Bất Đẳng Thức Bunhiacốpxki

I.Bất đẳng thức Bunhiacôpxki (BCS) :

Cho 2 bộ số thực $(a_1;a_2;...;a_n)$ và $(b_1;b_2;...;b_n)$, mỗi bộ gồm n số. Khi đó ta có:

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+...+b_n{}^2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử phải bằng 0.

II. Các hệ quả :

Hệ quả 1:

Nếu $a_1x_1+...+a_nx_n=C$ (không đổi) thì $\min\left(x_1^2+...+x_n^2\right)=\frac{C}{a_1^2+...+a_n^2}$

đạt được khi $\frac{x_1}{a_1}=...=\frac{x_n}{a_n}$

Hệ quả 2:

Nếu $x_1^2+...+x_n^2=C^2$ (không đổi) thì $\max\left(a_1x_1+...+a_nx_n\right)=|C|\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}$

đạt được khi $\frac{x_1}{a_1}=...=\frac{x_n}{a_n}\ge 0$

$\min\left(a_1x_1+...+a_nx_n\right)=-|C|\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1}=...=\frac{x_n}{a_n}\le 0$

III.Bất đẳng thức Bunhiacôpxki mở rộng:

- Mở rộng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho 3 dãy số thực **không âm** $(a_1;a_2;...;a_n);(b_1;b_2;...;b_n);(c_1;c_2;...;c_n)$ ta luôn có :

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+...+a_nb_nc_n)^2 \le (a_1^3+a_2^3+...+a_n^3)(b_1^3+b_2^3+...+b_n^3)(c_1^3+c_2^3+...+c_n^3)$$

Chứng minh:

Đặt $A=\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+...+a_n^3}$, $B=\sqrt[3]{b_1^3+b_2^3+...+b_n^3}$, $C=\sqrt[3]{c_1^3+c_2^3+...+c_n^3}$

Nếu $A = 0$ hoặc $B = 0$ hoặc $C = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì khi đó cả hai vế của bất đẳng thức đều bằng 0.

Vậy ta chỉ xét trường hợp $A > 0; B > 0; C > 0$

Đặt $x_i = \frac{a_i}{A}; y_i = \frac{b_i}{B}; z_i = \frac{c_i}{C}$ với $i = 1;2;3$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1 \\ y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 1 \\ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 1 \end{cases}$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3 \le 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm: $x_i^3; y_i^3; z_i^3 \ (i = 1;2;3)$ ta có: $\begin{cases} x_1y_1z_1 \le \dfrac{x_1^3 + x_1^3 + x_1^3}{3} \\ x_2y_2z_2 \le \dfrac{x_2^3 + x_2^3 + x_2^3}{3} \\ x_3y_3z_3 \le \dfrac{x_3^3 + x_3^3 + x_3^3}{3} \end{cases}$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta được: $x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3 \le 1$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 = z_1 \\ x_2 = y_2 = z_2 \\ x_3 = y_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{A} = \dfrac{b_1}{B} = \dfrac{c_1}{C} \\ \dfrac{a_2}{A} = \dfrac{b_2}{B} = \dfrac{c_2}{C} \\ \dfrac{a_3}{A} = \dfrac{b_3}{B} = \dfrac{c_3}{C} \end{cases}$

Hay $a_i : b_i : c_i = A : B : C \left(i = 1;2;3\right)$ tức là: $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = a_3 : b_3 : c_3$

- Tổng quát : bất đẳng thức Bunhiacôpxki mở rộng cho rộng cho m dãy số thực **không âm:**

Cho m dãy số thực không âm:
$\left(a_1; a_2; ...; a_n\right), \left(b_1; b_2; ...; b_n\right), \ldots, \left(K_1; K_2; ...; K_n\right)$
Ta có:
$\left(a_1b_1...K_1 + a_2b_2...K_2 + ... + a_nb_n...K_n\right)^m \le \left(a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m\right)\left(b_1^m + b_2^m + ... + b_n^m\right)...\left(K_1^m + K_2^m + ... + K_n^m\right)$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:
$a_1 : b_1 : ... : K_1 = a_2 : b_2 : ... : K_2 = a_n : b_n : ... : K_n$ (chứng minh tương tự như trên)

I- MỘT SỐ VÍ DỤ :

Bài 1: Cho x, y, z là ba số dương thỏa $4x + 9y + 16z = 49$. Chứng minh rằng:

$$T = \frac{1}{x} + \frac{25}{y} + \frac{64}{z} \ge 49$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho sáu số $2\sqrt{x};3\sqrt{y};4\sqrt{z}$ và $\frac{1}{\sqrt{x}};\frac{5}{\sqrt{y}};\frac{8}{\sqrt{z}}$ ta được:

$$49.T=\left(4x+9y+16z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{84}{z}\right)=\left[\left(2\sqrt{x}\right)^2+\left(3\sqrt{y}\right)^2+\left(4\sqrt{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{z}}\right)^2\right]$$

$$\geq\left(2\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{y}.\frac{5}{\sqrt{y}}+4\sqrt{z}.\frac{8}{\sqrt{z}}\right)^2=49^2$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{64}{z}\geq 49$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{2x}=\frac{5}{3y}=\frac{8}{4z}\\ 4x+9y+16z=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{5}{3}\\ z=2\end{cases}$

Bài 2 : Cho $x>0;y>0$ và $x^2+y^2\leq x+y$.Chứng minh:

$$x+3y\leq 2+\sqrt{5}$$

Hướng dẫn giải

Giả thiết: $x^2+y^2\leq x+y\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{2}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $(1;3);\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2}\right)$ ta có:

$$\left[1.\left(1-\frac{1}{2}\right)+3.\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]^2\leq 10\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]\leq 5$$

$$\Rightarrow\left(x+3y-2\right)^2\leq 5$$

$$\Rightarrow x+3y-2\leq\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x+3y\leq 2+\sqrt{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\\ y=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}\end{cases}$

Bài 3 : Cho $a,b,c\geq 0$; $a+b+c=1$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\ge 30$$

Hướng dẫn giải

Gọi $A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\frac{1}{\sqrt{ab}};\frac{1}{\sqrt{bc}};\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2};3\sqrt{ab};3\sqrt{bc};3\sqrt{ca}\right)$$

Ta có: $(1+3+3+3)^2\le\left(a^2+b^2+c^2+9ab+9bc+9ca\right)A$

$\Rightarrow 100\le\left[(a+b+c)^2+7(ab+bc+ca)\right]A$ (*)

Mà $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$(do $a+b+c=1$)

Do đó: (*) $\Rightarrow A\ge 30$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 4 : Cho $x;y;z>0$ và thoả $x+y+z\le 1$.Chứng minh : $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$

Hướng dẫn giải

Gọi $S=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $(1;9);\left(x;\frac{1}{x}\right)$

Ta có: $$x+\frac{9}{x}\le\sqrt{1+81}.\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{82}.\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \quad (1)$$

Tương tự: $$y+\frac{9}{y}\le\sqrt{82}.\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} \quad (2)$$

$$z+\frac{9}{z}\le\sqrt{82}.\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \quad (3)$$

Cộng (1),(2) và (3) theo vế ta được: $S.\sqrt{82}\ge x+y+z+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Hay $S.\sqrt{82}\ge 81(x+y+z)+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-80(x+y+z)$

$$\geq 2.9.3.\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}-80 \geq 162-80=82$$

Vậy $$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

Bài 5 : Cho ba số thực dương a,b,c thoả $ab+bc+ca=abc$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}=\sqrt{\frac{b^2+2a^2}{a^2b^2}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+2\frac{1}{b^2}}$ (do a,b dương)

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c}$ thì

giả thiết $\begin{cases} a,b,c>0 \\ ab+bc+ca=abc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x;y;z>0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

và (đpcm) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2z^2}+\sqrt{z^2+2x^2} \geq \sqrt{3}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$3\left(x^2+2y^2\right)=3\left(x^2+y^2+y^2\right) \geq (x+y+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+2y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2y)$$

Tương tự $$\sqrt{y^2+2z^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(y+2z)$$

$$\sqrt{z^2+2x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(z+2x)$$

Vậy $$\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2z^2}+\sqrt{z^2+2x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(3x+3y+3z)=\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Với $x=y=z=\frac{1}{3}$ thì $a=b=c=3$

Bài 6 : Chứng minh: $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$ với mọi số thực dương $a;b;c \geq 1$

Hướng dẫn giải

Đặt $a-1=x^2;b-1=y^2;c-1=z^2$

Với $x;y;z>0$.Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x+y+z \leq \sqrt{\left(z^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+1\right]}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$x+y \le \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \Rightarrow x+y+z \le \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+z$ (1)

$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+z \le \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)+1}.\sqrt{z^2+1}$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có $x+y+z \le \sqrt{(z^2+1)\left[(x^2+1)(y^2+1)+1\right]}$

Vậy $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$ (đpcm)

Bài 7 : Cho $a;b;c>0$ và thoả $abc=1$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c} \quad \Rightarrow xyz=1;x>0;y>0;z>0$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau : A$=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số : $\left(\sqrt{y+z};\sqrt{z+x};\sqrt{x+y}\right);\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}};\frac{y}{\sqrt{z+x}};\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$

Ta có: $(x+y+z)^2 \le (y+z+z+x+x+y)A$

$\Rightarrow A \ge \frac{x+y+z}{2} \ge \frac{3}{2}.\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$(do $xyz=1$) $\quad \Rightarrow A \ge \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

Với $x=y=z=1$ thì $a=b=c=1$.

