CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC LUYỆN THI ĐẠI HỌC

LÊ XUÂN ĐẠI

(***GV THPT Chuyên Vĩnh Phúc***)

Bất đẳng thức (BĐT) là một trong những dạng toán thường có trong các đề thi ĐH-CĐ. Các thí sinh của chúng ta đều rất sợ và lúng túng khi gặp phải bài toán chứng minh BĐT hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Đơn giản là do các bài toán về BĐT thường là bài toán khó trong đề thi, nhằm phân loại và chọn được các học sinh khá giỏi. Thường thì các sĩ tử không biết bắt đầu từ đâu để giải quyết bài toán về BĐT. Bài viết này muốn hệ thống cho các bạn các phương pháp cơ bản và một số dạng bài tập về BĐT. Hy vọng sẽ giúp các em học sinh lớp 12 đạt kết quả cao trong kì thi ĐH- CĐ sắp tới.

Những lời khuyên bổ ích khi học về BĐT:

1. Nắm chắc các tính chất cơ bản của BĐT

2. Nắm vững các phương pháp cơ bản chứng minh BĐT như: PP biến đổi tương đương; PP sử dụng BĐT Cô si; PP sử dụng đạo hàm…

3. Đặc biệt chú trọng vào ôn tập các kỹ thuật sử dụng BĐT Cô si, luôn biết đặt và trả lời các câu hỏi như: khi nào áp dụng; điều kiện cho các biến là gì; dấu bằng xảy ra khi nào; nếu áp dụng thế thì có xảy ra dấu bằng không; tại sao lại thêm bớt như vậy…

4. Luôn bắt đầu với các BĐT cơ bản (điều này vô cùng quan trọng); học thuộc một số BĐT cơ bản có nhiều áp dụng nhưng phải chú ý điều kiện áp dụng được, chẳng hạn như:

* $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (1) với mọi a,b,c

* $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ (2) với mọi a,b,c

* $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$ (3) với mọi a,b,c

* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}; \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ (4) với mọi a,b,c dương

* $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \ge \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ (5) với mọi a,b,x,y.

* $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \ge \frac{(x+y)^2}{a+b}$ (6) với mọi a,b dương và x,y bất kỳ

* $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ (7) với mọi a,b,c dương và x,y,z bất kỳ

………

Dấu bằng xảy ra ở các BĐT (1), (2), (3) và (4) là a=b=c.

Dấu bằng xảy ra ở BĐT (5) và (6) là $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$; ở (7) là $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (với mẫu khác 0).

(Các em hãy bắt tay ngay vào việc chứng minh các BĐT cơ bản trên nhé. Hãy tìm cho mình một cách giải nhất quán, nhớ nó và khi làm bài thi đều phải chứng minh lại, rồi mới được áp dụng)

Trước hết xin đưa ra 3 phương pháp thông dụng nhất để chứng minh BĐT

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG:

1. Phương pháp chung

Để chứng minh $A\geq B$ ta thường thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta chứng minh $A-B\geq 0$. Để làm được điều này ta thường sử dụng hằng đẳng thức để phân tích $A-B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.

Cách 2: Xuất phát từ một BĐT đúng nào đó ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh. Đối với cách này thường cho ta lời giải không được tự nhiên cho lắm và thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt.

<u>Chú ý</u>: Một số kết quả hay sử dụng

* $x^2\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $x^2=0\Leftrightarrow x=0$

* $|x|\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $|x|=0\Leftrightarrow x=0$

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi $a,b\in\mathbb{R}$ ta có: $a^2+b^2\geq 2ab$ (1)

Giải: Ta có $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b.

Thật đơn giản phải không các bạn, nếu tinh ý thêm một chút thôi các bạn sẽ tìm ra những kết quả tổng quát hơn và niềm tin để vượt qua bài BĐT trong đề thi ĐH là hoàn toàn khả thi.

Cụ thể là với ba số thực a,b,c bất kỳ ta có $a^2+b^2\geq 2ab$; $b^2+c^2\geq 2bc$ và $a^2+c^2\geq 2ac$

Có thể thấy ngay có hai BĐT tương đương với (2) rất quen thuộc là

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \quad (3) \text{ với mọi } a,b,c$$

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \quad (4) \text{ với mọi } a,b,c$$

Chúng ta sẽ nói thêm ứng dụng tuyệt vời của 3 BĐT (2), (3) và (4) ở những phần sau

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi $a,b,c \in \mathbb{R}$ ta có: $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$

Giải: áp dụng liên tiếp BĐT (2) trong ví dụ 1 ta được:

$$a^4+b^4+c^4 = (a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$$
$$\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ac)^2$$
$$\geq ab.bc+ab.ac+bc.ac = abc(a+b+c)$$

Như vậy nếu đề thi hỏi các bạn một bài như sau:

"Cho 3 số a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4 \geq abc$" thì chắc các bạn đã có cơ hội cao để đạt điểm 10 rồi! (hãy cứ tự tin lên nào)

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi $a,b \geq 0$ ta có:

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$$

Giải: Ta biến đổi $a^3+b^3-a^2b-ab^2 = (a-b)^2(a+b) \geq 0$, suy ra đpcm.

