cuối cùng và hy vọng bạn sẽ đồng ý với chúng tôi.

Cuối cùng nhưng không kết thúc, chúng tôi tỏ lòng biết ơn sâu sắc những người đặt ra các bài toán có trong quyển sách này và xin lỗi vì không đưa ra đầy đủ xuất xứ dù chúng tôi đã cố gắng hết sức. Chúng tôi cũng xin cảm ơn Marian Tetiva, Dung Tran Nam, Constantin Tănăsescu, Călin Popa và Valentin Vornicu về những bài toán đẹp mà họ nêu ra cùng những bình luận quý giá, cảm ơn Cristian Babă, George Lascu và Călin Popa về việc đánh máy bản thảo và nhiều nhận xét xác đáng của họ.

Các tác giả

Chương 1. Các bài toán

1. Chứng minh rằng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

đúng với các số thực a, b, c bất kỳ.

Kömal

2. [Dinu Serbănescu] Cho $a, b, c \in (0,1)$, chứng minh rằng

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1.$$

Junior TST 2002, Romania

3. [Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3.$$

Gazeta Matematiă

4. Nếu phương trình $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ có ít nhất một nghiệm thực, thì $a^2+b^2\geq 8$.

Tournament of the Towns, 1993

5. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^3+y^3+z^3-3xyz$ với $x^2+y^2+z^2=1$ và x, y, z là các số thực.

6. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\leq a+b+c.$$

Ukraine, 2001

7. [Darij Grinberg] Nếu a, b, c là các số thực dương, thì

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

8. [Hojoo Lee] Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}\geq$$

$$\geq a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ac}+c\sqrt{2c^2+ab}.$$

Gazeta Matematiă

9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 2$, khi đó

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

JBMO 2002 Shorlist

10. [Ioan Tomescu] Cho $x, y, x > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)} \leq \frac{1}{7^4}.$$

Khi nào ta có đẳng thức?

Gazeta Matematiă

11. [Mihai Piticari, Dan Popescu] Chứng minh rằng

$$5(a^2 + b^2 + c^2 \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1,$$

với mọi $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$.

12. [Mircea Lascu] Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}, n \geq 2$ và $a > 0$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = a \text{ và } \ x^2{}_1 + x^2{}_2 + ... + x^2{}_n \leq \frac{a^2}{n-1}.$$

Chứng minh rằng $x_i \in [0, \frac{2a}{n}]$, với mọi $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

13. [Adrian Zahariuc] Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in (1, 2)$ bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \geq 1.$$

14. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

15. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực sao cho $a+x \geq b+y \geq c+z$ và $a+b+c = x+y+z$. Chứng minh rằng

$$ay + bx \geq ac + xz.$$

16. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+ac+bc}.$$

Junior TST 2003, Romania

17. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

JBMO 2002 Shorlist

18. Chứng minh rằng nếu $n > 3$ và $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$, thì

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + ... + \frac{1}{1+x_{n-1}+x_{n-1}x_n} + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

Russia, 2004

19. [Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

Chứng minh rằng

a) $xyz \leq \frac{1}{8}$;

b) $x + y + z \leq \frac{3}{2}$;

c) $xy + xz + yz \leq \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2$;

d) $xy + xz + yz \leq \frac{1}{2} + 2xyz$.

20. [Marius Olteanu] Cho $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$. Chứng minh rằng

$$|\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos x_3| + |\cos x_4| + |\cos x_5| \geq 1.$$

Gazeta Matematiă

21. [Florina Cârlan, Marian Tetiva] Chứng minh rằng nếu $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$ thì

$$xy + xz + yz \geq 3 + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1}.$$

22. [Laurentiu Panaitopol] Chứng minh rằng

$$\frac{1 + x^2}{1 + y + z^2} + \frac{1 + y^2}{1 + z + x^2} + \frac{1 + z^2}{1 + x + y^2} \geq 2,$$

với mọi số thực $x, y, z > -1$.

JBMO, 2003

23. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} \geq 2.$$

24. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca).$$

Kvant, 1988

25. Cho $n \geq 2$ và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + ... + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n - 1} \geq 1998.$$

Vietnam, 1998

26. [Marian Tetiva] Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $xyz \geq 27$;

b) $xy + xz + yz \geq 27$;

c) $x+y+z \geq 9$;

d) $xy+xz+yz \geq 2(x+y+z)+9$.

27. Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq xy+yz+zx.$$

Russia, 2002

28. [D.Olteanu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c}.\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}.\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}.\frac{c}{2c+a+b} \geq \frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematiă

29. Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

India, 2002

30. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ac+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}.$$

Đề cử cho kỳ thi Olympic Toán học vùng Balkan

31. [Adrian Zahariuc] Xét các số nguyên $x_1, x_2, ..., x_n, n \geq 0$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \geq x_1.x_2+x_2.x_3+...+x_n.x_1+2n-3.$$

32. [Murray Klamkin] Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+...+x_{n-1}^2x_n+x_n^2x_1$$

với $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ có tổng bằng 1 và $n>2$.

Crux Mathematicorum

33. Tìm giá trị lớn nhất của hằng số c sao cho với mọi $x_1, x_2, ..., x_n, ... > 0$ thỏa mãn $x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + ... + x_k$ với mọi k, bất đẳng thức

$$\sqrt{x_n} + \sqrt{x_n} + ... + \sqrt{x_n} \leq c\sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

đúng với mọi n.

IMO Shorlist, 1986

34. Cho các số thực dương a, b, c và x, y, z thỏa mãn $a + x = b + y = c + z = 1$. Chứng minh rằng

$$(abc + xyz)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx}\right) \geq 3.$$

Russia, 2002

35. [Viorel Vâjâitu, Alexandru Zaharescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Gazeta Matematiă

36. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$a^3(b+c+d) + b^3(c+d+a) + c^3(d+a+b) + d^3(a+b+c)$$

với a, b, c, d là các số thực mà tổng bình phương của các số bằng 1.

37. [Walther Janous] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

Crux Mathematicorum

38. Giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_n$ là các số thực, $n \geq 2$ là một số nguyên. Chứng minh rằng

$$a_1{a^4}_2 + a_2{a^4}_3 + ... + a_n{a^4}_1 \geq a_2{a^4}_1 + a_3{a^4}_2 + ... + a_1{a^4}_n.$$

Iran, 1999

39. [Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

40. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 1$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng ít nhất một trong các số $\sqrt[a_1]{a_2}$, $\sqrt[a_2]{a_3}, ..., \sqrt[a_{n-1}]{a_2}$, $\sqrt[a_n]{a_1}$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt[3]{3}$.

Phỏng theo một bài toán quen biết

41. [Mircea Lascu, Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$xy + xz + yz + 2xyz = 1.$$

Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $xyz \leq \dfrac{1}{8}$;

b) $x + y + z \geq \dfrac{3}{2}$;

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq 4(x+y+z)$;

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-4(x+y+z)\geq\dfrac{(2z-1)^2}{z(2z+1)}$, với $z = \max\{x, y, z\}$.

42. [Manlio Marangelli] Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z,

$$3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq xyz(x + y + z)^3.$$

43. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực sao cho $\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leq 1$, thì

$$1 + a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a.$$

44. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với bất kỳ số thực dương a, b, c ta có

$$27+\left(2+\frac{a^2}{bc}\right)\left(2+\frac{b^2}{ca}\right)\left(2+\frac{c^2}{ab}\right)\geq 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

45. Cho $a_0 = \dfrac{1}{2}$ và $a_{k+1} = a_k + \dfrac{a_k^2}{n}$. Chứng minh rằng $1 - \dfrac{1}{n} < a_n < 1$.

TST Singapore

46. [Călin Popa] Cho a, b, c là các số thực dương, với $a, b, c \in (0, 1)$ sao cho $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{1-c^2}{c}\right).$$

47. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Cho $x, y, z \leq 1$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}.$$

48. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$, thì

$$(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2 \geq 2^{15}xyz(x+y)(y+z)(z+x).$$

49. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng

1) $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$;

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{xyz}$.

50. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực sao cho $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, thì

$$x + y + z \leq xyz + 2.$$

IMO Shorlist, 1987

51. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$ và với mọi phép hoán vị σ của tập $\{1, 2, ..., n\}$, ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \geq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i.x_{\sigma(i)}}\right).$$

52. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Vojtech Jarnik

53. [Titu Andreescu] Cho $n > 3$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n \geq n$ và $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq n^2$. Chứng rằng $\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \geq 2$.

USAMO, 1999

54. [Vasile Cirtoaje] Nếu a, b, c, d là các số thực dương, thì

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

55. Cho x và y là các số thực dương, chỉ ra rằng $x^y + y^x > 1$.

France, 1996

56. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ có tích bằng 1, thì

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1).$$

MOSP, 2001

57. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$,

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc(ab+bc+ca).$$

58. [D.P.Mavlo] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$3 + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{1+abc}.$$

Kvant, 1988

59. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ với tích bằng 1 ta có bất đẳng thức

$$n^n.\prod_{i=1}^{n}(x_i^n+1) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^n.$$

60. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27}\right\}.$$

Kvant, 1993

61. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có bất đẳng thức

$$\sum(1+a^2)^2(1+b^2)^2(a-c)^2(b-c)^2 \geq (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(a-b)^2(b-c^2)(c-a^2).$$

AMM

62. [Titu Andreescu, Mircea Lascu] Cho α, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$ và $\alpha \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

63. Chứng minh rằng với mọi số thực $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+...+y_n^2 = 1$, ta có

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right).$$

Korea, 2001

64. [Laurentiu Panaitopol] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

TST Romania

65. [Cawlin Popa] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c}+\sqrt{ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{3a}+\sqrt{bc})} + \frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b}+\sqrt{ca})} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

66. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = 16.$$

Chứng minh rằng

$$-3 \leq ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leq 5.$$

67. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 2(ab+bc+ca)$$

với mọi a, b, c là các số thực dương.

APMO, 2004

68. [Vasile Cirtoaje] Chứng minh rằng nếu $0 < x \leq y \leq z$ và $x + y + z = xyz + 2$, thì

a) $(1 - xy)(1 - yz)(1 - xz) \geq 0$;

b) $x^2y \leq 1, x^3y^2 \leq \dfrac{32}{27}$.

69. [Titu Andreescu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong các bất đẳng thức

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6,$$

đúng.

TST 2001, USA

70. [Gabriel Dospinescu, Marian Tetiva] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn

$$x + y + z = xyz.$$

Chứng minh rằng

$$(x - 1)(y - 1)(z - 1) \leq 6\sqrt{3} - 10.$$

71. [Marian Tetiva] Chứng minh rằng với bất kỳ các số thực dương a, b, c ta có

$$\left|\frac{a^3 - b^3}{a + b} + \frac{b^3 - c^3}{b + c} + \frac{c^3 - a^3}{c + a}\right| \leq \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{4}.$$

Moldova TST, 2004

72. [Titu Andreescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

USAMO, 2004

73. [Gabriel Dospinescu] Cho $n > 2$ và $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) = n^2 + 1.$$

Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) > n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}.$$

74. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, Marian Tetiva] Chứng minh rằng với bất kỳ các số thực dương a, b, c, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

75. [Titu Andreescu, Zuming Feng] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + a + c)^2}{2b^2 + (a + c)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 8.$$

USAMO, 2003

76. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y và với mọi số nguyên dương m, n, ta có

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^m y^n + x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1}y + y^{m+n-1}x).$$

Austrian-Polish Competition, 1995

77. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a + abc}{1 + ab + abcd} + \frac{b + bcd}{1 + bc + bcde} + \frac{c + cde}{1 + cd + cdea} + \frac{d + dea}{1 + de + deab} + \frac{e + eab}{1 + ea + eabc} \geq \frac{10}{3}.$$

Crux Mathematicorum

78. [Titu Andreescu] Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in (0, \frac{\pi}{2})$ bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin b.\sin(b-c).\sin(b-a)}{\sin(c+a)} + \frac{\sin c.\sin(c-a).\sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geq 0.$$

TST 2003, USA

79. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương, thì

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}.$$

KMO Summer Program Test, 2001

80. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu] Cho $n > 2$, tìm hằng số k_n nhỏ nhất có tính chất: Nếu $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ có tích bằng 1, thì

$$\frac{a_1a_2}{(a_1^2 + a_2)(a_2^2 + a_1)} + \frac{a_2a_3}{(a_2^2 + a_3)(a_3^2 + a_2)} + ... + \frac{a_na_1}{(a_n^2 + a_1)(a_1^2 + a_n)} \leq k_n.$$

81. [Vasile Cirtoaje] Với mọi số thực a, b, c, x, y, z, chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

Kvant, 1989

82. [Vasile Cirtoaje] Chứng minh rằng các cạnh a, b, c của một tam giác thỏa mãn bất đẳng thức

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1\right) \geq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

83. [Walther Janous] Cho $n > 2$ và $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\right).$$

Crux Mathematicorum

84. [Vasile Cirtoaje, Gheorghe Eckstein] Xét các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn $x_1 x_2 ... x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n - 1 + x_1} + \frac{1}{n - 1 + x_2} + ... + \frac{1}{n - 1 + x_n} \leq 1.$$

TST 1999, Romania

85. [Titu Andreescu] Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, ta có

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

USAMO, 2001

86. [Titu Andreescu] Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a + b + c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\left\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2\right\}.$$

TST 2000, USA

87. [Kiran Kedlaya] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a.\frac{a + b}{2}.\frac{a + b + c}{3}}.$$

88. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho với mọi số nguyên dương n không là một số chính phương, ta có

$$\left|(1+\sqrt{n})\sin(\pi\sqrt{n})\right| > k.$$

Vietnamese IMO Training Camp, 1995

89. [Tran Nam Dung] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $(x+y+z)^3 = 32xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}.$$

Vietnam, 2004

90. [George Tsintifa] Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d > 0$,

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+d)^3(d+a)^3 \geq 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4.$$

Crux Mathematicorum

91. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{(ab)^n}{1-ab} + \frac{(bc)^n}{1-bc} + \frac{(ca)^n}{1-ca}$$

với a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1 và n là một số nguyên dương.

92. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}.$$

93. [Tran Nam Dung] Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 9$, ta có

$$2(a+b+c) - abc \leq 10.$$

Vietnam, 2002

94. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right) \geq 3.$$

95. [Gabriel Dospinescu] Cho n là số nguyên lớn hơn 2. Tìm số thực m_n lớn nhất và số thực M_n nhỏ nhất sao cho với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ (với $x_n = x_0, x_{n+1} = x_1$), ta có

$$m_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + 2(n-1)x_i + x_{i+1}} \leq M_n.$$

96. [Vasile Cirtoaje] Nếu x, y, z là các số thực dương, thì

$$\frac{1}{x^2+xy+y^2} + \frac{1}{y^2+yz+z^2} + \frac{1}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

Gazeta Matematiă

97. [Vasile Cirtoaje] Với mọi $a, b, c, d > 0$, chứng minh rằng

$$2(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(d^3+1) \geq (1+abcd)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2).$$

Gazeta Matematiă

98. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, ta có

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4).$$

Vietnam TST, 1996

99. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$, thì

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

Bulgaria, 1997

100. [Tran Nam Dung] Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$.

Vietnam, 2001

101. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với mọi $x, y, z, a, b, c > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$, ta có

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3.$$

102. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(a+c-b)^2}{(a+c)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Japan, 1997

103. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thì

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n - na_1a_2...a_n \geq (n-1)\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} - a_n\right)^n$$

trong đó a_n là số nhỏ nhất trong các số $a_1, a_2, ..., a_n$.

104. [Turkevici] Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z, t, ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2 + x^2z^2 + y^2t^2.$$

Kvant

105. Chứng minh rằng với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n$, bất đẳng thức sau đúng

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j.$$

106. Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ là các số thực nằm giữa 1001 và 2002, thỏa mãn

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2,$$

thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + ... + \frac{a_n^3}{b_n} \leq \frac{17}{10}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).$$

TST Singapore

107. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1, thì

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2.$$

108. [Vasile Cirtoaje] Nếu a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$, thì

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

Gazeta Matematiă

109. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là các sô thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^+b^2} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Gazeta Matematiă

110. [Gabriel Dospinescu] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực và S là một tập con khác rỗng của $\{1, 2, ..., n\}$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i\in S} a_i\right)^2 \leq \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (a_i+...+a_j)^2.$$

TST 2004, Romania

111. [Dung Tran Nam] Cho $x_1, x_2, ..., x_{2004}$ là các số thực trong đoạn $[-1, 1]$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+...+x_{2004}^3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $x_1+x_2...+x_{2004}$.

112. [Gabriel Dospinescu, Călin Popa] Chứng minh rằng nếu $n \geq 2$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực có tích bằng 1, thì

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2-n \geq \frac{2n}{n-1}.\sqrt[n]{n-1}(a_1+a_2+...+a_n-n).$$

113. [Vasile Cirtoaje] Nếu a, b, c là cá số thực dương, thì

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$$

Gazeta Matematiă

114. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương x, y, z

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Iran, 1996

115. Chứng minh rằng với mọi x, y trong đoạn $[0,1]$,

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2} \geq (1+\sqrt{5})(1-xy).$$

116. [Suranyi] Chứng minh rằng với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, bất đẳng thức sau đúng

$$(n-1)(a_1^n+a_2^n+....+a_n^n)+na_1a_2...a_n \geq (a_1+a_2+...+a_n)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1}).$$

Miklos Schweitzer Competition

117. Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ có tích bằng 1,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.$$

Dạng tổng quát của bất đẳng thức Turkevici

118. [Gabriel Dospinescu] Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_1a_2...a_2}{1-(n-1)a_i}}$$

với $a_1, a_2, ..., a_n < \dfrac{1}{n-1}$ có tổng bằng 1 và $n > 2$ là một số nguyên.

119. [Vasile Cirtoaje] Cho $a_1, a_2, ..., a_n < 1$ là các số thực không âm thỏa mãn

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{1-a_1^2}+\frac{a_2}{1-a_2^2}+...+\frac{a_n}{1-a_n^2} \geq \frac{na}{1-a^2}.$$

120. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4.$$

Chứng minh rằng

$$abcxyz < \frac{1}{36}.$$

121. [Gabriel Dospinescu] Cho $n > 2$, tìm giá nhỏ nhất của hằng số k_n, sao cho nếu $x_1, x_2, ..., x_2 > 0$ có tích bằng 1, thì

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_n x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_n}} \leq n-1.$$

Mathlinks Contest

122. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Cho $n > 2$, tìm giá trị lớn nhất của hằng số k_n, sao cho với bất kỳ $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$, ta có bất đẳng thức

$$(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) \geq k_n x_1 x_2 ... x_n.$$

Chương 2. Các lời giải

1. Chứng minh rằng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

đúng với các số thực a, b, c bất kỳ.

Kömal

Lời giải 1:
Áp dụng bất đẳng thức **Minkowski** cho vế trái ta có

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\sqrt{(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2}.$$

Đặt $a+b+c=x$, khi đó

$$(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}\geq\frac{9}{2},$$

và kết luận được chứng minh.

Lời giải 2:
Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq$$

$$\geq\frac{|a|+|1-b|}{\sqrt{2}}+\frac{|b|+|1-c|}{\sqrt{2}}+\frac{|c|+|1-a|}{\sqrt{2}}$$

và bởi vì $|x|+|1-x|\geq 1$ với mọi số thực x, đại lượng cuối cùng ít nhất bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. [Dinu Serbănescu] Cho $a, b, c \in (0, 1)$, chứng minh rằng

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1.$$

Junior TST 2002, Romania

Lời giải 1:
Dễ thấy $x^{\frac{1}{2}}<x^{\frac{1}{3}}$ với $x\in(0,1)$. Suy ra

$$\sqrt{abc}<\sqrt[3]{abc},$$

và

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Bởi bất đẳng thức AM-GM,

$$\sqrt{abc} < \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3},$$

và

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \le \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}.$$

Cộng hai bất đẳng thức, ta được

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{a+b+c+1-a+1-b+1-c}{3} = 1,$$

điều phải chứng minh.

Lời giải 2:
Ta có

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b(1-c)} < \sqrt{b}\sqrt{c} + \sqrt{1-b}.\sqrt{1-c} \le 1,$$

bởi bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz .**

Lời giải 3:
Đặt $a = \sin^2 x, b = \sin^2 y, c = \sin^2 z$, với $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sin x. \sin y. \sin z + \cos x. \cos y. \cos z < 1$$

và được suy ra từ các bất đẳng thức sau

$$\sin x. \sin y. \sin z + \cos x. \cos y. \cos z < \sin x \sin y + \cos x. \cos y = \cos(x-y) \le 1.$$

3. [Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:

Từ bất đẳng thức **AM-GM**, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} &\geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\right) + \left(\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right) + \left(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}}\right) \\
&\geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\
&\geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3\sqrt[6]{abc} \\
&= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.
\end{aligned}$$

4. Nếu phương trình $x^4+ax^3+2x^2+bx+1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực, thì $a^2+b^2 \geq 8$.

Tournament of the Towns, 1993

Lời giải:
Cho x là nghiệm của phương trình. Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** dẫn đến

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}{x^2 + x^6} \geq 8,$$

bởi vì bất đẳng thức cuối cùng tương đương với $(x^2 - 1)^4 \geq 0$.

5. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ với $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và x, y, z là các số thực.

Lời giải:
Đặt $t = xy + yz + zx$. Dễ thấy

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2 = (x + y + z)^2(1 - xy - yz - zx)^2 = (1 + 2t)(1 - t)^2.$$

Ta cũng có $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Suy ra, ta phải tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $(1+2t)(1-t)^2$, với $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Trong trường hợp này ta có

$$(1 + 2t)(1 - t)^2 \leq 1 \Leftrightarrow t^2(3 - 2t) \geq 0,$$

vậy $|x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz| \leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1, y = z = 0$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)} \leq a + b + c.$$

Ukraine, 2001

Lời giải 1:
Ta sẽ sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** hai lần. Đầu tiên, ta viết

$$ax+by+cz \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

và sau đó áp dụng bất đẳng thưc **Cauchy-Schwarz** lần nữa ta được:

$$\begin{aligned} ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} &\le \\ &\le \sqrt{\sum a^2}.\sqrt{\sum x^2}+\sqrt{2\sum ab}.\sqrt{2\sum xy} \\ &\le \sqrt{\sum x^2+2\sum xy}.\sqrt{\sum a^2+2\sum ab} \\ &= \sum a. \end{aligned}$$

Lời giải 2:
Bất đẳng thức thuần nhất với a, b, c ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Áp dụng bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \le ax+by+cz+xy+yz+zx+ab+bc+ca.$$

Bởi

$$xy+yz+zx+ab+bc+ca = \frac{1-x^2-y^2-z^2}{2}+\frac{1-a^2-b^2-c^2}{2} \le 1-ax-by-cz,$$

bất đẳng thức cuối cùng tương đương với $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \ge 0$.

7. [Darij Grinberg] Nếu a, b, c là các số thực dương, thì

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Lời giải 1:
Ta viết lại bất đẳng thức

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \ge \frac{9}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \ge \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Cuối cùng ta phải chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

bất đẳng thức này chúng ta đã biết.

Lời giải 2:
Không mất tổng quát ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Xét hàm

$$f : (0,1 \to (0,\infty), f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Tính đạo hàm của f ta thấy f là hàm lồi. Vậy, ta có thể áp dụng bất đẳng thức **Jensen** và kết luận được chứng minh.

8. [Hojoo Lee] Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4} \geq$$
$$\geq a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ac} + c\sqrt{2c^2 + ab}.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Ta bắt đầu từ $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$. Ta viết lại bất đẳng thức như sau

$$4a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 \geq 3a^4 + 6a^2b^2 + 3b^4,$$

suy ra

$$\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2).$$

Từ đó, dễ thấy rằng

$$\left(\sum \sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}\right)^2 \geq 3\left(\sum a^2\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$\left(\sum a\sqrt{2a^2 + bc}\right)^2 \leq \left(\sum a^2\right)\left(\sum (2a^2 + bc)\right) \leq 3\left(\sum a^2\right)^2$$

và bất đẳng thức được chứng minh.

9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 2$, khi đó

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

JBMO 2002 Shortlist

Lời giải 1:
Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \tag{1}$$

và

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3). \tag{2}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c)}{3} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\big((a+b) + (b+c) + (c+a)\big)}{6} \\ &\geq \frac{\big(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}\big)^2}{6} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$\begin{aligned} a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b} &\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{8} \\ &= 6. \end{aligned} \tag{3}$$

Vậy

$$(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b})^2 \geq 6(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}). \tag{4}$$

Điều phải chứng minh được suy ra từ bất đẳng thức (3) và (4).

Lời giải 2:
Ta có

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev**, ta có

$$\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} \le \sqrt{6(a^3+b^3+c^3)}$$

và cuối cùng ta chỉ cần chứng minh $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$, điều này đúng bởi bất đẳng thức **AM-GM** . Ta có đẳng thức nếu $a=b=c=\sqrt[3]{2}$.

10. [Ioan Tomescu] Cho $x, y, x > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)} \le \frac{1}{7^4}.$$

Khi nào ta có đẳng thức?

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Đâu tiên, chúng ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$(1+3x)\left(1+\frac{8y}{x}\right)\left(1+\frac{9z}{y}\right)\left(1+\frac{6}{z}\right) \ge 7^4.$$

Bất đẳng trên được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức **Huygens**. Đẳng thức xẩy ra khi $x=2, y=\dfrac{3}{2}, z=1$.

11. [Mihai Piticari, Dan Popescu] Chứng minh rằng

$$5(a^2+b^2+c^2) \le 6(a^3+b^3+c^3)+1,$$

với mọi $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$.

Lời giải:
Vì $a+b+c=1$, ta có

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc + a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned}
5(a^2+b^2+c^2) &\le 18abc + 6(a^2+b^2+c^2) - 6(ab+bc+ca) + 1 \\
&\Leftrightarrow 18abc + 1 - 2(ab+bc+ca) \ge 6(ab+bc+ca) \\
&\Leftrightarrow 8(ab+bc+ca) \le 2 + 18abc \\
&\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) \le 1 + 9abc \\
&\Leftrightarrow (1-2a)(1-2b)(1-2c) \le abc \\
&\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc,
\end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối tương đương với bất đẳng thức **Schur**.

12. [Mircea Lascu] Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}, n \geq 2$ và $a > 0$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = a \text{ và } {x^2}_1 + {x^2}_2 + ... + {x^2}_n \leq \frac{a^2}{n-1}.$$

Chứng minh rằng $x_i \in [0, \frac{2a}{n}]$, với mọi $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , ta có

$$(a - x_1)^2 \leq (n-1)(x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2) \leq (n-1)\left(\frac{a^2}{n-1} - x_1^2\right).$$

Suy ra

$$a^2 - 2ax_1 + x_1^2 \leq a^2 - (n-1)x_1^2 \Leftrightarrow x_1\left(x_1 - \frac{2a}{n}\right) \leq 0,$$

điều phải chứng minh.

13. [Adrian Zahariuc] Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in (1, 2)$ bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \geq 1.$$

Lời giải:
Vì $a, b, c \in (1, 2)$ nên các mẫu số là dương. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} \geq \frac{a}{a+b+c} \\
\Leftrightarrow &b(a+b+c) \geq \sqrt{a}(4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}) \\
\Leftrightarrow &(a+b)(b+c) \geq 4b\sqrt{ac},
\end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối suy ra từ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $b + c \geq 2\sqrt{bc}$. Viết hai bất đẳng thức tương tự và cộng 3 bất đẳng thức lại ta được điều phải chứng minh.

14. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Lời giải 1:
Nếu $ab + bc + ca \leq a + b + c$, thì bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** giải xong bài toán:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc} \geq \frac{\dfrac{(a+b+c)^2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}}{abc} \geq a + b + c.$$

Ngược lại, bất đẳng thức trên cho ta

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}\geq\frac{\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}}{abc}\geq a+b+c$$

(ở đây ta sử dụng $abc\leq 1$).

Lời giải 2:
Thay thế a,b,c bởi ta,tb,tc với $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}$, khi đó bảo toàn giá trị vế trái của bất đẳng thức và tăng giá trị vế phải của bất đẳng thức và có $at.bt.ct=abct^3=1$. Do đó không mất tổng quát chúng ta có thể giả sử rằng $abc=1$. Khi đó tồn tại các số thực x,y,z sao cho $a=\dfrac{y}{x},b=\dfrac{z}{y},c=\dfrac{x}{z}$.
Bất đẳng thức **Rearrangement** cho ta

$$x^3+y^3+z^3\geq x^2y+y^2z+z^2x.$$

Suy ra

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}\geq\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{xyz}=a+b+c$$

điều phải chứng minh.

Lời giải 3:
Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** , chúng ta suy ra rằng

$$\frac{2a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}\geq 3a.$$

Tương tự, $\dfrac{2b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 3b$ và $\dfrac{2c}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 3c$. Cộng ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 4:
Đặt $x=\sqrt[9]{\dfrac{ab^4}{c^2}},y=\sqrt[9]{\dfrac{ca^4}{b^2}},z=\sqrt[9]{\dfrac{bc^4}{a^2}}$. Do đó, $a=xy^2,b=zx^2,c=yz^2$, và $xyz\leq 1$.
Vậy, sử dụng bất đẳng thức **Rearrangement**, ta có

$$\sum\frac{a}{b}=\sum\frac{x^2}{yz}\geq xyz\sum\frac{x^2}{yz}=\sum x^3\geq\sum xy^2=\sum a.$$

15. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương sao cho $a + x \geq b + y \geq c + z$ và $a + b + c = x + y + z$. Chứng minh rằng

$$ay + bx \geq ac + xz.$$

Lời giải:
Ta có

$$\begin{aligned}
ay + bx - ac - xz &= a(y - c) + x(b - z) \\
&= a(a + b - x - z) + x(b - z) \\
&= a(a - x) + (a + x)(b - z) \\
&= \frac{1}{2}(a - x)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) + (a + x)(b - z) \\
&= \frac{1}{2}(a - x)^2 + \frac{1}{2}(a + x)(a - x + 2b - 2z) \\
&= \frac{1}{2}(a - x)^2 + \frac{1}{2}(a + x)(b - c + y - z) \geq 0.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = x, b = z, c = y$ và $2x \geq y + z$.

16. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{3}{a + b + c} \geq \frac{6}{ab + ac + bc}.$$

Junior TST 2003, Romania

Lời giải:
Ta đặt $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$ và dễ thấy $xyz = 1$. Bất đẳng thức tương đương với

$$1 + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq \frac{6}{x + y + z}.$$

Từ $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ ta có

$$1 + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq 1 + \frac{9}{(x + y + z)^2},$$

vậy cần phải chứng minh rằng

$$1 + \frac{9}{(x + y + z)^2} \geq \frac{6}{x + y + z}.$$

Bất đẳng thức cuối tương đương với $\left(1 - \dfrac{3}{x + y + z}\right)^2 \geq 0$ và điều này kết thúc chứng minh.

17. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

JBMO 2002 Shorlist

Lời giải 1:
Ta có

$$\frac{a^3}{b^2} \geq \frac{a^2}{b}+a-b \Leftrightarrow a^3+b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0,$$

điều này hiển nhiên đúng. Viết các bất đẳng thức tương tự và cộng lại

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b}+a-b+\frac{b^2}{c}+b-c+\frac{c^2}{a}+c-a=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

Lời giải 2:
Từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right) \geq \left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2,$$

vậy ta chỉ phải chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$$

Nhưng điều này suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** .

18. Chứng minh rằng nếu $n>3$ và $x_1, x_2, ..., x_n>0$ thỏa mãn $\prod_{i=1}^{n} x_i=1$, thì

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+...+\frac{1}{1+x_{n-1}+x_{n-1}x_n}+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

Russia, 2004

Lời giải:
Ta sử dụng một dạng tương tự của phép thế cổ điển $x_1=\frac{a_2}{a_1}, x_2=\frac{a_3}{a_2}, ..., x_n=\frac{a_1}{a_n}$.
Trong trường hợp này bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2}>1$$

và điều đó là hiển nhiên, bởi vì $n>3$ và $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}<a_1+a_2+...+a_n$ với mọi i.

19. [Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

Chứng minh rằng

a) $xyz \leq \frac{1}{8}$;

b) $x + y + z \leq \frac{3}{2}$;

c) $xy + xz + yz \leq \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2$;

d) $xy + xz + yz \leq \frac{1}{2} + 2xyz$.

Lời giải:
a) Điều này rất đơn giản. Từ bất đẳng thức **AM-GM** , ta có

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \geq 4\sqrt[4]{2x^3y^3z^3} \Longrightarrow x^3y^3z^3 \leq \frac{1}{2.4^4} \Longrightarrow xyz \leq \frac{1}{8}.$$

b) Rõ ràng, ta phải có $x, y, z \in (0, 1)$. Nếu đặt $s = x + y + z$, từ hệ thức đã cho ta có ngay

$$s^2 - 2s + 1 = 2(1 - x)(1 - y)(1 - z).$$

Sau đó, lại bởi bất đẳng thức **AM-GM** $(1 - x, 1 - y, 1 - z$ là các số dương), ta được

$$s^2 - 2s + 1 \leq 2\left(\frac{1 - x = 1 - y + 1 - z}{3}\right)^3 = 2\left(\frac{3 - s}{3}\right)^3.$$

Sau một vài bước tính ta được

$$2s^3 + 9s^2 - 27 \leq 0 \Leftrightarrow (2s - 3)(s + 3)^2 \leq 0$$

và kết luận là rõ ràng.

c) Các bất đẳng thức này là các hệ quả đơn giản của a) và b):

$$xy + xz + yz \leq \frac{(x + y + z)^3}{3} \leq \frac{1}{3}.\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

và

$$x^2 + y^2 + z^= 1 - 2xyz \geq 1 - 2.\frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

d) Đây là vấn đề tế nhị hơn, đầu tiên ta chú ý rằng luôn luôn có hai trong ba số lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) $\frac{1}{2}$. Bởi tính đối xứng, ta có thể giả thiết rằng, $x, y \leq \frac{1}{2}$, hoặc $x, y \geq \frac{1}{2}$ và do đó

$$(2x-1)(2y-1) \geq 0 \Leftrightarrow x+y-2xy \leq \frac{1}{2}.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
&1 = x^2+y^2+z^2+2xyz \geq 2xy+z^2+2xyz\\
\Longrightarrow &2xy(1+z) \leq 1-z^2\\
\Longrightarrow &2xy \leq 1-z.
\end{aligned}$$

Bây giờ ta chỉ việc nhân vế với vế các bất đẳng thức ở trên

$$x+y-2xy \leq \frac{1}{2}$$

và

$$z \leq 1-2xy$$

để có được kết quả mong muốn:

$$xz+yz-2xyz \leq \frac{1}{2}-xy \Longleftrightarrow xy+xz+yz \leq \frac{1}{2}+2xyz.$$

Dù không quan trọng trong chứng minh, nhưng cũng chú ý rằng

$$x+y-2xy = xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-2\right) > 0,$$

bởi vì cả hai số $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ đều lớn hơn 1.

Chú ý.
1) Có thể thu được một vài bất đẳng thức khác, sử dụng

$$z+2xy \leq 1$$

và hai bất đẳng thức tương tự

$$y+2xz \leq 1, x+2yz \leq 1.$$

Ví dụ, nhân các bất đẳng thức này lần lượt với x, y, z và cộng các bất đẳng thức mới, ta có

$$x^2+y^2+z^2+6xyz \leq x+y+z,$$

hoặc
$$1 + 4xyz \leq x + y + z.$$
2) Nếu ABC là một tam giác bất kỳ, thì các số
$$x = \sin\frac{A}{2}, y = \sin\frac{B}{2}, z = \sin\frac{C}{2}$$
thoả mãn điều kiện của bài toán này; ngược lại, nếu $x, y, z > 0$ thoả mãn
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$
thì có một tam giác ABC sao cho
$$x = \sin\frac{A}{2}, y = \sin\frac{B}{2}, z = \sin\frac{C}{2}.$$
Theo nhận xét này, các cách chứng minh mới có thể được đưa ra cho các bất đẳng thức trên.

20. [Marius Olteanu] Cho $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$. Chứng minh rằng
$$|\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos x_3| + |\cos x_4| + |\cos x_5| \geq 1.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Dễ dàng chứng minh được rằng
$$|\sin(x + y)| \leq \min\{|\cos x| + |\cos y|, |\sin x| + |\sin y|\}$$
và
$$|\cos(x + y)| \leq \min\{|\sin x| + |\cos y|, |\sin y| + |\cos x|\}.$$
Vậy, ta có
$$1 = \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\right| \leq |\cos x_1| + \left|\sin\left(\sum_{i=2}^{5} x_i\right)\right| \leq |\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos(x_3 + x_4 + x_5)|.$$
Nhưng bằng cách tương tự ta có thể chứng minh
$$|\cos(x_3 + x_4 + x_5)| \leq |\cos x_3| + |\cos x_4| + |\cos x_5|$$
và ta có điều phải chứng minh.

21. [Florina Cărlan, Marian Tetiva] Chứng minh rằng nếu $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$ thì

$$xy + xz + yz \geq 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.$$

Lời giải 1:
Ta có

$$xyz = x + y + z \geq 2\sqrt{xy} + z \Longrightarrow z(\sqrt{xy})^2 - 2\sqrt{xy} - z \geq 0.$$

Bởi vì nghiệm dương của tam thức $zt^2 - 2t - z$ là

$$\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z},$$

từ đó ta có

$$\sqrt{xy} \geq \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \Leftrightarrow z\sqrt{xy} \geq 1 + \sqrt{1+z^2}.$$

Hiển nhiên ta có hai bất đẳng thức tương tự khác. Khi đó,

$$xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \geq 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1},$$

và ta thu được chứng minh của bất đẳng thức đã cho, và một sự cải thiện nhỏ của nó

Lời giải 2:
Một sự cải thiện khác được đưa ra như sau. Bắt đầu từ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \Longrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2y^2z^2,$$

bất đẳng thức này tương đương với

$$(xy + yz + zx)^2 \geq 2xyz(x + y + z) + x^2y^2z^2 = 3(x + y + z)^2.$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}(xy + yz + zx - 3)^2 &= (xy + yz + zx)^2 - 6(xy + yz + zx) + 9\\ &\geq 3(x + y + z)^2 - 6(xy + yz + zx) + 9\\ &= 3(x^2 + y^2 + z^2) + 9,\end{aligned}$$

suy ra

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2) + 9}.$$

Nhưng

$$\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2) + 9} \geq \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}$$

là một hệ quả của bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** và ta có sự cải thiện thứ hai và chứng minh của bất đẳng thức mong muốn:

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2) + 9} \geq 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.$$

22. [Laurentiu Panaitopol] Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2,$$

với mọi số thực $x, y, z > -1$.

JBMO, 2003

Lời giải:

Ta thấy $y \leq \dfrac{1+y^2}{2}$ và $1+y+z^2>0$, vậy

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}\geq \frac{1+x^2}{1+z^2+\dfrac{1+y^2}{2}}$$

và có các hệ thức tương tự. Đặt $a=1+x^2, b=1+y^2, c=1+z^2$, chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{a}{2c+b}+\frac{b}{2a+c}+\frac{c}{2b+a}\geq 1 \tag{1}$$

với bất kỳ $a, b, c > 0$. Đặt $A=2c+b, B=2a+c, c=2b+a$. Khi đó

$$a=\frac{C+4B-2A}{9}, b=\frac{A+4C-2B}{9}, c=\frac{B+4A-2C}{9}$$

và bất đẳng thức (1) được viết lại

$$\frac{C}{A}+\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+4\left(\frac{B}{A}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}\right)\geq 15.$$

Bởi vì $A, B, C > 0$, từ bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$\frac{C}{A}+\frac{A}{B}+\frac{B}{C}\geq 3\sqrt[3]{\frac{C}{A}.\frac{A}{B}.\frac{B}{C}}=3$$

và

$$\frac{B}{A}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}\geq 3$$

và ta có điều phải chứng minh.

Một cách chứng minh khác cho (1) bởi sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** :

$$\frac{a}{2c+b}+\frac{b}{2a+c}+\frac{c}{2b+a}=\frac{a^2}{2ac+ab}+\frac{b^2}{2ab+cb}+\frac{c^2}{2bc+ac}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1.$$

23. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} \geq 2.$$

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$\sum \frac{a^2 + b}{b + c} \geq \frac{\left(\sum a^2 + 1\right)^2}{\sum a^2(b + c) + \sum a^2 + \sum ab}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{\left(\sum a^2 + 1\right)^2}{\sum a^2(b + c) + \sum a^2 + \sum ab} \geq 2 \Leftrightarrow 1 + \left(\sum a^2\right)^2 \geq 2 \sum a^2(b + c) + 2 \sum ab.$$

Bất đẳng thức cuối cùng có thể biến đổi như sau

$$\begin{aligned} &1 + \left(\sum a^2\right)^2 \geq 2 \sum a^2(b + c) + 2 \sum ab \\ \Leftrightarrow &1 + \left(\sum a^2\right)^2 \geq 2 \sum a^2 - 2 \sum a^3 + 2 \sum ab \\ \Leftrightarrow &\left(\sum a^2\right)^2 + 2 \sum a^3 \geq \sum a^2, \end{aligned}$$

và điều này đúng, bởi vì

$$\sum a^3 \geq \frac{\sum a^2}{3} (\text{ bất đẳng thức } \textbf{Chebyshev} \;)$$

và

$$\left(\sum a^2\right)^2 \geq \frac{\sum a^2}{3}.$$

24. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca).$$

Kvant, 1988

Lời giải:
Điều kiện

$$\sum a^4 \leq 2 \sum a^2b^2$$

tương đương với

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 0.$$

Trong bất kỳ trường hợp nào mà $a = b+c$ hoặc $b = c+a$ hoặc $c = a+b$, thì bất đẳng thức

$$\sum a^2 \leq 2\sum ab$$

là hiển nhiên. Vậy, giả sử $a+b \neq c, b+c \neq a, c+a \neq b$. Bởi vì nhiều nhất một trong các số $b+c-a, c+a-b, a+b-c$ là âm và tích của các số là không âm, nên tất cả các số là dương. Suy ra, ta có thể giả thiết rằng

$$a^2 < ab+ac, b^2 < bc+ba, c^2 < ca+cb$$

và kết luận được chứng minh.

25. Cho $n \geq 2$ và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + ... + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \geq 1998.$$

Vietnam, 1998

Lời giải:
Đặt $\dfrac{1998}{1998+x_i} = a_i$. Bài toán quy về chứng minh rằng với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ ta có bất đẳng thức

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i} - 1\right) \geq (n-1)^n.$$

Bất đẳng thức này có thể thu được bởi nhân các bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_i} - 1 = \frac{a_1 + ... + a_{i-1} + a_{i+1} + ... + a_n}{a_i} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_1...a_{i-1}a_{i+1}...a_n}{a_i^{n-1}}}.$$

26. [Marian Tetiva] Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = xyz$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $xyz \geq 27$;

b) $xy + xz + yz \geq 27$;

c) $x + y + z \geq 9$;

d) $xy + xz + yz \geq 2(x + y + z) + 9$.

Lời giải:
a), b), c) Sử dụng các bất đẳng thức đã biết, chúng ta có

$$xyz = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Longrightarrow (xyz)^3 \geq 27(xyz)^2,$$

điều này cho $xyz \geq 27$. Khi đó

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \geq 3\sqrt[3]{27^2} = 27$$

và

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3\sqrt[3]{27} = 9.$$

d) Ta chú ý rằng $x^2 < xyz \Longrightarrow x < yz$ và các hệ thức tương tự. Suy ra

$$xy < yz.xz \Longrightarrow 1 < z^2 \Longrightarrow z > 1.$$

Do đó cả ba số đều lớn hơn 1. Đặt

$$a = x - 1, b = y - 1, c = z - 1.$$

Ta có $a > 0, b > 0, c > 0$ và

$$x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1.$$

Thay vào giả thiết đã cho ta có

$$(a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2 \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1),$$

điều này tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 2 = abc + ab + ac + bc.$$

Nếu đặt $q = ab + ac + bc$, ta có

$$q \leq a^2 + b^2 + c^2, \sqrt{3q} \leq a + b + c$$

và

$$abc \leq \left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(3q)^{\frac{3}{2}}}{27}.$$

Suy ra

$$q+\sqrt{3q}+2 \le a^2+b^2+c^2+a+b+c+2 = abc+ab+ac+bc \le \frac{(\sqrt{3q})^3}{27}+q$$

và đặt $x=\sqrt{3q}$, ta có

$$x+2 \le \frac{x^3}{27} \Longleftrightarrow (x-6)(x+3)^2 \ge 0.$$

Cuối cùng,

$$\sqrt{3q}=x \ge 6 \Longrightarrow q = ab+ac+bc \ge 12.$$

Bây giờ, nhắc lại rằng $a=x-1, b=y-1, c=z-1$, vậy ta có

$$\begin{aligned} &(x-1)(y-1)+(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1) \ge 12 \\ \Longrightarrow &xy+xz+yz \ge 2(x+y+z)+9; \end{aligned}$$

và ta có điều phải chứng minh.
Ta có thể chứng minh một bất đẳng thức mạnh hơn

$$xy+xz+yz \ge 4(x+y+z)-9.$$

Hãy thử đi!

27. Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge xy+yz+zx.$$

Russia, 2002

Lời giải:
Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\begin{aligned} &x^2+2\sqrt{x}+y^2+2\sqrt{y}+z^2+2\sqrt{z} \ge x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\ \Longleftrightarrow &x^2+2\sqrt{x}+y^2+2\sqrt{y}+z^2+2\sqrt{z} \ge 9. \end{aligned}$$

Bây giờ, từ bất đẳng thức **AM-GM** , ta có

$$\begin{aligned} &x^2+2\sqrt{x} = x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x} \ge 3\sqrt[3]{x^2.x} = 3x, \\ &y^2+2\sqrt{y} \ge 3y, z^2+2\sqrt{z} \ge 3z, \end{aligned}$$

suy ra

$$x^2+y^2+z^2+2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \ge 3(x+y+z) \ge 9.$$

28. [D.Olteanu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c}.\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}.\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}.\frac{c}{2c+a+b}\geq\frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Đặt $x=a+b, y=b+c, z=a+c$ và sau một vài bước tính toán ta thu được bất đẳng thức tương đương dạng

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}\geq\frac{9}{2}.$$

Nhưng sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ,

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x} &\geq\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}+\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+x^2+y^2+z^2}\\ &=\frac{2(x+y+z)^4}{2(xy+yz+zx)(xy+yz+zx+x^2+y^2+z^2)}\\ &\geq\frac{8(x+y+z)^4}{\left(xy+yz+zx+(x+y+z)^2\right)^2}\end{aligned}$$

ta có điều phải chứng minh.

29. Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

India, 2002

Lời giải:
Ta đặt $\frac{a}{b}=x, \frac{b}{c}=y, \frac{c}{a}=z$. Dễ thấy rằng

$$\frac{a+c}{b+c}=\frac{1+xy}{1+y}=x+\frac{1-x}{1+y}.$$

Thiết lập những hệ thức tương tự, bài toán quy về chứng minh rằng nếu $xyz=1$, thì

$$\begin{aligned}&\frac{x-1}{y+1}+\frac{y-1}{z+1}+\frac{z-1}{x+1}\geq 0\\ \Longleftrightarrow&(x^2-1)(z+1)+(y^2-1)(x+1)+(z^2-1)(y+1)\geq 0\\ \Longleftrightarrow&x^2z+z^2y+y^2x+x^2+y^2+z^2\geq x+y+z+3.\end{aligned}$$

Nhưng đây là bất đẳng thức rất dễ chứng minh. Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$x^2z + z^2y + y^2x \geq 3,$$

và chỉ còn phải chứng minh

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z,$$

điều này được suy ra từ bất đẳng thức

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x + y + z.$$

30. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ac + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}.$$

Đề cử cho kỳ thi Olympic Toán học vùng Balkan

Lời giải 1:
Vì $a + b + c \geq \dfrac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$, nên chỉ cần chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq a + b + c.$$

Từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , ta có

$$\sum \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a(b^2 - bc + c^2)}.$$

Vậy chúng ta phải chỉ ra rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a + b + c). \sum a(b^2 - bc + c^2).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2),$$

đây chính là bất đẳng thức **Schur**.

Chú ý.
Bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq a + b + c$$

đã được đề nghị bởi Vasile Caarrtoaje trong **Gazeta Matematiă** như là một trường hợp đặc biệt ($n = 3$) của bất đẳng thức tổng quát

$$\frac{2a^n - b^n - c^n}{b^2 - bc + c^2} + \frac{2b^n - c^n - a^n}{c^2 - ca + a^2} + \frac{2c^n - a^n - b^n}{a^2 - ab + b^2} \geq 0.$$

Lời giải 2:
Ta viết lại bất đẳng thức

$$\sum \frac{(b+c)a^3}{b^3 + c^3} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}.$$

Nhưng bất đẳng thức này được suy ra từ một kết quả tổng quát:
Nếu $a, b, c, x, y, z > 0$ thì

$$\sum \frac{a(y+z)}{b+c} \geq 3\frac{\sum xy}{\sum x}.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một hệ quả trực tiếp (và yếu hơn) của kết quả từ bài toán 101.

Lời giải 3:
Đặt $A = \sum \dfrac{a^3}{b^2 - bc + c^2}$ và

$$B = \sum \frac{b^3 + c^3}{b^2 - bc + c^2} = \sum \frac{(b+c)(b^2 - bc + c^2)}{b^2 - bc + c^2} = 2\sum a.$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} A + B &= \left(\sum a^3\right)\left(\sum \frac{1}{b^2 - bc + c^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum (b+c)(b^2 - bc + c^2)\right)\left(\sum \frac{1}{b^2 - bc + c^2}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\sum \sqrt{b+c}\right)^2, \end{aligned}$$

điều này suy từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** . Do đó

$$A \geq \frac{1}{2}\left(\sum \sqrt{b+c}\right)^2 - 2\sum a = \sum \sqrt{a+b}.\sqrt{b+c} - \sum a.$$

Ta kí hiệu

$$A_a = \sqrt{c+a}.\sqrt{b+a} - a = \frac{ab + bc + ca}{\sqrt{ab + bc + ca + a^2} + a}$$

và thiết lập các hệ thức tương tự với A_b and A_c. Vậy $A \geq A_a + A_b + A_c$. Nhưng bởi vì $\left(\sum a\right)^2 \geq 3\left(\sum ab\right)$ ta có

$$\begin{aligned} A_a &\geq \frac{ab+bc+ca}{\sqrt{\dfrac{(a+b+c)^2}{3}+a^2}+a} \\ &= 3\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}.\left(\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{3}+a^2}-a\right) \end{aligned}$$

và các bất đẳng thức tương tự cũng đúng. Vậy chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\sum\left(\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{3}+a^2}-a\right) \geq a+b+c \Longleftrightarrow \sum\sqrt{\frac{1}{3}+\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2} \geq 2.$$

Xét hàm lồi $f(t)=\sqrt{\dfrac{1}{3}+t^2}$. Sử dụng bất đẳng thức **Jensen** cuối cùng ta suy ra

$$\sum\sqrt{\frac{1}{3}+\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2} \geq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

31. [Adrian Zahariuc] Xét các số nguyên $x_1, x_2, ..., x_n, n \geq 0$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \geq x_1.x_2+x_2.x_3+...+x_n.x_1+2n-3.$$

Lời giải:
Bất đẳng thức có thể viết lại như sau

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2+(x_n-x_1)^2 \geq 2(2n-3).$$

Đặt $x_m=\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$ và $x_M=\max\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m<M$. Đặt

$$S_1=(x_m-x_{m+1})^2+...+(x_{M-1}-x_M)^2$$

và

$$S_2=(x_1-x_2)^2+...+(x_{m-1}-x_m)^2+(x_M-x_{M+1})^2+...+(x_n-x_1)^2.$$

Bất đẳng thức $\sum\limits_{i=1}^k a_i^2 \geq \dfrac{1}{k}\left(\sum\limits_{i=1}^k a_i\right)^2$ (suy ra từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**) dẫn đến

$$S_1 \geq \frac{(x_M-x_m)^2}{M-m}$$

và

$$S_2 \geq \frac{(x_M - x_m)^2}{n-(M-m)}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\sum (x_i - x_{i+1})^2 &= S_1 + S_2 \\
&\geq (x_M - x_m)^2 \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{n-(M-m)} \right) \\
&\geq (n-1)^2 \frac{4}{n} \\
&= 4n - 8 + \frac{4}{n} \\
&> 4n - 8.
\end{aligned}$$

Nhưng

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i+1} = 0 \mod 2.$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geq 4n - 6$$

và bài toán đã được giải xong.

32. [Murray Klamkin] Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + ... + x_{n-1}^2 x_n + x_n^2 x_1$$

với $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ có tổng bằng 1 và $n > 2$.

Crux Mathematicorum

Lời giải:

Đầu tiên, hiển nhiên là giá trị lớn nhất ít nhất là $\frac{4}{27}$, bởi vì giá trị này có thể đạt được với $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = ... = x_n = 0$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + ... + x_{n-1}^2 x_n + x_n^2 x_1 \leq \frac{4}{27}$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \geq 0$ có tổng bằng 1. Đầu tiên ta chứng minh bước quy nạp. Giả sử bất đẳng thức đúng cho n và ta sẽ chứng minh nó đúng cho $n+1$. Ta có thể giả sử rằng $x_2 = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$. Điều này suy ra rằng

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + ... + x_n^2 x_{n+1} + x_{n+1}^2 . x_1 \leq (x_1 + x_2)^2 x_3 + ... + x_n^2 x_{n+1} + x_{n+1}^2 (x_1 + x_2).$$

Từ giả thiết quy nạp ta có

$$(x_1+x_2)^2x_3+x_3^2x_4+...+x_n^2x_{n+1}+x_{n+1}^2(x_1+x_2)\le\frac{4}{27}$$

và bước quy nạp được chứng minh. Vậy, ta còn phải chứng minh $a^2b+b^2c+c^2a\le\dfrac{4}{27}$ nếu $a+b+c=1$. Ta có thể giả sử rằng a là số lớn nhất trong các số a,b,c. Trong trường hợp này bất đẳng thức $a^2b+b^2c+c^2a\le\left(a+\dfrac{c}{2}\right)^2.\left(b+\dfrac{c}{2}\right)$ trực tiếp suy ra từ $abc\ge b^2c, \dfrac{a^2c}{2}\ge\dfrac{ac^2}{2}$. Bởi vì

$$1=\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+b+\frac{c}{2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\left(b+\frac{c}{2}\right)\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}{4}},$$

ta đã chứng minh được $a^2b+b^2c+c^2a\le\dfrac{4}{27}$ và điều này chỉ ra rằng giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{4}{27}$.

