Bất Đẳng Thức Karamata và Một Số Ứng Dụng

Cao Minh Quang

THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long

1. Lời giới thiệu

Jovan Karamata sinh ngày 1 tháng 2 năm 1902 tại Zagreb, Serbia. Bắt đầu học ở khoa cơ khí từ năm 1920, nhưng đến năm 1922, ông chuyển đến khoa toán để học. Tốt nghiệp năm 1925, ngay lập tức Karamata được nhận làm trợ giảng cho giáo sư Mihailo Petrovic. Ông nhận được học vị tiến sĩ năm 1926, trở thành giáo sư Đại học Belgrade vào năm 1950. Năm 1951 Karamata rời Belgrade, đến giảng dạy tại Đại học Geneva. Ông sống và làm việc ở đây đến cuối đời. Karamata mất ngày 14 tháng 8 năm 1967.

Bất đẳng thức Karamata là một dạng tổng quát của bất đẳng thức Jensen.

2. Bất đẳng thức Karamata

Trước hết, ta sẽ định nghĩa các bộ trội.

2.1. Định nghĩa.

Nếu $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n, y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n, x_1 \ge y_1$, $x_1 + x_2 \ge y_1 + y_2$, $..., x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} \ge y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}$ và $x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$ thì ta nói bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ trội hơn bộ $(y_1, y_2, ..., y_n)$ và ta kí hiệu là $(x_1, x_2, ..., x_n) \succ (y_1, y_2, ..., y_n)$ hay $(y_1, y_2, ..., y_n) \prec (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Hiển nhiên, nếu $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$ thì $(x_1, x_2, ..., x_n) \succ (x, x, ..., x)$, trong đó $x = \dfrac{x_1 + x_2 + .. + x_n}{n}$.

2.2. Bất đẳng thức Karamata

Nếu hàm số $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $I = [a, b]$ và $(x_1, x_2, ..., x_n) \succ (y_1, y_2, ..., y_n)$ với mọi $x_i, y_i \in I$ thì

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \ge f(y_1) + f(y_2) + ... + f(y_n).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = y_i, i = 1, 2, ..., n$.

Ta cũng có phát biểu tương tự đối với hàm số lõm bằng cách đổi chiều dấu bất đẳng thức.

Chứng minh. Vì $f(x)$ là hàm lồi nên $f(x) - f(y) \ge (x - y).f'(y), \forall x, y \in I$. Thật vậy:

- Nếu $x \ge y$ thì $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\alpha) \ge f'(y), \alpha \in (y, x)$.
- Nếu $x \le y$ thì $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\beta) \le f'(y), \beta \in (x, y)$.

Từ đó suy ra $f(x_i) - f(y_i) \ge (x_i - y_i).f'(y_i), \forall x_i, y_i \in I, i = 1, 2, ..., n$.

Chú ý rằng $f'(y_i) \ge f'(y_{i+1}), x_1 + x_2 + ... + x_i \ge y_1 + y_2 + ... + y_i, i = 1, 2, ..., n-1$, sử dụng khai triển Abel, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(y_i)] \ge \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i).f'(y_i) = (x_1 - y_1)f'(y_1) + (x_2 - y_2)f'(y_2) + ... + (x_n - y_n)f'(y_n)$$

$$= (x_1 - y_1)[f'(y_1) - f'(y_2)] + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)[f'(y_2) - f'(y_3)] + ...$$

$$+ (x_1 + x_2 + ... + x_n - y_1 - y_2 - ... - y_n)[f'(y_{n-1}) - f'(y_n)] + (x_1 + x_2 + ... + x_n - y_1 - y_2 - ... - y_n)f'(y_n) \ge 0.$$

Do đó

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\ge f(y_1)+f(y_2)+...+f(y_n).$$

2.3. Hệ quả. (Bất đẳng thức Jensen). Nếu hàm số $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $I=[a,b]$, thì với mọi $x_i, \in I(i=1,2,...,n)$, ta có

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\ge nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right).$$

Chứng minh. Do tính chất đối xứng, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_1\ge x_2\ge ...\ge x_n$. Khi đó ta có $(x_1,x_2,...,x_n)\succ(x,x,...,x)$, trong đó $x=\dfrac{x_1+x_2+..+x_n}{n}$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata ta có ngay điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

Sau đây ta sẽ nêu một số ví dụ để minh họa cho việc ứng dụng của bất đẳng thức Karamata.