Nhận xét: BĐT trên thật đơn giản nhưng cũng có khá nhiều ứng dụng với các bài toán khó hơn, chẳng hạn ta xét 3 bài toán sau:

Bài 1. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Hướng giải: Ta có $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 = ab(a+b) \Rightarrow a^3+b^3+abc \geq ab(a+b+c)$

Suy ra $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \dfrac{1}{ab(a+b+c)}$.

Cùng hai BĐT tương tự ta được

$$VT \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ac(a+b+c)} = \frac{1}{abc} \quad \text{(đpcm)}.$$

Xin đưa ra thêm hai hệ quả của bài toán trên (coi như bài tập cho các bạn luyện tập)

* Cho $a,b,c>0$ thoả mãn abc=1. Khi đó: $\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{a^3+c^3+1} \leq 1$

* Cho $a,b,c>0$ thoả mãn abc=1. Khi đó: $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{a+c+1}\le 1$

(che dấu bản chất hơn)

Bài 2. Cho a,b,c không âm thoả mãn $a+b+c=2009$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}+\sqrt[3]{4(a^3+c^3)}$$

Hướng giải: Mới nhìn BĐT ta cảm thấy rất khó khăn vì có căn bậc 3 và điều quan trọng là phải sử lí được biểu thức trong dấu căn. Bất đẳng thức $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$ cho ta một "*manh mối*" để giải quyết bài toán, nhưng nếu áp dụng nguyên si thì chưa ổn. Ta biến đổi một chút BĐT này

$$a^3+b^3\ge a^2b+ab^2 \Leftrightarrow 3(a^3+b^3)\ge 3(a^2b+ab^2)\Leftrightarrow 4(a^3+b^3)\ge (a+b)^3$$

Như vậy ta có thu được BĐT $4(a^3+b^3)\ge (a+b)^3$.

Chắc các bạn cũng đồng ý với tôi rằng phép biến đổi đó rất tự nhiên.

Bây giờ áp dụng BĐT vừa tìm được ta có

$$P=\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}+\sqrt[3]{4(a^3+c^3)}\ge (a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)=4018$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2009}{3}$.

Vậy GTNN của P bằng 4018.

Bài toán tổng quát: Cho a,b,c không âm thoả mãn $a+b+c=k$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt[3]{m(a^3+b^3)}+\sqrt[3]{m(b^3+c^3)}+\sqrt[3]{m(a^3+c^3)}$$

(m,k là các hằng số dương cho trước)

Bài 3. Gọi A,B,C là ba góc của một tam giác bất kì. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}$$

Hướng giải: Đây quả là một bài toán khó, ta hãy mò mẫm theo các đầu mối nhỏ nhé

* Thứ nhất: Ta đã có một đánh giá rất quen thuộc trong tam giác:

$$\sin A+\sin B=2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{C}{2}$$

* Thứ hai: Các căn bậc 3 gợi ý ta nghĩ tới BĐT: $a+b\le\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}$

Như vậy, ta có $\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}\le\sqrt[3]{4(\sin A+\sin B)}\le\sqrt[3]{4.2\cos\frac{C}{2}}=2.\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$

Tương tự ta có $\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}\le 2.\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}$ và $\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin C}\le 2.\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được

$$\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}\le\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

Vậy $P\le 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A=B=C, tức là tam giác ABC đều

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với a,b,c là 3 cạnh một tam giác bất kỳ ta có:

$$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$$

Giải: BĐT bên trái đã chứng minh, để chứng minh BĐT bên phải ta xuất phát từ một BĐT cơ bản trong tam giác là $|b-c|<a<b+c$.

* Nếu sử dụng $|b-c|<a$ thì ta biến đổi như sau:

$$a>|b-c|\Rightarrow a^2>(b-c)^2=b^2+c^2-2bc\Rightarrow a^2>b^2+c^2-2bc$$

Tương tự $b^2>a^2+c^2-2ac$; $c^2>a^2+b^2-2ab$. Cộng theo từng vế ba BĐT ta được đpcm.

* Nếu sử dụng $a<b+c$ thì ta biến đổi như sau:

$a<b+c\Rightarrow a^2<ab+ac$, cùng hai BĐT tương tự ta có đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ ta có BĐT sau (BĐT Mincôpxki)

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}\quad(1)$$

Giải: Bình phương hai vế và biến đổi tương đương:

$$a^2+x^2+b^2+y^2+2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)}\ge a^2+x^2+b^2+y^2+2ab+2xy$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)}\ge ab+xy\quad(*)$$

\+ Nếu $ab+xy\le 0$ thì hiển nhiên (*) đúng

\+ Nếu $ab+xy>0$ thì $(*)\Leftrightarrow(a^2+x^2)(b^2+y^2)\ge(ab+xy)^2\Leftrightarrow(bx-ay)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi bx=ay.