33. Tìm giá trị lớn nhất của hằng số c sao cho với mọi $x_1,x_2,...,x_n,...>0$ thỏa mãn $x_{k+1}\ge x_1+x_2+...+x_k$ với mọi k, bất đẳng thức

$$\sqrt{x_n}+\sqrt{x_n}+...+\sqrt{x_n}\le c\sqrt{x_1+x_2+...+x_n}$$

đúng với mọi n.

IMO Shorlist, 1986

Lời giải:
Đầu tiên, ta xem điều gì xảy ra nếu x_{k+1} và $x_1+x_2+...+x_k$ gần nhau với mọi k. Ví dụ, ta có thể lấy $x_k=2^k$, bởi vì trong trường hợp này ta có $x_1+x_2+...+x_k=x_{k+1}-2$. Vậy, ta thấy rằng

$$c\ge\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{2^k}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}2^k}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.\frac{(\sqrt{2})^n-1}{\sqrt{2^n-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}^n}}{\sqrt{1-\frac{1}{2^n}}}$$

với mọi n. Lấy giới hạn, ta được $c\ge 1+\sqrt{2}$. Bây giờ, ta chứng minh rằng $1+\sqrt{2}$ là hằng số cần tìm. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}\le(1+\sqrt{2})\sqrt{x_1+x_2+...+x_n}$$

bằng quy nạp. Với $n = 1$ hoặc $n = 2$ bất đẳng thức là hiển nhiên. Giả sử bất đẳng thức đúng với n và ta sẽ chứng minh rằng

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n+1}} \leq (1+\sqrt{2})\sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}}.$$

Tất nhiên, chỉ cần chứng minh rằng

$$\sqrt{x_{n+1}} \leq (1+\sqrt{2})(\sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}} - \sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n})$$

bất đẳng thức này tương đương với

$$\sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}} + \sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n} \leq (1+\sqrt{2})\sqrt{x_{n+1}}.$$

Bất đẳng thức trên đúng bởi vì

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \leq x_{n+1}.$$

34. Cho các số thực dương a, b, c và x, y, z thỏa mãn $a + x = b + y = c + z = 1$. Chứng minh rằng

$$(abc + xyz)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx}\right) \geq 3.$$

Russia, 2002

Lời giải:
Chúng ta thấy rằng $abc + xyz = (1-b)(1-c) + ac + ab - a$. Vậy

$$\frac{1-c}{a} + \frac{c}{1-b} - 1 = \frac{abc + xyz}{a(1-b)}.$$

Sử dụng các đồng nhất thức này ta trực tiếp suy ra

$$3 + (xyz + abc)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx}\right) = \frac{a}{1-c} + \frac{b}{1-a} + \frac{c}{1-b} + \frac{1-c}{a} + \frac{1-a}{b} + \frac{1-b}{c}.$$

Bây giờ, ta chỉ còn phải áp dụng bất đẳng thức **AM-GM**

$$\frac{a}{1-c} + \frac{b}{1-a} + \frac{c}{1-b} + \frac{1-c}{a} + \frac{1-a}{b} + \frac{1-b}{c} \geq 6.$$

35. [Viorel Vâjâitu, Alexandru Zaharescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Lời giải 1:
Ta có chuỗi bất đẳng thức dưới đây

$$\sum \frac{ab}{a+b+2c} = \sum \frac{ab}{a+c+b+c} \geq \sum \frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right) = \frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải 2:
Bởi vì bất đẳng thức là thuần nhất, không mất tính tổng quát ta có thể xem rằng $a+b+c=1$ và do đó bất đẳng thức tương đương với

$$\sum \frac{1}{a(a+1)} \leq \frac{1}{4abc}.$$

Ta có $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$, vậy bất đẳng thức tương đương với

$$\sum \frac{1}{a} \leq \sum \frac{1}{a+1} + \frac{1}{4abc}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh sự xen vào giữa sau:

$$\sum \frac{1}{a} \leq \frac{9}{4} + \frac{1}{4abc} \leq \sum \frac{1}{a+1} + \frac{1}{4abc}.$$

Bất đẳng thức bên phải suy ra từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** :

$$\left(\sum \frac{1}{a+1}\right)\left(\sum (a+1)\right) \geq 9$$

và đồng nhất thức $\sum(a+1)=4$. Bất đẳng thức bên trái có thể viết lại thành $\sum ab \leq \dfrac{1+9abc}{4}$, nó chính xác là bất đẳng thức **Schur**.

36. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$a^3(b+c+d)+b^3(c+d+a)+c^3(d+a+b)+d^3(a+b+c)$$

với a,b,c,d là các số thực mà tổng bình phương của các số bằng 1.

Lời giải:
Ý tưởng là

$$\begin{aligned}&a^3(b+c+d)+b^3(c+d+a)+c^3(d+a+b)+d^3(a+b+c)\\=&ab(a^2+b^2)+ac(a^2+c^2)+ad(a^2+d^2)+bc(b^2+c^2)+bd(b^2+d^2)+cd(c^2+d^2).\end{aligned}$$

Bây giờ, bởi vì biểu thức $ab(a^2+b^2)$ xuất hiện khi viết $(a-b)^4$, ta hay xem biểu thức ban đầu có thể viết lại như thế nào:

$$\begin{aligned}\sum ab(a^2+b^2) &= \sum \frac{a^4+b^4+6a^2b^2-(a-b)^4}{4} \\ &= \frac{3\sum a^4+6\sum a^2b^2-\sum(a-b)^4}{4} \\ &= \frac{3-\sum(a-b)^4}{4} \\ &\geq \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Giá trị lớn nhất đạt được với $a=b=c=d=\dfrac{1}{2}$

37. [Walther Janous] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

Crux Mathematicorum

Lời giải 1:
Ta có $(x+y)(x+z)=xy+(x^2+yz)+xz \geq xy+2x\sqrt{yz}+xz=(\sqrt{xy}+\sqrt{xz})^2$.
Từ đó

$$\sum \frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \sum \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}.$$

Nhưng

$$\sum \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}=\sum \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=1$$

và điều này đã giải quyết bài toán.

Lời giải 2:
Từ bất đẳng thức **Huygens** ta có $\sqrt{(x+y)(x+z)} \geq x+\sqrt{yz}$ và sử dụng bất đẳng thức này cho các bất đẳng thức tương tự ta có

$$\begin{aligned}&\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \\ &\leq \frac{x}{2x+\sqrt{yz}}+\frac{y}{2y+\sqrt{zx}}+\frac{z}{2z+\sqrt{xy}}.\end{aligned}$$

Bây giờ, ta kí hiệu $a = \dfrac{\sqrt{yz}}{x}, b = \dfrac{\sqrt{zx}}{y}, c = \dfrac{\sqrt{xy}}{z}$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1.$$

Từ kí hiệu ở trên ta có thể thấy rằng $abc = 1$, vậy sau khi quy đồng mẫu số bất đẳng thức cuối cùng trở thành $ab + bc + ca \geq 3$, mà bất đẳng thức này suy ra từ bất đẳng thức **AM-GM** .

38. Giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_n$ là các số thực, $n \geq 2$ là một số nguyên. Chứng minh rằng

$$a_1{a^4}_2 + a_2{a^4}_3 + ... + a_n{a^4}_1 \geq a_2{a^4}_1 + a_3{a^4}_2 + ... + a_1{a^4}_n.$$

Iran, 1999

Lời giải:
Thoạt nhìn ta thấy ngay rằng sau khi chứng minh bất đẳng thức cho $n = 3$, bất đẳng thức sẽ được chứng minh bằng quy nạp cho n lớn hơn. Vậy, ta phải chứng minh rằng với mọi $a < b < c$ ta có

$$ab(b^3 - a^3) + bc(c^3 - b^3) \geq ca(c^3 - a^3)$$
$$\Longleftrightarrow (c^3 - b^3)(ac - bc) \leq (b^3 - a^3)(ab - ac).$$

Bởi vì $a < b < c$, bất đẳng thức cuối cùng quy về

$$a(b^2 + ab + a^2) \leq c(c^2 + bc + b^2).$$

Và bất đẳng thức cuối tương đương với

$$(c - a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \geq 0,$$

bất đẳng thức này là hiển nhiên.

39. [Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x+y} \leq \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4y}$ ta suy ra

$$\frac{4a}{b+c} \leq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}, \frac{4b}{a+c} \leq \frac{b}{a} + \frac{b}{c} \text{ và } \frac{4c}{a+b} \leq \frac{c}{a} + \frac{c}{b}.$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.

40. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 1$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng ít nhất một trong các số $\sqrt[a_1]{a_2}$, $\sqrt[a_2]{a_3}, ...,$ $\sqrt[a_{n-1}]{a_2}$, $\sqrt[a_n]{a_1}$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt[3]{3}$.

Phỏng theo một bài toán quen biết

Lời giải:
Giả sử ta có $a_{i+1}^{\frac{1}{a_i}} > 3^{\frac{1}{3}}$ với mọi i. Đầu tiền, ta sẽ chứng minh rằng $n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$ với mọi số tự nhiên n. Với $n = 1, 2, 3, 4$ điều này là hiển nhiên. Giả sử bất đẳng thức đúng cho $n > 3$ và ta chứng minh nó đúng cho $n + 1$. Điều này suy ra từ hệ thức

$$1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{4} < \sqrt[3]{3} \Longrightarrow 3^{\frac{n+1}{3}} = \sqrt[3]{3}.3^{\frac{n}{3}} \geq \frac{n+1}{n}.n = n + 1.$$

Vậy, sử dụng nhận xét trên, ta được $a_{i+1}^{\frac{1}{a_i}} > 3^{\frac{1}{3}} \geq a^{\frac{1}{a_{i+1}}} \Longrightarrow a_{i+1} > a_i$ với mọi i, điều này có nghĩa là $a_1 < a_2 < ...a_{n-1} < a_n < a_1$, mâu thuẫn.

41. [Mircea Lascu, Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$xy + xz + yz + 2xyz = 1.$$

Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $xyz \leq \frac{1}{8}$;

b) $x + y + z \geq \frac{3}{2}$;

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x + y + z)$;

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 4(x + y + z) \geq \frac{(2z-1)^2}{z(2z+1)}$, với $z = \max\{x, y, z\}$.

Lời giải:
a) Đặt $t^3 = xyz$, theo bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$1 = xy + xz + yz + 2xyz \geq 3t^2 + 2t^3 \Longleftrightarrow (2t-1)(t+1)^2 \leq 0,$$

do đó $2t - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow t \leq \frac{1}{2}$, điều này có nghĩa là $xyz \leq \frac{1}{8}$.

b) Cũng kí hiệu $s = x + y + z$; các bất đẳng thức sau đều quen biết

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$$

và
$$(x+y+z)^3 \geq 27xyz;$$
khi đó ta có $2s^3 \geq 54xyz = 27 - 27(xy+xz+yz) \geq 27 - 9s^2$, nghĩa là
$$2s^3 + 9s^2 - 27 \geq 0 \Longleftrightarrow (2s-3)(s+3)^2 \geq 0,$$
từ đó $2s - 3 \geq 0 \Longleftrightarrow s \geq \frac{3}{2}$.
Hoặc, bởi vì $p \leq \frac{1}{8}$, ta có
$$s^2 \geq 3q = 3(1-2p) \geq 3(1-\frac{2}{8}) = \frac{9}{4};$$
nếu ta đặt $q = xy + xz + yz, p = xyz$.
Bây giờ, ta có thể thấy bất đẳng thức sau cũng đúng
$$q = xy + xz + yz \geq \frac{3}{4}.$$

c) Ba số x, y, z không thể tất cả nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, bởi vì trong trường hợp này ta gặp mâu thuẫn
$$xy + xz + yz + 2xyz < \frac{3}{4} + 2.\frac{1}{8} = 1;$$
do tính đối xứng ta có thể giả sử $z \geq \frac{1}{2}$.
Ta có $1 = (2z+1)xy + z(x+y) \geq (2z+1)xy + 2z\sqrt{xy}$, mà cũng có thể viết dưới dạng
$$(2z+1)\sqrt{xy} - 1)(\sqrt{xy} + 1) \leq 0;$$
và điều này cho bất đẳng thức
$$xy \leq \frac{1}{(2z+1)^2}.$$
Ta cũng có $1 = (2z+1)xy + z(x+y) \leq (2z+1)\frac{(x+y)^2}{4} + z(x+y)$, do đó
$$\big(2z+1)(x+y) - 2\big)(x+y+z) \geq 0,$$
bất đẳng thức này cho ta
$$x + y \geq \frac{2}{2z+1}.$$
Bất đẳng thức cần chứng minh
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x+y+z)$$

có thể được sắp xếp lại dưới dạng

$$(x+y)\left(\frac{1}{xy}-4\right) \geq \frac{4z^2-1}{z} = \frac{(2z-1)(2z+1)}{z}.$$

Từ những tính toán ở trên ta suy ra rằng

$$(x+y)\left(\frac{1}{xy}-4\right) \geq \frac{2}{2z+1}((2z+1)^2-4) = \frac{2(2z-1)(2z+3)}{2z+1}$$

(giả thiết $z \geq \frac{1}{2}$ cho phép nhân vế với vế của các bất đẳng thức), và điều này có nghĩa là bài toán được giải nếu ta chứng minh được

$$\frac{2(2z+3)}{2z+1} \geq \frac{2z+1}{z} \Longleftrightarrow 4z^2+6z \geq 4z^2+4z+1;$$

nhưng bất đẳng thức đúng với $z \geq \frac{1}{2}$ và ta có điều phải chứng minh.

d) Hiển nhiên, nếu z là số lớn nhất trong các số x, y, z, thì $z \geq \frac{1}{2}$; ta thấy rằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-4(x+y) &= (x+y)\left(\frac{1}{xy}-4\right)\\ &\geq \frac{2}{2z+1}((2z+1)^2-4)\\ &= \frac{2(2z-1)(2z+3)}{2z+1}\\ &= 4z-\frac{1}{z}+\frac{(2z-1)^2}{z(2z+1)},\end{aligned}$$

từ đó ta có bất đẳng thức cuối cùng

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-4(x+y+z) \geq \frac{(2z-1)^2}{z(2z+1)}.$$

Hiển nhiên, trong vế phải z có thể được thay thế bởi bất kỳ một trong ba số mà lớn hơn hay bằng $\frac{1}{2}$ (hai số còn lại cũng vạy, chắc chắn phải có một số).

Chú ý.
Dễ thấy rằng điều kiện đã cho suy ra tồn tại các số dương a, b, c sao cho $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$. Và bây giờ a), b) và c) trực tiếp quy về các bất đẳng thức quen biết! Hãy thử chứng minh d) sử dụng sự thay thế này.

42. [Manlio Marangelli] Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z,

$$3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq xyz(x + y + z)^3.$$

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** , ta có

$$\frac{1}{3} + \frac{y^2z}{y^2z + z^2x + x^2y} + \frac{xy^2}{yz^2 + zx^2 + xy^2} \geq \frac{3y\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{3.(y^2z + z^2x + x^2y)(yz^2 + zx^2 + xy^2)}}$$

và hai bất đẳng thức tương tự

$$\frac{1}{3} + \frac{z^2x}{y^2z + z^2x + x^2y} + \frac{yz^2}{yz^+zx^2 + xy^2} \geq \frac{3z\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{3.(y^2z + z^2x + x^2y)(yz^2 + zx^2 + xy^2)}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{x^2y}{y^2z + z^2x + x^2y} + \frac{zx^2}{yz^2 + zx^2 + xy^2} \geq \frac{3x\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{3.(y^2z + z^2x + x^2y)(yz^2 + zx^2 + xy^2)}}$$

Khi đó, cộng ba bất đẳng thức lại, ta có chính xác bất đẳng thức cần chứng minh.

43. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực sao cho $\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leq 1$, thì

$$1 + a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a.$$

Lời giải:
Hiển nhiên ta có thể giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ và ta có thể viết $b = a + x, c = a + y$, với $x, y \in [0, 1]$. Dễ thấy rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 3a(x^2 - xy + y^2) + x^3 + y^3$$

và

$$a^2b + b^2c + c^2a - 3abc = a(x^2 - xy + y^2) + x^2y.$$

Vậy, bất đẳng thức trở thành $1 + x^3 + y^3 \geq 3x^2y$. Nhưng điều này suy ra từ hệ thức $1 + x^3 + y^3 \geq 3xy \geq 3x^2y$, bởi vì $0 \leq x, y \leq 1$.

44. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với bất kỳ các số thực dương a, b, c ta có

$$27 + \left(2 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(2 + \frac{b^2}{ca}\right)\left(2 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 6(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Lời giải:
Bởi khai triển hai vế, bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned}&2abc(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - a^2c - b^2a - b^2c - c^2a - c^2b) + \\ &+(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3a^2b^2c^2 - a^3b^2c - a^3bc^2 - ab^3c^2 - ab^2c^3 - a^2b^3c - a^2bc^3) \geq 0.\end{aligned}$$

Nhưng bất đẳng thức này đúng nhờ áp dụng bất đẳng thức **Schur** với a, b, c và ab, bc, ca.

45. Cho $a_0 = \dfrac{1}{2}$ và $a_{k+1} = a_k + \dfrac{a_k^2}{n}$. Chứng minh rằng $1 - \dfrac{1}{n} < a_n < 1$.

TST Singapore

Lời giải:
Ta có
$$\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}$$
và do đó
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k + n} < 1 \Longrightarrow 2 - \frac{1}{a_n} < 1 \Longrightarrow a_n < 1.$$
Bởi vì dãy số này tăng nên ta có
$$2 - \frac{1}{a_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k + n} > \frac{n}{n+1}.$$
Từ bất đẳng thức này và bất đẳng thức trước ta trực tiếp suy ra kết luận
$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

46. [Călin Popa] Cho a, b, c là các số thực dương, với $a, b, c \in (0, 1)$ sao cho $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{1-c^2}{c}\right).$$

Lời giải:
Ta đã biết với mọi tam giác ABC đồng nhất thức $\sum \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} = 1$ đúng và bởi vì tan là toàn ánh trên $[0, \dfrac{\pi}{2})$ chúng ta có thể đặt $a = \tan\dfrac{A}{2}, b = \tan\dfrac{B}{2}, c = \tan\dfrac{C}{2}$. Điều kiện $a, b, c \in (0, 1)$ cho ta các góc của tam giác ABC là góc nhọn. Với sự thay thế này, bất đẳng thức trở thành
$$\sum \frac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1 - \tan^2\dfrac{A}{2}} \geq 3\sum\frac{1 - \tan^2\dfrac{A}{2}}{2\tan\dfrac{A}{2}}$$
$$\Longleftrightarrow \sum \tan A \geq 3\sum\frac{1}{\tan A}$$
$$\Longleftrightarrow \tan A\tan B\tan C(\tan A + \tan B + \tan C) \geq 3(\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A)$$
$$\Longleftrightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 \geq 3(\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A),$$
điều này hiển nhiên đúng bởi vì $\tan A, \tan B, \tan C > 0$.

47. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Cho $x, y, z \leq 1$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}.$$

Lời giải:
Sử dụng hệ thức $(4-3t)(1-3t)^2 \geq 0, t \leq 1$, ta thấy rằng

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{27}{50}(2-x).$$

Viết hai biểu thức tương tự cho y và z và cộng chúng lại, ta có được bất đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý.
Dù có vẻ quá dễ, bài toán này giúp chúng ta chứng minh bất đẳng thức khó sau đây

$$\sum \frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Thực ra, bài toán này tương đương với bài toán khó trên đây. Hãy thử chứng minh điều này!

48. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$, thì

$$(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2 \geq 2^{15}xyz(x+y)(y+z)(z+x).$$

Lời giải:
Đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$ và $c = \sqrt{z}$. Khi đó

$$1 - x = 1 - a^2 = (a+b+c)^2 - a^2 = (b+c)(2a+b+c).$$

Bây giờ chúng ta phải chứng minh rằng

$$\begin{aligned}&\big((a+b)(b+c)(c+a)(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)\big)^2 \geq \\ &\geq 2^{15}a^2b^2c^2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2).\end{aligned}$$

Nhưng bất đẳng thức này đúng vì nó suy ra từ các bất đẳng thức đúng sau

$$ab(a^2+b^2) \leq \frac{(a+b)^4}{8}$$

(bất đẳng thức này tương đương với $(a-b)^4 \geq 0$) và

$$(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c) \geq 8(b+c)(c+a)(a+b).$$

49. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng

1) $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$;

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{xyz}$.

Lời giải:
Điều kiện ban đầu $xyz = x + y + z + 2$ có thể viết lại như sau

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1.$$

Bây giờ, giả sử

$$\frac{1}{1+x} = a, \frac{1}{1+y} = b, \frac{1}{1+z} = c.$$

Khi đó

$$x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}.$$

(1) Ta có

$$\begin{aligned}
& xy + yz + zx \geq 2(x + y + z) \\
\iff & \frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b} + \frac{c+a}{b}.\frac{a+b}{c} + \frac{a+b}{c}.\frac{b+c}{a} \geq 2\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right) \\
\iff & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\
\iff & \sum a(a-b)(a-c) \geq 0,
\end{aligned}$$

đây chính là bất đẳng thức **Schur**.

(2) Ở đây ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{xyz} \\
\iff & \sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}} \leq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh bởi cộng bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}} = \sqrt{\frac{b}{b+c}.\frac{a}{c+a}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}\right),$$

với các bất đẳng thức tương tự.

50. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, thì

$$x + y + z \leq xyz + 2.$$

IMO Shorlist, 1987

Lời giải 1:
Nếu một trong các số x, y, z là âm, chẳng hạn là x, thì

$$2 + xyz - x - y - z = (2 - y - z) - x(1 - yz) \geq 0,$$

bởi vì $y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} \leq 2$ và $zy \leq \dfrac{z^2 + y^2}{2} \leq 1$. Vậy ta có thể giả sử rằng $0 < x \leq y \leq z$. Nếu $z \leq 1$ thì

$$2 + xyz - x - y - z = (1 - z)(1 - xy) + (1 - x)(1 - y) \geq 0.$$

Bây giờ, nếu $z > 1$ thì ta có

$$z + (x + y) \leq \sqrt{2(z^2 + (x + y)^2)} = 2\sqrt{1 + xy} \leq 2 + xy \leq 2 + xyz.$$

Điều này kết thúc chứng minh.

Lời giải 2:
Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , ta thấy rằng

$$x + y + z - xyz = x(1 - yz) + y + z \leq \sqrt{(x^2 + (y + z)^2).(1 + (1 - yz)^2)}.$$

Vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng vế phải không lớn hơn 2. Điều này tương đương với

$$(2 + 2yz)(2 - yz + (yz)^2) \leq 4 \Longleftrightarrow 2(yz)^3 \leq 2(yz)^2,$$

điều nay hiển nhiên đúng, bởi vì $2 \geq y^2 + z^2 \geq 2yz$.

51. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$ và với mọi phép hoán vị σ của tập $\{1, 2, ..., n\}$, ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} \geq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i . x_{\sigma(i)}}\right).$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** và hệ thức $\dfrac{1}{x+y} \geq \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4y}$, ta có thể viết chuỗi bất đẳng thức dưới đây

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i.y_i} &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{x_i^2 + y_i^2}{2}} \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^2 + 1 - y_i^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2(1 - x_i^2)} + \frac{1}{2(1 - y_i^2)} \right),\end{aligned}$$

suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i.x_{\sigma(i)}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^2}.$$

Vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} \geq \left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) . \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^2} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i^2} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) . \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^2} \right).$$

Đó là bất đẳng thức **Chebyshev** cho hệ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và

$$\left(\frac{1}{1 - x_1^2}, \frac{1}{1 - x_2^2}, ..., \frac{1}{1 - x_n^2} \right).$$

52. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 + x_i} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Vojtech Jarnik

Lời giải 1:
Đặt $\frac{1}{1+x_i} = a_i$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i(1-a_i)}} \geq n\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$
$$\Longleftrightarrow n\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}\right).$$

Nhưng bất đẳng thức cuối cùng là hệ quả của bất đẳng thức **Chebyshev** cho các bộ n số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và

$$\frac{1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}, \frac{1}{\sqrt{a_2(1-a_2)}}, .., \frac{1}{\sqrt{a_n(1-a_n)}}.$$

Lời giải 2:
Với cùng kí hiệu trên, ta phải chứng minh

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{a_1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}} \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}{a_i}}.$$

Nhưng sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** và bất đẳng thức **AG-GM**, ta suy ra rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}{a_i}}$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_{i-1}}+\sqrt{a_{i+1}}+...+\sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}\sqrt{a_i}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{i-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_{i+1}}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)\sqrt{n-1}\sqrt{a_i}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_{i-1}}+\sqrt{a_{i+1}}+...+\sqrt{a_n}}$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n}(n-1)\sqrt{\frac{a_i}{a_1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}}$$

và ta có điều phải chứng minh.

53. [Titu Andreescu] Cho $n > 3$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n \geq n$ và $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq n^2$. Chứng rằng $\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \geq 2$.

USAMO, 1999

Lời giải:
Ý tưởng tự nhiên nhất là giả sử rằng $a_i < 2$ với mọi i và thay thế $x_i = 2 - a_i > 0$. Khi đó ta có $\sum\limits_{i=1}^{n}(2 - x_i) \geq n \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq n$ và cũng có

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(2 - x_i)^2 = 4n - 4\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Bây giờ, sử dụng giả thiết rằng $x_i > 0$, ta được $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$, kết hợp với các bất đẳng thức ở trên ta có

$$n^2 < 4n - 4\sum_{i=1}^{n} x_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < 4n + (n-4)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(ta sử dụng hệ thức $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq n$). Do đó, ta có $(n-4)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\right) > 0$, bất đẳng thức này không xảy ra vì $n \geq 4$ và $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq n$. Vậy, giả sử của chúng ta là sai và do đó $\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \geq 2$.

54. [Vasile Cirtoaje] Nếu a, b, c, d là các số thực dương, thì

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

Lời giải:
Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \\
=&\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{b+d}{a+b} - 4 \\
=&(a+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a}\right) + (b+d)\left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b}\right) - 4.
\end{aligned}$$

Từ

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\geq\frac{4}{(b+c)+(d+a)},$$
$$\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{(c+d)+(a+b)},$$

ta có

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq\frac{4(a+c)}{(b+c)+(d+a)}+\frac{4(b+d)}{(c+d)+(a+b)}-4=0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=c$ và $b=d$.