Bài 8 : Cho $a;b;c>0$ .Chứng minh:

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le 1$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $\left(\sqrt{a};\sqrt{b}\right);\left(\sqrt{c};\sqrt{a}\right)$

Ta có:

$$\left(\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right)^2 \le (a+b)(c+a) \Rightarrow \sqrt{ac}+\sqrt{ab} \le \sqrt{(a+b)(c+a)}$$

$$\Rightarrow a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab} \le a+\sqrt{(a+b)(c+a)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \frac{a}{a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad (1)$$

Tương tự: $$\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}} \le \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad (2)$$

$$\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad (3)$$

Cộng (1),(2) và (3) theo vế ta được:

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le 1$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 9 : Cho $a;b>0$ và thoả $a^2+b^2=9$ .Chứng minh : $\frac{ab}{a+b+3} \le \frac{3\sqrt{2}-3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a^2+b^2=9$

$\Leftrightarrow 2ab=(a+b)^2-9$

$\Leftrightarrow 2ab=(a+b+3)(a+b-3)$

$\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b+3}=a+b-3$

$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+b+3}=\frac{a+b}{2}-\frac{3}{2}$

Mà theo BĐT Bunhiacôpxki thì $a+b \le \sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2}$

Nên $\frac{ab}{a+b+3} \le \frac{3\sqrt{2}-3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a;b>0 \\ a^2+b^2=9 \Leftrightarrow a=b=\frac{3}{\sqrt{2}} \\ a=b \end{cases}$

Bài 10: Cho $a;b;c;d$ dương tuỳ ý.Chứng minh : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{p+q}{pa+qb}+\frac{p+q}{pb+qc}+\frac{p+q}{pc+qa}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có

$$(p+q)^2=\left(\sqrt{\frac{p}{a}}.\sqrt{pa}+\sqrt{\frac{q}{b}}.\sqrt{qb}\right)^2 \le \left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right)(pa+qb)$$

Tương tự ta chứng minh được

$$(p+q)^2 \le \left(\frac{p}{b}+\frac{q}{c}\right)(pb+qc)\ ; \quad (p+q)^2 \le \left(\frac{p}{c}+\frac{q}{a}\right)(pc+qa)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức ta có :

$$(p+q)^2\left[\frac{1}{pa+qb}+\frac{1}{pb+qc}+\frac{1}{pc+qa}\right]\le(p+q)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hay $$(p+q)\left[\frac{1}{pa+qb}+\frac{1}{pb+qc}+\frac{1}{pc+qa}\right]\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{p+q}{pa+qb}+\frac{p+q}{pb+qc}+\frac{p+q}{pc+qa}$$

Bài 11 : Cho 4 số dương $a;b;c;d$ .Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{b+d+a}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $P=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{b+d+a}+\frac{d^3}{a+b+c}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số:

$$\left(\sqrt{\frac{a^3}{b+c+d}};\sqrt{\frac{b^3}{c+d+a}};\sqrt{\frac{c^3}{b+d+a}};\sqrt{\frac{d^3}{a+b+c}}\right);\left(\sqrt{a(b+c+d)};\sqrt{b(c+d+a)};\sqrt{c(d+b+a)};\sqrt{d(a+b+c)}\right)$$

Ta có:

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2\le P\left[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2\le P\left[(a+b+c+d)^2-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\right]\quad(1)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $(a;b;c;d);(1;1;1;1)$ ta được:

$$(a+b+c+d)^2\le4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta được $$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2\le3P\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2\le3P$$

Vậy $$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{b+d+a}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$$

Bài 12 : Cho các số dương $a;b;c$ thỏa a + b + c = 1 . Chứng minh : $\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c}\ge1$

Hướng dẫn giải

Đặt $A=\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c}=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$(a+b+c)^2=\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b+c}}\sqrt{a(2b+c)}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c+a}}\sqrt{b(2c+a)}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2a+b}}\sqrt{c(2a+b)}\right]^2$$

$$\le\left[\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\right]\left[a(2b+c)+b(2c+a)+c(2a+b)\right]$$

$\Leftrightarrow A \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$

Ta lại có:

$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$. Suy ra $A \ge \dfrac{3(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = 1$

Vậy $\dfrac{a}{1+b-a} + \dfrac{b}{1+c-b} + \dfrac{c}{1+a-c} \ge 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2b+c = 2c+a = 2a+b \\ a = b = c \\ a+b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Bài 13 : Giả sử các số thực $x; y; z; t$ thoả mãn điều kiện: $a\left(x^2+y^2\right)+b\left(z^2+t^2\right)=1$ với $a;b$ là hai số dương cho trước. Chứng minh: $(x+z)(y+t) \le \dfrac{a+b}{ab}$

Hướng dẫn giải

Do $a;b>0$ nên từ giả thiết ta có:

$$a\left(x^2+y^2\right)+b\left(z^2+t^2\right)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{b}+\frac{z^2+t^2}{a}=\frac{1}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{b}+\frac{z^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{t^2}{a}=\frac{1}{ab}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$(x+z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{b}}.\sqrt{b}+\frac{z}{\sqrt{a}}.\sqrt{a}\right)^2 \le (b+a)\left(\frac{x^2}{b}+\frac{z^2}{a}\right) \qquad (1)$$

Tương tự : $(y+t)^2 \le (b+a)\left(\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{t^2}{a}\right)$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2) ta được:

$$(x+z)^2+(y+t)^2 \le (b+a)\left(\frac{x^2}{b}+\frac{z^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{t^2}{a}\right)=\frac{a+b}{ab} \qquad (3)$$

Mặt khác $(x+z)^2+(y+t)^2 \ge 2(x+z)(y+t)$ (4)

Do đó từ (3) và (4) suy ra: $(x+z)(y+t) \le \dfrac{a+b}{ab}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{b}=\dfrac{z}{a} \\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{t}{a} \\ x+z=y+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=t=\dfrac{ax}{b} \end{cases}$

Bài 14 : Cho các số thực dương $x;y;z;t$ thoả mãn $xyzt=1$.Chứng minh:

$$\frac{1}{x^3\left(yz+zt+ty\right)}+\frac{1}{y^3\left(xz+zt+tx\right)}+\frac{1}{z^3\left(xt+ty+yx\right)}+\frac{1}{t^3\left(xy+yz+zx\right)}\ge\frac{4}{3}$$

Hướng dẫn giải

Với $x;y;z;t$ đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z};d=\frac{1}{t}$ $(a;b;c;d>0)$ và $abcd=1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c};t=\frac{1}{d}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương với:

$$\frac{1}{\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{bd}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{b^3}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{ad}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{c^3}\left(\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{ab}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{d^3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)}\ge\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{\frac{b+c+d}{bcd}}+\frac{b^3}{\frac{c+d+a}{adc}}+\frac{c^3}{\frac{d+a+b}{abd}}+\frac{d^3}{\frac{a+b+c}{abc}}\ge\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{a\left(b+c+d\right)}+\frac{b^3}{b\left(c+d+a\right)}+\frac{c^3}{c\left(d+a+b\right)}+\frac{d^3}{d\left(a+b+c\right)}\ge\frac{4}{3}\quad(\text{vì } abcd=1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\ge\frac{4}{3}$$

Đặt $S=\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$S.\left[\left(b+c+d\right)+\left(c+d+a\right)+\left(d+a+b\right)+\left(a+b+c\right)\right]\ge\left(a+b+c+d\right)^2$$

$$\Rightarrow S\ge\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{3\left(a+b+c+d\right)}=\frac{1}{3}\left(a+b+c+d\right)\qquad(1)$$

Áp dụng BĐT Cauchy với 2 số dương:

$$a+b\ge2\sqrt{ab};\qquad c+d\ge2\sqrt{cd}$$

Suy ra $a+b+c+d\ge2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)$

Lại áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương $\sqrt{ab};\sqrt{cd}$ ta có:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\ge2\sqrt{\sqrt{abcd}}=2\sqrt[4]{abcd}=2\quad(\text{vì } abcd=1)\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S\ge\frac{4}{3}$

Vậy $\frac{1}{\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{bd}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{b^3}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{ad}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{c^3}\left(\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{ab}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{d^3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)}\ge\frac{4}{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1\Leftrightarrow x=y=z=t=1$.