<u>Chú ý</u>: Có thể chứng minh BĐT trên bằng cách sử dụng BĐT véc tơ rất đơn giản như sau (khi làm bài thi ĐH các bạn phải chứng minh BĐT này nếu muốn dùng nó, lúc đó các bạn hãy chọn một phương án chứng minh mà các bạn cho là hay và dễ nhớ nhất. OK).

Đặt $\vec{u}=(a;x)$ và $\vec{v}=(b;y)$, khi đó $\vec{u}+\vec{v}=(a+b;x+y)$.

Từ BĐT véc tơ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$ và công thức độ dài véc tơ ta có ngay đpcm.

Nhận xét: BĐT Mincôpxki có rất nhiều ứng dụng hay và có thể giải quyết được nhiều bài BĐT hóc búa. Xin được minh hoạ điều này qua 3 bài toán sau đây:

Bài 1. Cho a,b không âm thoả mãn $a+b=1$.

a) Chứng minh rằng: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\ge\sqrt{5}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}$

Hướng giải:

a) Ta có $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\ge\sqrt{(1+1)^2+(a+b)^2}=\sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$.

b) Ta có $P=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}\ge\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{4}{a+b}\right)^2}=\sqrt{17}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$. Vậy GTNN của P bằng $\sqrt{17}$.

Bài 2. Cho x,y,z dương thoả mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$

Hướng giải: áp dụng liên tiếp hai lần BĐT (1) ta được:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$
$$\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2}=\sqrt{82}$$

Bài 3. Cho x,y,z dương thoả mãn $x+y+z=\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{223+x^2}+\sqrt{223+y^2}+\sqrt{223+z^2}$$

Hướng giải: Vẫn như bài 2 ta có hướng giải quyết ngay như sau:

$$P=\sqrt{(\sqrt{223})^2+x^2}+\sqrt{(\sqrt{223})^2+y^2}+\sqrt{(\sqrt{223})^2+z^2}\geq\sqrt{(3\sqrt{223})^2+(x+y+z)^2}=\sqrt{2009}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Vậy GTNN của P bằng $\sqrt{2009}$.

* Có lẽ không phải nói gì thêm nữa thì các bạn cũng đã thấy vẻ đẹp và sức mạnh của BĐT Mincôpxki. Nhưng tôi nhắc lại rằng phải chứng minh lại BĐT này trước khi áp dụng nhé!

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Chứng minh rằng: $\forall a,b,c,d,e\in R$, ta có:

a) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq a(b+c+d+e)$.

b) $\dfrac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3 \qquad (a+b\geq 0)$.

Bài 2. Chứng minh rằng:

a) $(a^5+b^5)(a+b)\geq(a^4+b^4)(a^2+b^2),\quad \forall a,b: ab>0$.

b) $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geq\dfrac{2}{1+ab},\quad \forall a,b\geq 1$.

Bài 3. Cho Δ ABC. Chứng minh rằng:

a) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2<a^3+b^3+c^3$.

b) $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

Bài 4. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $\forall a,b,c,d\geq 0$

b) $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$, $\forall a,b,c,d\in R$

c) $b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{1}{b}(c+a)\leq(c+a)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right) \qquad \forall\ a\geq b\geq c>0$

d) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\geq\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \qquad \forall\ a\geq b\geq c>0$

Bài 5. Cho a, b > 0: a + b = 2. Chứng minh rằng $ab\leq a^ab^b$

Bài 6. Cho hai số thực a ,b thoả mãn a + b ≥ 2. Chứng minh rằng : $a^4+b^4\geq a^3+b^3$

Bài 7. Cho ba số a ,b ,c $\in$ [0;1]. Chứng minh rằng : $a + b + c - ab - bc - ca \le 1$

Bài 8. Cho a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3^a}+\frac{1}{3^b}+\frac{1}{3^c}\ge 3\left(\frac{a}{3^a}+\frac{b}{3^b}+\frac{c}{3^c}\right)$$

Bài 9. Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{a^2-ac+c^2}\ge a+b+c$$

II. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

1. Bất đẳng thức Côsi

a) Cho $a \ge 0,\ b \ge 0$. Khi đó $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi a=b

b) Cho $a \ge 0,\ b \ge 0, c \ge 0$. Khi đó $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức xảy ra khi a=b=c

Các dạng tương đương là: $a+b \ge 2\sqrt{ab}$; $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc};\ abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

c) Tổng quát: Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \ge 2)$. Khi đó ta có

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chú ý: Với các bài thi ĐH- CĐ thông thường chỉ cần áp dụng BĐT Côsi với 2 hoặc 3 số.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2 \quad \forall a, b > 0$ b) $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \ge 2 \quad \forall a, b \ne 0$

Giải. a) áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi a=b

b) Ta không thể áp dụng ngay BĐT Côsi vì chỉ có điều kiện $a, b \ne 0$. Biến đổi tương đương BĐT bằng cách bình phương hai vế:

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \ge 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \ge 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \ge 2$$

Đến đây theo BĐT côsi thì BĐT sau là đúng, vậy ta có đpcm

Chú ý là dấu bằng xảy ra khi $|a| = |b|$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ (1)

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ (2)

Giải. a) Nếu viết lại BĐT cần chứng minh dưới dạng $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ thì hướng giải quyết là quá rõ ràng. Thật vậy, áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương ta được

$$a+b\geq 2\sqrt{ab} \text{ và } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}.$$

Suy ra $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4\sqrt{ab}.\frac{1}{\sqrt{ab}}=4$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a=b

b) Hoàn toàn tương tự với phần a) bằng cách áp dụng BĐT Côsi với 3 số.