4. Một số ví dụ

4.1. Ví dụ 1. Cho $2n$ số thực dương $a_i,b_i(i=1,2,..,n)$ thỏa mãn các điều kiện sau $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n$, $b_1\ge b_2\ge ...\ge b_n$, $a_1\ge b_1, a_1a_2\ge b_1b_2,...,a_1a_2...a_n\ge b_1b_2...b_n$. Chứng minh rằng

$$a_1+a_2+...+a_n\ge b_1+b_2+...+b_n.$$

Lời giải. Đặt $x_i=\ln a_i, y_i=\ln b_i(i=1,2,...,n)$. Với các điều kiện đã cho, ta dễ dàng kiểm tra được rằng $(x_1,x_2,...,x_n)\succ(y_1,y_2,...,y_n)$. Dễ thấy rằng $f(x)=e^x$ là hàm lồi trên $(0,+\infty)$, do đó, áp dụng bất đẳng thức Karamata, ta có

$$e^{x_1}+e^{x_2}+...+e^{x_n}\ge e^{y_1}+e^{y_2}+...+e^{y_n} \text{ hay } a_1+a_2+...+a_n\ge b_1+b_2+...+b_n.$$

4.2. Ví dụ 2. Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$1\le\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Xác định khi nào xảy ra đẳng thức?

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $A\ge B\ge C$. Khi đó $A\ge\frac{\pi}{3}, C\le\frac{\pi}{3}$. Vì $\frac{\pi}{2}\ge A\ge\frac{\pi}{3}$ và $\pi\ge A+B=\pi-C\ge\frac{2\pi}{3}$ nên $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)\succ(A,B,C)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Xét hàm $f(x)=\cos x$, dễ thấy $f(x)$ là hàm lõm thật sự trên đoạn $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, do đó, theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)\le f(A)+f(B)+f(C)\le 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ hay } 1\le\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Ở bất đẳng thức thứ nhất, dấu đẳng thức không xảy ra (vì hai góc của tam giác không thể cùng vuông). Ở bất đẳng thức thứ hai, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

4.3. Ví dụ 3. Cho ABC là tam giác không nhọn. Chứng minh rằng

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge 2\sqrt{2}-1.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $A\ge B\ge C$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra được

$$\left(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right)\succ\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right).$$

Xét hàm số $f(x)=\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0$ với mọi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Từ đó suy ra $f(x)$ là hàm số lồi trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta nhận được

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{\pi}{8}=2\sqrt{2}-1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(A,B,C)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ và các hoán vị.

4.4. Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra được

$$(2a,2b,2c)\succ(a+b,a+c,b+c).$$

Vì $f(x)=\frac{1}{x}$ là hàm lồi trên khoảng $(0,+\infty)$, nên theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$f(2a)+f(2b)+f(2c)\geq f(a+b)+f(a+c)+f(b+c) \text{ hay}$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

4.5. Ví dụ 5. **[IMO 2000/2]** Cho a,b,c là các số thực dương thỏa điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

Lời giải. Vì $abc=1$ nên tồn tại các số dương x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leq xyz.$$

Ta để ý rằng, $(x-y+z)+(y-z+x)=2x>0$, do đó, trong ba số $x-y+z, y-z+x, z-x+y$ không thể có trường hợp hai số cùng âm. Nếu trong ba số trên có một hoặc ba số âm, hiển nhiên ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Trường hợp cả ba số đều dương, bằng cách lấy logarit hai vế, ta có

$$\ln(x-y+z)+\ln(y-z+x)+\ln(z-x+y)\leq\ln x+\ln y+\ln z.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\geq y\geq z$. Khi đó, $(y-z+x,x-y+z,z-x+y)\succ(x,y,z)$.

Vì $f(x)=\ln x$ là hàm lõm trên $(0,+\infty)$, do đó, sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta được

$$\ln(y-z+x)+\ln(x-y+z)+\ln(z-x+y)\leq\ln x+\ln y+\ln z.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hay $a=b=c=1$.

4.6. Ví dụ 6 Cho a,b là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}}\le\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}.$$

Lời giải. Giả sử $b\ge a\ge 0$. Giữa các số $x_1=b+\sqrt[3]{b},x_2=b+\sqrt[3]{a},x_3=a+\sqrt[3]{b},x_4=a+\sqrt[3]{a}$, thì x_1 là số lớn nhất, x_4 là số nhỏ nhất. Vì $x_1+x_4=x_2+x_3$ nên $(x_1,x_4)\succ(x_2,x_3)$ hoặc $(x_1,x_4)\succ(x_3,x_2)$. Dễ thấy $f(x)=\sqrt[3]{x}$ là hàm lõm trên $[0,+\infty)$, do đó, theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$f(x_1)+f(x_4)\le f(x_2)+f(x_3) \text{ hay } \sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}}\le\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

4.7. Ví dụ 7 Cho $-1\le a,b,c\le 1,a+b+c=-\frac{1}{2}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F=a^{12}+b^{12}+c^{12}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó $1\ge a,\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\ge -c-\frac{1}{2}=a+b$. Do đó $\left(1,-\frac{1}{2},-1\right)\succ(a,b,c)$. Vì hàm $f(x)=x^{12}$ lồi trên $[-1,1]$, theo bất đẳng thức Karamata, ta có

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}=f(a)+f(b)+f(c)\le f(1)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)=2+\frac{1}{2^{12}}.$$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $a=1,b=-\frac{1}{2},c=-1$. Do đó giá trị lớn nhất của F là $2+\frac{1}{2^{12}}$.