Bài 15 : Cho $x_1;x_2;x_3;x_4$ dương thoả điều kiện $x_1+x_2+x_3+x_4=1$.Chứng minh :

$$\frac{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}\ge\frac{1}{4}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$1=\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2\le4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\ge\frac{1}{4}\qquad(1)$$

- $$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^2=\left(\sqrt{x_1}.\sqrt{x_1^3}+\sqrt{x_2}.\sqrt{x_2^3}+\sqrt{x_3}.\sqrt{x_3^3}+\sqrt{x_4}.\sqrt{x_4^3}\right)$$

$$\le\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)$$

$$=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\quad(\text{vì } x_1+x_2+x_3+x_4=1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\ge x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\qquad(2)$$

- $$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)^2$$

$$=\left(x_1.x_1^2+x_2.x_2^2+x_3.x_3^2+x_4.x_4^2\right)$$

$$\le\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}\ge\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\qquad(3)$$

Từ (1);(2) và (3) suy ra:

$$\frac{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}\ge\frac{1}{4}$$

Bài 16 : Cho bốn số dương $a;b;c;d$ .Chứng minh:

$$\frac{a^4}{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^4}{(b+c)\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^4}{(c+d)\left(c^2+d^2\right)}+\frac{d^4}{(d+a)\left(d^2+a^2\right)}\ge\frac{a+b+c+d}{4}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$(a+b)^2\le2\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)(a+b)^2\le2\left(a^2+b^2\right)\le4\left(a^2+b^2\right)\qquad(1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^4+b^4}{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}\ge\frac{1}{4}(a+b)$$

Mặt khác: $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}=a-b$

Đặt $N=\dfrac{a^4}{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}+\dfrac{b^4}{(b+c)\left(b^2+c^2\right)}+\dfrac{c^4}{(c+d)\left(c^2+d^2\right)}+\dfrac{d^4}{(d+a)\left(d^2+a^2\right)}$

Ta có:

$$2N=\frac{\left(a^4-b^4\right)+\left(a^4+b^4\right)}{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{\left(b^4-c^4\right)+\left(b^4+c^4\right)}{(b+c)\left(b^2+c^2\right)}+\frac{\left(c^4-d^4\right)+\left(c^4+d^4\right)}{(c+d)\left(c^2+d^2\right)}+\frac{\left(d^4-a^4\right)+\left(d^4+a^4\right)}{(d+a)\left(d^2+a^2\right)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2N\ge\frac{1}{4}(a+b)+a-b+\frac{1}{4}(b+c)+b-c+\frac{1}{4}(c+d)+c-d+\frac{1}{4}(d+a)+d-a$$

$$\Leftrightarrow 2N\ge\frac{1}{4}(a+b+b+c+c+d+d+a)\Leftrightarrow N\ge\frac{1}{4}(a+b+c+d)\ \text{(đpcm)}$$

Bài 17 : Cho $a;b;c$ là các số thực dương.Chứng minh: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$

(Trích đề thi Olympic Toán Quốc Tế lần thứ 42, năm 2001)

Hướng dẫn giải

Đặt $A=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki hai lần ta được:

$$(a+b+c)^2=\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^2+8bc}}.\sqrt{a}.\sqrt[4]{a^2+8bc}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b^2+8ac}}.\sqrt{b}.\sqrt[4]{b^2+8ac}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt[4]{c^2+8ab}}.\sqrt{c}.\sqrt[4]{c^2+8ab}\right]^2$$

$$\le\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right]\left[a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}\right]$$

$$=A.\left[\sqrt{a}.\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+8abc}\right]$$

$$\le A.\sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)} \qquad (1)$$

Mặt khác

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$$

Áp dụng BĐT Cauchy với hai số dương ta có:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab};\qquad b+c\ge 2\sqrt{bc};\qquad a+c\ge 2\sqrt{ac}$$

Suy ra:

$$(a+b)(b+c)(a+c)\ge 8abc$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)\ge a^3+b^3+c^3+24abc \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$(a+b+c)^2\le A.\sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3}=A.(a+b+c)^2$$

Do đó $A\ge 1$, nghĩa là $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 18 : Cho $x;y;z\in\mathbb{R}^+$ thoả $xy+yz+zt+tx=1$.Chứng minh:

$$\frac{x^3}{y+z+t}+\frac{y^3}{x+z+t}+\frac{z^3}{x+y+t}+\frac{t^3}{x+y+z}\ge\frac{1}{3}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$\left(xy+yz+zt+tx\right)^2\le\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)\left(y^2+z^2+t^2+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 1\le x^2+y^2+z^2+t^2 \qquad (1)$$

Đặt: $X=y+z+t;Y=x+z+t;Z=x+y+t;T=x+y+z$

Không mất tính tổng quát giả sử: $x\ge y\ge z\ge t$

$\Rightarrow x^2\ge y^2\ge z^2\ge t^2$ và $x^3\ge y^3\ge z^3\ge t^3$

và $y+z+t\le x+z+t\le x+y+t\le x+y+z\Leftrightarrow X\le Y\le Z\le T\Rightarrow\frac{1}{X}\ge\frac{1}{Y}\ge\frac{1}{Z}\ge\frac{1}{T}$

Áp dụng BĐT Trê-bư-sếp cho hai dãy số sau:

$$\begin{cases}x^3\ge y^3\ge z^3\ge t^3\\ \frac{1}{X}\ge\frac{1}{Y}\ge\frac{1}{Z}\ge\frac{1}{T}\end{cases}$$

$$\frac{x^3}{X}+\frac{y^3}{Y}+\frac{z^3}{Z}+\frac{t^3}{T}\ge\frac{1}{4}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{T}\right)\left(x^3+y^3+z^3+t^3\right) \qquad (2)$$

Áp dụng BĐT Trê-bư-sếp cho hai dãy $\begin{cases}x\ge y\ge z\ge t\\ x^2\ge y^2\ge z^2\ge t^2\end{cases}$

$$\left(x^3+y^3+z^3+t^3\right)\ge\frac{1}{4}\left(x+y+z+t\right)\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)$$

Mặt khác:

$$x+y+z+t=\frac{1}{3}\left(x+y+z+x+y+t+x+z+t+y+z+t\right)=\frac{1}{3}\left(X+Y+Z+T\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^3+y^3+z^3+t^3\right)\ge\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right).\frac{1}{3}\left(X+Y+Z+T\right) \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) rút ra:

$$\frac{x^3}{X}+\frac{y^3}{Y}+\frac{z^3}{Z}+\frac{t^3}{T}\ge\frac{1}{48}\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)\left(X+Y+Z+T\right)\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{T}\right)$$

Theo (1) ta lại có: $1\le x^2+y^2+z^2+t^2$

Áp dụng BĐT Cauchy cho $X;Y;Z;T>0$ ta có:

$$X+Y+Z+T\ge 4\sqrt[4]{X.Y.Z.T}$$

$$\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{T}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{X.Y.Z.T}}$$

$$\Rightarrow\left(X+Y+Z+T\right).\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{T}\right)\ge 16$$

Vậy $\frac{x^3}{X}+\frac{y^3}{Y}+\frac{z^3}{Z}+\frac{t^3}{T}\geq\frac{1}{48}.1.16=\frac{1}{3}$

Thay $X;Y;Z;T$ ta được kết quả:

$\frac{x^3}{y+z+t}+\frac{y^3}{x+z+t}+\frac{z^3}{x+y+t}+\frac{t^3}{x+y+z}\geq\frac{1}{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=t=\frac{1}{2}$

Bài 19 : Cho n là số tự nhiên.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+...+\sqrt{C_n^n}\leq\sqrt{n\left(2^n-1\right)}$$

Hướng dẫn giải

Chọn hai dãy $\left(a_1=\sqrt{C_n^1};a_2=\sqrt{C_n^2};...;a_n=\sqrt{C_n^n}\right);\left(b_1=b_2=...=b_n=1\right)$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có: $\left(\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+...+\sqrt{C_n^n}\right)^2\leq\left(C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\right)\left(1+1+...+1\right)$ (1)

Theo nhị thức Newton ta có: $\left(a+b\right)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$

Cho $a=b=1$.Ta có:

$2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n\Rightarrow 2^n-1=C_n^1+...+C_n^n$

Vậy từ (1) ta có:

$$\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+...+\sqrt{C_n^n}\leq\sqrt{n\left(2^n-1\right)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{C_n^1}=\sqrt{C_n^2}=...=\sqrt{C_n^n}\Leftrightarrow n=1$.

Bài 20 : Cho $a;b;c;d>0$.Chứng minh : $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$

(Trích đề dự bị Quốc Tế Toán Mỹ năm 1993)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có: $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$

với $n=4;\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)=\left(a;b;c;d\right);\left(y_1;y_2;y_3;y_4\right)=\left(b+2c+3d;c+2d+3a;d+2a+3b;a+2b+3c\right)$

$\Rightarrow \text{VT}\geq\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{4\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd\right)}$ (1)

Mặt khác $\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd\right)\leq\frac{3}{8}\left(a+b+c+d\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \text{VT}\geq\frac{2}{3}$ (đpcm)

Bài 21 : Cho $a>0;b>0;c>0$.Chứng minh : $\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $x_1^2=\dfrac{a^4}{b+c};x_2^2=\dfrac{b^4}{c+a};x_3^2=\dfrac{c^4}{a+b}$ và $a^2(b+c)=y_1^2;b^2(c+a)=y_2^2;c^2(a+b)=y_3^2$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có cho các số $x_1;x_2;x_3$ và $y_1;y_2;y_3$ ta được:

$$\left(\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}\right)\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]^2\ge\left(a^3+b^3+c^3\right)^2$$

Nên $\dfrac{a^4}{b+c}+\dfrac{b^4}{c+a}+\dfrac{c^4}{a+b}\ge\dfrac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}$

Để chứng minh được bài toán ta cần chứng minh:

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \qquad (**)$$

$$(**)\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-b^2a+b^3+c^3-b^2c-bc^2+c^3+a^3-c^2a-ca^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)\ge 0 \qquad (***)$$

Bất đẳng thức (***) là đúng $\Leftrightarrow$ (**) là đúng – Bài toán đúng.