Nhận xét: Hai BĐT trong ví dụ 1 có rất nhiều ứng dụng và cũng là con đường sáng tạo ra vô vàn các BĐT hay. Có thể nói phần lớn các BĐT trong đề thi ĐH- CĐ có gốc tích của hai BĐT này. Nói ra các áp dụng hay của hai BĐT này thì nhiều vô kể và không biết sẽ tốn kém bao giấy mực, tôi xin chỉ dẫn chứng ra vài bài toán điển hình:

Bài 1. Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \quad (3)$$

Hướng giải: áp dụng ba lần BĐT (1) ta được

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b};\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{b+c};\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{a+c}$$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được điều phải chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a=b=c.

Có lẽ các bạn đã cảm thấy quá ấn tượng với lời giải của bài toán, kiến thức sử dụng ở đây là rất đơn giản nhưng hiệu quả. Nếu tiếp tục áp dụng một lần nữa BĐT (3) ta được BĐT sau:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được BĐT:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 4\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right)\quad (5)$$

Đến đây các bạn có nhớ tới đề thi ĐH khối A năm 2004 không. Xin đưa ra đây cho các bạn có cảm giác "*trúng tủ*" nhé:

Bài 2. (Đề khối A- 2004): Cho a,b,c dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\leq 1\quad (6)$

Bài 3. Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\leq\frac{a+b+c}{2}\quad (7)$$

Hướng giải: Theo BĐT (1) ta có:

$$\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Rightarrow\frac{ab}{a+b}\leq\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{4}(a+b)$$

Cùng hai BĐT tương tự ta được BĐT (7) cần chứng minh.

Hệ quả: Nếu cho tổng ba số a,b,c thì tìm được GTLN của biểu thức vế trái của (7)

Chẳng hạn ta đưa ra bài toán khá hay sau:

* Cho x,y,z dương thoả mãn $x+2y+4z=12$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2xy}{x+2y}+\frac{8yz}{2y+4z}+\frac{4xz}{4z+x}\leq 6$$

Với bài toán này, các bạn chỉ cần coi $a=x;b=2y;c=4z$ thì $a+b+c=12$ và BĐT cần chứng minh trở thành: $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\leq 6$

(đây chính là hệ quả của (7) rồi. OK)

Bài 4. Gọi a,b,c là ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi tam giác đó. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\quad (8)$$

Hướng giải: Dễ thấy $p-a\geq 0;p-b\geq 0;p-c\geq 0$ và nhận xét rằng

$$(p-a)+(p-b)=2p-a-b=c$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{c}$$

Cùng hai BĐT tương tự ta được BĐT (8) cần chứng minh

Bài 5. Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}\left(a+b+c\right)\quad(9)$$

Hướng giải: Ta có $VT(9)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}.\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$

$$(\text{ do } (a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)\ )$$

Bài 6. Cho x,y,z dương thoả mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$

Hướng giải: Để có thể áp dụng được BĐT (2) ta biến đổi P như sau:

$$P=\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{y+1-1}{y+1}+\frac{z+1-1}{z+1}=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$$

Ta có $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{9}{x+y+z+3}=\frac{9}{4}$, suy ra $P\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Vậy GTLN của P bằng $\frac{3}{4}$.

Tất nhiên với lời giải như trên các bạn có thể làm hoàn toàn tương tự với bài toán tổng quát hơn

Bài 7. Cho x,y,z dương thoả mãn $x+y+z=1$ và k là hằng số dương cho trước.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{kx+1}+\frac{y}{ky+1}+\frac{z}{kz+1}$$

Bài 8. Cho a,b,c dương thoả mãn $a+b+c\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$$

Hướng giải: Ta có ngay $P \ge \dfrac{9}{a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab} = \dfrac{9}{(a+b+c)^2} \ge 9$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Vậy $P_{min}=9$

Bài 9. Cho A,B,C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+\cos 2A}+\frac{1}{2+\cos 2B}+\frac{1}{2-\cos 2C} \ge \frac{6}{5}$$

Hướng giải: Ta có $\dfrac{1}{2+\cos 2A}+\dfrac{1}{2+\cos 2B}+\dfrac{1}{2-\cos 2C} \ge \dfrac{9}{6+\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C}$

Dễ chứng minh được rằng $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C \le \dfrac{3}{2}$ (các bạn hãy tự chứng minh nhé)

Suy ra $\dfrac{1}{2+\cos 2A}+\dfrac{1}{2+\cos 2B}+\dfrac{1}{2-\cos 2C} \ge \dfrac{9}{6+\frac{3}{2}} = \dfrac{6}{5}$ (đpcm)

Bài 10. Cho a,b,c dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac} \ge 30 \quad (10)$$

Hướng giải: Ta đánh giá vế trái của (10) một cách rất tự nhiên như sau:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac} \ge \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\ge \frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{7}{ab+bc+ca} \ge \frac{9}{1}+\frac{7}{\frac{1}{3}}=30$$

(do BĐT cơ bản $ab+bc+ca \le \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=\dfrac{1}{3}$)

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

a) $(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}) \ge 9$. b) $(1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

c) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$ d) $a+b+c\le\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+b^2}{2a}$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau:

$A=2a+\frac{1}{a^2}$ với a > 0. $B=x^3+\frac{3}{x^2}$ với x > 0.