4.8. Ví dụ 8 [IMO 1999/2]. Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực không âm, $n\ge 2$. Hãy xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho

$$\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right)\le C\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4.$$

Lời giải. Nếu $x_1=x_2=...=0$ thì bất đẳng thức đúng với mọi $C\ge 0$. Nếu có ít nhất một số $x_i>0$, suy ra $x_1+x_2+...+x_n>0$. Vì bất đẳng thức trên ở dạng thuần nhất nên ta có thể giả sử rằng $x_1+x_2+...+x_n=1$. Khi đó

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right)=\sum_{1\le i<j\le n}x_i^3x_j+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j^3$$

$$=\sum_{1\le i\le n}x_i^3\sum_{j\ne i}x_j=\sum_{1\le i\le n}x_i^3(1-x_i)=\sum_{i=1}^n f(x_i), \text{ với } f(x)=x^3-x^4.$$

Vì vậy, ta cần xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho $\sum_{i=1}^n f(x_i)\le C$, với $x_1+x_2+...+x_n=1$, trong đó $f(x)=x^3-x^4$ là hàm lồi trên $[0,1/2]$ (vì $f'(x)=3x^2-4x^3, f''(x)=6x(1-2x)$).

Do tính đối xứng, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1\ge x_2\ge ...\ge x_n$. Ta sẽ xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\frac{1}{2}\ge x_1$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra được $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,...,0\right)\succ(x_1,x_2,...,x_n)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta có

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\le f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)+...+f(0)=\frac{1}{8}.$$

Trường hợp 2. $\frac{1}{2} \le x_1$. Ta kiểm tra được $(1-x_1,0,...,0) \succ (x_2,...,x_n)$. Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \sum_{i=2}^{n} f(x_i) \le f(x_1) + f(1-x_1) + f(0) + ... + f(0) = f(x_1) + f(1-x_1).$$

Mặt khác, bằng cách đặt $y = x_1 - \frac{1}{2} \ge 0$, ta có

$$f(x_1) + f(1-x_1) = (x_1^3 - x_1^4) + \left[(1-x_1)^3 - (1-x_1)^4\right] = x_1(1-x_1)\left[x_1^2 + (1-x_1)^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}+y\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left[\left(\frac{1}{2}+y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-y\right)^2\right] = \left(\frac{1}{4}-y^2\right)\left(\frac{1}{2}+2y^2\right) = 2\left(\frac{1}{16}-y^4\right) \le \frac{1}{8}.$$

Do đó, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \frac{1}{8}$. Vậy hằng số C nhỏ nhất cần xác định là $\frac{1}{8}$.

Để kết thúc bài viết, mời các bạn giải một số bài tập tự luyện.

1. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng

a) $\sin^{\alpha}\frac{A}{2} + \sin^{\alpha}\frac{B}{2} + \sin^{\alpha}\frac{C}{2} \ge \frac{3}{2^{\alpha}}$ với $\alpha < 0$.

b) $1 < \sin^{\alpha}\frac{A}{2} + \sin^{\alpha}\frac{B}{2} + \sin^{\alpha}\frac{C}{2} \le \frac{3}{2^{\alpha}}$ với $1 \ge \alpha > 0$.

c) $\cos^{\alpha}\frac{A}{2} + \cos^{\alpha}\frac{B}{2} + \cos^{\alpha}\frac{C}{2} \ge \frac{3^{1+\frac{\alpha}{2}}}{2^{\alpha}}$ với $\alpha < 0$.

d) $2 < \cos^{\alpha}\frac{A}{2} + \cos^{\alpha}\frac{B}{2} + \cos^{\alpha}\frac{C}{2} \le \frac{3^{1+\frac{\alpha}{2}}}{2^{\alpha}}$ với $0 < \alpha \le 1$.

2. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \le \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)...\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

3. [APMO 1996] Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

4. Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Chứng minh rằng

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + ... + \cos(2x_n - x_1) \le \cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n.$$

Tài liệu tham khảo

[1]. Aleksandar Nikolic, Jovan Karamata (1902 – 1967).

[2]. Hojoo Lee, Topics in Inequalities – Theorems and Techniques, 2007.

[3]. Kin Y. Li, Majorization Inequality, Mathematical Excalibur, Vol.5, No.5, 11/2000.

[4]. Nguyễn Văn Nho, Olympic Toán học Châu Á Thái Bình Dương, NXB Giáo Dục, 2003.

[5]. Nguyễn Hữu Điển, Giải toán bằng phương pháp Đại Lượng Bất Biến, NXB Giáo Dục, 2004.

[6]. Phạm Kim Hùng, Sáng tạo Bất Đẳng Thức, NXB Tri Thức, 2006.