Vậy $\dfrac{a^4}{b+c}+\dfrac{b^4}{c+a}+\dfrac{c^4}{a+b}\ge\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2}$

Bài 22 : Cho $x_i>0;i=1;2;...;n$ có $x_1+x_2+...+x_n=1$.Cho $x_{i_1};x_{i_2};...;x_{i_n}$ là hoán vị của $x_1;x_2;...;x_n$.Chứng minh:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_{i_k}}\right)^2\ge\frac{\left(n^2+1\right)^2}{n}$$

Hướng dẫn giải

Theo Bunhiacôpxki: $n.\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_{i_k}}\right)^2\ge\left[\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_{i_k}}\right)\right]^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{i_k}}\right)^2$

Mà $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=1$ $\qquad\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}x_{i_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{i_k}}\right)\ge n^2\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{i_k}}\ge\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}x_{i_k}}=n^2$

Vậy $$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_{i_k}}\right)^2\ge\frac{\left(n^2+1\right)^2}{n}$$

BÀI TẬP :

Bài 1: Cho $a;b;c;d>0$ và thỏa $c^2+d^2=\left(a^2+b^2\right)^3$.Chứng minh: $\dfrac{a^3}{c}+\dfrac{b^3}{d}\ge 1$

Bài 2: Cho $a;b;c;d>0$.Chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{64}{a+b+c+d}$

Bài 3: Cho $a;b;c$ là 3 số dương và $a^2+b^2+c^2\ge 1$.Chứng minh: $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{1}{2}$

Bài 4: Cho $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh: $a+b+c+ab+ac+bc\le 1+\sqrt{3}$

Bài 5: Cho $a;b;c$ là các số dương.Chứng minh: $\frac{a^4}{a^2+ba+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Bài 6: Cho 3 số $x;y;z$ thoả $x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le\frac{4}{3}$.Chứng minh: $x+y+z\le 4$

Bài 6: Cho $a;b;c$ là 3 số không âm.Chứng minh: $\sqrt{\frac{a+2b}{3}}+\sqrt{\frac{b+2c}{3}}+\sqrt{\frac{c+2a}{3}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

Bài 7: Cho 3 số dương $a;b;c$ có $abc=1$.Chứng minh: $\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ca}{b^2c+b^2a}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}\ge\frac{3}{2}$

Bài 8: Cho 3 số dương $x;y;z$ có $x+y+z=1$.Chứng minh: $\frac{1+\sqrt{x}}{y+z}+\frac{1+\sqrt{y}}{z+x}+\frac{1+\sqrt{z}}{x+y}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$

Bài 9: Chứng minh: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{x+y+z}$

Bài 10: Cho $x\ge y\ge z>0$.Chứng minh: $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$

Bài 11: Cho $a\ge 1;b\ge 1$.Chứng minh: $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

Bài 12: Cho $a;b;c>0$.Chứng minh: $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge(a+b+c)^2$

Bài 13: Cho $a;b;c\in\mathbb{R}$.Chứng minh: $\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 14: Cho $x;y;z>0$ và $x+y+z\le\frac{3}{2}$.Chứng minh: $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\frac{3}{2}\sqrt{17}$

Bài 15: Cho trước 2 số dương $a;b$ và 2 số dương $c;d$ thay đổi sao cho $a+b<c+d$.Chứng minh:

$$\frac{c^2}{c+d}+\frac{(a-c)^2}{a+b-c-d}\ge\frac{a^2}{a+b}$$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Bài 16: Cho $a_1;a_2;...;a_n$ là các số thực thoả mãn $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=3$.Chứng minh: $\left|\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+...+\frac{a_n}{n+1}\right|<\sqrt{2}$

Bài 17: Cho $a;b;c;p;q>0$.Chứng minh: $\frac{a}{pb+qc}+\frac{b}{pc+qa}+\frac{c}{pa+qb}\ge\frac{3}{p+q}$

Bài 18: Chứng minh rằng với mọi $a_i\in\mathbb{R}$ $(i=1;2;...;n)$ ta có:

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+...+\sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2}\ge\frac{n}{\sqrt{2}}$$

Phụ lục 1 Ứng dụng vào hình học

Bài 1: Cho ΔABC thoả mãn hệ thức: $\dfrac{a^3}{br+cR}+\dfrac{b^3}{cr+aR}+\dfrac{c^3}{ar+bR}=\dfrac{2(a+b+c)^2}{9R}$ (1).CM ΔABC đều

Hướng dẫn giải

Để đơn giản ta đặt: $\begin{matrix} x=br+cR>0 \\ y=cr+aR>0\,(2) \\ z=ar+bR>0 \end{matrix}$

vậy (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}+\dfrac{c^3}{z}=\dfrac{2(a+b+c)^2}{9R}$

Từ (2) ta có:

$ax+by+cz=(ab+bc+ca)(r+R)\,(3)$

$(ax+by+cz)(\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}+\dfrac{c^3}{z})=a^4+b^4+c^4+ab(a^2\dfrac{y}{x}+b^2\dfrac{x}{y})+bc(b^2\dfrac{z}{y}+c^2\dfrac{y}{z})+ca(c^2\dfrac{x}{z}+a^2\dfrac{z}{x})$

Theo BĐTCauchy,ta có:

$$(ax+by+cz)(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z})\geq a^4+b^4+c^4+2ab.ab+bc.2bc+ca.2ca\geq(a^2+b^2+c^2)^2$$

Suy ra : $(\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}+\dfrac{c^3}{z})\geq\dfrac{(a^2+b^2+c^2)}{\left(ab+bc+ca\right)(r+R)}$ (theo 3) (4)

mặt khác ta luôn có (Cauchy): $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

nên (4): $\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}+\dfrac{c^3}{z}\geq\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)(r+R)}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{r+R}$

$\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3(r+R)}$ (theo BĐT BCS)

Mà $R\geq 2r\Rightarrow 3(r+R)\leq 3(\dfrac{R}{2}+R)=\dfrac{9R}{2}$

từ đó: $\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}+\dfrac{c^3}{z}\geq\dfrac{2(a+b+c)^2}{9R}\quad\Rightarrow\dfrac{a^3}{br+cR}+\dfrac{b^3}{cr+aR}+\dfrac{c^3}{ar+bR}\geq\dfrac{2(a+b+c)^2}{9R}$

dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ R=r \\ a^2\dfrac{y}{x}=b^2\dfrac{y}{z}, b^2\dfrac{z}{y}=c^2\dfrac{y}{z}, c^2\dfrac{x}{y}=a^2\dfrac{z}{x} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 2 : CM: $1+\cos A\cos B\cos C \geq \sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$ với A, B,C nhọn

Hướng dẫn giải

Do tgA>0,tagB>0,tgC>0 và $tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}+tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}+tg\dfrac{C}{2}tg\dfrac{A}{2}=1$

Áp dụng BCS ta có: $tg^2\dfrac{A}{2}tg^2\dfrac{B}{2}+tg^2\dfrac{B}{2}tg^2\dfrac{C}{2}+tg^2\dfrac{C}{2}tg^2\dfrac{A}{2}\geq\dfrac{1}{3}$ (1)

Mặt khác theo BĐT Cauchy ta có:

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3}$$

từ (1)và(2):

$$1+tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2}+tg^2\frac{C}{2}tg^2\frac{A}{2}\geq\frac{4}{3}\geq 4\sqrt{3}tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+tg^2\frac{A}{2}\right)\left(1+tg^2\frac{B}{2}\right)\left(1+tg^2\frac{C}{2}\right)+\left(1-tg^2\frac{A}{2}\right)\left(1-tg^2\frac{B}{2}\right)\left(1-tg^2\frac{C}{2}\right)\geq 8\sqrt{3}tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}.\frac{1-tg^2\frac{B}{2}}{1+tg^2\frac{B}{2}}.\frac{1-tg^2\frac{C}{2}}{1+tg^2\frac{C}{2}}\geq\sqrt{3}\frac{2tg\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}.\frac{2tg\frac{B}{2}}{1+tg^2\frac{B}{2}}.\frac{2tg\frac{C}{2}}{1+tg^2\frac{C}{2}}$$

$\Leftrightarrow 1+\cos A\cos B\cos C\geq\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

Dấu "=" xảy ra khi ΔABC đều

Bài 3 : Cho a, b, c, là số đo 3 cạnh Δ.chứng minh rằng

$$T=\frac{a}{2b+2c-a}+\frac{b}{2c+2a-b}+\frac{c}{2a+2b-c}\geq 1$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho 6 số:

$$\sqrt{\frac{a}{2b+2c-a}};\sqrt{\frac{b}{2c+2a-b}};\sqrt{\frac{c}{2a+2b-c}};\sqrt{a(2b+2c-a)};\sqrt{b(2c+2a-b)};\sqrt{c(2a+2b-c)}$$

Ta có: $T.[a(2b+2c-a)+b(2c+2a-b)+c(2a+2b-c)]\geq(a+b+c)^2$

Sau đó dùng biến đổi tương đương chứng minh:

$(a + b+ c)^2 \geq 4ab +4bc +4ca -a^2 -b^2 - c^2$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 4 : Cho ΔABC và đường tròn nội tiếp Δ, các tiếp tuyến của đường tròn song song với 3 cạnh của Δ ***nhỏ và*** có diện tích S_1; S_2; S_3. Gọi S là diện tích ΔABC. Chứng minh: $S_1+S_2+S_3 \geq \frac{S}{3}$

Hướng dẫn giải

Giả sử $S_1 = S_{AMN}$

Ta có: ΔAMN đồng dạng ΔABC với tỉ số đồng dạng là: $\frac{ha-2r}{ha}$ với r là bán kính đường tròn nội tiếp và h_a là đường cao kẻ từ đỉnh A.