Bài 3. Cho a, b, c > 0 thoả mãn: a + b + c = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T=a^3+b^3+c^3$

Bài 4. Cho x, y, z > 0: x + y + z = 1. Tìm Min: $R=x^4+y^4+z^4$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của mỗi biểu thức sau:

$M=x(3-2x);\quad (0<x<3/2).$

$N=(1-x)(2-y)(4x+y);\quad (0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2).$

$P=x(1-x)^3;\quad 0\le x\le 1.$

Bài 6. Chứng minh rằng với a, b, c > 0 ta có:

a) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$

b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$

c) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$

d) $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$

e) $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{c^2+a^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

f) $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài 7. Cho Δ ABC với ba cạnh là a,b,c. CMR: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3.$

Bài 8. Cho $a,b\ge 1$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$.

Bài 9. Cho Δ ABC. Chứng minh rằng:

a) $(p-a)(p-b)(p-c)\le\frac{1}{8}abc.$

b) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$.

Bài 10. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c\leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9$$

Bài 11. Chứng minh rằng:

a) $a+\frac{1}{b(a-b)}\geq 3$, $\forall a>b>0$

b) $a+\frac{1}{b(a-b)^2}\geq 2\sqrt{2}$, $\forall a>b>0$

c) $a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\geq 3$, $\forall a>b>0$

d) $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2$, $\forall a\in R$

e) $\frac{x^2}{1+16x^4}+\frac{y^2}{1+16y^4}\leq\frac{1}{4}$ $\forall x,y\in R$

f) $(x+1)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)\geq 16$ $\forall x>0$

Bài 12. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. CMR: $abc(a+b)(b+c)(c+a)\leq\frac{8}{729}$

Bài 13. Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. CMR: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 14. Cho $a,b,c>0$: $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. CMR: $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geq 4$

Bài 15. a) Cho a , b , c > 0 và $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 2$. CMR: a.b.c $\leq\frac{1}{8}$.

b) Cho $a,b,c,d>0$ thoả mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}\geq 3$. CMR: $abcd\leq\frac{1}{81}$

Bài 16. Cho a, b , c ∈ R và a + b + c = 0. CMR: $8^a+8^b+8^c\geq 2^a+2^b+2^c$.

Bài 17. Chứng minh rằng $(x+2)^2+\frac{2}{x+2}\geq 3$ $(x>0)$

Bài 18. Cho a > 0, b > 0 và a + b = 1. Chứng minh rằng $ab^2\leq\frac{4}{27}$.

Bài 19. Chứng minh rằng nếu x > - 3 thì $\frac{2x}{3}+\frac{9}{(x+3)^2}\geq 1$

Bài 20. Chứng minh rằng nếu a > b > 0 thì $a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\geq 3$

Bài 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q = x + y biết x > 0, y > 0 thoả mãn: $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$

Bài 22. Với xyz = 1, x, y, z > 0. CMR: $\frac{x^2}{z+y}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

Bài 23. Tìm giá trị nhỏ nhất của P = $\frac{a^3}{1+b}+\frac{b^3}{1+a}$ với a, b là các số dương thoả mãn điều kiện ab = 1.

Bài 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$ với x, y là các số dương thỏa mãn x+y=1.

Bài 25. Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng

$$4\frac{(y+z)}{x}+9\frac{(x+z)}{y}+16\frac{(y+x)}{z}\geq 26$$

Bài 26. Cho x + y = 1, x, y > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}$

Bài 27. Cho $x,y\geq 0$, $x^2+y^2=1$. CMR: $\frac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 1$

Bài 28. Cho a + b = 5, a, b > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất $P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Bài 29. Cho x,y,z dương thoả mãn xyz=1. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) P=x+y+z b) P=$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ c) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$

Bài 30. Cho 3 số a,b,c > 0. CMR: $\frac{2\sqrt{a}}{a^3+b^2}+\frac{2\sqrt{b}}{b^3+c^2}+\frac{2\sqrt{c}}{c^3+a^2}\leq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Bài 31. Cho x ,y ,z $\in$ [0;1]. CMR: $(2^x+2^y+2^z)(2^{-x}+2^{-y}+2^{-z})\leq\frac{81}{8}$

Bài 32. Cho $a\geq 3$; $b\geq 4$; $c\geq 2$. Tìm GTLN của $A=\frac{ab\sqrt{c-2}+bc\sqrt{a-3}+ca\sqrt{b-4}}{abc}$