Giải thuyết (Vasile Cirtoaje)
Nếu a,b,c,d,e là các số thực dương, thì

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+e}+\frac{d-e}{e+a}+\frac{e-a}{a+b}\geq 0.$$

55. Cho x và y là các số thực dương, chỉ ra rằng $x^y+y^x>1$.

France, 1996

Lời giải:
Ta sẽ chứng minh rằng $a^b\geq\dfrac{a}{a+b-ab}$ với mọi $a,b\in(0,1)$. Thật vậy, từ bất đẳng thức **Bernoulli** suy ra rằng

$$a^{1-b}=(1+a-1)^{1-b}\leq 1+(a-1)(1-b)=a+b-ab$$

và suy ra kết luận. Bây giờ, nếu x hoặc y lớn hơn 1, ta có điều phải chứng minh. Ngược lại, giả sử $0<x,y<1$. Trong trường hợp này ta áp dụng sự bất đẳng thức ở trên và thấy rằng

$$x^y+y^x\geq\frac{x}{x+y-xy}+\frac{y}{x+y-xy}>\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1.$$

56. Chứng minh rằng nếu $a,b,c>0$ có tích bằng 1, thì

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 4(a+b+c-1).$$

MOSP, 2001

Lời giải 1:
Sử dụng đồng nhất thức $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 1$ ta quy bài toán thành

$$ab + bc + ca + \frac{3}{a+b+c} \geq 4.$$

Bây giờ, ta có thể áp dụng bất đẳng thức **AM-GM** cho dạng sau

$$ab + bc + ca + \frac{3}{a+b+c} \geq 4\sqrt[4]{\frac{(ab+bc+ca)^3}{9(a+b+c)}}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(ab+bc+ca)^3 \geq 9(a+b+c).$$

Nhưng bất đẳng thức này dễ, bởi vì ta có $ab + bc + ca \geq 3$ và $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3(a+b+c)$.

Lời giải 2:
Ta sẽ sử dụng hệ thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{2}{9}(ab+bc+ca) + \frac{1}{a+b+c} \geq 1$. Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** , ta có thể viết

$$\frac{2}{9}(ab+bc+ca) + \frac{1}{a+b+c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{81(a+b+c)}} \geq 1,$$

bởi vì

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

57. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$,

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc(ab+bc+ca).$$

Lời giải:
Rõ ràng, nếu một trong các thừa số ở vế trái là âm, ta có điều phải chứng minh. Vậy, ta có thể giả thiết rằng a, b, c là các cạnh của tam giác ABC. Với kí hiệu thông thường của một tam giác, bất đẳng thức trở thành

$$(a^2+b^2+c^2).\frac{16K^2}{a+b+c} \leq abc(ab+bc+ca)$$
$$\Longleftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)R^2 \geq abc(a^2+b^2+c^2).$$

Nhưng bất đẳng thức trên suy ra từ hệ thức

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

và

$$0 \leq OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

58. [D.P.Mavlo] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$3 + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{1+abc}.$$

Kvant, 1988

Lời giải:
Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức dưới đây

$$\sum a + \sum \frac{1}{a} + \sum \frac{a}{b} \geq 3\frac{\sum ab + \sum a}{abc+1}$$

hoặc

$$abc\sum a + \sum \frac{1}{a} + \sum a^2c + \sum \frac{a}{b} \geq 2\left(\sum a + \sum ab\right).$$

Nhưng bất đẳng thức này suy ra từ các bất đẳng thức

$$a^2bc + \frac{b}{c} \geq 2ab, b^2ca + \frac{c}{a} \geq 2bc, c^2ab + \frac{a}{b} \geq 2ca$$

và

$$a^2c + \frac{1}{c} \geq 2a, b^2a + \frac{1}{a} \geq 2b, c^2b + \frac{1}{b} \geq 2c.$$

59. [Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ với tích bằng 1 ta có bất đẳng thức

$$n^n.\prod_{i=1}^{n}(x_i^n + 1) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^n.$$

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** , ta suy ra rằng

$$\frac{x_1^n}{1+x_1^n} + \frac{x_2^n}{1+x_2^n} + ... + \frac{x_{n-1}^n}{1+x_{n-1}^n} + \frac{1}{1+x_n^n} \geq \frac{n}{x_n.\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}}$$

và

$$\frac{1}{1+x_1^n}+\frac{1}{1+x_2^n}+...+\frac{1}{1+x_{n-1}^n}+\frac{x_n^n}{1+x_n^n}\geq\frac{n.x_n}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}}.$$

Vậy, ta phải có

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}\geq x_n+\frac{1}{x_n}.$$

Hiển nhiên, bất đẳng thức này cũng đúng cho các biến khác, vậy ta có thể cộng tất cả các bất đẳng thức lại để thu được

$$n.\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^n)}\geq\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i},$$

đây là bất đẳng thức cần chứng minh.

60. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+abcd\geq\min\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}.$$

Kvant, 1993

Lời giải:

Giả sử rằng bất đẳng thức không đúng. Khi đó ta có, do $abc\leq\frac{1}{27}$, bất đẳng thức $d(\frac{1}{27}-abc)>a^3+b^3+c^3-\frac{1}{9}$. Ta có thể giả sử rằng $abc<\frac{1}{27}$. Bây giờ, ta sẽ chỉ ra sự mâu thuẫn bằng chứng minh $a^3+b^3+c^3+abcd\geq\frac{1}{4}$. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3-\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}-abc}.abc+a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{4}.$$

Nhưng bất đẳng thức này tương đương với $4\sum a^3+15abc\geq 1$. Ta sử dụng đồng nhất thức $\sum a^3=3abc+1-3\sum ab$ và quy bài toán về chứng minh $\sum ab\leq\frac{1+9abc}{4}$, đây là bất đẳng thức **Schur**.

61. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta có bất đẳng thức

$$\sum(1+a^2)^2(1+b^2)^2(a-c)^2(b-c)^2\geq(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(a-b)^2(b-c^2)(c-a^2).$$

AMM

Lời giải:
Bất đẳng thức có thể được viết dưới dạng $\sum \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1+c^2)(a-b)^2} \geq 1$ (tất nhiên, ta có thể giả thiết a, b, c khác nhau). Bây giờ, cộng các bất đẳng thức

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1+c^2)(a-b)^2} + \frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a^2)(b-c)^2} \geq 2\frac{1+b^2}{|a-b||c-b|}$$

(nhận được bởi sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**) ta suy ra rằng

$$\sum \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1+c^2)(a-b)^2} \geq \sum \frac{1+b^2}{|(b-a)(b-c)|},$$

vậy ta chỉ cần chứng minh rằng hệ thức cuối ít nhất bằng 1. Nhưng điều này suy ra từ

$$\sum \frac{1+b^2}{|(b-a)(b-c)|} \geq \left| \sum \frac{1+b^2}{(b-a)(b-c)} \right| = 1$$

và bài toán đã giải xong.

62. [Titu Andreescu, Mircea Lascu] Cho α, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$ và $\alpha \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải 1:
Ta có thể giả sử rằng $x \geq y \geq z$. Khi đó ta có

$$\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y}$$

và $x^{\alpha-1} \geq y^{\alpha-1} \geq z^{\alpha-1}$. Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta suy ra

$$\sum \frac{x^\alpha}{y+z} \geq \frac{1}{3}. \left(\sum x^{\alpha-1}\right) \cdot \left(\sum \frac{x}{y+z}\right).$$

Bây giờ, ta chỉ cần để ý rằng kết luận suy ra từ các bất đẳng thức $\sum x^{\alpha-1} \geq 3$ (từ bất đẳng thức **AM-GM**) và $\sum \frac{x}{y+z} \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải 2:
Theo bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , ta có:

$$\left[x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)\right] \left(\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y}\right) \geq \left(x^{\frac{1+\alpha}{2}} + y^{\frac{1+\alpha}{2}} + z^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2.$$

Vậy ta cần chỉ ra rằng

$$\left(x^{\frac{1+\alpha}{2}} + y^{\frac{1+\alpha}{2}} + z^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

Từ $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, suy ra chỉ cần chứng minh

$$x^{\frac{1+\alpha}{2}} + y^{\frac{1+\alpha}{2}} + z^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq x + y + z.$$

Từ bất đẳng thức **Bernoulli**, ta có

$$x^{\frac{1+\alpha}{2}} = [1 + (x-1)]^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq 1 + \frac{1+\alpha}{2}(x-1) = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2}x$$

và tương tự,

$$y^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2}y, \quad z^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2}z.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x^{\frac{1+\alpha}{2}} + y^{\frac{1+\alpha}{2}} + z^{\frac{1+\alpha}{2}} - (x+y+z) &\geq \frac{3(1-\alpha)}{2} + \frac{1+\alpha}{2}(x+y+z) - (x+y+z) \\ &= \frac{\alpha-1}{2}(x+y+z-3) \\ &\geq \frac{\alpha-1}{2}(3\sqrt[3]{xyz} - 3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Chú ý:
Thay $\beta = \alpha + 1 (\beta \geq 2)$ và $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} (abc = 1)$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{a^\beta(b+c)} + \frac{1}{b^\beta(c+a)} + \frac{1}{c^\beta(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Cho $\beta = 3$, ta thu được bài toán IMO 1995 (đưoc đề nghị bởi Russia).

63. Chứng minh rằng với mọi số thực $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = 1$, ta có

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right).$$

Korea, 2001

Lời giải:
Hiển nhiên ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}(x_1.y_2 - x_2.y_1)^2 &\leq \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i-1}^{n} x_iy_i\right)^2\\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right).\end{aligned}$$

Bởi vì ta cũng có $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq 1$, ta thấy ngay rằng

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) \leq 2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)$$

và bài toán đã giải xong.

64. [Laurentiu Panaitopol] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

TST Romania

Lời giải:
Không mất tổng quát, ta có thể giả sử rằng $a_1 < a_2 < ... < a_n$ và suy ra $a_i \geq i$ với mọi i. Vậy, ta có thể đặt $b_i = a_i - i \geq 0$ và bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} ib_i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq \frac{2n+1}{3}.\sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bây giờ, sử dụng hệ thức $a_{i+1} > a_i$ ta suy ra $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ và từ bất đẳng thức **Chebyshev** ta suy ra rằng

$$2\sum_{i=1}^{n} ib_i \geq (n+1)\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \frac{2n+1}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

và trực tiếp suy ra kết luận. Và cũng từ các hệ thức ở trên ta có thể trực tiếp suy ra rằng dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1, a_2, ..., a_n$ là một hoán bị của các số $1, 2, ...n$.

65. [Cawlin Popa] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c}+\sqrt{ab})}+\frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{3a}+\sqrt{bc})}+\frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b}+\sqrt{ca})}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải:
Viết lại bất đẳng thức dưới dạng
$$\sum\frac{\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}{\sqrt{\dfrac{3ca}{b}+a}}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Với sự thay thế $x=\sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y=\sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, điều kiện $a+b+c=1$ trở thành $xy+yz+zx=1$ và bất đẳng thức trở thành
$$\sum\frac{x}{\sqrt{3}y+yz}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Nhưng, bởi áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có
$$\sum\frac{x^2}{\sqrt{3}xy+xyz}\geq\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{3}+3xyz}\geq\frac{3\sum xy}{\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

ở đây chúng ta sử dụng các bất đẳng thức
$$\left(\sum x\right)^2\geq 3\left(\sum xy\right)\ \text{ và } xyz\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

66. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn
$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)=16.$$

Chứng minh rằng
$$-3\leq ab+bc+cd+da+ac+bd-abcd\leq 5.$$

Lời giải:
Ta viết lại điều kiện đã cho dưới dạng $16=\prod(i+a).\prod(a-i)$. Sử dụng các tổng đối xứng, ta có thể viết lại biểu thức trên dưới dạng
$$16=\left(1-i\sum a-\sum ab+i\sum abc+abcd\right)\left(1+i\sum a-\sum ab-i\sum abc+abcd\right).$$

Vậy ta có đồng nhất thức

$$16 = \left(1 - \sum ab + abcd\right)^2 + \left(\sum a - \sum abc\right)^2.$$

Điều này có nghĩa là

$$\left|1 - \sum ab + abcd\right| \leq 4$$

và từ đây ta có điều phải chứng minh.

67. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 2(ab+bc+ca)$$

với mọi a, b, c là các số thực dương.

APMO, 2004

Lời giải 1:
Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$. Bởi vì $(a+b+c)^2 \leq (|a|+|b|+|c|)^2$, ta có thể giả sử rằng a, b, c là không âm. Ta sẽ sử dụng một sự kiện là nếu x và y cùng dấu thì $(1+x)(1+y) \geq 1+x+y$. Vậy, ta viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\prod \left(\frac{a^2-1}{3}+1\right) \geq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

và ta có các trường hợp

i) Nếu a, b, c ít nhất bằng 1 thì $\prod\left(\dfrac{a^2-1}{3}+1\right) \geq 1 + \sum \dfrac{a^2-1}{3} \geq \dfrac{(\sum a)^2}{9}$.

ii) Nếu có hai trong ba số ít nhất bằng 1, giả sử chúng là a và b, khi đó ta có

$$\begin{aligned}\prod\left(\frac{a^2-1}{3}+1\right) &\geq \left(1+\frac{a^2-1}{3}+\frac{b^2-1}{3}\right)\left(\frac{c^2+2}{3}\right)\\ &= \frac{a^2+b^2+1}{3}.\frac{1^2+1^2+c^2}{3}\\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{9}\end{aligned}$$

bởi bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** .

iii) Nếu cả ba số nhiều nhất bằng 1, thì bởi bất đẳng thức **Bernoulli** ta có

$$\prod\left(\frac{a^2-1}{3}+1\right) \geq 1 + \sum \frac{a^2-1}{3} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{9}$$

và hoàn thành chứng minh.

Lời giải 2:
Khai triển mọi số hạng, ta quy bài toán về chứng minh

$$(abc)^2 + 2\sum a^2b^2 + 4\sum a^2 + 8 \geq 9\sum ab.$$

Bởi vì $3\sum a^2 \geq 3\sum ab$ và $2\sum a^2b^2 + 6 \geq 4\sum ab$, ta còn lại bất đẳng thức $(abc)^2 + \sum a^2 + 2 \geq 2\sum ab$. Tất nhiên, ta có thể giả sử rằng a, b, c là các số không âm và ta có thể viết $a = x^2, b = y^2, c = z^2$. Trong trường hợp này

$$2\sum ab - \sum a^2 = (x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$$

Hiển nhiên rằng nếu x, y, z không là độ dài các cạnh của một tam giác, thì bất đẳng thức là tầm thường. Ngược lại, ta có thể đặt $x = u+v, y = v+w, z = w+u$ và bất đẳng thức được quy về

$$[(u+v)(v+w)(w+u)]^4 + 2 \geq 16(u+v+w)uvw.$$

Ta có $[(u+v)(v+w)(w+u)]^4 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{(u+v)^4(v+w)^4(u+w)^4}$ và ta chỉ còn phải chứng minh rằng vế phải bất đẳng thức cuối ít nhất là $16(u+v+w)uvw$. Điều này dẫn đến

$$(u+v)^4(v+w)^4(w+u)^4 \geq \frac{16^3}{3^3}(uvw)^3(u+v+w)^3.$$

Nhưng bất đẳng thức này suy ra từ các bất đẳng thức đã biết

$$\begin{aligned}
&(u+v)(v+w)(w+u) \geq \frac{8}{9}(u+v+w)(uv+vw+wu),\\
&(uv+vw+wu)^4 \geq 3^4(uvw)^{\frac{8}{3}},\\
&u+v+w \geq 3\sqrt[3]{uvw}.
\end{aligned}$$

Lời giải 3:
Tương tự như trong **Lời giải 2**, ta quy bài toán về chứng minh rằng

$$(abc)^2 + 2 \geq 2\sum ab - \sum a^2.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức **Schur**, chúng ta suy ra rằng

$$2\sum ab - \sum a^2 \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

và như là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$\frac{9abc}{a+b+c} \leq 3\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Điều này chỉ ra rằng khi ta chứng minh

$$(abc)^2 + 2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2},$$

thì bài toán được giải xong. Nhưng khẳng định cuối cùng được suy từ bất đẳng thức **AM-GM** .

68. [Vasile Cirtoaje] Chứng minh rằng nếu $0 < x \leq y \leq z$ và $x + y + z = xyz + 2$, thì

a) $(1 - xy)(1 - yz)(1 - xz) \geq 0$;

b) $x^2y \leq 1, x^3y^2 \leq \dfrac{32}{27}$.

Lời giải:
a) Ta có

$$\begin{aligned}(1 - xy)(1 - yz) &= 1 - xy - yz + xy^2z \\ &= 1 - xy - yz + y(x + y + z - 2) \\ &= (y - 1)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

và tương tự

$$(1 - yz)(1 - zx) = (1 - z)^2 \geq 0, \quad (1 - zx)(1 - xy) = (1 - x)^2 \geq 0.$$

Vậy các biểu thức $1 - xy, 1 - yz$, và $1 - zx$ có cùng dấu.
b) Ta viết lại hệ thức

$$x + y + z = xyz + 2$$

như sau

$$(1 - x)(1 - y) + (1 - z)(1 - xy) = 0.$$

Nếu $x > 1$ thì $z \geq y \geq x > 1$ và do đó $(1 - x)(1 - y) + (1 - z)(1 - xy) > 0$, điều này không thể xảy ra. Vậy ta có $x \leq 1$. Tiếp theo ta phân biệt hai trường hợp 1) $xy \leq 1$; 2) $xy > 1$.
1) $xy \leq 1$. Ta có $x^2y \leq x \leq 1$ và $x^3y^2 \leq x \leq 1 < \dfrac{32}{27}$.
2) $xy > 1$. Từ $y \geq \sqrt{xy}$ ta có $y > 1$. Tiếp theo ta viết lại hệ thức $x + y + z = xyz + 2$ thành $x + y - 2 = (xy - 1)z$. Bởi vì $z \geq y$ cho ta

$$x + y - 2 \geq (xy - 1)y \Longrightarrow (y - 1)(2 - x - xy) \geq 0,$$

vậy $2 \geq x(1 + y)$. Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** , ta có

$$1 + y \geq 2\sqrt{y} \text{ và } 1 + y = 1 + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq 3\sqrt[3]{1.\frac{y}{2}.\frac{y}{2}}.$$

Do đó
$$2 \geq 2x\sqrt{y} \text{ và } 2 \geq 3x\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}},$$
Điều này có nghĩa là $x^2y \leq 1$ và $x^3y^2 \leq \frac{32}{27}$. Đẳng thức $x^2y = 1$ xảy ra khi $x = y = 1$ và đẳng thức $x^3y^2 = \frac{32}{27}$ xảy ra khi $x = \frac{2}{3}, y = z = 2$.

69. [Titu Andreescu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong các bất đẳng thức
$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6$$
đúng.

TST 2001, USA

Lời giải:
Ý tưởng tự nhiên là thay thế $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$. Khi đó, ta có $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx \geq 1$ và ta phải chứng minh ít nhất hai trong các bất đẳng thức
$$2x + 3y + 6z \geq 6, \quad 2y + 3z + 6x \geq 6, \quad 2z + 3x + 6y \geq 6$$
đúng. Giả sử trường hợp này không xảy ra. Khi đó ta có thể giả sử rằng
$$2x + 3y + 6z < 6 \text{ và } 2z + 3x + 6y < 6.$$
Cộng lại, ta được $5x + 9y + 8z < 12$. Nhưng chúng ta có $x \geq \frac{1 - yz}{y + z}$. Suy ra $12 > \frac{5 - 5yz}{y + z} + 9y + 8z$, bất đẳng thức này chính là
$$12(y + z) > 5 + 9y^2 + 8z^2 + 12yz \Longleftrightarrow (2z - 1)^2 + (3y + 2z - 2)^2 < 0,$$
Điều này hiển nhiên không xảy ra. Do đó ta có điều phải chứng minh.

70. [Gabriel Dospinescu, Marian Tetiva] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn
$$x + y + z = xyz.$$
Chứng minh rằng
$$(x - 1)(y - 1)(z - 1) \leq 6\sqrt{3} - 10.$$

Lời giải 1:
Bởi vì $x < xyz \Longrightarrow yz > 1$ (và các hệ thức tương tự $xz > 1, xy > 1$) nên có nhiều nhất một trong trong ba số nhỏ hơn 1. Trong bất kì trường hợp nào ($x \leq 1, y \geq 1, z \geq 1$ hoặc các trường hợp tương tự) bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Còn duy nhất một trường hợp ta phải phân tích là khi $x \geq 1, y \geq 1$ và $z \geq 1$.
Trong trường hợp này ta kí hiệu

$$x - 1 = a, y - 1 = b, z - 1 = c.$$

Khi đó a, b, c là các số thực không âm, và bởi vì

$$x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1$$

thỏa mãn

$$a + 1 + b + 1 + c + 1 = (a + 1)(b + 1)(c + 1),$$

điều này có nghĩa là

$$abc + ab + ac + bc = 2.$$

Đặt $x = \sqrt[3]{xyz}$; ta có

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{abbcca} = 3x^2,$$

khi đó ta có

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2 \leq 2 \\ \Longleftrightarrow & (x + 1)(x^2 + 2x - 2) \leq 0 \\ \Longleftrightarrow & (x + 1)(x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3}) \leq 0. \end{aligned}$$

Do $x \geq 0$, điều này suy ra

$$\sqrt[3]{abc} = x \leq \sqrt{3} - 1,$$

hoặc, tương đương

$$abc \leq (\sqrt{3} - 1)^3,$$

bất đẳng thức trên chính xác là

$$(x - 1)(y - 1)(z - 1) \leq 6\sqrt{3} - 10.$$

Chứng minh được hoàn thành.

Lời giải 2:
Giống như trong lời giải đầu tiên (và bởi vì tính đối xứng) ta có thể giả sử rằng $x \geq 1, y \geq 1$; thậm chí ta có thể giả sử $x > 1, y > 1$ (với $x = 1$ bất đẳng thức là rõ ràng). Khi đó ta có $xy > 1$ và từ điều kiện đã cho ta có

$$z = \frac{x + y}{xy - 1}.$$

Hệ thức phải chứng minh là

$$(x-1)(y-1)(z-1) \le 6\sqrt{3}-10$$
$$\Longleftrightarrow 2xyz-(xy+xz+yz) \le 6\sqrt{3}-9,$$

hoặc, với biểu thức trên đây của z,

$$2xy.\frac{x+y}{xy-1} - xy - (x+y)\frac{x+y}{xy-1} \le 6\sqrt{3}-9$$
$$\Longleftrightarrow (xy-x-y)^2 + (6\sqrt{3}-10)xy \le 6\sqrt{3}-9,$$

sau một vài bước tính toán.
Bây giờ, ta đặt $x = a+1, y = b+1$ và biến đổi thành

$$a^2b^2 + (6\sqrt{3}-10)(a+b+ab) - 2ab \ge 0.$$

Nhưng

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}$$

và $6\sqrt{3}-10 > 0$, vậy ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$a^2b^2 + (6\sqrt{3}-10)(2\sqrt{ab}+ab) - 2ab \ge 0.$$

Thay $t = \sqrt{ab} \ge 0$, bất đẳng thức trở thành

$$t^4 + (6\sqrt{3-12})t^2 + 2(6\sqrt{3}-10)t \ge 0,$$

hoặc

$$t^3 + (6\sqrt{3-12})t + 2(6\sqrt{3}-10) \ge 0.$$

Đạo hàm của hàm số

$$f(t) = t^3 + (6\sqrt{3}-12)t + 2(6\sqrt{3}-10), t \ge 0$$

là

$$f'(t) = 3\left(t^2 - (\sqrt{3}-1)^2\right)$$

và có duy nhất một nghiệm dương của phương trình $f'(t) = 0$. Đó là $\sqrt{3}-1$ và dễ thấy rằng $\sqrt{3}-1$ là một điểm cực tiểu của f trong khoảng $[0, \infty)$. Do đó

$$f(t) \ge f(\sqrt{3}-1) = 0,$$

và ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét cuối cùng: thực ra ta có

$$f(t) = (t-\sqrt{3}+1)^2(t+2\sqrt{3}-2),$$

điều này chỉ ra rằng $f(t) \ge 0$ với $t \ge 0$.

71. [Marian Tetiva] Chứng minh rằng với bất kỳ các số thực dương a, b, c ta có

$$\left|\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{b^3-c^3}{b+c}+\frac{c^3-a^3}{c+a}\right| \le \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4}.$$

Moldova TST, 2004

Lời giải 1:
Đầu tiên, ta thấy rằng vế trái có thể được biến đổi thành

$$\begin{aligned}\sum \frac{a^3-b^3}{a+b} &= (a^3-b^3)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}\right)+(b^3-c^3)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)\\ &= \frac{(a-b)(c-b)(a-c)(\sum ab)}{(a+b)(b+c)(c+a)},\end{aligned}$$

vì vậy ta phải chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{1}{2}\left(\sum a^2-\sum ab\right).$$

Dễ dàng chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

do đó ta còn phải chứng minh

$$\frac{2}{9}.\sum a\left(\sum(a-b)^2\right) \ge \left|\prod(a-b)\right|.$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** , ta cần chứng minh bất đẳng thức sau để thu được bât đẳng thức trên

$$\frac{8}{27}\left(\sum a\right)^3 \ge \left|\prod(a-b)\right|.$$

Bất đẳng thức này dễ chứng minh. Chỉ cần để ý rằng ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$ và trong trường hợp này bất đẳng thức trở thành

$$(a-b)(a-c)(b-c) \le \frac{8}{27}(a+b+c)^3$$

và bất đẳng thức này suy ra từ bất đẳng thức **AM-GM** .

Lời giải 2 (bởi Marian Tetiva):

Dễ thấy rằng bất đẳng thức không chỉ tuần hoàn mà còn đối xứng. Vì thế chúng ta có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c > 0$. Ý tưởng là sử dụng bất đẳng thức

$$x + \frac{y}{2} \geq \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} \geq y + \frac{x}{2},$$

bất đẳng thức đúng nếu $x \geq y > 0$. Chứng minh bất đẳng thức dễ và ta sẽ bỏ qua. Bây giờ, bởi vì $a \geq b \geq c > 0$, ta có ba bất đẳng thức

$$a + \frac{b}{2} \geq \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} \geq b + \frac{a}{2}, b + \frac{c}{2} \geq \frac{b^2 + bc + c^2}{b + c} \geq c + \frac{b}{2}$$

và hiển nhiên

$$a + \frac{c}{2} \geq \frac{a^2 + ac + c^2}{a + c} \geq c + \frac{a}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\sum \frac{a^3 - b^3}{a + b} &= (a - b)\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} + (b - c)\frac{b^2 + bc + c^2}{b + c} - (a - c).\frac{a^2 + ac + c^2}{a + c} \\
&\geq (a - b)\left(b + \frac{a}{2}\right) + (b - c)\left(c + \frac{b}{2}\right) - (a - c)\left(a + \frac{c}{2}\right) \\
&= -\sum \frac{(a - b)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh rằng

$$\sum \frac{a^3 - b^3}{a + b} \leq \sum \frac{(a - b)^2}{4}$$

và ta có điều phải chứng minh.

72. [Titu Andreescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

USAMO, 2004

Lời giải:
Ta bắt đầu với bất đẳng thức $a^5 - a^2 + 3 \geq a^3 + 2 \iff (a^2 - 1)(a^3 - 1) \geq 0$. Vậy, còn phải chỉ ra rằng

$$\prod (a^3 + 2) \geq \left(\sum a\right)^3.$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** , ta có

$$\frac{a^3}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geq\frac{3a}{\sqrt[3]{\prod(a^3+2)}}.$$

Ta viết hai bất đẳng thức tương tự và cộng các bất đẳng thức lại. Ta thấy rằng

$$\prod(a^3+2)\geq\left(\sum a\right)^3,$$

đây là bất đẳng thức mong muốn.