Ta có: $\frac{S_1}{S}=\left(\frac{ha-2r}{ha}\right)^2=\left(1-\frac{a}{p}\right)^2$

(Vì S = $\frac{1}{2}aha = pr \Rightarrow \frac{2r}{ha}=\frac{a}{p}$ với p là nửa chu vi)

Vậy: $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=1-\frac{a}{p}$

Tương tự: $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=1-\frac{b}{p}$; $\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=1-\frac{c}{p}$

Do đó: $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=3-\frac{a+b+c}{p}=1$

Áp dụng BĐT Bun ta có:

S = $\left(1.\sqrt{S_1}+1.\sqrt{S_2}+1.\sqrt{S_3}\right)^2 \leq \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(S_1+S_2+S_3\right)$

$\Rightarrow S_1+S_2+S_3 \geq \frac{S}{3}$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra khi ΔABC đều

Bài 5 : Cho ΔABC và 1 điểm Q nào đó ở trong Δ. Qua Q kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở M và cắt BC ở N. Qua điểm Q kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB ở F; cắt BC ở E. Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC ở P, cắt AB ở R. Kí hiệu S_1= dt(QMP); S_2 = dt(QEN); S_3 = dt(QFR) và S = dt(ABC).Chứng minh:

a) $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$ b) $S_1+S_2+S_3 \geq \frac{1}{3}S$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: ΔQMP đồng dạng ΔBAC (tỉ số $\frac{MP}{AC}$).

Suy ra $\frac{S_1}{S}=\left(\frac{MP}{AC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{MP}{AC}$.

Tương tự $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{PC}{AC}$; $\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{AM}{AC}$

Do đó: $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{MP+PC+AM}{AC}=\frac{AC}{AC}=1$

Suy ra: $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\Rightarrow S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$

b) Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$S=\left(1.\sqrt{S_1}+1.\sqrt{S_2}+1.\sqrt{S_3}\right)^2\le\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(S_1+S_2+S_3\right)$

Suy ra $S_1+S_2+S_3\ge\frac{1}{3}S$

Dấu "=" xảy ra khi $S_1=S_2=S_3\Leftrightarrow$ Q là trọng tâm ΔABC

Bài 6 : Cho a , b , c là 3 cạnh của tam giác.Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}b+c-a=x>0\\c+a-b=y>0\\a+b-c=z>0\end{cases}$

Khi đó ta cần chứng minh:

$\frac{y+z}{2\sqrt{x}}+\frac{z+x}{2\sqrt{y}}+\frac{x+y}{2\sqrt{z}}\ge\sqrt{\frac{y+z}{2}}+\sqrt{\frac{z+x}{2}}+\sqrt{\frac{x+y}{2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}\ge2\sqrt{xyz}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{x+z}\right)$ (1)

Dễ thấy $VT(1)\ge2(xy+yz+zx)$ (2)

Theo BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2\le6(x+y+z)$

$\Rightarrow\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\le\sqrt{6(x+y+z)}$

$VT(2)\le2\sqrt{3xyz(x+y+z)}$ (3)

Rõ ràng ta có

$x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2\ge xyz(x+y+z)$

$\Rightarrow(xy+yz+zx)^2\ge3xyz(x+y+z)$

$\Rightarrow xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}$ (4)

Từ (1) (2) (3) (4)$\Rightarrow$đpcm. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Bài 7 : *Cho ΔABC. Chứng minh :* $a^2b(a-b)+b^2c(b-a)+c^2a(c-a)\ge0$

(Trích đề thi vô địch toán quốc tế 1983)

Hướng dẫn giải

Gọi A'; B'; C' là các tiếp điểm:

Đặt: $\begin{cases} AB' = AC' = x \\ BA' = BC' = Y \\ CA' = CB' = Z \end{cases} => \begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases}$

vậy: $a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$

$<=> (y + z)^2 (z + x) (y - x) + (z + x)^2 (x + y) (x - y) + (x + y)^2 (y + z) (x - z) \geq 0$

$<=> y^3z + z^3x + x^3y - xyz(x+y+z) \geq 0$

$<=> y^3z + z^3x + x^3y \geq xyz (x+y+z)$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \geq x + y + z (*)$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki(biến dạng) ta có:

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = x + y + z$$

vậy (*) đúng (đpcm) .

Bài 8 : *Với a; b; c là độ dài 3 cạnh của Δ. CMR :* $\frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{a+c-b} + \frac{16}{a+b-c} \geq 26$

Hướng dẫn giải

Đặt: $P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{a+c-b} + \frac{16c}{a+b-c}$

Ta có: $2P = 4.\frac{2a}{b+c-a} + 9\frac{2b}{a+c-b} + 16\frac{2c}{a+b-c}$

$$= 4.\left(\frac{a+b+c}{b+c+a} - 1\right) + 9\left(\frac{a+b+c}{a+c-b} - 1\right) + 16\left(\frac{a+b+c}{a+b-c} - 1\right)$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{a+c-b} + \frac{16}{a+b-c}\right) - 29$$

$$= \left[(b+c-a) + (a+c-b) + (a+b-c)\right]\left[\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{a+c-b} + \frac{16}{a+b-c}\right] - 29$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki, ta có:

$$81 = (2+3+4)^2 = \left[\frac{2}{\sqrt{b+c-a}}.\sqrt{b+c-a} + \frac{3}{\sqrt{a+c-b}}.\sqrt{a+c-b} + \frac{4}{\sqrt{a+b-c}}\sqrt{a+b-c}\right]^2$$

$$\leq \left[(b+c-a) + (a+c-b) + (a+b-c)\right]\left[\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{a+c-b} + \frac{16}{a+b-c}\right]$$

=> 2P ≥ 81 - 29

=> 2P ≥ 52 => P ≥ 26

Chọn a = 7; b = 6; c = 5 thì dấu đẳng thức xảy ra.

Bài 9 : *Cho elip (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ các điểm M; N chuyển động lần lượt trên, các tia Ox; Oy sao cho MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định toạ độ của M; N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.*

Hướng dẫn giải

C$_1$: Gọi M(m;O) và N(O,r) với m; n>0 là 2 điểm C^2 đường trên 2 tia Ox; Oy.

Đường thẳng MN có pt: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}-1=0$

Đường thẳng này tx với (E) khi và chỉ khi: $16\left(\frac{1}{m}\right)^2+9\left(\frac{1}{n}\right)^2=1$

Theo ĐBT Bunhiacôpxki. Ta có $MN^2=m^2+n^2=(m^2+n^2)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)\geq\left(m.\frac{4}{m}+n.\frac{3}{n}\right)^2=49$

=> MN ≥ 7

Dấu "=" xảy ra <=> $\begin{cases} m:\frac{4}{m}=n:\frac{3}{n} \\ \frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}=1 \\ m>0;n>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2\sqrt{7};n=\sqrt{21}$

Vậy với $M(2\sqrt{7};0;N(0;\sqrt{21})$ thì MN đạt GTNN và GTNN của Mn là 7

C$_2$: Pt tiếp tuyến tại điểm (x_0; y_0) thuộc (E) là $\frac{x.x_0}{16}+\frac{y.y_0}{9}=1$

Suy ra toạ độ của M và N là $M\left(\frac{16}{x_0};0\right)$ và $N\left(0;\frac{9}{y_0}\right)$

$$\Rightarrow MN^2=\frac{16^2}{x_0^2}+\frac{9^2}{y_0^2}=\left(\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{9}\right)\left(\frac{16^2}{x_0^2}+\frac{9}{y_0^2}\right)\geq(4+3)^2=49$$

Khi đó $M=\left(2\sqrt{7};0\right);N\left(0;\sqrt{21}\right)$ và GTNN của MN là 7

Bài 10 : *Cho ΔABC. Cho p; q; r >0.* CMR*:* $\frac{P}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\geq 2s.\sqrt{3}$

(Trích tạp chí toán học và tuổi trẻ)

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bài toán sau:

Trong ΔABC ta có: $a^2+b^2+c^2 \geq 4s\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Thật vậy:

(2) $\Leftrightarrow \left[a^2-(b-c)^2\right]+\left[b^2-(c-a)^2\right]+\left[c^2-(a-b)^2\right] \geq 4s\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 4(p-a)(p-b)+4(p-b)(p-c)+4(p-c)(p-a) \geq 4s\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx \geq s\sqrt{3} \text{ với } \begin{cases} x=p-a>0 \\ y=p-b>0 \\ z=p-c>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+xz \geq \sqrt{3(x+y+z)xyz}$$