Bài 33. Cho a,b,c dương . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

Bài 34. Cho a,b,c dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{a+c}\leq\sqrt[3]{18}$$

Bài 35. Cho a,b,c dương thoả mãn $ab+bc+ca=5$. Chứng minh rằng:

$$3x^2+3y^2+z^2\geq 10$$

Bài 36. Cho a,b,c dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng:

a) $a^3+b^3+c^3\geq a+b+c$

b) $a^3+b^3+c^3\geq a^2+b^2+c^2$

Bài 37. Cho a,b,c dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right).\left(b+\frac{1}{c}-1\right).\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\leq 1$$

Bài 38. Giả sử a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b-c}+\frac{b}{b+c-a}+\frac{c}{c+a-b}\geq 3$$

Bài 39. Cho a,b,c dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

Bài 40. Cho a,b,c dương thoả mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geq 1$$

Để các bạn có thêm kỹ thuật khi áp dụng BĐT Côsi tôi xin giới thiệu một chút về phương pháp chọn điểm rơi côsi. Đây có thể nói là một "*tuyệt chi*êu" độc đáo giúp các em nhanh chóng tìm ra lời giải bài toán.

III. PHƯƠNG PHÁP THÊM HẠNG TỬ VÀ CHỌN ĐIỂM RƠI CÔSI

Từ việc dự đoán được dấu bằng xảy ra (điểm rơi Côsi), thêm bớt các số hạng cho phù hợp và sử dụng khéo léo bất đẳng thức Côsi ta có thể đạt được những kết quả không ngờ. Để có một định hướng đúng chúng ta thực hiện các bước phân tích bài toán như sau:

1. Dự đoán dấu bằng xảy ra hay các điểm mà tại đó đạt được GTLN, GTNN.
2. Từ dự đoán dấu bằng, kết hợp với các BĐT quen biết, dự đoán cách đánh giá (tất nhiên là thêm một chút nhạy cảm và khả năng toán học của mỗi người) cho mỗi bài toán. Chú ý rằng mỗi phép đánh giá phải đảm bảo nguyên tắc "dấu bằng xảy ra ở mỗi bước này phải giống như dấu bằng mà ta đã dự đoán ban đầu".

Để làm rõ điều này tôi xin phân tích cách suy nghĩ tìm ra lời giải trong các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với $\forall a,b,c>0$ ta có:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$$

Phân tích bài toán:

* Trước hết ta nhận thấy nếu áp dụng ngay bất đẳng thức Cô si cho 3 số thì không ra được kết quả mong muốn.

* Bây giờ ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi nào, dễ nhận thấy đó là khi a = b = c.

Khi đó $\frac{a^2}{b}=b$. Vì vậy ta thêm b vào phần tử đại diện $\frac{a^2}{b}$ để có chứng minh sau:

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương ta có:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a;\frac{b^2}{c}+c\ge 2b;\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\ge 2a+2b+2c\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với $x,y,z>0$ ta có

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\ge x^2+y^2+z^2$$

Phân tích bài toán:

Ta thấy rằng với hạng tử $\frac{x^3}{y}$ có thể có hai hướng sau:

Hướng 1: Thêm $\frac{x^3}{y}+xy\ge 2x^2$, cùng với BĐT cơ bản $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ cộng các bất đẳng thức lại ta có điều phải chứng minh.

Hướng 2: Thêm $\frac{x^3}{y}+\frac{x^3}{y}+y^2\ge 3x^2;\frac{y^3}{z}+\frac{y^3}{z}+z^2\ge 3y^2;\frac{z^3}{x}+\frac{z^3}{x}+x^2\ge 3z^2$ rồi cộng lại ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$x^3+y^3+z^3\ge x+y+z$$

Phân tích bài toán:

* Dự đoán dấu bằng xảy ra khi x = y = z = 1

* Ta muốn đạt hai mục đích là đánh giá giảm bậc từ bậc 3 xuống bậc 1 và đảm bảo dấu bằng khi x=1, như vậy phải sử dụng BĐT côsi với 3 số, đó là điều dễ hiểu. Vậy thì phải thêm hằng số nào vào với x^3. Chắc các bạn đều thống nhất đó là số 1 rồi.

Lời giải: áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương ta được

$$x^3+1+1\ge 3x\,;\ y^3+1+1\ge 3y\,;\ z^3+1+1\ge 3z$$

Cộng từng vế 3 BĐT ta được : $x^3+y^3+z^3\ge 3(x+y+z)-6$

Mặt khác $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$ nên $3(x+y+z)-6\ge x+y+z$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Cho a, b, c dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

Phân tích bài toán:

* Ta sẽ thêm cho $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}$ những hạng tử gì? Để trả lời được câu hỏi đó các bạn dự đoán dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1. Lúc đó thì $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}=\frac{1}{4}=\frac{1+1}{8}=\frac{1+b}{8}=\frac{1+c}{8}$

Vì vậy ta có cách chứng minh sau:

Lời giải: Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương ta được

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}.\frac{1+b}{8}.\frac{1+c}{8}}=\frac{3}{4}a$$

Cùng hai BĐT tương tự ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{3}{4}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)\ge\frac{3}{2}\quad\text{(đpcm).}$$

Điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Phân tích bài toán:

* Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a=b=c.