73. [Gabriel Dospinescu] Cho $n>2$ và $x_1,x_2,...,x_n>0$ thỏa mãn

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)=n^2+1.$$

Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}\right)>n^2+4+\frac{2}{n(n-1)}.$$

Lời giải:
Trong bài toán này, sự kết hợp giữa các đồng nhất thức và bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** là cách để chứng minh. Vậy, ta bắt đầu với biểu thức

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)^2.$$

Ta có thể thấy ngay rằng

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)^2&=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i^2}{x_j^2}+\frac{x_j^2}{x_i^2}-4.\frac{x_i}{x_j}-4.\frac{x_j}{x_i}+6\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\right)-4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)+3n^2.\end{aligned}$$

Do đó ta có thể suy ra từ bất đẳng thức

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)^2\geq 0$$

là

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) \geq n^2+4.$$

Tiếc rằng, điều này chưa đủ để kết luận. Vậy, ta hãy cố gắng cực tiểu hóa biểu thức

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)^2.$$

Điều này có thể làm bởi sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)^2 \geq \frac{\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2)\right)^2}{\binom{n}{2}}.$$

Bởi vì $\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)=1$, ta suy ra rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) \geq n^2+4+\frac{2}{n(n-1)},$$

đó là điều ta muốn chứng minh. Tất nhiên, ta cần chứng minh là đẳng thức không xảy ra. Nhưng đẳng thức sẽ dẫn đến $x_1=x_2=...=x_n$, nó mâu thuẫn với giả thiết

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = n^2+1.$$

74. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, Marian Tetiva] Chứng minh rằng với bất kỳ số các số thực dương a,b,c, ta có

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Lời giải 1:
Đặt $f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+abc+2-a-b-c-ab-bc-ca$. Ta phải chứng minh rằng tất cả các giá trị của f đều không âm. Nếu $a,b,c>3$, thì ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$, điều này có nghĩa là $f(a,b,c)>a^2+b^2+c^2-a-b-c>0$. Vậy, ta có thể giả sử rằng $a\leq 3$ và đặt $m=\frac{b+c}{2}$. Dễ tính toán để chỉ ra rằng $f(a,b,c)-f(a,m,m)=\frac{(3-a)(b-c)^2}{4}\geq 0$ và chỉ còn phải chứng minh $f(a,m,m)\geq 0$, điều này chính là

$$(a+1)m^2-2(a+1)m+a^2-a+2\geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, bởi vì biệt thức của phương trình bậc hai là $-4(a+1)(a-1)^2 \leq 0$.

Lời giải 2:
Nhắc lại bất đẳng thức **Turkevici**

$$x^4+y^4+z^4+t^4+2xyzt \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2t^2+t^2x^2+x^2z^2+y^2t^2$$

với mọi số thực x, y, z, t. Đặt $t=1, a=x^2, b=y^2, x=z^2$ và sử dụng hệ thức $2\sqrt{abc} \leq abc+1$, ta có được bất đẳng thức cần chứng minh.

75. [Titu Andreescu, Zuming Feng] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

USAMO, 2003

Lời giải 1:
Bởi vì bất đẳng thức là thuần nhất, ta có thể giả sử $a+b+c=3$. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} &= \frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}\\ &= \frac{1}{3}\left(1+2.\frac{4a+3}{2+(a-1)^2}\right)\\ &\leq \frac{1}{3}\left(1+2.\frac{4a+3}{2}\right)\\ &= \frac{4a+4}{3}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq \frac{1}{3}\sum(4a+4)=8.$$

Lời giải 2:
Kí hiệu $x=\dfrac{b+c}{2}, y=\dfrac{c+a}{b}, z=\dfrac{a+b}{c}$. Ta phải chứng minh rằng

$$\sum \frac{(x+2)^2}{x^2+2} \leq 8 \Longleftrightarrow \sum \frac{2x+1}{x^2+2} \leq \frac{5}{2} \Longleftrightarrow \sum \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \geq \frac{1}{2}.$$

Nhưng, từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , ta có

$$\sum \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \geq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}.$$

Ta còn phải chứng minh rằng

$$2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-6x-6y-6z+9) \geq x^2+y^2+z^2+6$$
$$\Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2+4(xy+yz+zx)-12(x+y+z)+12 \geq 0.$$

Bây giờ $xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \geq 12$ (bởi vì $xyz \geq 8$), vậy ta vẫn còn phải chứng minh rằng

$$(x+y+z)^2+24-12(x+y+z)+12 \geq 0,$$

Bất đẳng thức này tương đương với $(x+y+z-6)^2 \geq 0$, điều này hiển nhiên đúng.

76. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y và với mọi số nguyên dương m, n, ta có

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n}+y^{m+n})+(m+n-1)(x^m y^n+x^n y^m) \geq mn(x^{m+n-1}y+y^{m+n-1}x).$$

Austrian-Polish Competition, 1995

Lời giải:
Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$mn(x-y)(x^{m+n-1}-y^{m+n-1}) \geq (m+n-1)(x^m-y^m)(x^n-y^n)$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x^{m+n-1}-y^{m+n-1}}{(m+n-1)(x-y)} \geq \frac{x^m-y^m}{m(x-y)}.\frac{x^n-y^n}{n(x-y)}$$

(ta giả sử rằng $x > y$). Hệ thức cuối cũng có thể viết lại thành

$$(x-y)\int_y^x t^{m+n-2}dt \geq \int_y^x t^{m-1}dt.\int_y^x t^{n-1}dt$$

và bất đẳng thức này suy ra từ bất đẳng thức **Chebyshev** cho tích phân.

77. Cho a, b, c, d, e là các số thực dương thỏa mãn $abcde = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}+\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc} \geq \frac{10}{3}.$$

Crux Mathematicorum

Lời giải:
Xét phép thế

$$a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{t}, d=\frac{t}{u}, e=\frac{u}{x}$$

với $x, y, z, t, u > 0$. Ta có

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd} = \frac{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}}.$$

Viết các hệ thức khác tương tự, và kí hiệu $\frac{1}{x} = a_1, \frac{1}{y} = a_2, \frac{1}{z} = a_3, \frac{1}{t} = a_4, \frac{1}{u} = a_5$, $a_i > 0$, ta có

$$\sum \frac{a_2+a_4}{a_1+a_3+a_5} \geq \frac{10}{3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , ta làm nhỏ vế trái bởi

$$\frac{4S^2}{2S^2-(a_2+a_4)^2-(a_1+a_4)^2-(a_3+a_5)^2-(a_2+a_5)^2-(a_1+a_3)^2},$$

với $S = \sum\limits_{i=1}^{5} a_i$. Bởi áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** một lần nữa cho mẫu số của phân số, ta thu được kết luận.

78. [Titu Andreescu] Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in (0, \frac{\pi}{2})$ bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b.\sin(b-c).\sin(b-a)}{\sin(c+a)}+\frac{\sin c.\sin(c-a).\sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geq 0.$$

TST 2003, USA

Lời giải:
Đặt $x = \sin a, y = \sin b, z = \sin c$. Khi đó ta có $x, y, z > 0$. Dễ thấy rằng hệ thức sau là đúng:

$$\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c).\sin(a+b).\sin(a+c) = x(x^2-y^2)(x^2-z^2)$$

Sử dụng những hệ thức tương tự cho những số hạng khác, ta phải chứng minh rằng:

$$\sum x(x^2-y^2)(x^2-z^2) \geq 0.$$

Với sự thay thế $x = \sqrt{u}.y = \sqrt{v}, z = \sqrt{w}$ bất đẳng thức trở thành $\sum \sqrt{u}(u-v)(u-w) \geq 0$. Nhưng bất đẳng thức này suy ra từ bất đẳng thức **Schur.**

79. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương, thì

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}.$$

KMO Summer Program Test, 2001

Lời giải:
Hiển nhiên ta chỉ cần chứng minh các bất đẳng thức

$$\sum a^4 + \sum a^2b^2 \geq \sum a^3b + \sum ab^3$$

và

$$\left(\sum a^4\right)\left(\sum a^2b^2\right) \geq \left(\sum a^3b\right)\left(\sum ab^3\right).$$

Bất đẳng thức đầu suy ra từ bất đẳng thức **Schur**

$$\sum a^4 + abc\sum a \geq \sum a^3b + \sum ab^3$$

và hệ thức

$$\sum a^2b^2 \geq abc\sum a.$$

Bất đẳng thức thứ hai là một hệ quả đơn giản của bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** :

$$(a^3b + b^3c + c^3a)^2 \leq (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$(ab^3 + bc^3 + ca^3)^2 \leq (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^4 + b^4 + c^4).$$

80. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu] Cho $n > 2$, tìm hằng số k_n nhỏ nhất có tính chất: Nếu $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ có tích bằng 1, thì

$$\frac{a_1a_2}{(a_1^2+a_2)(a_2^2+a_1)} + \frac{a_2a_3}{(a_2^2+a_3)(a_3^2+a_2)} + ... + \frac{a_na_1}{(a_n^2+a_1)(a_1^2+a_n)} \leq k_n.$$

Lời giải:
Đầu tiên ta đặt $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = x, a_n = \dfrac{1}{x^{n-1}}$. Ta suy ra

$$k_n \geq \frac{2x^{2n-1}}{(x^{n+1}+1)(x^{2n-1}+1)} + \frac{n-2}{(1+x)^2} > \frac{n-2}{(1+x)^2}$$

với mọi $x > 0$. Rõ ràng, điều này suy ra $k_n \geq n-2$. Ta chứng minh rằng $n-2$ là một hằng số tốt và bài toán sẽ được giải.
Đầu tiên, ta sẽ chứng minh rằng $(x^2+y)(y^2+x) \geq xy(1+x)(1+y)$. Thật vậy, bất đẳng thức chính là $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$. Vậy, chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)} + ... + \frac{1}{(1+a_n)(1+a_1)} \leq n-2.$$

Bây giờ, ta đặt $a_1 = \dfrac{x_1}{x_2}, ..., a_n = \dfrac{x_n}{x_1}$ và bất đẳng thức ở trên trở thành

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x_{k+1}x_{k+2}}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})}\right) \geq 2,$$

bất đẳng thức này cũng có thể được viết dưới dạng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}^2}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})} \geq 2.$$

Rõ ràng,

$$\sum \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_1 + x_2 + ... + x_n} = 1.$$

Vậy, ta phải chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_{k+1}^2}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**, ta suy ra rằng

$$\frac{x_{k+1}^2}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})}$$

và ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+2}.$$

Nhưng bất đẳng thức này tương đương với

$$2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \geq 2\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+2}$$

và điều này là hiển nhiên đúng. Vậy, $k_n = n - 2$.

81. [Vasile Cirtoaje] Với mọi số thực a, b, c, x, y, z, chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

Kvant, 1989

Lời giải:

Ta kí hiệu $t = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}}$. Sử dụng sự thay thế $x = tp, y = tq$ và $z = tr$, điều này suy ra

$$a^2+b^2+c^2 = p^2+q^2+r^2.$$

Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$ap+bq+cr+a^2+b^2+c^2 \geq \frac{2}{3}(a+b+c)(p+q+r),$$

$$(a+p)^2+(b+q)^2+(c+r)^2 \geq \frac{4}{3}(a+b+c)(p+q+r).$$

Từ

$$4(a+b+c)(p+q+r) \leq [(a+b+c)+(p+q+r)]^2,$$

suy ra chỉ cần chứng minh rằng

$$(a+p)^2+(b+q)^2+(c+r)^2 \geq \frac{1}{3}[(a+p)+(b+q)+(c+r)]^2.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên là đúng.

82. [Vasile Cirtoaje] Chứng minh rằng các cạnh a, b, c của một tam giác thỏa mãn bất đẳng thức

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\right) \geq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

Lời giải 1:

Ta có thể giả sử rằng c là số nhỏ nhất trong các số a, b, c. Khi đó đặt $x = b - \dfrac{a+c}{2}$. Sau một vài bước tính toán, bất đẳng thức trở thành

$$(3a-2c)x^2+\left(x+c-\frac{a}{4}\right)(a-c)^2 \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow (3a-2c)(2b-a-c)^2+(4b+2c-3a)(a-c)^2 \geq 0.$$

Điều này trực tiếp suy ra từ các bất đẳng thức $3a \geq 2c, 4b+2c-3a = 3(b+c-a)+b-c > 0$.

Lời giải 2:

Thực hiện một phép thay thế $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ và quy đồng mẫu số. Bài toán quy về chứng minh rằng

$$x^3+y^3+z^3+2(x^2y+y^2z+z^2x) \geq 3(xy^2+yz^2+zx^2).$$

Tất nhiên ta có thể giả sử rằng x là số nhỏ nhất trong các số x, y, z. Khi đó ta có thể viết $y = x + m, z = x + n$ với m và n các số không âm. Một sự tính toán ngắn chỉ ra rằng bất đẳng thức quy về

$$2x(m^2 - mn + n^2) + m^3 + n^3 + 2m^2n - 3n^2m \geq 0.$$

Ta chỉ còn phải chứng minh rằng

$$m^3 + n^3 + 2m^2n \geq 3n^2m \Longleftrightarrow (n-m)^3 - (n-m)m^2 + m^3 \geq 0$$

và bất đẳng thức này trực tiếp suy ra từ bất đẳng thức $t^3 - t + 1 \geq 0$, đúng với $t \geq -1$.

83. [Walther Janous] Cho $n > 2$ và $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\right).$$

Crux Mathematicorum

Lời giải 1:

Ý tưởng tự nhiên là sử dụng hệ thức

$$\frac{n - x_i}{1 - x_i} = 1 + \frac{n-1}{x_1 + x_2 + ... + x_{i-1} + x_{i+1} + ... + x_n}.$$

Vậy ta có

$$\prod_{j \neq i}\left(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\right) \leq \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n-1]{x_1.x_2....x_{i-1}.x_{i+1}...x_n}}\right)$$

và ta phải chứng minh bất đẳng thức

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geq \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n-1]{x_1.x_2....x_{i-1}.x_{i+1}...x_n}}\right).$$

Nhưng bất đẳng thức này không quá khó, bởi vì bất đẳng thức trên suy ra trực tiếp bởi phép nhân các bất đẳng thức

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_j}\right) \geq \left(1 + \sqrt[n-1]{\prod_{j \neq i}\frac{1}{x_j}}\right)^{n-1}$$

thu được từ bất đẳng thức **Huygens.**

Lời giải 2:
Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geq \left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}.$$

Rõ ràng là bất đẳng thức này mạnh hơn bất đẳng thức ban đầu. Đầu tiên, ta chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{1-x_i} \geq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Bất đẳng thức này suy ra từ bất đẳng thức **Jensen** với hàm lồi $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. Vậy, chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^2 \geq \left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n.$$

Nhưng ta thấy ngay rằng đây chính là bất đẳng thức được chứng minh trong lời giải của bài toán 121.

84. [Vasile Cirtoaje, Gheorghe Eckstein] Xét các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn $x_1x_2...x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+...+\frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$$

TST 1999, Romania

Lời giải 1:
Giả sử bất đẳng thức không đúng với một hệ n số nào đó. Khi đó ta có thể tìm được một số $k>1$ và n số có tổng bằng 1, giả sử các số đó là a_i, sao cho $\frac{1}{n-1+x_i}=ka_i$.
Khi đó ta có

$$1=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{ka_i}-n+1\right) < \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-n+1\right).$$

Ở đây ta sử dụng hệ thức $a_i < \frac{1}{n-1}$. Bây giờ, ta viết $1-(n-1)a_k = b_k$ và ta thấy $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 1$ và cũng có $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-b_k\right) < (n-1)^n b_1...b_n$. Nhưng điều này mâu thuẫn với sự kiện là với mỗi j ta có

$$1-b_j = b_1+b_2+...+b_{j-1}+b_{j+1}+...+b_n \geq (n-1)\sqrt[n-1]{b_1...b_{j-1}b_{j+1}...b_n}.$$

Lời giải 2:
Ta viết bất đẳng thức viết dưới dạng

$$-\frac{n-1}{n-1+x_1}-\frac{n-1}{n-1+x_2}-...-\frac{n-1}{n-1+x_n}\geq -(n-1)$$
$$\Longleftrightarrow (1-\frac{n-1}{n-1+x_1})+(1-\frac{n-1}{n-1+x_2})+...+(1-\frac{n-1}{n-1+x_n})\geq n-(n-1)$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x_1}{n-1+x_1}+\frac{x_2}{n-1+x_2}+...+\frac{x_n}{n-1+x_n}\geq 1.$$

Bất đẳng thức cuối suy ra từ tổng của các bất đẳng thức dưới đây

$$\frac{x_1}{n-1+x_1}\geq \frac{x_1^{1-\frac{1}{n}}}{x_1^{1-\frac{1}{n}}+x_2^{1-\frac{1}{n}}+...+x_n^{1-\frac{1}{n}}},...,\frac{x_n}{n-1+x_n}\geq \frac{x_n^{1-\frac{1}{n}}}{x_1^{1-\frac{1}{n}}+x_2^{1-\frac{1}{n}}+...+x_n^{1-\frac{1}{n}}}.$$

Bất đẳng thức đầu tiên trong các bất đẳng thức trên tương đương với

$$x_1^{1-\frac{1}{n}}+x_2^{1-\frac{1}{n}}+...+x_n^{1-\frac{1}{n}}\geq (n-1)x_1^{-\frac{1}{n}}$$

được suy từ bất đẳng thức **AM-GM** .

Chú ý.
Thay thế các số $x_1, x_2, ..., x_n$ lần lượt bằng các số $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{1+(n-1)x_1}+\frac{1}{1+(n-1)x_2}+...+\frac{1}{1+(n-1)x_n}\geq 1.$$

85. [Titu Andreescu] Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$, ta có

$$0\leq ab+bc+ca-abc\leq 2.$$

USAMO, 2001

Lời giải 1 (bởi Richard Stong):
Cận dưới không khó. Thật vậy, ta có $ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ và chỉ cần chứng minh rằng $abc\leq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, Điều này suy ra từ hệ thức $abc\leq 4$. Ngược lại, cận trên là khó. Đầu tiên ta thấy rằng có hai trong ba số cùng lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1. Giả sử hai số đó là b và c. Khi đó ta có

$$4\geq 2bc+a^2+abc\Longrightarrow (2-a)(2+a)\geq bc(2+a)\Longrightarrow bc\leq 2-a.$$

Vậy

$$ab+bc+ca-abc\leq ab+2-a+ac-abc$$

và chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$ab + 2 - a + ac - abc \leq 2 \Longleftrightarrow b + c - bc \leq 1 \Longleftrightarrow (b-1)(c-1) \geq 0,$$

bất đẳng thức này đúng do cách chọn của chúng ta.

Lời giải 2:
Ta không chứng minh lại cận dưới, vì đây là một bài toán dễ. Ta tập trung vào cận trên. Giả sử $a \geq b \geq c$ và giả sử $a = x + y, b = x - y$. Giả thiết trở thành

$$x^2(2+c) + y^2(2-c) = 4 - c^2$$

và ta phải chứng minh rằng

$$(x^2 - y^2)(1-c) \leq 2(1 - xc).$$

Bởi vì $y^2 = 2 + c - \dfrac{2+c}{2-c}x^2$, bài toán yêu cầu chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4x^2 - (4-c^2)}{2-c}(1-c) \leq 2(1-cx).$$

Rõ ràng, ta có $c \leq 1$ và

$$0 \leq y^2 = 2 + c - \frac{2+c}{2-c}x^2 \Longrightarrow x^2 \leq 2 - c \Longrightarrow x \leq \sqrt{2-c}$$

(ta sử dụng sự kiện là $a \geq b \Longrightarrow y \geq 0$ and $b \geq 0 \Longrightarrow x \geq y \geq 0$). Bây giờ, xét hàm số

$$f : [0, \sqrt{2-c}] \to \mathbb{R}, f(x) = 2(1-cx) - \frac{4x^2 - (4-c^2)}{2-c}(1-c).$$

Ta có $f'(x) = -2c - 8x\dfrac{1-c}{2-c} \leq 0$, suy ra f là hàm giảm và $f(x) \geq f(\sqrt{2} - c)$. Vậy, ta phải chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & f(\sqrt{2-c}) \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & 2(1 - c\sqrt{2-c}) \geq (2-c)(1-c) \\ \Longleftrightarrow & 3 \geq c + 2\sqrt{2-c} \\ \Longleftrightarrow & (1 - \sqrt{2-c})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

điều này hiển nhiên đúng. Vậy, bài toán đã giải xong.

86. [Titu Andreescu] Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\left\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2\right\}.$$

TST 2000, USA

Lời giải 1:
Một ý tưởng tự nhiên là phải giả sử ngược lại, điều này có nghĩa là

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} > a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} > b + c - 2\sqrt{bc}$$

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} > c + a - 2\sqrt{ca}.$$

Cộng các bất đẳng thức lại, ta thấy rằng

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} > 2(a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca}).$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \leq 2(a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca})$ và bài toán sẽ được giải. Vì bất đẳng thức trên là thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $abc = 1$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành

$$2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca} - a - b - c \leq 3.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức **Schur**, ta thấy rằng với bất kì các số thực dương x, y, z, ta có

$$2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2 \leq \frac{9xyz}{x+y+z} \leq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

Ta chỉ còn phải đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$ trong bất đẳng thức trên.

87. [Kiran Kedlaya] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}.$$

Lời giải (bởi Anh Cường):
Ta có

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \sqrt[3]{ab\frac{a+b}{2}} + \sqrt[3]{abc}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$a + \sqrt[3]{ab\frac{a+b}{2}} + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}.$$

Bởi bất đẳng thức **AM-GM** , ta có

$$\sqrt[3]{1.\frac{2a}{a+b}.\frac{3a}{a+b+c}} \le \frac{1+\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{3a}{a+b+c}}{3},$$

$$\sqrt[3]{1.1.\frac{3b}{a+b+c}} \le \frac{2+\dfrac{3b}{a+b+c}}{3},$$

$$\sqrt[3]{1.\frac{2b}{a+b}.\frac{3c}{a+b+c}} \le \frac{1+\dfrac{2b}{a+b}+\dfrac{3c}{a+b+c}}{3}.$$

Bây giờ, chỉ cần cộng các bất đẳng thức lại, ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

88. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho với mọi số nguyên dương n không là môt số chính phương, ta có

$$\left|(1+\sqrt{n})\sin(\pi\sqrt{n})\right| > k.$$

Vietnamese IMO Training Camp, 1995

Lời giải:
Ta sẽ chứng minh rằng $\dfrac{\pi}{2}$ là hằng số tốt nhất. Hiển nhiên ta có

$$k < (1+\sqrt{i^2+1})\left|\sin(\pi\sqrt{i^2+1})\right|$$

với mọi số nguyên dương i. Bởi vì $\left|\sin(\pi\sqrt{i^2+1})\right| = \sin\dfrac{\pi}{i+\sqrt{i^2+1}}$, ta suy ra rằng

$$\frac{\pi}{i+\sqrt{i^2+1}} \ge \sin\frac{\pi}{i+\sqrt{i^2+1}} > \frac{k}{1+\sqrt{i^2+1}},$$

từ đây suy ra $k \le \dfrac{\pi}{2}$. Bây giờ ta chứng minh rằng $\dfrac{\pi}{2}$ là hằng số tốt. Rõ ràng, bất đẳng thức có thể viết

$$\sin(\pi\{\sqrt{n}\}) > \frac{\pi}{2(1+\sqrt{n})}.$$

Ta có hai trường hợp
i) Trường hợp thứ nhất: khi $\{\sqrt{n}\} \le \dfrac{1}{2}$. Hiển nhiên,

$$\{\sqrt{n}\} \ge \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}},$$

và bởi vì $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$ ta thấy rằng

$$\sin(\pi\{\sqrt{n}\}) \geq \sin\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \geq \left(\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{6}.\left(\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)^3.$$

Ta chứng minh đẳng thức cuối cùng ít nhất bằng $\dfrac{\pi}{2(1+\sqrt{n})}$. Điều này dẫn đến

$$\frac{2+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{1+\sqrt{n}} > \frac{\pi^2}{3(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2},$$

hoặc $6(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2+3(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) > \pi^2(1+\sqrt{n})$ và điều này là hiển nhiên đúng.
ii) Trường hợp thứ hai: khi $\{\sqrt{n}\} > \dfrac{1}{2}$. Đặt $x = 1-\{\sqrt{n}\} < \dfrac{1}{2}$ và $n = k^2+p, 1 \leq p \leq 2k$. Bởi vì $\{\sqrt{n}\} > \dfrac{1}{2} \Longrightarrow p \geq k+1$. Khi đó dễ thấy rằng $x \geq \dfrac{1}{k+1+\sqrt{k^2+2k}}$ và ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\sin\frac{\pi}{k+1+\sqrt{k^2+2k}} \geq \frac{\pi}{2(1+\sqrt{k^2+k})}.$$

Sử dụng một lần nữa bất đẳng thức $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$, ta suy ra

$$\frac{2\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2+2k}-k+1}{1+\sqrt{k^2+k}} > \frac{\pi^2}{3(1+k+\sqrt{k^2+2k})^2}.$$

Nhưng từ bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có $2\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2+2k}-k \geq 0$. Bởi vì bất đẳng thức $\left(1+k+\sqrt{k^2+2k}\right)^2 > \dfrac{\pi^2}{3}\left(1+\sqrt{k^2+k}\right)$ đúng, trường hợp này cũng được giải quyết.

89. [Tran Nam Dung] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $(x+y+z)^3 = 32xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}.$$

Vietnam, 2004

Lời giải 1 (bởi Tran Nam Dung):
Ta có thể giả sử rằng $x+y+z = 4$ và $xyz = 2$. Suy ra, ta phải tìm các giá trị cực trị

của $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{4^4}$. Bây giờ ta có

$$\begin{aligned}x^4+y^4+z^4 &= (x^2+y^2+z^2)^2-2\sum x^2y^2\\ &= \left(16-2\sum xy\right)^2-2\left(\sum xy\right)^2+4xyz(x+y+z)\\ &= 2a^2-64a+288,\end{aligned}$$

với $a=xy+yz+zx$. Bởi vì $y+z=4-x$ và $yz=\dfrac{2}{x}$, ta phải có $(4-x)^2\geq\dfrac{8}{x}$, điều này suy ra rằng $3-\sqrt{5}\leq x\leq 2$. Do tính đối xứng, ta có $x,y,z\in[3-\sqrt{5},2]$. Điều này có nghĩa là $(x-2)(y-2)(z-2)\leq 0$ và

$$(x-3+\sqrt{5})(y-3+\sqrt{5})(z-3+\sqrt{5})\geq 0.$$

Hiển nhiên từ các biểu thức trong ngoặc, ta suy ra rằng

$$a\in\left[5,\frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right].$$

Nhưng bởi vì $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{4^4}=\dfrac{(a-16)^2-112}{128}$, ta tìm thấy các giá trị cực trị của biểu thức là $\dfrac{383-165\sqrt{5}}{256}$, $\dfrac{9}{128}$, đạt được với các bộ ba số tương ứng $\left(3-\sqrt{5},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $(2,1,1)$.