(Vì theo công thức Hêrông: $s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}$

$$\Leftrightarrow (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2 \geq 0$$

BĐT này đúng. vậy (2) đước chứng minh:

Mặt khác theo BĐT Bunhiacôpxki. Ta có:

$$(a+b+c)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{q+r}}\sqrt{q+r}+\frac{b}{\sqrt{r+p}}\sqrt{r+p}+\frac{c}{\sqrt{p+q}}\sqrt{p+q}\right)^2$$

$$\leq 2\left(\frac{a^2}{p+r}+\frac{b^2}{r+p}+\frac{c^2}{p+q}\right)(p+q+r)$$

$$\leq 2\left(\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\right)+2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\right) \geq (a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\geq a^2+b^2+c^2-\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 4s\sqrt{3}$$

Vậy: $\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2 \geq 2s\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ p=q=r \end{cases}$

Chú ý:

+ Qua phép chứng minh trên, ta có kết quả "đẹp" trong ΔABC

$a^2+b^2+c^2 \geq 4s\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 4s\sqrt{3}$

+ Lấy p = q = r > 0 ta có BĐT quen thuộc

$a^2+b^2+c^2 \geq 4s\sqrt{3}$ (Đề thi Olympic toán quốc tế lần 3)

+ Lấy a = b = c. ta có BĐT Nesbit:

$$\frac{p}{q+r}+\frac{q}{r+p}+\frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2} \quad (3)$$

Dấu "=" xảy ra khi p = q = r > 0

+ Nếu nhân 2 vế của (3) cho p + q + r > 0 ta được

$$\frac{p^2}{q+r}+\frac{q^2}{r+p}+\frac{r^2}{p+q} \geq \frac{p+q+r}{2}$$

Bài 11 : Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G, bán kính mặt cầu ngoại tiếp R. CMR

$$GA+GB+GC+GD+4R \geq \frac{2}{\sqrt{6}}\left(AB+AC+AD+BC+CD+DB\right)$$

(Trích tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

Hướng dẫn giải

Ta có 2 bổ đề:

- **Bổ đề 1**: Nếu G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$GA^2=\frac{3\left(AB^2+AC^2+AD^2\right)-\left(CD^2+DB^2+BC^2\right)}{16}$$

Chứng minh:

Gọi G_a là trọng tâm của ΔBCD. Ta có:

$$GA^2=\frac{9}{16}AG_a^2=\frac{9}{16}.\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)^2$$

$$=\frac{3\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2\right)-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)^2-\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2}{16}$$

$$=\frac{3\left(AB^2+AC^2+AD^2\right)-\left(CD^2+DB^2+BC^2\right)}{16}$$

- **Bổ đề 2:** Nếu O; G theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$R^2-OG^2=\frac{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}{4}=\frac{AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2}{4}$$

Chứng minh:

Theo hệ thức Leibnitz, với mọi điểm M, ta có

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+4MG^2$

Từ đó, cho M trùng O, ta được

$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+4OG^2$

Suy ra: $R^2-OG^2=\dfrac{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}{4}$ (1)

Từ bổ đề 1 suy ra $\dfrac{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}{4}=\dfrac{AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2}{4}$ (2)

Từ (1)(2) suy ra điều phải chứng minh

Trở lại việc giải bài toán trên

Ta có $R.GA=OA.GA\ge\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}=\dfrac{OA^2+GA^2-OG^2}{2}=\dfrac{GA^2+R^2-OG^2}{2}$

Từ đó theo các bổ đề 1 và 2, ta có

$$R.GA\ge\frac{AB^2+AC^2+AD^2}{8}$$

Theo BĐT Cauchy và Bunhiacôpxki, ta có

$$\sqrt{6}\left(R+GA\right)\ge2\sqrt{6}\sqrt{R.GA}=\sqrt{3}\sqrt{8R.GA}\ge\sqrt{3\left(AB^2+AC^2+AD^2\right)}\ge\sqrt{\left(AB+AC+AD\right)^2}$$

Suy ra $\sqrt{6}\left(R+GA\right)\ge AB+AC+AD$

Tương tự $\begin{cases}\sqrt{6}\left(R+GB\right)\ge BC+BD+BA\\ \sqrt{6}\left(R+GC\right)\ge CD+CA+CB\\ \sqrt{6}\left(R+GD\right)\ge DA+DB+DC\end{cases}$

Suy ra $GA+GB+GC+GD+4R\ge\dfrac{2}{\sqrt{6}}\left(AB+AC+AD+BC+CD+DB\right)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ là đều

BÀI TẬP :

Bài 1 : Cho nửa đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính AB, M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn.Xác định vị trí của M để $MA+\sqrt{3}MB$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2 : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn bán kính R; $BC=a;CA=b;AB=c$ .Gọi x;y;z lần lượt là khoảng cách từ M thuộc miền trong của ΔABC đến các cạnh BC;CA;AB.Chứng minh: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$

Bài 3 : Cho a , b , c là 3 cạnh của tam giác.Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}}$

Bài 4 : Cho a , b , c là 3 cạnh của tam giác và $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ .Chứng minh: $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{36}{35}\left(p^2+\dfrac{abc}{p}\right)$

Bài 5 : Điểm M nằm trong ΔABC.Hạ MA , MB , MC lần lượt vuông góc với BC;CA;AB.Xác định vị trí của M để $\frac{BC}{MA}+\frac{CA}{MB}+\frac{AB}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6 : Cho tứ giác lồi ABCD.Cho $M \in AC; P \in BC; Q \in AD; MP$ song song $AB; MQ$ song song CD.

Chứng minh : $\frac{1}{MP^2+MQ^2} \le \frac{1}{AB^2}+\frac{1}{CD^2}$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Phụ lục 2

Dạng khác của Bunhiacốpxki

DẠNG 1: Bất đẳng thức Schwartz (Svắcxơ)

Cho một số nguyên dương $n \ge 1$ và hai dãy số thực $a_1; a_2; ...; a_n$ và $b_1; b_2; ...; b_n$, trong đó $a_i \ge 0; b_i > 0; \forall i = \overline{1,n}$.

Khi đó ta có: $$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Chứng minh:

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+...+b_n) \ge (a_1+a_2+...+a_n)^2$$

Hay

$$\left[\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2+\left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\right)^2+...+\left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{b_1}\right)^2+\left(\sqrt{b_2}\right)^2+...+\left(\sqrt{b_n}\right)^2\right]$$

$$\ge \left[\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)\left(\sqrt{b_1}\right)+\left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\right)\left(\sqrt{b_2}\right)+...+\left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)\left(\sqrt{b_n}\right)\right]^2$$

Áp dụng BĐT BCS cho hai dãy số thực: $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}; \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}; ...; \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$ và $\sqrt{b_1}; \sqrt{b_2}; ...; \sqrt{b_n}$ ta có BĐT trên. Từ đó ta có BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} : \sqrt{b_1} = \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} : \sqrt{b_2} = ... = \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} : \sqrt{b_n}$

Hay $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

DẠNG 2:

Cho 4 số $a;b;c;d$ tuỳ ý ta có :

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \quad (1)$$

Chứng minh:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 \le a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$

$$\Leftrightarrow a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2 \le a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$$

$$\Leftrightarrow ac+bd \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo BĐT Bunhiacôpxki.

VẬN DỤNG 2 DẠNG TRÊN:

Bài 1: Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh: 1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$ 2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT BCS ta có các BĐT sau:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b} \ge \frac{(1+1)^2}{a+b} = \frac{4}{a+b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{1^2}{c} \ge \frac{(1+1+1)^2}{a+b+c} = \frac{9}{a+b+c}$$

Bài 2 : Cho a, b, c dương . Chứng minh : 1) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c$ 2) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge a^2+b^2+c^2$

Hướng dẫn giải

1) Áp dụng BĐT BCS ta có: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{b+c+a} = a+b+c$

2) Ta có: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} = \frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca} = \frac{(a^2)^2}{ab}+\frac{(b^2)^2}{bc}+\frac{(c^2)^2}{ca}$.

Áp dụng BĐT BCS ta có: $\frac{(a^2)^2}{ab}+\frac{(b^2)^2}{bc}+\frac{(c^2)^2}{ca} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}$.

Mặt khác, ta đã biết: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca > 0$

Từ đó ta suy ra:

$$\frac{(a^2)^2}{ab}+\frac{(b^2)^2}{bc}+\frac{(c^2)^2}{ca}\ge\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)(a^2+b^2+c^2)\ge a^2+b^2+c^2.$$

Đến đây ta có đpcm.

Bài 3 : Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}\le\frac{1}{6a}+\frac{1}{6b}+\frac{1}{6c}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{2b}+\frac{3^2}{3c}\ge\frac{(1+2+3)^2}{a+2b+3c}=\frac{36}{a+2b+3c}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{3}{a}\ge\frac{36}{b+2c+3a}$

$$\frac{1}{c}+\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\ge\frac{36}{c+2a+3b}$$

Cộng the vế ba BĐT trên ta nhận được:

$$\frac{6}{a}+\frac{6}{b}+\frac{6}{c}\ge\frac{36}{a+2b+3c}+\frac{36}{b+2c+3a}+\frac{36}{c+2a+3b}$$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}\le\frac{1}{6a}+\frac{1}{6b}+\frac{1}{6c}$.