* Khi đó $\frac{a^3}{b(c+a)}=\frac{a^3}{a(a+a)}=\frac{a}{2}=\frac{c+a}{4}=\frac{b}{2}$. Viết như vậy vì dụng ý của ta là phải khử được mẫu số ở vế trái. Như vậy có thể thực hiện lời giải đơn giản như sau:

Lời giải: Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương ta được

Cùng hai BĐT tương tự ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6. Cho a, b, c dương thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\sqrt[3]{a+2008b}+\sqrt[3]{b+2008c}+\sqrt[3]{c+2008a}$$

Phân tích bài toán:

* Dự đoán P đạt GTLN tại $a=b=c=1$ (tất nhiên không phải lúc nào điều dự đoán của ta cũng đúng)

* Khi đó $\sqrt[3]{a+2008b}=\sqrt[3]{2009}$ và dự đoán giá trị lớn nhất của P bằng $3\sqrt[3]{2009}$ (điều này cũng phần nào nói nên là không nên thi trắc nghiệm về các bài toán tìm GTLN, GTNN)

* Bây giờ với một tham số m>0 nào đó, ta viết

$$\sqrt[3]{a+2008b}=\frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}.\sqrt[3]{(a+2008b).m.m}\le\frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}.\frac{(a+2008b)+m+m}{3}$$

Vấn đề bây giờ là ta chọn m bằng bao nhiêu thì phù hợp?

Dễ thấy dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a=b=1\\a+2008b=m\end{cases}\Rightarrow m=2009$

Lời giải: Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương ta có:

$$\sqrt[3]{a+2008b}=\frac{1}{\sqrt[3]{2009^2}}.\sqrt[3]{(a+2008b).2009.2009}\le\frac{1}{\sqrt[3]{2009^2}}.\frac{(a+2008b)+2009+2009}{3}$$

Cùng hai BĐT tương tự và cộng lại ta được:

$$P\le\frac{1}{\sqrt[3]{2009^2}}.\left(\frac{2009(a+b+c)+6.2009}{3}\right)=3.\sqrt[3]{2009}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy GTLN của P bằng $3\sqrt[3]{2009}$.

Ví dụ 7. Cho a,b,c không âm thỏa mãn a+b+c=3. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=a^3+64b^3+c^3.$$

Phân tích bài toán:

Đây là bài toán mà các vai trò của các biến không như nhau. Tuy nhiên ta vẫn dự đoán được P đạt GTNN khi a=c. Vấn đề là bằng bao nhiêu thì chưa thể nói ngay được. Để biết điều đó ta xét hai tham số $\alpha,\beta>0$ và viết P như sau:

$$P=(a^3+\alpha^3+\alpha^3)+(64b^3+\beta^3+\beta^3)+(c^3+\alpha^3+\alpha^3)-4\alpha^3-2\beta^3$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$P\ge 3\alpha^2a+3.4\beta^2b+3\alpha^2c-4\alpha^3-2\beta^3\quad(*)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=c=\alpha \\ b=\beta/4 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha+\dfrac{\beta}{4}=3 \quad (1)$

Đến đây vẫn chưa đủ để có thể tìm ra α,β.

Để ý rằng giả thiết cho a+b+c=3 nên từ (*) ta sẽ làm cho các hệ số đứng trước a,b,c bằng nhau. Cụ thể là $3\alpha^2=12\beta^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) dễ tìm ra $\alpha=\dfrac{24}{17},\beta=\dfrac{12}{17}$.

Khi đó $a=c=\dfrac{24}{17},b=\dfrac{3}{17}$ và $P\ge\dfrac{12^3}{17^2}$

Mọi thứ thế là ổn. Các bạn hãy tự viết lại lời và "*nâng nâng*" trong niềm vui chiến thắng nhé.

Nhận xét: Nếu ta bỏ giả thiết a+b+c=3 thì ta có thể thu được BĐT sau:

Cho a,b,c không âm. Chứng minh rằng

$$289(a^3+64b^3+c^3)\ge 64(a+b+c)^3.$$

Lời giải của bài toán này dành cho bạn đọc (gợi ý là có thể chuẩn hoá để đưa về bài toán ở trên).

Ví dụ 8. Cho a,b,c dương thỏa mãn $xy+yz+xz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=3(x^2+y^2)+z^2.$$

Phân tích bài toán:

Chắc không phải bình luận gì thì các bạn đều công nhận với tôi rằng bài toán này quá hay. Nhìn rất đẹp nhưng cũng không hề dễ để tìm được GTNN của P.

Điều kiện rằng buộc ở giả thiết là đối xứng với x,y,z, nhưng trong biểu thức P chỉ đối xứng với x,y; vai trò của z với x,y là như nhau. Vì vậy ta dự đoán P đạt GTNN khi x=y và $\dfrac{z^2}{2}=\alpha x=\alpha y$ (với $\alpha>0$ nào đó).