Lời giải 2:
Như trong lời giải trên, ta phải tìm các giá trị cực trị của $x^2+y^2+z^2$ khi $x+y+z=1, xyz=\dfrac{1}{32}$, bởi vì sau đó các giá trị cực trị của biểu thức $x^4+y^4+z^4$ có thể được tìm thấy trực tiếp. Ta sử dụng sự thay thế $x=\dfrac{a}{4}, y=\dfrac{b}{4}, z=\dfrac{c}{2}$, với $abc=1, a+b+2c=4$. Khi đó $x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2+b^2+4c^2}{16}$ và do đó ta phải tìm các giá trị cực trị của $a^2+b^2+4c^2$. Bây giờ, $a^2+b^2+4c^2=(4-2c)^2-\dfrac{2}{c}+4c^2$ và bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $4c^2-8c-\dfrac{1}{c}$ với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1, a+b+2c=4$. Hiển nhiên, điều này dẫn đến $(4-2c)^2\geq\dfrac{4}{c}$, hoặc $c\in\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},1\right]$. Nhưng điều này quy về việc xét hàm số $f(x)=4x^2-8x-\dfrac{1}{x}$ xác định trên $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},1\right]$, đây là một bài toán dễ.

90. [George Tsintifa] Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d > 0$,

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+d)^3(d+a)^3 \geq 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4.$$

Crux Mathematicorum

Lời giải:
Ta áp dụng bất đẳng thức **Mac-Laurin** cho

$$x = abc, y = bcd, z = cda, t = dab.$$

Ta sẽ thấy rằng

$$\left(\frac{\sum abc}{4}\right)^3 \geq \frac{\sum abc.bcd.cda}{4} = \frac{a^2b^2c^2d^2 \sum a}{4}.$$

Vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geq (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab).$$

Bây giờ, ta nhận xét rằng

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) &= (ac+bd+ad+bc)(ac+bd+ab+cd)\\ &= (ac+bd)^2 + \sum a^2(bc+bd+cd)\\ &\geq 4abcd + \sum a^2(bc+bd+cd)\\ &= (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab).\end{aligned}$$

và bài toán đã giải xong.

91. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{(ab)^n}{1-ab} + \frac{(bc)^n}{1-bc} + \frac{(ca)^n}{1-ca}$$

với a, b, c là các số thực không âm mà có tổng bằng 1 và n là một số nguyên dương.

Lời giải:
Đầu tiên, ta sẽ giải quyết trường hợp $n > 1$. Ta sẽ chứng minh giá trị lớn nhất là $\frac{1}{3.4^{n-1}}$. Rõ ràng $ab, bc, ca \leq \frac{1}{4}$ và do đó

$$\frac{(ab)^n}{1-ab} + \frac{(ab)^n}{1-ab} + \frac{(ab)^n}{1-ab} \leq \frac{4}{3}\Big((ab)^n + (bc)^n + (ca)^n\Big).$$

Suy ra, chúng ta phải chứng minh rằng $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n \leq \dfrac{1}{4^n}$. Giả sử a là số lớn nhất trong các số a, b, c. Khi đó ta có

$$\frac{1}{4^n} \geq a^n(1-a)^n = a^n(b+c)^n \geq a^n b^n + a^n c^n + n a^n b^{n-1} c \geq a^n b^n + b^n c^n + c^n a^n.$$

Vậy, ta chứng minh được rằng trong trường hợp này giá trị lớn nhất nhiều nhất bằng $\dfrac{1}{3.4^{n-1}}$. Nhưng với $a = b = \dfrac{1}{2}, c = 0$ giá trị này đạt được và điều này chỉ ra rằng giá trị lớn nhất là $\dfrac{1}{3.4^{n-1}}$ với $n > 1$. Bây giờ, giả sử rằng $n = 1$. Trong trường hợp này ta có

$$\sum \frac{ab}{1-ab} = \sum \frac{1}{1-ab} - 3.$$

Sử dụng giả thiết $a + b + c = 1$, không khó để chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} = \frac{3 - \sum ab + abc}{1 - \sum ab + abc - a^2b^2c^2}.$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\sum \dfrac{ab}{1-ab} \leq \dfrac{3}{8}$. Với sự nhận xét ở trên, vấn đề này quy về

$$\sum ab \leq \frac{3 - 27(abc)^2 + 19abc}{11}.$$

Nhưng sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta suy ra rằng $\sum ab \leq \dfrac{1+9abc}{4}$ và vậy đủ để chỉ ra rằng

$$\frac{9abc+1}{4} \leq \frac{3 - 27(abc)^2 + 19abc}{11} \Longleftrightarrow 108(abc)^2 + 23abc \leq 1,$$

điều này đúng bởi vì $abc \leq \dfrac{1}{27}$. Do đó với $n = 1$, giá trị lớn nhất là $\dfrac{3}{8}$ đạt được với $a = b = c$.

92. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}.$$

Lời giải:

Sự quan sát sau đây là chủ yếu

$$\begin{aligned}(1+abc)\left(\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)}\right) + 3 &= \sum \frac{1+abc+a+ab}{a(1+b)} \\ &= \sum \frac{1+a}{a(1+b)} + \sum \frac{b(c+1)}{1+b}.\end{aligned}$$

Bây giờ sử dụng hai lần bất đẳng thức **AM-GM** ta được

$$\sum \frac{1+a}{a(1+b)} + \sum \frac{b(c+1)}{1+b} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} + 3\sqrt[3]{abc}.$$

Vậy ta còn lại với bất đẳng thức

$$\frac{\dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}} + 3\sqrt[3]{abc} - 3}{1+abc} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})},$$

thực tế đây là một đồng nhất thức!

93. [Tran Nam Dung] Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$, ta có

$$2(a+b+c) - abc \leq 10.$$

Vietnam, 2002

Lời giải 1 (bởi Gheorghe Eckstein):
Bởi vì $\max\{a,b,c\} \leq 3$ và $|abc| \leq 10$, ta chỉ cần xét các trường hợp khi $a, b, c \geq 0$ hoặc có đúng một trong ba số là âm. Đầu tiên, ta giả sử rằng a, b, c là không âm. Nếu $abc \geq 1$, thì ta có điều phải chứng minh, bởi vì

$$2(a+b+c) - abc \leq 2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} - 1 < 10.$$

Ngược lại, ta có thể giả sử rằng $a < 1$. Trong trường hợp này ta có

$$2(a+b+c) - abc \leq 2\left(a + 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) = 2a + 2\sqrt{18-2a^2} \leq 10.$$

Bây giờ, giả sử rằng chỉ có một số âm và giả sử $c < 0$. Suy ra, bài toán quy về chứng minh rằng với mọi x, y, z không âm có tổng bình phương bằng 9, ta có

$$4(x+y-z) + 2xyz \leq 20.$$

Nhưng ta có thể viết như là

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \geq 2xyz - 6z - 2.$$

Bởi vì

$$2xyz - 6z - 2 \leq x(y^2+z^2) - 6z - 2 = -z^3 + 3z - 2 = -(z-1)^2(z+2),$$

bất đẳng thức đúng.

Lời giải 2:
Hiển nhiên, ta có $|a|, |b|, |c| \leq 3$ và $|a+b+c|, |abc| \leq 3\sqrt{3}$. Ta cũng có thể giả sử rằng a, b, c khác không và $a \leq b \leq c$. Nếu $c < 0$ thì ta có

$$2(a+b+c) - abc < -abc \leq 3\sqrt{3} < 10.$$

Cũng vậy, nếu $a \leq b < 0 < c$ thì ta có

$$2(a+b+c) < 2c \leq 6 < 10 + abc$$

bởi vì $abc > 0$. Nếu $a < 0 < b \leq c$, sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta được $2b + 2c - a \leq 9$. Suy ra

$$2(a+b+c) = 2b + 2c - a + 3a \leq 9 + 3a$$

và chỉ còn phải chứng minh rằng $3a - 1 \leq abc$. Nhưng $a < 0$ và $2bc \leq 9 - a^2$, vậy chỉ cần chứng minh

$$\frac{9a - a^3}{2} \geq 3a - 1 \Longleftrightarrow (a+1)^2(a-2) \leq 0,$$

bất đẳng thức này đúng. Do đó, ta chỉ còn trường hợp $0 < a \leq b \leq c$. Trong trường hợp này $2b + 2c + a \leq 9$ và $2(a+b+c) \leq 9 + a$. Vậy, ta cần chứng minh $a \leq 1 + abc$. Bất dẳng thức này hiển nhiên đúng nếu $a < 1$ còn nếu $a > 1$ ta có $b, c > 1$ và bất đẳng thức vẫn đúng. Vậy, bài toán đã được giải xong.

94. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{b} - 1\right)\left(b + \frac{1}{c} - 1\right) + \left(b + \frac{1}{c} - 1\right)\left(c + \frac{1}{a} - 1\right) + \left(c + \frac{1}{a} - 1\right)\left(a + \frac{1}{b} - 1\right) \geq 3.$$

Lời giải 1:
Với các kí hiệu $x = a + \frac{1}{b} - 1, y = b + \frac{1}{c} - 1, z = c + \frac{1}{a} - 1$, bất đẳng thức trở thành

$$xy + yz + zx \geq 3.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $x = \max\{x, y, z\}$. Từ

$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)(z+1) &= abc + \frac{1}{abc} + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ &\geq 2 + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ &= 5 + x + y + z,\end{aligned}$$

ta có
$$xyz + xy + yz + zx \geq 4,$$
với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $abc = 1$. Bởi vì $y + z = \frac{1}{a} + b + \frac{(c-1)^2}{c} > 0$ ta phân biệt hai trường hợp a) $x > 0, yz \leq 0$; b) $x > 0, y > 0, z > 0$.
a) $x > 0, yz \leq 0$. Ta có $xyz \leq 0$ và từ $xyz + xy + zx \geq 4$ ta có $xy + yz + zx \geq 4 > 3$.
b) $x > 0, y > 0, z > 0$. Ta kí hiệu $xy + yz + zx = 3d^2$ với $d > 0$. Từ các bất đẳng thức trung bình, ta có
$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2},$$
từ đó ta suy ra rằng $xyz \leq d^3$. Dựa trên kết quả cơ bản này, từ bất đẳng thức $xyz + xy + yz + zx \geq 4$, ta được
$$d^3 + 3d^2 \geq 4, (d-1)(d+2)^2 \geq 0, d \geq 1,$$
vậy $xy + yz + zx \geq 3$. Với điều này bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Ta có dấu bằng xảy ra trong trường hợp $a = b = c = 1$.

Lời giải 2:
Đặt $u = x + 1, v = y + 1, w = z + 1$. Khi đó ta có
$$uvw = u + v + w + abc + \frac{1}{abc} \geq u + v + w + 2.$$
Bây giờ, xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2(u+v+w) - uvw$. Bởi vì $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ và $f(1) \leq 0$, ta có thể tìm được một số thực $r \geq 1$ sao cho $f(r) = 0$. Xét các số $m = \frac{u}{r}, n = \frac{v}{r}, p = \frac{w}{r}$. Chúng thỏa mãn $mnp = m + n + p + 2$, từ bài toán 49 ta suy ra rằng
$$mn + np + pm \geq 2(m + n + p) \Longrightarrow uv + vw + wu \geq 2r(u + v + w) \geq 2(u + v + w).$$
Nhưng bởi vì $u = x + 1, v = y + 1, w = z + 1$, từ điều này hệ thức cuối cùng tương đương với bất đẳng thức $xy + yz + zx \geq 3$, đây là bất đẳng thức mong muốn.

95. [Gabriel Dospinescu] Cho n là số nguyên lớn hơn 2. Tìm số thực m_n lớn nhất và số thực M_n nhỏ nhất sao cho với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ (với $x_n = x_0, x_{n+1} = x_1$), ta có
$$m_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + 2(n-1)x_i + x_{i+1}} \leq M_n.$$

Lời giải:
Ta sẽ chứng minh rằng $m_n = \frac{1}{2(n-1)}, M_n = \frac{1}{2}$. Đầu tiên, chúng ta thấy bất đẳng thức
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + 2(n-1)x_i + x_{i+1}} \geq \frac{1}{2(n-1)}$$

là tầm thường, bởi vì $x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}\le 2(n-1).\sum_{k=1}^{n}x_k$ với mọi i. Điều này chỉ ra rằng $m_n\ge \dfrac{1}{2(n-1)}$. Đặt $x_i=x^i$, biểu thức trở thành

$$\frac{1}{x+x^{n-1}+2(n-1)}+\frac{(n-2)x}{1+2(n-1)x+x^2}+\frac{x^{n-1}}{1+2(n-1)x^{n-1}+x^{n-2}}$$

và lấy giới hạn khi x tiến đến 0, ta được $m_n\le \dfrac{1}{2(n-1)}$ và suy ra $m_n=\dfrac{1}{2(n-1)}$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng $M_n\ge \dfrac{1}{2}$. Rõ ràng, ta chỉ cần chứng minh rằng với mọi $x_1,x_2,...,x_n>0$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}}\le\frac{1}{2}.$$

Nhưng ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}}&\le\sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{2\sqrt{x_{i-1}x_{i+1}}+2(n-1)x_i}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+\dfrac{\sqrt{x_{i-1}x_{i+1}}}{x_i}}.\end{aligned}$$

Đặt $\dfrac{\sqrt{x_{i-1}x_{i+1}}}{x_i}=a_i$, ta phải chứng minh rằng nếu $\prod_{i=1}^{n}a_i=1$ thì $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n-1+a_i}\le 1$. Nhưng bất đẳng thức này đã được chứng minh trong bài toán 84. Vậy $M_n\ge\dfrac{1}{2}$ và bởi vì cho $x_1=x_2=...=x_n$ ta có dấu bằng, ta suy ra $M_n=\dfrac{1}{2}$, điều này giải quyết bài toán.

96. [Vasile Cirtoaje] Nếu x,y,z là các số thực dương, thì

$$\frac{1}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y^2+yz+z^2}+\frac{1}{z^2+zx+x^2}\ge\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Xét đẳng thức

$$x^2+xy+y^2=(x+y+z)^2-(xy+yz+zx)-(x+y+z)z,$$

ta có

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{1-\dfrac{xy+yz+zx}{(x+y+z)^2}-\dfrac{z}{x+y+z}},$$

hoặc

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{1-(ab+bc+ca)-c},$$

với $a = \dfrac{x}{x+y+z}, b = \dfrac{y}{x+y+z}, c = \dfrac{x}{x+y+z}$. Bất đẳng thức có thể được viết lại như sau

$$\frac{1}{1-d-c}+\frac{1}{1-d-b}+\frac{1}{1-d-a} \geq 9,$$

với a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$ và $d = ab+bc+ca$. Sau một vài bước tính toán bất đẳng thức trở thành

$$9d^3-6d^2-3d+1+9abc \geq 0$$

hoặc

$$d(3d-1)^2+(1-4d+9abc) \geq 0.$$

đây là bất đẳng thức **Schur**.

97. [Vasile Cirtoaje] Với mọi $a, b, c, d > 0$, chứng minh rằng

$$2(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(d^3+1) \geq (1+abcd)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2).$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức **Huygens**

$$\prod(1+a^4) \geq (1+abcd)^4,$$

chú ý rằng ta chỉ cần chỉ ra

$$2^4\prod(a^3+1)^4 \geq \prod(1+a^4)(1+a^2)^4.$$

Hiển nhiên, ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^3+1)^4 \geq (a^4+1)(a^2+1)^4$$

với mọi số thực a. Nhưng

$$(a^2+1)^4 \leq (a+1)^2(a^3+1)^2$$

và ta chỉ còn phải chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
&2(a^3+1)^2 \geq (a+1)^2(a^4+1)\\
\Longleftrightarrow &2(a^2-a+1)^2 \geq a^4+1\\
\Longleftrightarrow &(a-1)^4 \geq 0,
\end{aligned}$$

điều này là hiển nhiên.

98. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, ta có

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4).$$

Vietnam TST, 1996

Lời giải:
Ta thay thế $a+b=2z, b+c=2x, c+a=2y$. bất đẳng thức trở thành $\sum(y+z-x)^4 \leq 28\sum x^4$. Bây giờ ta có một chuỗi đồng nhất thức sau

$$\begin{aligned}
\sum(y+z-x)^4 =&\sum\left(\sum x^2+2yz-2xy-2xz\right)^2\\
=&3\left(\sum x^2\right)^2+4\left(\sum x^2\right)\left(\sum(yz-xy-xz)\right)+4\sum(xy+xz-yz)^2\\
=&3\left(\sum x^2\right)^2-4\left(\sum xy\right)\left(\sum x^2\right)+16\sum x^2y^2-4\left(\sum xy\right)^2\\
=&4\left(\sum x^2\right)^2+16\sum x^2y^2-\left(\sum x\right)^4\\
\leq&28\sum x^4,
\end{aligned}$$

bởi vì $\left(\sum x^2\right)^2 \geq 3\sum x^4, \sum x^2y^2 \geq x^4$.

99. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$, thì

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

Bulgaria, 1997

Lời giải:
Đặt $x=a+b+c$ và $y=ab+bc+ca$. Dễ thấy rằng vế trái của bất đẳng thức là $\dfrac{x^2+4x+y+3}{x^2+2x+y+xy}$, trong khi vế phải là $\dfrac{12+4x+y}{9+4x+2y}$. Bây giờ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x^2+4x+y+3}{x^2+2x+y+xy}-1 \leq \frac{12+4x+y}{9+4x+2y}-1 \Longleftrightarrow \frac{2x+3-xy}{x^2+2x+y+xy} \leq \frac{3-y}{9+4x+2y}.$$

Với bất đẳng thức cuối cùng, chúng ta quy đồng mẫu số. Sau đó sử dụng các bất đẳng thức $x \geq 3, y \geq 3, x^2 \geq 3y$, ta có

$$\frac{5}{3}x^2y \geq 5x^2, \frac{x^2y}{3} \geq y^2, xy^2 \geq 9x, 5xy \geq 15x, xy \geq 3y \text{ và } x^2y \geq 27.$$

Cộng các bất đẳng thức này lại, ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

100. [Tran Nam Dung] Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c},$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$.

Vietnam, 2001

Lời giải 1: (bởi Trần Nam Dũng):
Đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{2}{b} = y, \frac{3}{c} = z$. Khi đó dễ kiểm tra điều kiện của bài toán trở thành $2xyz \geq 2x + 4y + 7z$. Và ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $x + y + z$. Nhưng

$$z(2xy - 7) \geq 2x + 4y \Longrightarrow \begin{cases} 2xy > 7 \\ z \geq \dfrac{2x + 4y}{2xy - 7} \end{cases}$$

Bây giờ, ta biến đổi biểu thức để sau khi áp dụng bất đẳng thức **AM-GM** tử số $2xy - 7$ cần triệt tiêu

$$\begin{aligned} x + y + z \geq & x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7} \\ = & x + \frac{11}{2x} + y - \frac{7}{2x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} \\ \geq & x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}. \end{aligned}$$

Nhưng, chứng minh trực tiếp được $2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \geq \dfrac{3 + \frac{7}{x}}{2}$ và do đó $x + y + z \geq \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x} \geq \frac{15}{2}$. Ta có dấu bằng với $x = 3, y = \frac{5}{2}, z = 2$. Vậy, câu trả lời cho bài toán ban đầu là $\frac{15}{2}$, đạt được với $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{3}{2}$.

Lời giải 2:
Ta sử dụng sự thay thế tương tự và quy bài toán về tìm giá trị nhỏ nhất của $x+y+z$ khi $2xyz \geq 2x+4y+7z$. Áp dụng bất đẳng thức **AM-GM** ta thấy rằng

$$x+y+z = \frac{1}{15}\left(\underbrace{\frac{5}{2}x+...+\frac{5}{2}x}_{6\text{ số}}+\underbrace{3y+...+3y}_{5\text{ số}}+\underbrace{\frac{15}{4}x+...+\frac{15}{4}z}_{4\text{ số}}\right) \geq (\frac{5x}{2})^{\frac{2}{5}}(3y)^{\frac{1}{3}}(\frac{15z}{4})^{\frac{4}{15}}.$$

Và cũng có

$$\begin{aligned}2x+4y+7z =& \frac{1}{15}\left(\underbrace{10x+...+10x}_{3\text{ số}}+\underbrace{12y+...+12y}_{5\text{ số}}+\underbrace{15x+...+15z}_{7\text{ số}}\right)\\ \geq& 10^{\frac{1}{5}}.12^{\frac{1}{3}}.15^{\frac{7}{15}}.x^{\frac{1}{5}}.y^{\frac{1}{3}}.z^{\frac{7}{15}}.\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là

$$(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geq \frac{225}{2}xyz.$$

Vì $2xyz \geq 2x+4y+7z$, ta sẽ có

$$(x+y+z)^2 \geq \frac{225}{4} \Longrightarrow x+y+z \geq \frac{15}{2},$$

dấu bằng xảy ra với $x=3, y=\frac{5}{2}, z=2$.

101. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng với mọi $x,y,z,a,b,c>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=3$, ta có

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3.$$

Lời giải:
Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

với mọi a,b,c,x,y,z. Bởi vì bất đẳng thức thuần nhất với x,y,z ta có thể giả sử rằng

$x+y+z=1$. Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** ta có

$$\frac{ax}{b+c}+\frac{by}{c+a}+\frac{cz}{a+b}+\sqrt{3(xy+yz+zx)} \le$$
$$\le \sqrt{\sum \left(\frac{a}{b+c}\right)^2}\sqrt{\sum x^2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\sum xy}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\sum xy}$$
$$\le \sqrt{\sum \left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{3}{2}}.\sqrt{\sum x^2+2\sum xy}$$
$$= \sqrt{\sum \left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{3}{2}}.$$

Vậy, ta còn phải chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{\sum \left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{3}{2}} \le \sum \frac{a}{b+c}$. Nhưng bất đẳng thức này tương đương với $\sum \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \ge \frac{3}{4}$, đây là bất đẳng thức tầm thường.

Chú ý

Một bất đẳng thức mạnh hơn sau đây:

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) \ge \sum \sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z),$$

có thể thu được bởi áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , như sau

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) =$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{y+z}{b+c}+\frac{z+x}{c+a}+\frac{x+y}{a+b}\right)-2(x+y+z)$$
$$\ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}\right)^2-2\left(x+y+z\right)$$
$$=\sum \sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z).$$

Một bài tập hay cho người đọc là: chứng minh rằng

$$\sum \sqrt{(x+y)(x+z)} \ge x+y+z+\sqrt{3(xy+yz+zx)}.$$

102. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(a+c-b)^2}{(a+c)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \ge \frac{3}{5}.$$

Japan, 1997

Lời giải 1:
Đặt $x = \dfrac{b+c}{a}, y = \dfrac{c+a}{b}, z = \dfrac{a+b}{c}$. Bất đẳng thức có thể được viết thành

$$\sum \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq \frac{3}{5}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** , ta có

$$\sum \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+3}$$

và chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+3} \geq \frac{3}{5} \Longleftrightarrow \left(\sum x\right)^2 - 15\sum x + 3\sum xy + 18 \geq 0.$$

Từ bất đẳng thức **Schur**, sau một vài bước tính toán, ta suy ra $\sum xy \geq 2\sum x$.
Vậy ta có

$$\left(\sum x\right)^2 - 15\sum x + 3\sum xy + 18 \geq \left(\sum x\right)^2 - 9\sum x + 18 \geq 0,$$

bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì $\sum x \geq 6$.

Lời giải 2:
Hiển nhiên, ta có thể đặt $a+b+c=2$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum \frac{4(1-a)^2}{2+2(1-a)^2} \geq \frac{3}{5} \Longleftrightarrow \sum \frac{1}{1+(1-a)^2} \leq \frac{27}{10}.$$

Nhưng với sự thay thế $1-a=x, 1-b=y, 1-c=z$, bất đẳng thức được suy ra từ bài toán 47.

103. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thì

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n - na_1a_2...a_n \geq (n-1)\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1} - a_n\right)^n,$$

trong đó a_n là số nhỏ nhất trong các số $a_1, a_2, ..., a_n$.

Lời giải:
Đặt $a_i - a_n = x_i \geq 0$ với $i \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$. Bây giờ, ta xem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n - n\prod_{i=1}^{n} a_i - (n-1)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n-1} - a_n\right)^n$$

như là một đa thức của $a = a_n$. Thực tế là

$$a^n + \sum_{i=1}^{n-1}(a+x_i)^n - na\prod_{i=1}^{n}(a+x_i) - (n-1)\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n-1}\right)^n.$$

Ta sẽ chứng minh rằng hệ số của a^k là không âm với mọi $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, bởi vì hiển nhiên là bậc của đa thức này nhiều nhất là $n-1$. Với $k = 0$, điều này suy ra từ tính lồi của hàm $f(x) = x^n$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^n \geq (n-1)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1}\right)^n.$$

Với $k > 0$, hệ số của a^k là

$$\binom{n}{k}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{n-k} - n\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_{n-k}\leq n-1} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{n-k}}.$$

Ta sẽ chứng minh đây là số không âm. Từ bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$\begin{aligned} n\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_{n-k}\leq n-1} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{n-k}} &\leq \\ &\leq \frac{n}{n-k}\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_{n-k}\leq n-1} x_{i_1}^{n-k}x_{i_2}^{n-k}...x_{i_{n-k}}^{n-k} \\ &= \frac{k}{n-1}\binom{n}{k}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{n-k}. \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{k}{n-1}\binom{n}{k}\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^{n-k} < \binom{n}{k}\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^{n-k}$. Điều này chỉ ra rằng mỗi hệ số của đa thức là không âm, vậy đa thức nhận giá trị không âm khi hạn chế trên tập những số không âm.

104. [Turkevici] Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z, t, ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2 + x^2z^2 + y^2t^2.$$

Kvant

Lời giải:
Hiển nhiên, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $xyzt = 1$, do đó bài toán được xét với giả thiết này.

Nếu a, b, c, d có tích bằng 1, thì

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \geq ab + bc + cd + da + ac + bd.$$

Giả sử d là só nhỏ nhất trong các số a, b, c, d và đặt $m = \sqrt[3]{abc}$. Ta sẽ chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 - (ab + bc + cd + da + ac + bd) \geq d^2 + 3m^2 + 2 - (3m^2 + 3md),$$

Bất đẳng thức này thực tế là

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq d(a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}).$$

Bởi vì $d \leq \sqrt[3]{abc}$, nên để chứng minh bất đẳng thức đầu tiên ta cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq \sqrt[3]{abc}(a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}).$$

Đặt $u = \dfrac{a}{\sqrt[3]{abc}}, v = \dfrac{b}{\sqrt[3]{abc}}, w = \dfrac{c}{\sqrt[3]{abc}}$. Sử dụng bài toán 74, ta có

$$u^2 + v^2 + w^2 + 3 \geq u + v + w + uv + vw + wu,$$

bất đẳng thức này chính xác là

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq \sqrt[3]{abc}(a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}).$$

Vậy, ta chỉ còn phải chứng minh rằng $d^2 + 2 \geq 3md \Longleftrightarrow d^2 + 2 \geq 3\sqrt[3]{d^2}$, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

105. Chứng minh rằng với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n$, bất đẳng thức sau đúng

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{ij}{i + j - 1} a_i a_j.$$

Lời giải:
Ta thấy rằng

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} i a_i . j a_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^{n} i a_i . j a_j . t^{i-1+j-1} \right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i . t^{i-1} \right)^2 dt.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** cho tích phân, ta có

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i . t^{i-1} \right)^2 dt \geq \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i . t^{i-1} \right) dt \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2,$$

điều này kết thúc chứng minh.

106. Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ là các số thực nằm giữa 1001 và 2002, thỏa mãn

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2,$$

thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + ... + \frac{a_n^3}{b_n} \leq \frac{17}{10}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).$$

TST Singapore

Lời giải:
Ý tưởng then chốt là $\frac{a_i}{b_i} \in [\frac{1}{2}, 2]$ với mọi i và với mọi $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, ta có bất đẳng thức $x^2 + 1 \leq \frac{5}{2}x$. Do đó, ta có

$$\frac{5}{2} . \frac{a_i}{b_i} \geq 1 + \frac{a_i^2}{b_i^2} \Longleftrightarrow \frac{5}{2} a_i b_i \geq a_i^2 + b_i^2$$

và cũng có

$$(1) \qquad \frac{5}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2) = 2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Bây giờ, ta thấy rằng $\frac{a_i^2}{b_i^2} = \frac{\frac{a_i^3}{b_i}}{a_i b_i}$ và bất đẳng thức $\frac{5}{2}.\frac{a_i}{b_i} \geq 1 + \frac{a_i^2}{b_i^2}$ cho ta $\frac{5}{2}a_i^2 \geq \frac{a_i^3}{b_i} + a_i b_i$ và cộng các bất đẳng thức lại, ta được

$$\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \qquad (2)$$

Sử dụng (1) và (2) ta có

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + ... + \frac{a_n^3}{b_n} \leq \frac{17}{10}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2),$$

đây là bất đẳng thức cần chứng minh.

107. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu] Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1, thì

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2.$$

Lời giải:
Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Ta tìm thấy dạng tương đương nếu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2) \geq 8(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \geq 8(x^2+y^2+z^2)^2,$$

với mọi số thực dương x, y, z. Viết $x^2+y^2 = 2c, y^2+z^2 = 2a, z^2+x^2 = 2b$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum \sqrt{\frac{abc}{b+c-a}} \geq \sum a.$$

Nhắc lại bất đẳng thức **Schur**

$$\sum a^4 + abc(a+b+c) \geq \sum a^3(b+c) \Longleftrightarrow abc(a+b+c) \geq \sum a^3(b+c-a).$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức **Holder,** ta có

$$\sum a^3(b+c-a) = \sum \frac{a^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}\right)^2}.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\sum \sqrt{\frac{abc}{b+c-a}} \geq \sum a$$

và bất đẳng thức được chứng minh.

108. [Vasile Cirtoaje] Nếu a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$, thì

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra bởi tổng các bất đẳng thức

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab},$$

$$\frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq \frac{1}{1+cd}.$$

Các bất đẳng thức này suy ra từ

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} - \frac{1}{1+ab} = \frac{ab(a^2+b^2) - a^2b^2 - 2ab + 1}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}$$
$$= \frac{ab(a-b)^2 + (ab-1)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)} \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra nếu $a = b = c = d = 1$.

109. [Vasile Cirtoaje] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải:
Ta có các đồng nhất thức sau

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} = \frac{ab(a-b+ac(a-c)}{(b+c)(b^2+c^2)}$$

$$\frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{b}{c+a} = \frac{bc(b-c)+ab(b-a)}{(c+a)(c^2+a^2)}$$
$$\frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} = \frac{ac(c-a)+bc(c-b)}{(b+a)(b^2+a^2)}.$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}\sum \frac{a^2}{b^2+c^2} - \sum \frac{a}{b+c}\\ &= \sum\left[\frac{ab(a-b)}{(b+c)(b^2+c^2)} - \frac{ab(a-b)}{(a+c)(a^2+c^2)}\right]\\ &= (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).\sum \frac{ab(a-b)^2}{(b+c)(c+a)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0.\end{aligned}$$

110. [Gabriel Dospinescu] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực và S là một tập con khác rỗng của $\{1, 2, ..., n\}$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i\in S} a_i\right)^2 \leq \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (a_i + ... + a_j)^2.$$

TST 2004, Romania

Lời giải 1:
Ki hiệu $s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ với $k = 1, ..., n$ và $s_{n+1} = 0$. Bây giờ định nghĩa

$$b_i = \begin{cases} 1 \text{ nếu } & i \in S \\ 0, \text{ nếu } & i \notin S \end{cases}$$

Sử dụng tổng **Abel** ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} a_i &= a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\\ &= s_1(b_1-b_2) + s_2(b_2-b_3) + ... + s_{n-1}(b_{n-1}-b_n) + s_nb_n + s_{n+1}(-b_1).\end{aligned}$$

Bây giờ, đặt $b_1 - b_2 = x_1, b_2 - b_3 = x_2, ..., b_{n-1} - b_n = x_{n-1}, b_n = x_n, x_{n+1} = -b_1$. Vậy ta có

$$\sum_{i\in S} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} x_i s_i$$

và $x_i \in \{-1, 0, 1\}$. Hiển nhiên, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. Mặt khác, sử dụng đồng nhất thức Lagrange ta có

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n}(a_i+...+a_j)^2 &= \sum_{i=1}^{n} s_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n}(s_j-s_i)^2\\ &= \sum_{1\le i<j\le n+1}(s_j-s_i)^2\\ &=(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}s_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n+1}s_i\right)^2.\end{aligned}$$

Vậy ta cần phải chứng minh rằng

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}s_i^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{n+1}s_ix_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n+1}s_i\right)^2.$$

Nhưng ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}s_ix_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n+1}s_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n+1}s_i^2(1+x_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n+1}s_is_j(x_ix_j+1).$$

Bây giờ, sử dụng hệ thức $2s_is_j \le s_i^2+s_j^2, 1+x_ix_j \ge 0$, ta có thể viết

$$\begin{aligned}&2\sum_{1\le i<j\le n+1}s_is_j(x_ix_j+1)\le\sum_{1\le i<j\le n+1}(s_i^2+s_j^2)(1+x_ix_j)=\\ &=n(s_1^2+...+s_{n+1}^2)+s_1^2x_1(x_2+x_3+...+x_n)+...+s_n^2x_n(x_1+x_2+...+x_{n-1})\\ &=-s_1^2x_1^2-...-s_n^2x_n^2+n(s_1^2+...+s_n^2).\end{aligned}$$

Vậy

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}s_ix_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n+1}s_i\right)^2\le\sum_{k=1}^{n+1}s_k^2(x_k^2+1)+\sum_{k=1}^{n+1}s_k^2(n-x_k^2)=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}s_k^2$$

và ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2 (bởi Andrei Negut):
Đầu tiên, ta chứng minh bổ đề
Bổ đề
Với mọi $a_1, a_2, ..., a_{2k+1} \in \mathbb{R}$ ta có bất đẳng thức

$$\left(\sum_{i=0}^{k}a_{2i+1}\right)^2\le\sum_{1\le i\le j\le 2k+1}(a_i+...+a_j)^2.$$

Chứng minh của bổ đề. Đặt $s_k = a_1 + ... + a_k$. Ta có

$$\sum_{i=0}^{k} a_{2i+1} = s_1 + s_3 - s_2 + ... + s_{2k+1} - s_{2k},$$

vậy vế trái trong bổ đề là

$$\sum_{i=1}^{2k+1} s_i^2 + 2 \sum_{0 \le i < j \le k} s_{2i+1} s_{2j+1} + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} s_{2i} s_{2j} - 2 \sum_{\substack{0 \le i \le k \\ 1 \le j \le k}} s_{2i+1} s_{2j}$$

và vế phải là

$$(2k+1) \sum_{i=1}^{2k+1} s_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le 2k+1} s_i s_j.$$

Do đó, ta cần chứng minh rằng

$$2k \sum_{i=1}^{2k+1} s_i^2 \ge 4 \sum_{0 \le i < j \le k} s_{2i+1} s_{2j+1} + 4 \sum_{1 \le i < j \le k} s_{2i} s_{2j}$$

và bất đẳng thức có được bởi cộng các bất đẳng thức

$$2 s_{2j+1} s_{2i+1} \le s_{2i+1}^2 + s_{2j+1}^2, 2 s_{2j} s_{2i} \le s_{2i}^2 + s_{2j}^2.$$

Bây giờ, ta quay lại lời giải của bài toán. Ta có thể biểu diễn S dưới dạng sau

$$S = \{a_{i_1}, a_{i_1+1}, ..., a_{i_1+k_1}, a_{i_2}, a_{i_2+1}, ..., a_{i_2+k_2}, ..., a_{i_r}, ..., a_{i_r+k_r}\}$$

với $i_j + k_j < i_{j+1} - 1$. Do đó, ta viết S như là một dãy, theo sau là một khoảng trống, theo sau là một dãy, theo sau là một khoảng trống, vân vân. Bây giờ ta đặt

$$s_1 = a_{i_1} + ... + a_{i_1+k_1}, s_2 = a_{i_1+k_1+1} + ... + a_{i_2-1}, ..., s_{2r-1} = a_{i_r} + ... + a_{i_r+k_r}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in S} a_i\right)^2 &= (s_1 + s_3 + ... + s_{2r-1})^2 \\ &\le \sum_{1 \le i \le j \le 2r-1} (s_i + ... + s_j)^2 \\ &\le \sum_{1 \le i \le j \le n} (a_i + ... + a_j)^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng, bởi vì các số hạng ở vế trái nằm trong số các số hạng ở vế phải.

Lời giải 3:
Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp. Với $n = 2$ và $n = 3$ bất đẳng thức dễ chứng minh. Giải sử bất đẳng thức đúng cho mọi $k < n$ và ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng cho n. Nếu $1 \notin S$ thì chúng ta chỉ áp dụng bước quy nạp cho các số $a_2, ..., a_n$, bởi vì vế phải không giảm. Bây giờ, giả sử $1 \in S$. Nếu $2 \in S$, thì ta áp dụng bước quy nạp với các số $a_1 + a_2, a_3, ..., a_n$. Do đó, ta có thể giả thiết rằng $2 \notin S$. Dễ thấy rằng $(a + b + c)^2 + c^2 \geq \dfrac{(a + b)^2}{2} \geq 2ab$ và suy ra ta có

$$(1) \qquad (a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 + (a_2 + a_3 + ... + a_{k-1})^2 \geq 2a_1a_k.$$

Cũng vậy, bước quy nạp cho $a_3, ..., a_n$ chỉ ra rằng

$$\left(\sum_{i\in S\setminus\{1\}} a_i\right)^2 \leq \sum_{3\leq i\leq j\leq n} (a_i + ... + a_j)^2.$$

Vậy chỉ cần chứng minh rằng

$$a_1^2 + 2a_1 \sum_{i\in S\setminus\{1\}} a_i \leq \sum_{i=1}^{n}(a_1 + ... + a_i)^2 + \sum_{i=2}^{n}(a_2 + ... + a_i)^2.$$

Nhưng bất đẳng thức này rõ ràng vì a_1^2 xuất hiện trong vế phải và bởi tổng các bất đẳng thức trong (1).

111. [Dung Tran Nam] Cho $x_1, x_2, ..., x_{2004}$ là các số thực trong đoạn $[-1, 1]$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2004}^3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $x_1 + x_2 ... + x_{2004}$.

Lời giải:
Ta đặt $a_i = x_i^3$ và hàm số $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Đầu tiên ta sẽ chứng minh những tính chất của f:
1. $f(x + y + 1) + f(-1) \geq f(x) + f(y)$ nếu $-1 < x, y < 0$.
2. f là lồi trên $[-1, 0]$ và lõm trên $[0, 1]$.
3. Nếu $x > 0$ và $y < 0$ và $x + y < 0$ thì $f(x) + f(y) \leq f(-1) + f(x + y + 1)$ và nếu $x + y > 0$ thì $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$.
Chứng minh các kết quả này dễ dàng. Thật vậy, với kết quả đầu tiên ta đặt $x = -a^3, y = -b^3$ và bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned}
&1 > a^3 + b^3 + (1 - a - b)^3 \\
\Longleftrightarrow &1 > (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 1 - 3(a + b) + 3(a + b)^2 - (a + b)^3 \\
\Longleftrightarrow &3(a + b)(1 - a)(1 - b) > 0,
\end{aligned}$$

bất đẳng thức này đúng. Kết quả thứ hai là hiển nhiên và kết quả thứ ba có thể dễ dàng suy ra như trong cách chứng minh của 1.
Từ lập luận trên ta suy ra rằng nếu $(t_1, t_2, ..., t_{2004}) = t$ là điểm mà hàm số

$$g : A = \left\{x \in [-1,1]^{2004} \middle| x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\right\} \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, ..., x_{2004}) = \sum_{k=1}^{2004} f(x_k)$$

đạt giá trị lớn nhất (giá trị lớn nhất tồn tại bời vì hàm số xác định trên một tập compact) khi đó ta có tất cả các thành phần dương của t phải bằng nhau và tất cả các thành phần âm bằng -1. Vậy giả sử ta có k thành phần bằng -1 và $2004-k$ thành phần bằng số a. Bởi vì $t_1 + t_2 + ... + t_{2004} = 0$ ta có $a = \dfrac{k}{2004-k}$ và giá trị của g tại điểm này bằng $(2004-k)\sqrt[3]{\dfrac{k}{2004-k}} - k$. Vậy ta phải tìm giá trị lớn nhất của $(2004-k)\sqrt[3]{\dfrac{k}{2004-k}} - k$, khi k trong tập $\{0, 1, ..., 2004\}$. Bằng cách dùng đạo hàm ta thấy rằng giá trị lớn nhất đạt được khi $k = 223$ và giá trị lớn nhất bằng $\sqrt[3]{223}.\sqrt[3]{1718^2} - 223$.

112. [Gabriel Dospinescu, Călin Popa] Chứng minh rằng nếu $n \geq 2$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực có tích bằng 1, thì

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - n \geq \frac{2n}{n-1}.\sqrt[n]{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_n - n).$$

Lời giải:
Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp. Với $n = 2$ bất đẳng thức là tầm thường. Bây giờ giả sử bất đẳng thức đúng với $n-1$ số, ta chứng minh bất đẳng thức đúng cho n số. Đâu tiên, dễ thấy rằng ta chỉ cần chứng minh cho $a_1, ..., a_2 > 0$ (ngược lại ta có thể thay thế $a_1, ..., a_n$ với $|a_1|, ..., |a_n|$, mà có tích bằng 1, khi đó vế phải tăng). Bây giờ, giả sử a_n là số lớn nhất giữa các số $a_1, a_2, ..., a_n$ và giả sử G là trung bình nhân của $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - n - \frac{2n}{n-1}.\sqrt[n]{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_n - n) \\ & \geq a_n^2 + (n-1)G^2 - n - \frac{2n}{n-1}.\sqrt[n]{n-1}\left(a_n + (n-1)G - n\right), \end{aligned}$$

bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2 - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1^2.a_2^2...a_{n-1}^2} \\ \geq & \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1.a_2...a_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Vì $\sqrt[n-1]{a_1.a_2...a_{n-1}} \leq 1$ và $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1.a_2...a_{n-1}} \geq 0$, nên để chứng minh bất đẳng thức trên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$(1) \qquad a_1^2 + ... + a_{n-1}^2 - (n-1)G^2 \geq \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}.G.\left(a_1 + ... + a_{n-1} - (n-1)G\right).$$

Bây giờ áp dụng giả thiết quy nap cho các số $\frac{a_1}{G}, ..., \frac{a_{n-1}}{G}$ có tích bằng 1 và ta suy ra rằng

$$\frac{a_1^2 + ... + a_{n-1}^2}{G^2} - n + 1 \geq \frac{2(n-1)}{n-2}.\sqrt[n-1]{n-2}\left(\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{G} - n + 1\right),$$

vậy để chứng minh bất đẳng thức (1) chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{2(n-1)}{n-2}.\sqrt[n-1]{n-2}\Big(a_1+...+a_{n-1}-(n-1)G\Big) \geq \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}\Big(a_1+...+a_{n-1}-(n-1)G\Big),$$

bất đẳng thức này tương đương với $1+\frac{1}{n(n-2)} \geq \frac{\sqrt[n]{n-1}}{\sqrt[n-1]{n-2}}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\left(1 + \frac{1}{n(n-2)}\right)^{n(n-1)} \geq \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^n},$$

bất đẳng thức trên đúng với $n > 4$ vì

$$\left(1 + \frac{1}{n(n-2)}\right)^{n(n-1)} > 2$$

và

$$\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^n} = \frac{1}{n-2}(1 + \frac{1}{n-2})(1 + \frac{1}{n-2})^{n-2} < \frac{e}{n-2}(1 + \frac{1}{n-2}) < 2.$$

Với $n = 3$ và $n = 4$ điều này dễ kiểm tra. Vậy ta đã chứng minh được rằng

$$(2) \qquad \begin{aligned} &a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - n - \frac{2n}{n-1}.\sqrt[n]{n-1}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n - n\right) \\ &\geq a_n^2 + (n-1)G^2 - n - \frac{2n}{n-1}.\sqrt[n]{n-1}\left(a_n + (n-1)G - n\right). \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{1}{G}$, khi đó vế phải của bất đẳng thức (2) tương đương với

$$x^{2(n-1)} + \frac{n-1}{x^2} - n - \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}\left(x^{n-1} + \frac{n-1}{x} - n\right).$$

Để kết thúc bước quy nạp ta chỉ cần chứng minh rằng

$$x^{2(n-1)} + \frac{n-1}{x^2} - n \geq \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}\left(x^{n-1} + \frac{n-1}{x} - n\right)$$

với $x \geq 1$. Xét hàm số

$$f(x) = x^{2(n-1)} + \frac{n-1}{x^2} - n - \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}\left(x^{n-1} + \frac{n-1}{x} - n\right).$$

Ta có

$$f'(x) = 2.\frac{x^n - 1}{x^2}.\left[\frac{(n-1)(x^n+1)}{x} - n\sqrt[n]{n-1}\right] \geq 0$$

bởi vì

$$x^{n-1} + \frac{1}{x} = x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)x} + ... + \frac{1}{(n-1)x} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)^{n-1}}}.$$

Vậy f là hàm tăng, do đó $f(x) \geq f(1) = 0$. Điều này chứng minh bất đẳng thức.

Lời người dịch: Cách chứng minh này chưa giải được bài toán, vì tác giả vẫn chưa chứng minh được bất đẳng thức (2). Bởi vì, vế phải của bất đẳng thức (1) không lớn hơn vế phải của bất đẳng thức (2) do $G := \sqrt[n-1]{a_1.a_2...a_{n-1}} \leq 1$.

113. [Vasile Cirtoaje] Nếu a, b, c là cá số thực dương, thì

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$$

Gazeta Matematiă

Lời giải 1:

Bằng cách đặt $x = \sqrt{\frac{b}{a}}, y = \sqrt{\frac{c}{b}}, z = \sqrt{\frac{a}{c}}$ bài toán quy về chứng minh rằng $xyz = 1$ suy ra

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 3.$$

Ta giả sử $x \leq y \leq z$, điều này suy ra $xy \leq 1$ và $z \geq 1$. Ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\right)^2 &\leq 2\left(\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}\right)\\ &=4\left[1+\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right]\\ &\leq 4\left[1+\frac{1-x^2y^2}{(1+xy)^2}\right]\\ &=\frac{8}{1+xy}=\frac{8z}{z+1}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}} \leq 2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}$$

và ta cần chứng minh

$$2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 3.$$

Bởi vì

$$\sqrt{\frac{2z}{z+1}} \leq \frac{2}{1+z}$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}+\frac{2}{1+z} \leq 3.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$1+3z-2\sqrt{2z(1+z)} \geq 0, (\sqrt{2z}-\sqrt{z+1})^2 \geq 0,$$

và ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2:
Hiển nhiên, bài toán yêu cầu chứng minh rằng nếu $xyz = 1$ thì

$$\sum\sqrt{\frac{2}{x+1}} \leq 3.$$

Ta có hai trường hợp. Trường hợp đầu là dễ khi $xy+yz+zx \geq x+y+z$. Trong trường hợp này chúng ta có thể áp dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz** để có

$$\sum\sqrt{\frac{2}{x+1}} \leq \sqrt{3\sum\frac{2}{x+1}}.$$

Nhưng

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{1}{x+1} \le \frac{3}{2}\\
\Longleftrightarrow &\sum 2(xy+x+y+1) \le 3(2+x+y+z+xy+yz+zx)\\
\Longleftrightarrow &x+y+z \le xy+yz+zx
\end{aligned}$$

và trong trường hợp này bất đẳng thức được chứng minh.
Trường hợp thứ hai khi $xy+yz+zx < x+y+z$. Suy ra

$$(x-1)(y-1)(z-1) = x+y+z-xy-yz-zx > 0,$$

do đó có chính xác hai trong các số x, y, z nhỏ hơn 1, giả sử là x và y. Vậy ta phải chứng minh rằng nếu x và y nhỏ hơn 1, thì

$$\sqrt{\frac{2}{x+1}} + \sqrt{\frac{2}{y+1}} + \sqrt{\frac{2xy}{xy+1}} \le 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**, ta có

$$\sqrt{\frac{2}{x+1}} + \sqrt{\frac{2}{y+1}} + \sqrt{\frac{2xy}{xy+1}} \ge 2\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}} + \sqrt{\frac{2xy}{xy+1}}$$

và ta chỉ cần chứng minh rằng số hạng cuối cùng nhiều nhất là 3. Điều này tương đương với

$$2.\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - 1}{1+\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}}} \le \frac{1-\frac{2xy}{xy+1}}{1+\sqrt{\frac{2xy}{xy+1}}}.$$

Bởi vì ta có $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \ge 1$, vế trái bất đẳng thức trên nhiều nhất là

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - 1 = \frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}.$$

Ta còn phải chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
&\frac{1-xy}{(x+1)(y+1)} \le \frac{1-xy}{(xy+1)\left(1+\sqrt{\frac{2xy}{xy+1}}\right)}\\
\Longleftrightarrow &xy+1+(xy+1)\sqrt{\frac{2xy}{xy+1}} \le xy+1+x+y\\
\Longleftrightarrow &x+y \ge \sqrt{2xy(xy+1)},
\end{aligned}$$

bất đẳng thức này suy ra từ $\sqrt{2xy(xy+1)} \le 2\sqrt{xy} \le x+y$. Bài toán đã giải xong.

114. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương x, y, z

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

Iran, 1996

Lời giải 1 (bởi Iurie Boreico)
Với sự thay thế $x+y=c, y+z=a, z+x=b$, sau một vài bước tính toán bất đẳng thức trở thành

$$\sum\left(\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}\right)(a-b)^2\geq 0.$$

Giả sử $a\geq b\geq c$. Nếu $2c^2\geq ab$, mỗi số hạng trong biểu thức ở trên là dương và ta có điều phải chứng minh. Vậy giả sử $2c^2<ab$. Đầu tiên, chúng ta chứng minh rằng $2b^2\geq ac, 2a^2\geq bc$. Giả sử $2b^2<ac$. Khi đó $(b+c)^2\leq 2(b^2+c^2)<a(b+c)$, do đó $b+c<a$, mâu thuẫn. Hiển nhiên, ta có thể viết bất đẳng thức như là

$$\left(\frac{2}{ac}-\frac{1}{b^2}\right)(a-c)^2+\left(\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2}\right)(b-c)^2\geq\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{ab}\right)(a-b)^2.$$

Chúng ta có thể nhìn thấy ngay rằng $(a-c)^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2$ là đúng và ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(b-c)^2\geq\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{ab}-\frac{2}{ac}\right)(a-b)^2.$$

Nhưng ta có $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{ab}-\frac{2}{ac}<\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2$ và vế phải của bất đẳng thức nhiều nhất là $\frac{(a-b)^2(b-c)^2}{b^2c^2}$. Cũng dễ thấy rằng

$$\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}>\frac{(a-b)^2}{b^2c^2},$$

điều này chỉ ra rằng về trái ít nhất bằng $\frac{(a-b)^2(b-c)^2}{b^2c^2}$ và chứng minh được hoàn thành.

Lời giải 2:
Vì bất đẳng thức là thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $xy+yz+zx=3$. Ta cũng có thể đặt $x+y+z=3a$. Từ $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$, ta có $a\geq 1$. Bây giờ ta viết

bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(3a-z)^2}+\frac{1}{(3a-y)^2}+\frac{1}{(3a-x)^2}\geq\frac{3}{4}\\
\Longleftrightarrow &4\left[(xy+3az)^2+(yz+3ax)^2+(zx+3ay)^2\right]\geq 3(9a-xyz)^2,\\
\Longleftrightarrow &4(27a^4-18a^2+3+4axyz)\geq(9a-xyz)^2,\\
\Longleftrightarrow &3(12a^2-1)(3a^2-4)+xyz(34a-xyz)\geq 0, \qquad (1)\\
\Longleftrightarrow &12(3a^2-1)^2+208a^2\geq(17a-xyz)^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ta có hai trường hợp.
i) Trường hợp $3a^2-4\geq 0$. Từ

$$34a-xyz=\frac{1}{9}[34(x+y+z)(xy+yz+zx)-9xyz]>0,$$

suy ra bất đẳng thức (1) đúng.
ii) Trường hợp $3a^2-4<0$. Từ bất đẳng thức **Schur**

$$(x+y+z)^3-4(x+y+z)(xy+yz+zx)+9xyz\geq 0,$$

suy ra $3a^3-4a+xyz\geq 0$. Vậy

$$\begin{aligned}
12(3a^2-1)^2+208a^2-(17a-xyz)^2&\geq 12(3a^2-1)^2+208a^2-a^2(3a^2+13)^2\\
&=3(4-11a^2+10a^4-3a^6)\\
&=3(1-a^2)^2(4-3a^2)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

115. Chứng minh rằng với mọi x,y trong đoạn $[0,1]$,

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geq(1+\sqrt{5})(1-xy).$$

Lời giải (bởi Faruk F. Abi-Khuzam và Roy Barbara - " A sharp inequality and the iradius conjecture"):
Cho hàm $F:[0,1]^2\to\mathbb{R}, F(x,y)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}-(1+\sqrt{5})(1-xy)$. F là hàm đối xứng với x và y và từ tính lồi của hàm $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ suy ra $F(x,0)\geq 0$ với mọi x. Bây giờ ta cố định y và xem F như là một hàm của x. Đạo hàm là

$$f'(x)=(1+\sqrt{5})y+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}}$$

và

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+\frac{(1-y)^2}{\sqrt{((1-x)^2+(1-y)^2)^3}}.$$

Vậy, f là hàm lồi và f' là hàm tăng. Bây giờ đặt

$$r = \sqrt{1 - \frac{6\sqrt{3}}{(1+\sqrt{5})^2}}, c = 1 + \sqrt{5}.$$

Trường hợp đầu tiên ta xét là $y \geq \frac{1}{4}$. Dễ thấy rằng trong trường hợp này $cy > \frac{1}{\sqrt{y^2 - 2y + 2}}$ (đạo hàm của hàm $y \mapsto y^2c^2(y^2 - 2y + 2) - 1$ là dương) và do đó $f'(0) > 0$. Bởi vì f' là hàm tăng, ta có $f'(x) > 0$ nên f là hàm tăng với $f(0) = F(0, y) = F(y, 0) \geq 0$. Vậy, trong trường hợp này bất đẳng thức được chứng minh.
Từ trường hợp 1 và tính đối xứng, ta chỉ còn phải chứng minh bất đẳng thức đúng trong các trường hợp $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], y \in [0, r]$ và $x \in \left[r, \frac{1}{4}\right], y \in \left[r, \frac{1}{4}\right]$.
Trong trường hợp đầu tiên ta có ngay

$$f'(x) \leq r(1 + \sqrt{5}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{1+(x-1)^2}}.$$

Vậy ta có $f'(\frac{1}{4}) < 0$, suy ra f là hàm giảm trên $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Bởi vì từ trường hợp đầu tiên đã xét, ta có $f(\frac{1}{4}) \geq 0$, suy ra $F(x, y) = f(x) \geq 0$ với mọi điểm (x, y) trong đó $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], y \in [0, r]$.
Bây giờ ta sẽ xét trường hợp quan trọng nhất, khi $x \in \left[r, \frac{1}{4}\right], y \in \left[r, \frac{1}{4}\right]$. Cho các điểm $O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1), M(1,y), N(x,1)$. Tam giác OMN có chu vi

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} \text{ và diện tích } \frac{1-xy}{2}.$$

Nhưng dễ chỉ ra rằng trong bất kì tam giác với chu vi P và diện tích S, ta có bất đẳng thức $S \leq \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$. Vậy ta có

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} \geq \sqrt{6\sqrt{3}}\sqrt{1-xy} \geq (1+\sqrt{5})(1-xy),$$

bất đẳng thức này suy ra từ hệ thức $xy \geq r^2$. Chứng minh được hoàn thành.