Bài 4 : Tìm GTNN của biểu thức

$P=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c}$ $P=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\ge\frac{a^2}{a(2b+c)}+\frac{b^2}{b(2c+a)}+\frac{c^2}{c(2a+b)}$ trong đó a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Hướng dẫn giải

Do a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $b+c-a,c+a-b,a+b-c$ là các số thực dương.

Ta có: $P=4\left(\frac{a}{b+c-a}+\frac{1}{2}\right)+9\left(\frac{b}{c+a-b}+\frac{1}{2}\right)+16\left(\frac{c}{a+b-c}+\frac{1}{2}\right)-\frac{29}{2}$

$$=\frac{2(a+b+c)}{b+c-a}+\frac{9(a+b+c)}{2(c+a-b)}+\frac{16(a+b+c)}{a+b-c}-\frac{29}{2}$$

$$=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)-\frac{29}{2}$$

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}=\frac{2^2}{b+c-a}+\frac{3^2}{c+a-b}+\frac{4^2}{a+b-c}$$

$$\ge\frac{(2+3+4)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}=\frac{81}{a+b+c}$$

Từ đó suy ra: $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)\geq\frac{81}{2}$

Do đó:

$$P=\left(\frac{a+b+C}{2}\right)\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)-\frac{29}{2}\geq\frac{81}{2}-\frac{29}{2}=26$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{b+c-a}=\frac{3}{c+a-b}=\frac{4}{a+b-c}$

Hay $\frac{5}{2c}=\frac{7}{2a}=\frac{6}{2b}$

Vậy GTNN của biểu thức P là 26, đạt được khi $\frac{a}{7}=\frac{b}{6}=\frac{c}{5}>0$

Bài 5 : Tìm GTNN của biểu thức $P=\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c}$ trong đó a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$

Hướng dẫn giải

Vì $a+b+c=1$ nên $1+b-a=(a+b+c)+b-a=2b+c$

Tương tự ta cũng chứng minh được:

$$1+c+b=2c+a \text{ và } 1+a-c=2a+b$$

Từ đó suy ra:

$$P=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geq\frac{a^2}{a(2b+c)}+\frac{b^2}{b(2c+a)}+\frac{c^2}{c(2a+b)}$$

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$\frac{a^2}{a(2b+c)}+\frac{b^2}{b(2c+a)}+\frac{c^2}{c(2a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a(2b+c)b(2c+a)c(2a+b)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1$$

(vì $(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)\geq 3(ab+bc+ca)$)

Do đó: $P=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geq 1$

Vậy GTNN của biểu thức P là 1

Bài 6 : Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $a^2+b^2+c^2=1$

Chứng minh: $\frac{a^3}{a+2b+3c}+\frac{b^3}{b+2c+3a}+\frac{c^3}{c+2a+3b}\geq\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt P là vế trái của BĐT cần chứng minh. Ta cần chứng minh: $P\geq\frac{1}{6}$

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$P=\frac{(a^2)^2}{a(a+2b+3c)}+\frac{(b^2)^2}{b(b+2c+3a)}+\frac{(c^2)^2}{c(c+2a+3b)}$$

$$\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a\left(a+2b+3c\right)+b\left(b+2c+3a\right)+c\left(c+2a+3b\right)}$$
$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)+5\left(ab+bc+ca\right)}$$

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca>0$
Từ đó suy ra:

$$P=\frac{a^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{b^2}{b\left(c+a\right)}+\frac{c^2}{c\left(a+b\right)} \geq \frac{\left(a+b+c\right)^2}{a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)}$$
$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ca\right)}{2\left(ab+bc+ca\right)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}+1 \geq$$
$$P \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)+5\left(ab+bc+ca\right)} \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

Thay $a^2+b^2+c^2=1$ vào BĐT trên ta nhận được BĐT cần chứng minh.

Bài 7 : Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh:

1) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (BĐT Nesbit) 2) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2$ (BĐT Nesbit)

Hướng dẫn giải

1) Đặt P là vế trái của BĐT đã cho. Ta cần chứng minh $P \geq \frac{3}{2}$

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$P=\frac{a^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{b^2}{b\left(c+a\right)}+\frac{c^2}{c\left(a+b\right)} \geq \frac{\left(a+b+c\right)^2}{a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)}$$
$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ca\right)}{2\left(ab+bc+ca\right)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}+1 \geq \frac{3}{2}$$

(do $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca>0$)

2) Đặt Q là vế trái của BĐT đã cho. Ta cần chứng minh $Q \geq 2$.
Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$Q=\frac{a^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{b^2}{b\left(c+d\right)}+\frac{c^2}{c\left(d+a\right)}+\frac{d^2}{d\left(a+b\right)}$$
$$\geq \frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{a\left(b+c\right)+b\left(c+d\right)+c\left(d+a\right)+d\left(a+b\right)} \geq 2$$
$$\left(a+b+c+d\right)^2 \geq 2\left(ab+bc+cd+da\right)+4\left(ac+bd\right) \geq \frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{a\left(b+c\right)+b\left(c+d\right)+c\left(d+a\right)+d\left(a+b\right)}.$$
$$\Leftrightarrow \left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2 \geq 0$$

Do đó BĐT đã cho đúng nếu ta chứng minh được:

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \ge 2$$

Hay $(a+b+c+d)^2 \ge 2(ab+bc+cd+da)+4(ac+bd)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 2(ac+bd)$

$\Leftrightarrow (a-c)^2+(b-d)^2 \ge 0$: BĐT đúng.

Bài 8 : Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} = \frac{(a^2)^2}{a^2(b+c)}+\frac{(b^2)^2}{b^2(c+a)}+\frac{(c^2)^2}{c^2(a+b)}$$

$$\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}$$

$$\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT BCS dạng thông thường ta có:

$$\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]^2 \le \left[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\right]\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]$$

Mặt khác, ta có các BĐT sau:

• $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \le \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}$

• $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca) \le 4(a^2+b^2+c^2)$

Từ đó suy ra : $\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]^2 \le \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}.4(a^2+b^2+c^2) = \dfrac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)^3$

Hay $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Kết hợp với (1) ta suy ra:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

$$\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$$

Bài 9 : Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh : $\dfrac{25a}{b+c}+\dfrac{16b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}>8$

Hướng dẫn giải

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$25\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+16\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)>8+25+16+1=50$$

Hay $\dfrac{25}{b+c}+\dfrac{16}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\geq\dfrac{50}{a+b+c}$ (1)

Ký hiệu P là vế trái của (1). Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$P=\frac{5^2}{b+c}+\frac{4^2}{c+a}+\frac{1^2}{a+b}\geq\frac{(5+4+1)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{50}{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{b+c}{5}=\dfrac{c+a}{4}=\dfrac{a+b}{1}$

Suy ra $\dfrac{b+c}{5}=\dfrac{(c+a)+(a+b)}{4+1}=\dfrac{b+c+2a}{5}$, hay $a=0$: trái với giả thiết $a>0$

Từ đó suy ra: $P>\dfrac{50}{a+b+c}$

Do đó BĐT (1) đúng và ta có BĐT cần chứng minh.

Bài 10 : Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{ca+a^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Hướng dẫn giải

Ký hiệu P là cế trái của BĐT cần chứng minh. Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$P=\frac{\frac{a}{b}}{\sqrt{\frac{a}{b}+1}}+\frac{\frac{b}{c}}{\sqrt{\frac{b}{c}+1}}+\frac{\frac{c}{a}}{\sqrt{\frac{c}{a}+1}}\geq\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2}{\sqrt{\frac{a}{b}+1}+\sqrt{\frac{b}{c}+1}+\sqrt{\frac{c}{a}+1}}$$

Hay $P\geq\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}}$ (1) với $x=\dfrac{a}{b},y=\dfrac{b}{c},z=\dfrac{c}{a}$

(chú ý $xyz=1$).

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm ta có:

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\geq3.\sqrt[3]{\sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx}}=3.\sqrt[3]{xyz}=3.$$

Suy ra:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=(x+y+z)+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\geq x+y+z+6$$

Mặt khác, áp dụng BĐT BCS (dạng thông thường ta có):

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\leq\sqrt{3(x+y+z+3)}$$

Kết hợp hai BĐT vừa có với BĐT (1) ta nhận được:

$$P \ge \frac{x+y\_z+6}{\sqrt{3(x+y+z+3)}}$$

Hay $P \ge \dfrac{S+3}{\sqrt{3S}}$ với $S = x+y+z+3 \ge 3.\sqrt[3]{xyz}+3 = 6$

Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh đúng nếu ta có: $\dfrac{S+3}{\sqrt{3S}} \ge \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Hay $\sqrt{S} + \dfrac{3}{\sqrt{S}} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (2).