116. [Suranyi] Chứng minh rằng với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, bất đẳng thức sau đúng

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n) + na_1a_2...a_n \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_n^{n-1}).$$

Lời giải:
Một lần nữa, ta sẽ sử dụng quy nạp để chứng minh bất đẳng thức này, nhưng chứng minh của bước quy nạp thực sự không tầm thường. Thật vậy, giả sử bất đẳng thức đúng cho n số và chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng cho $n+1$ số.
Nhờ tính đối xứng và thuần nhất của bất đẳng thức, nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức dưới điều kiện $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{n+1}$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Ta phải chứng minh

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} + na_{n+1}^{n+1} + na_{n+1}.\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - (1+a_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n + a_{n+1}^n\right) \geq 0.$$

Nhưng từ giả thiết quy nạp ta có

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n) + na_1a_2...a_n \geq a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_n^{n-1}$$

và từ đó

$$na_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i \geq a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} - (n-1)a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i^n.$$

Sử dụng bất đẳng thức cuối cùng, ta chỉ còn phải chứng minh

$$\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) - a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) +$$
$$+ a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}\right) \geq 0.$$

Bây giờ chúng ta sẽ chia bất đẳng thức này thành

$$a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}\right) \geq 0$$

và

$$\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) - a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right).$$

Chúng ta chứng minh hai bất đẳng thức này. Bất đẳng thức đầu tiên là rất rõ ràng

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_{n+1} + a_{n+1}) + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}$$
$$\geq a_{n+1}^n + a_{n+1}^{n-1}.\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{n+1}) + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} = 0$$

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức thứ hai. Bất đẳng thức này có thể được viết lại là

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n} \geq a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right).$$

Bởi vì $n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n} - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \geq 0$ (sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev**) và $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n} \geq \frac{1}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right).$$

Nhưng bất đẳng thứ này đúng, vì $na_i^{n+1} + \dfrac{1}{n}a_i^{n-1} \geq a_i^n$ với mọi i. Vậy, bước quy nạp được chứng minh.

117. Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ có tích bằng 1,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.$$

Một dạng tổng quát của bất đẳng thức Turkevici

Lời giải:
Hiển nhiên, bất đẳng thức có thể được viết dưới dạng sau

$$n \geq -(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bởi quy nạp. Trường hợp $n = 2$ là tầm thường. Giả sử bất đẳng thức đúng cho $n-1$ và ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n. Đặt

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = -(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

và đặt $G = \sqrt[n-1]{x_2 x_3 ... x_n}$, khi ta đã chọn $x_1 = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Dễ thấy rằng bất đẳng thức $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(x_1, G, G, ..., G)$ tương đương với

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} x_k\right)^2 \geq 2x_1\left(\sum_{k=2}^{n} x_k - (n-1)G\right).$$

Hiển nhiên, ta có $x_1 \leq G$ và $\sum\limits_{k=2}^{n} x_k \geq (n-1)G$, vậy ta chỉ cần chứng minh rằng

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} x_k\right)^2 \geq 2G\left(\sum_{k=2}^{n} x_k - (n-1)G\right).$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này đúng cho mọi $x_2, ..., x_n > 0$. Bởi vì bất đẳng thức là thuần nhất, nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $G = 1$. Trong trường hợp này, từ bước quy nạp ta có

$$(n-2)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 + n - 1 \geq \left(\sum_{k=2}^{n} x_k\right)^2$$

và ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\sum_{k=2}^{n} x_k^2 + n - 1 \geq \sum_{k=2}^{n} 2x_k \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n}(x_k - 1)^2 \geq 0,$$

điều này hiển nhiên đúng.

Vậy, ta đã chứng minh được rằng $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(x_1, G, G, ..., G)$. Bây giờ, để hoàn thành bước quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng $f(x_1, G, G, ..., G) \leq n$. Bởi vì, khẳng định cuối cùng quy về chứng minh rằng

$$(n-1)\left((n-1)G^2 + \frac{1}{G^{2(n-1)}}\right) + n \geq \left((n-1)G + \frac{1}{G^{n-1}}\right)^2$$

bất đẳng thức này dẫn đến

$$\frac{n-2}{G^{2n-2}} + n \geq \frac{2n-2}{G^{n-2}}$$

và đây là một hệ quả trực tiếp của bât đẳng thức **AM-GM** .

118. [Gabriel Dospinescu] Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_1 a_2 ... a_2}{1 - (n-1)a_i}}$$

với $a_1, a_2, ..., a_n < \dfrac{1}{n-1}$ có tổng bằng 1 và $n > 2$ là một số nguyên.

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{1}{\sqrt{n^{n-3}}}$. Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức **Suranyi**, ta thấy rằng

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + na_1a_2...a_n \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \Rightarrow na_1a_2...a_n \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\left(1-(n-1)a_i\right).$$

Bây giờ, ta nhận thấy

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{n-1}\left(1-(n-1)a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\sqrt[3]{a_k^{n-1}}\right)^3}{\left(\dfrac{1}{1-(n-1)a_k}\right)^2}$$

và do đó, bởi áp dụng trực tiếp bất đẳng thức **Holder**, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{n-1}\left(1-(n-1)a_k\right) \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{n-1}{3}}\right)^3}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{1}{1-(n-1)a_k}}\right)^2}.$$

Nhưng với $n > 3$, ta có thể áp dụng bất đẳng thức **Jensen** để suy ra rằng

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{n-1}{3}}}{n} \geq \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^{\frac{n-1}{3}} = \frac{1}{n^{\frac{n-1}{3}}}.$$

Vậy, kết hợp các bất đẳng thức, ta chứng minh được bất đẳng thức với $n > 3$. Với $n = 3$ bất đẳng thức quy về chứng minh rằng

$$\sum \sqrt{\frac{abc}{b+c-a}} \geq \sqrt{a},$$

bất đẳng thức này đã được chứng minh trong lời giải của bài toán 107.

119. [Vasile Cirtoaje] Cho $a_1, a_2, ..., a_n < 1$ là các số thực không âm thỏa mãn

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{1-a_1^2} + \frac{a_2}{1-a_2^2} + ... + \frac{a_n}{1-a_n^2} \geq \frac{na}{1-a^2}.$$

Lời giải:
Ta chứng minh bằng quy nạp. Rõ ràng, bất đẳng thức là tầm thường với $n = 1$. Bây giờ ta giả sử rằng bất đẳng thức đúng cho $n = k-1, k \geq 2$ và sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{1-a_1^2} + \frac{a_2}{1-a_2^2} + ... + \frac{a_k}{1-a_k^2} \geq \frac{ka}{1-a^2},$$

với

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2}{k}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Không mất tổng quát ta giả sử rằng $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k$, do đó $a \geq a_k$. Đặt

$$x = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{k-1}^2}{k-1}} = \sqrt{\frac{ka^2 - a_k^2}{k-1}},$$

từ $a \geq a_k$ suy ra rằng $x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy, bởi giả thiết quy nạp, ta có

$$\frac{a_1}{1-a_1^2} + \frac{a_2}{1-a_2^2} + ... + \frac{a_{k-1}}{1-a_{k-1}^2} \geq \frac{(k-1)x}{1-x^2},$$

và ta còn phải chỉ ra rằng

$$\frac{a_k}{1-a_k^2} + \frac{(k-1)x}{1-x^2} \geq \frac{ka}{1-a^2}.$$

Từ

$$x^2 - a^2 = \frac{ka^2 - a_k^2}{k-1} - a^2 = \frac{a^2 - a_k^2}{k-1},$$

ta được

$$(k-1)(x-a) = \frac{(a-a_k)(a+a_k)}{x+a}$$

và

$$\begin{aligned}
&\frac{a_k}{1-a_k^2} + \frac{(k-1)x}{1-x^2} - \frac{ka}{1-a^2} \\
=&\left(\frac{a_k}{1-a_k^2} - \frac{a}{1-a^2}\right) + (k-1)\left(\frac{x}{1-x^2} - \frac{a}{1-a^2}\right) \\
=&\frac{-(a-a_k)(1+aa_k)}{(1-a_k^2)(1-a^2)} + \frac{(k-1)(x-a)(1+ax)}{(1-x^2)(1-a^2)} \\
=&\frac{a-a_k}{1-a^2}\left[\frac{-(1+aa_k)}{1-a_k^2} + \frac{(a+a_k)(1+ax)}{(1-x^2)(x+a)}\right] \\
=&\frac{(a-a_k)(x-a_k)[-1+x^2+a_k^2+xa_k+a(x+a_k)+a^2+axa_k(x+a_k)+a^2xa_k]}{(1-a^2)(1-a_k^2)(1-x^2)(x+a)}.
\end{aligned}$$

Từ $x^2 - a_k^2 = \dfrac{ka^2 - a_k^2}{k-1} - a_k^2 = \dfrac{k(a-a_k)(a+a_k)}{(k-1)}$, suy ra

$$(a-a_k)(x-a_k) = \frac{k(a-a_k)^2(a+a_k)}{(k-1)(x+a_k)} \geq 0,$$

và do đó ta phải chỉ ra được rằng

$$x^2 + a_k^2 + xa_k + a(x+a_k) + a^2 + axa_k(x+a_k) + a^2xa_k \geq 1.$$

Để chỉ ra bất đẳng thức này, ta cần chú ý rằng

$$x^2 + a_k^2 = \frac{ka^2 + (k-2)a_k^2}{k-1} \geq \frac{ka^2}{k-1}$$

và

$$x + a_k \geq \sqrt{x^2 + a_k^2} \geq a\sqrt{\frac{k}{k-1}}.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} & x^2 + a_k^2 + xa_k + a(x+a_k) + a^2 + axa_k(x+a_k) + a^2xa_k \\ \geq & (x^2 + a_k^2) + a(x+a_k) + a^2 \\ \geq & \left(\frac{k}{k-1} + \sqrt{\frac{k}{k-1}} + 1\right)a^2 > 3a^2 = 1, \end{aligned}$$

và chứng minh được hoàn thành. Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chú ý

1. Từ lời giải cuối cùng, ta có thể dễ nhìn thấy rằng bất đẳng thức vẫn đúng cho điều kiện rộng hơn

$$a \geq \sqrt{1 + \sqrt{\frac{n}{n-1}} + \frac{n}{n-1}}.$$

Đây là miền rộng nhất cho a, bởi vì cho $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = x$ và $a_n = 0$ (khi đó $a = x\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$), từ bất đẳng thức đã cho ta được $a \geq \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} + \dfrac{n}{n-1}}}$.

2. Trường hợp đặc biệt $n = 3$ và $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là một bài toán từ Crux 2003.

120. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4.$$

Chứng minh rằng

$$abcxyz < \frac{1}{36}.$$

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có

$$\begin{aligned}
&4(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)\\
=&[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)][(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\\
=&20-(a+b+c)^2(x^2+y^2+z^2)-(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2\\
\leq&20-2\sqrt{(a+b+c)^2(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2}=4,
\end{aligned}$$

do đó

$$(ab+bc+ca)(xy+yz+zx) \leq 1. \tag{1}$$

Bởi nhân các bất đẳng thức đã biết

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c), \quad (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z),$$

ta được

$$(ab+bc+ca)^2(xy+yz+zx)^2 \geq 9abcxyz(a+b+c)(x+y+z),$$

hoặc

$$(ab+bc+ca)(xy+yz+zx) \geq 36abcxyz. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta kết luận rằng

$$1 \geq (ab+bc+ca)(xy+yz+zx) \geq 36abcxyz,$$

do đó $1 \geq 36abcxyz$.

Để có $1 = 36abcxyz$, các đẳng thức $(ab+bc+ca)^2 = 36abc(a+b+c)$ và $(xy+yz+zx)^2 = 36xyz(x+y+z)$ là cần. Nhưng từ các điều kiện này suy ra $a=b=c$ và $x=y=z$, điều này mâu thuẫn với

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4.$$

Vậy, suy ra $1 > 36abcxyz$.

121. [Gabriel Dospinescu] Cho $n > 2$, tìm giá nhỏ nhất của hằng số k_n, sao cho nếu $x_1, x_2, ..., x_2 > 0$ có tích bằng 1, thì

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_n}} \leq n-1.$$

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh rằng $k_n = \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$. Lấy $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$, ta được $k_n \geq \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$. Vậy, ta còn phải chỉ ra rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2n-1}{(n-1)^2} x_k}} \leq n-1$$

nếu $x_1.x_2...x_n = 1$. Giả sử bất đẳng thức này không đúng cho hệ n số với tích bằng 1, $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ nào đó. Vậy, ta có thể tìm được số $M > n-1$ và các số $a_i > 0$ mà có tổng bằng 1, sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2n-1}{(n-1)^2} x_k}} = Ma_k.$$

Vậy $a_k < \dfrac{1}{n-1}$ và ta có

$$1 = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{(n-1)^2}{2n-1} \left(\frac{1}{M^2 a_k^2} - 1 \right) \right] \Longrightarrow \left(\frac{2n-1}{(n-1)^2} \right)^n < \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(n-1)^2 a_k^2} - 1 \right).$$

Bây giờ, kí hiệu $1 - (n-1)a_k = b_k > 0$ và để ý rằng $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 1$. Và bất đẳng thức trên trở thành

$$(n-1)^{2n} \prod_{k=1}^{n} b_k . \prod_{k=1}^{n} (2 - b_k) > (2n-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (1 - b_k) \right)^2.$$

Bởi vì từ bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$\prod_{k=1}^{n} (2 - b_k) \leq \left(\frac{2n-1}{n} \right)^n,$$

từ giả thiết dẫn tới

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - b_k)^2 < \frac{(n-1)^{2n}}{n^n} b_1 b_2 ... b_n.$$

Vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng với bất kỳ các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$, bất đẳng thức

$$\prod_{k=1}^{n} (a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_{k+1} + ... + a_n)^2 \geq \frac{(n-1)^{2n}}{n^n} a_1 a_2 ... a_n (a_1 + a_2 + ... + a_n)^n$$

đúng.
Bất đẳng thức mạnh hơn này sẽ được chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 3$, bất đẳng thức suy ra từ sự kiện là

$$\frac{\left(\prod(a+b)\right)^2}{abc} \geq \frac{\left(\frac{8}{9}.\sum a\right).\left(\sum ab\right)^2}{abc} \geq \frac{64}{27}\left(\sum a\right)^3.$$

Giả sử bất đẳng thức đúng cho hệ gồm n số. Cho $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ là các số thực dương. Bởi vì bất dẳng thức là đối xứng và thuần nhất, ta có thể giả thiết rằng $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n+1}$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Áp dụng giả thiết quy nạp ta có bất đẳng thức

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^2 \geq \frac{(n-1)^{2n}}{n^n}a_1.a_2...a_n.$$

Để chứng minh bước quy nạp, ta phải chứng minh

$$\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}+1-a_i)^2 \geq \frac{n^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}}a_1a_2...a_na_{n+1}(1+a_{n+1})^{n+1}.$$

Vậy, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_{n+1}}{1-a_i}\right)^2 \geq \frac{n^{3n+2}}{(n-1)^{2n}.(n+1)^{n+1}}a_{n+1}(1+a_{n+1})^{n+1}.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức **Huygens** và bất đẳng thức **AM-GM**, ta được

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_{n+1}}{1-a_i}\right)^2 \geq \left(1+\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}}\right)^{2n} \geq \left(1+\frac{na_{n+1}}{n-1}\right)^{2n}$$

và do đó còn lại bất đẳng thức

$$\left(1+\frac{na_{n+1}}{n-1}\right)^{2n} \geq \frac{n^{3n+2}}{(n-1)^{2n}.(n+1)^{n+1}}a_{n+1}(1+a_{n+1})^{n+1}$$

nếu $a_{n+1} \geq \max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \geq \frac{1}{n}$. Vậy ta có thể đặt $\frac{n(1+a_{n+1})}{n+1} = 1 + x$, với $x \geq 0$. Bất đẳng thức trở thành

$$\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right)^{2n} \geq \frac{1+(n+1)x}{(x+1)^{n-1}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli**, ta được

$$\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right)^{2n} \geq \frac{3x+1}{x+1}.$$

ngoài ra $(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x$ và vì vậy chỉ cần chứng minh

$$\frac{3x+1}{x+1} \geq \frac{1+(n+1)x}{1+(n-1)x},$$

bất đẳng thức này là tầm thường.
Vậy, ta gặp mâu thuẫn khi giả sử bất đẳng thức không đúng cho hệ n số nào đó có tích bằng 1, điều này chỉ ra rằng thực tế bất đẳng thức đúng cho $k_n = \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$ và đây là giá trị đã yêu cầu của bài toán.
Chú ý.
Với $n=3$, ta tìm thấy một bât đẳng thức mạnh hơn một bài toán được đưa ra trong Olympic Toán học Trung Quốc năm 2003. Cũng vậy, trường hợp $n=3$ là bài toán được đề nghị bởi Vasile Cărtoaje trong Gazeta Matematiă, Seria A.

122. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Cho $n>2$, tìm giá trị lớn nhất của hằng số k_n, sao cho với bất kỳ $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 = 1$, chúng ta có bất đẳng thức

$$(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) \geq k_n x_1 x_2 ... x_n.$$

Lời giải:
Chúng ta sẽ chứng minh rằng hằng số ở đây là $(\sqrt{n}-1)^n$. Thật vậy, đặt $a_i = x_i^2$. Ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\sqrt{a_i})}{\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}}$$

khi $a_1+a_2+...+a_n = 1$. Ta nhận thấy rằng chứng minh giá trị nhỏ nhất bằng $(\sqrt{n}-1)^n$ quy về chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq (\sqrt{n}-1)^n.\prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}.\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{a_i}).$$

Nhưng từ kết quả chứng minh trong lời giải của bải toán 121, ta tìm thấy

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^2 \geq \left(\frac{(n-1)^2}{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Vậy, chỉ cần chứng minh

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{a_i}) \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Nhưng đây là một bất đẳng thức dễ, bởi vì từ bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{a_i}) \geq \left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

bất đẳng thức cuối cùng là một hệ quả đơn giản của bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz.**
Chú ý.
Trường hợp $n = 4$ đã được đề nghị bởi Vasile Cârtoaje trong Gazeta Matematiă Annual Contest, 2001.

Từ điển thuật ngữ

1. **Công thức tổng Abel**
   Nếu $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ là các số thực hoặc số phức, và

$$S_i = a_1 + a_2 + ... + a_i, i = 1, 2, ..., n,$$

   thì

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i - b_{i+1}) + S_n b_n.$$

2. **Bất đẳng thức AM-GM (Trung bình cộng-Trung bình nhân)**
   Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm, thì

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}},$$

   dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Bất đẳng thức này là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức trung bình luỹ thừa.

3. **Bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình điều hoà (AM-HM)**
   Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương, thì

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}}$$

   dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Bất đẳng thức này là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức trung bình luỹ thừa.

4. **Bất đẳng thức Bernoulli**
   Với mọi số thực $x > -1$ và $a > 1$ ta có $(1 + x)^a \geq 1 + ax$.

5. **Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz**
   Với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2,$$

   dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu a_i và b_i cùng tỉ lệ, $i = 1, 2, ..., n$.

6. **Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho tích phân**
Nếu a, b là các số thực, $a < b$, và $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ là các hàm khả tích thì

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

7. **Bất đẳng thức Chebyshev**
Nếu $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là các số thực, thì
1) Nếu $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ thì $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$;
2) Nếu $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ thì $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \le \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$;

8. **Bất đẳng thức Chebyshev cho tích phân**
Nếu a, b là các số thực, $a < b$, và $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ là các hàm khả tích và cùng đơn điệu, thì

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx . \int_a^b g(x)dx$$

và nếu một hàm là tăng, trong khi đó hàm khác giảm thì bất đẳng thức ngược lại đúng.

9. **Hàm lồi**
Một hàm số nhận giá trị thực trên một đoạn số thực I là lồi nếu, với mọi $x, y \in I$ và với mọi số thực không âm α, β có tổng bằng 1,

$$f(\alpha x + \beta y) \le \alpha f(x) + \beta f(y).$$

10. **Tính lồi**
Hàm $f(x)$ là lõm lên (xuống) trên $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nếu $f(x)$ nằm dưới (trên) đường nối $(a_1, f(a_1))$ và $(b_1, f(b_1))$ với mọi

$$a \le a_1 < x < b_1 \le b.$$

Hàm $g(x)$ là lõm lên (xuống) trên mặt phẳng Eculid nếu nó lõm lên (xuống) trên mỗi đường thẳng trong mặt phẳng, ở đây, một cách tự nhiên, ta đồng nhất đường thẳng với $\mathbb{R}$.
Hàm số lõm lên và lõm xuống lần lượt được gọi là lồi và lõm.
Nếu hàm f lõm lên trên môt đoạn $[a, b]$ và $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là các số không âm có tổng bằng 1, thì

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) \ge f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)$$

với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ trong đoạn $[a, b]$. Nếu hàm lõm xuống thì bất đẳng thức bị đảo ngược lại. Đây là bất đẳng thức **Jensen**.

11. **Tổng tuần hoàn**
 Giải sử n là một số nguyên dương. Cho f là một hàm n biến, định nghĩa tổng tuần hoàn của các biến $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là

$$\sum_{cyc} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \\ + f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1) + \\ + f(x_3, x_4, ..., x_n, x_1, x_2) + \\ + ... + f(x_n, x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

12. **Bất đẳng thức Holder**
 Nếu r, s là các số thực dương sao cho $\frac{1}{r}+\frac{1}{s} = 1$, thì với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \leq \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

13. **Bất đẳng thức Huygens**
 Nếu $p_1, p_2, ..., p_n, a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ là các số thực dương với $p_1+p_2+...+p_n = 1$, thì

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p_i} \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} + \prod_{i=1}^{n} b_i^{p_i}.$$

14. **Bất đẳng thức Mac Laurin**
 Với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$, thì

$$S_1 \geq S_2 \geq ... \geq S_n,$$

 với

$$S_k = \sqrt[k]{\frac{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} x_{i_1}.x_{i_2}.....x_{i_k}}{\binom{n}{k}}}.$$

15. **Bất đẳng thức Minkowski**
 Với mọi số thực $r \geq 1$ và mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

16. **Bất đẳng thức trung bình luỹ thừa**
Với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng 1, và với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$, ta định nghĩa $M_r = (a_1x_1^r + a_2x_2^r + ... + a_nx_n^r)^{\frac{1}{r}}$ nếu r là một số thực khác không và $M_0 = x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}, M_\infty = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, M_{-\infty} = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Khi đó với mọi số thực $s \le t$ ta có $M_{-\infty} \le M_s \le M_t \le M_\infty$.

17. **Bất đẳng thức căn trung bình bình phương**
Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm, thì

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

18. **Bất đẳng thức Schur** Với mọi số thực dương x, y, z và với mọi $r > 0$

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \ge 0.$$

Trường hợp phổ biến nhất là $r = 1$, khi đó bất đẳng thức có các dạng tương đương sau:
1) $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$;
2) $xyz \ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$;
3) nếu $x + y + z = 1$ thì $xy + yz + zx \le \dfrac{1+9xyz}{4}$.

19. **Bất đẳng thức Suranyi**
Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$,

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k^n + n\prod_{k=1}^{n} a_k \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{n-1}\right).$$

20. **Bất đẳng thức Turkevici**
Với mọi số thực dương x, y, z, t,

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \ge x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2 + x^2z^2 + y^2t^2.$$

21. **Bất đẳng thức AM-GM có trọng số**
Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, nếu $w_1, w_2, ..., w_n$ là những số thực không âm (trọng số) có tổng bằng 1, thì

$$w_1a_1 + w_2a_2 + ... + w_na_n \ge a_1^{w_1}a_2^{w_2}...a_n^{w_n},$$

dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Tài liệu tham khảo

[1] Andreescu, T.; Feng, Z., *101 Problems in Algebra From the Training of the USA IMO Team,* Australian Mathematics Trust, 2001.

[2] Andreescu, T.; Feng, Z., *USA and International Mathematical Olympiads 2000, 2001,2002,2003,* MAA.

[3] Andreescu, T.; Feng, Z., *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from around the World, 1998-1999, 1999-2000,* MAA.

[4] Andreescu, T.; Kedlaya, K., *Mathematical Contests 1995-1996,1996-1997,1997-1998: Olympiad Problems from around the World, with Solutions,* AMC.

[5] Andreescu, T.; Enescu, B., *Mathematical Olympiad Treasures,* Birkhäuser, 2003.

[6] Andreescu, T.; Gelca, R. *Mathematical Olympiad Challenges,* Birkhäuser, 2000.

[7] Andreescu, T.; Andrica, D., *360 Problems for Mathematical Contest,* GIL Publishing House, 2002.

[8] Becheanu, M., Enescu, B., *Inegalitati elementare...si mai putin elementare,* GIL Publishing House, 2002.

[9] Beckenbach, E., Bellman, R. *Inequalities,* Springer Verlag, Berlin, 1961.

[10] Brimbe, M.O., *Inegalitati idei si metode,* GIL Publishing House, 2003.

[11] Engel, A., *Problem-Solving Strategies,* Problem Books in Methematics, Springer, 1998.

[12] G.H. Littlewood, J.E. Polya, G., *Inequalities,* Cambridge University Press, 1967

[13] Klamkin, M., *International Mathematical Olympiads, 1978-1985,* New Mathematical Library, Vol. 31, MAA, 1986.

[14] Larson, L. C., *Problem-Solving Through Problems,* Springer-Verlag, 1983.

[15] Lascu, M., *Inegalitati,* GIL Publishing House, 1994.

[16] Liu, A., *Hungarian Problem Book III,* New Mathematical Library, Vol. 42, MAA, 2001.

[17] Lozansky, E.; Rousseau, C., *Winning Solutions,* Springer, 1996.

[18] Mitrinovic, D.S., *Analytic inequalities,* Springer Verlag, 1970.

[19] Panaitopol, L., Băndilă, V., Lascu, M., *Inegalitati,* GIL Publishing House, 1995.

[20] Savchev, S.; Andreescu, T., *Mathematical Miniatures,* Anneli Lax New Mathematical Library, Vol. 43, MAA.
www.mathlinks.ro-Powered by www.gil.ro