Chú ý: $S \ge 6$ nên ta có các biến đổi như sau:

$$VT(2) = \frac{\sqrt{S}}{2} + \left(\frac{\sqrt{S}}{2} + 3\frac{3}{\sqrt{S}}\right) \ge \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{\frac{\sqrt{S}}{2}.\frac{3}{\sqrt{S}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Từ đó suy ra BĐT (2) đúng và ta có BĐT cần chứng minh

Bài 11 : Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1 \qquad \text{(IMO 2001)}$$

Hướng dẫn giải

Ký hiệu P là vế trái của BĐT BCS ta có: $P = \dfrac{a}{a\sqrt{a^2+8bc}} + \dfrac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ca}} + \dfrac{c}{c\sqrt{c^2+8ab}}$

$$\ge \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab}}$$

Từ đó suy ra BĐT đã cho đúng nếu ta chứng minh được:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

Hay $a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab} \le (a+b+c)^2$ (1)

Ký hiệu Q là vế trái của BĐT (1).

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$Q^2 = \left[\sqrt{a}\sqrt{a(a^2+8bc)} + \sqrt{b}\sqrt{b(b^2+8ca)}\sqrt{c}\sqrt{c(c^2+8ab)}\right]^2$$

$$\le (a+b+c)\left[a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)\right]$$

$$= (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)$$

Do đó BĐT (1) đúng nếu ta có: $a^3+b^3+c^3+24abc \le (a+b+c)^3$

Ta đã biết:

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a(b^2+c^2)+3b(c^2+a^2)+3c(a^2+b^2)+6abc.$

Từ đó suy ra BĐT trên tương đương với:

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) \ge 6abc.$$

Hay $a\left(b^2+c^2-2bc\right)+b\left(c^2+a^2-2ca\right)+c\left(a^2+b^2-2ab\right)\ge 0$

BĐT cuối cùng đúng vì nó tương đương với BĐT đúng:

$$a\left(b-c\right)^2+b\left(c-a\right)^2+c\left(a-b\right)^2\ge 0\Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 12 : Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a,b,c :

$$\frac{\left(a^3\right)}{b^2-bc+c^2}+\frac{\left(b^3\right)}{c^2-ca+a^2}+\frac{\left(c^3\right)}{a^2-ab+b^2}\ge 3\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

Hướng dẫn giải

Ký hiệu P là vế trái của BĐT BCS ta có:

Áp dụng BĐT BCS ta có: $P=\dfrac{\left(a^2\right)^2}{a\left(b^2-bc+c^2\right)}+\dfrac{\left(b^2\right)^2}{b\left(c^2-ca+a^2\right)}+\dfrac{\left(c^2\right)}{c\left(a^2-ab+b^2\right)}$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a\left(b^2-bc+c^2\right)+b\left(c^2-ca+a^2\right)+c\left(a^2-ab+b^2\right)}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)-3abc}$$

Mặt khác, áp dụng BĐT: $3\left(xy+yz+zx\right)\le\left(x+y+z\right)^2$ ta có:

$$3\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\le a+b+c$$

Do đó để có BĐT đã cho ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)-3abc}\ge a+b+c$$

Hay

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\left[ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)-3abc\right]\left(a+b+c\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a^4+b^4+c^4\right)+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge$$

$$\ge ab\left(a+b\right)^2+bc\left(b+c\right)^2+ca\left(c+a\right)^2+abc\left[\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(c+a\right)\right]-3abc\left(a+b+c\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\ge abc\left(a+b+c\right)\ge a^3\left(b+c\right)+b^3\left(c+a\right)+c^3\left(a+b\right)$$

$$a^2\left[\left(a^2+bc\right)-a\left(b+c\right)\right]+b^2\left[\left(b^2+ca\right)-b\left(c+a\right)\right]+c^2\left[\left(c^2+ab\right)-a\left(a+b\right)\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^2\left(b-c\right)\left(b-a\right)+c^2\left(c-a\right)\left(c-b\right)\ge 0\qquad(1)$$

Do vai trò của a,b,c trong BĐT (1) là như nhau nên không nhấn mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\ge b\ge c>0$. Khi đó ta có:

$$\text{VT (1)}\ge a^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^2\left(b-c\right)\left(b-a\right)$$

$$=\left(a-b\right)\left[a^2\left(a-c\right)-b^2\left(b-c\right)\right]$$

$$=\left(a-b\right)\left[\left(a^3-b^3\right)-\left(a^2c-b^2c\right)\right]$$

$$=(a-b)^2\left(a^2+b^2+ab-ca-cb\right)$$
$$=(a-b)^2\left[a(a-c)+b(b-c)+ab\right]\geq 0$$

Từ đó suy ra BĐT (1) đúng. Do đó ta có BĐT cần chứng minh.

Bài 13 : Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

Hướng dẫn giải

Ta chỉ cần chứng minh BĐT sau đúng:

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

Hay $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}-3\geq\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b}-2$

$$\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}\geq\frac{(a+b)^2+(b+c)^2-2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}\qquad(1)$$

Ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2=\left[(a-b)+(b-c)\right]^2-2(a-b)+(b-c)$

$$=(c-a)^2-2(a-b)+(b-c)$$

Từ đó suy ra BĐT (1) tương đương với:

$$\frac{(c-a)^2-2(a-b)(b-c)+(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Hay $\dfrac{(c-a)^2-(a-b)(b-c)}{ab+bc+ca}\geq\dfrac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}$

$$\Leftrightarrow(c-a)^2(a+b)(b+c)-\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\geq(c-a)^2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow(c-a)^2b^2-\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\geq 0$$

$\Leftrightarrow b^4+a^2c^2-2b^2ac\geq 0\Leftrightarrow\left(b^2-ac\right)^2\geq 0$: BĐT đúng.

Từ đó ta có BĐT cần chứng minh.

Bài 16 : Cho $f:R^+\to R^+$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện:

$\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(z)}\geq\sqrt{f(y)}$ với mọi $x\geq y\geq z>0$

Chứng minh BĐT sau đúng với mọi số thực dương a,b,c:

$$f(a)(a-b)(a-c)+f(b)(b-c)(b-a)+f(c)(c-a)(c-b)\geq 0\qquad(1)$$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \ge b \ge c > 0$. Theo giả thiết ta có:

$$\sqrt{f(a)} + \sqrt{f(c)} \ge \sqrt{f(b)} \qquad (2)$$

Dễ dàng chứng minh rằng nếu $a = b$ hoặc $b = c$ thì (1) đúng. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $a > b > c > 0$.
Khi đó ta viết BĐT (1) dưới dạng:

$$f(a)(a-b)(a-c) + f(c)(a-c)(b-c) \ge f(b)(b-c)(a-b)$$

Hay $\dfrac{f(a)}{b-c} + \dfrac{f(c)}{a-b} \ge \dfrac{f(b)}{a-c}$ (3) vì $a-c>0, a-b>0, b-c>0$

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$\frac{f(a)}{b-c} + \frac{f(c)}{a-b} = \frac{\left(\sqrt{f(a)}\right)^2}{b-c} + \frac{\left(\sqrt{f(c)}\right)^2}{a-b} \ge \frac{\left(\sqrt{f(a)} + \sqrt{(c)}\right)^2}{b-c+a-b} = \frac{\left(\sqrt{f(a)} + \sqrt{(c)}\right)^2}{a-c}$$

Kết hợp BĐT trên với BĐT (2) ta nhận được:

$$\frac{f(a)}{b-c} + \frac{f(c)}{a-b} \ge \frac{\left(\sqrt{f(a)} + \sqrt{(c)}\right)^2}{a-c} = \frac{f(b)}{a-c}$$ $\Rightarrow$ BĐT (3) đúng và ta có ĐPCM.

***Nhận xét*:**

Nếu hàm số $f : R^+ \to R^+$ xác định bởi $f(x) = x^r$ với r là một số thực thì f thỏa mãn tính chất của bài toán.

Thật vậy, với $x \ge y \ge z > 0$ ta có:

i) Nếu $r \ge 0$ thì $x^r \ge y^r$ nên $x^r + z^r > x^r \ge y^r$

ii) Nếu $r < 0$ thì $z^r \ge y^r$ nên $x^r + z^r > z^r \ge y^r$

Do đó trong cả hai trường hợp ta đều có: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{(z)} \ge \sqrt{f(y)}$

Khi đó ta có BĐT:

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \ge 0$$

với mọi số thực dương a, b, c

BÀI TẬP :

Bài 1: Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Chứng minh: $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n} \ge \dfrac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh;

1) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$ 2) $\dfrac{a^3}{b+c} + \dfrac{b^3}{c+a} + \dfrac{c^3}{a+b} \ge \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh : $\dfrac{1}{a+2b} + \dfrac{1}{b+2a} \le \dfrac{1}{3a} + \dfrac{1}{3b}$

Bài 4: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức
$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

Bài 5: Cho a,b,c,d,e,f là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\ge 3$$

Bài 6: Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh : $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$

Bài 7: Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{xa}{b+c}+\frac{yb}{c+a}+\frac{zc}{a+b}\ge\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}-\frac{x+y+z}{2}$$

Bài 8: Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

1) $\frac{a}{\sqrt{a^2+3\left(b^2+c^2\right)+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3\left(c^2+a^2\right)+2ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3\left(a^2+b^2\right)+2ab}}\ge 1$

2) $\frac{a}{\sqrt{a+xb}}+\frac{b}{\sqrt{b+xc}}+\frac{c}{\sqrt{c+xa}}\ge\frac{\sqrt{3\left(a+b+c\right)}}{\sqrt{1+x}}$ với $x\ge 2$