Ta đưa ra đánh giá như sau:

$\alpha x^2+\dfrac{z^2}{2}\ge 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}.xz$; $\alpha y^2+\dfrac{z^2}{2}\ge 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}.yz$ và $\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}.\left(x^2+y^2\right)\ge 2.\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}.xy$

Do đó: $\left(\alpha+\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\right).\left(x^2+y^2\right)+z^2\ge 2.\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}.\left(xy+yz+xz\right)=2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}$.

Như thế ta chọn $\alpha > 0$ sao cho $\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = 3$ (số 3 trong đề bài), có thể thấy ngay một số $\alpha = 2$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} xy + yz + xz = 1 \\ \frac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x = 2y \\ xy + yz + xz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Lúc đó GTNN của P bằng 2.

IV. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐẠO HÀM

1. Nội dung phương pháp

***a) Các kiến thức liên quan*:**

1. Hàm f(x) đồng biến trên D khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0\ \forall x \in D$.

2. Hàm f(x) nghịch biến trên D khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0\ \forall x \in D$.

3. Cho hàm f(x) đồng biến trên D, khi đó với $u, v \in D$ ta có: $u > v \Leftrightarrow f(u) > f(v)$

4. Cho hàm f(x) nghịch biến trên D, khi đó với $u, v \in D$ ta có: $u > v \Leftrightarrow f(u) < f(v)$

b) Phương pháp giải: Để chứng minh BĐT bằng PP đạo hàm, ta khảo sát sự biến thiên của một hàm số f(x) nào đó có liên quan tới cấu trúc của BĐT cần chứng minh. Từ sự biến thiên của hàm số f(x) ta suy ra BĐT cần chứng minh. Chú ý là các biến bị ràng buộc theo giả thiết của bài toán

Để các bạn có thể hiểu ngay tư tưởng của phương pháp này tôi xin đưa ra một bài toán đơn giản sau:

“ Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{a^2+1} \geq b + \frac{1}{b^2+1}$ ”

Các bạn có thể chứng minh bài toán này bằng PP biến đổi tương đương, tuy nhiên nhìn vào đặc điểm hai vế của BĐT ta xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$ với x>0.

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+x^2+(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$ với mọi x>0.

Suy ra hàm f(x) đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Mà $a \geq b > 0 \Rightarrow f(a) \geq f(b)$, hay $a + \frac{1}{a^2+1} \geq b + \frac{1}{b^2+1}$ (đpcm).

Nhận xét: Bài toán trên đã thể hiện khá rõ về PP sử dụng đạo hàm trong bài toán BĐT.

2. Các dạng toán cơ bản

Trong các đề thi vào ĐH- CĐ thường xuất hiện hai dạng bài toán sau:

<u>Dạng 1</u>: Bất đẳng thức cần chứng minh chỉ có một biến.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi $x \geq 0$ ta có: $e^x \geq 1 + x$ (1)

Suy ra hàm f(x) đồng biến trên $\left[0;+\infty\right) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$. Vậy $e^x \geq 1 + x$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x=0.

Nhận xét: Bằng việc xét đạo hàm hai lần và sử dụng ví dụ 1 ta có kết quả sau:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ với mọi } x \geq 0 \quad (2)$$

Hoặc ta có kết quả tổng quát hơn: Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \text{ với mọi } x \geq 0 \quad (3)$$

Ví dụ 2: Cho $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ (4) b) $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ (5)

Giải. a) Xét hàm $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ với $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có

$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$; $f''(x) = -\sin x + x$; $f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0$

Do đó $f''(x) \geq f''(0) = 0 \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$, suy ra đpcm.

b) Xét hàm $f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$, ta có $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Lập bảng biến thiên của hàm f(x) trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ta được

$f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Vậy $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ (đpcm).

Ví dụ 3: Cho $x \geq 2$. Chứng minh rằng $x + \frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}$ (6)

Giải. Nếu bạn nào chưa thạo về việc sử dụng BĐT Côsi để giải bài toán này thì PP sử dụng hàm số là một "*vũ khí*" để lấp lỗ hổng đó. Thật đơn giản khi ta xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ với $x \geq 2$. Ta có ngay $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$, suy ra hàm f(x) đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$

Do đó $f(x) \ge f(2) = \frac{5}{2}$ (đpcm).

Dạng 2: Bất đẳng thức cần chứng minh có nhiều biến

Ví dụ 1: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \ge \frac{10}{3} \quad (7)$$

Giải. Đặt $t = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$, khi đó theo BĐT Côsi thì $t \ge 3$.

Ta cần chứng minh $t + \frac{1}{t} \ge \frac{10}{3}$ với $t \ge 3$.

Đến đây thì bài toán được giải hoàn toàn tương tự với việc chứng minh BĐT (6).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a=b=c.

Ví dụ 2: Cho a,b,c dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (8)$$

Giải. Từ giả thiết ta viết lại (8) dưới dạng:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Chú ý thêm rằng $a, b, c \in (0;1)$

Điều này cho ta nghĩ tới việc chứng minh $x(1-x^2) \le \frac{2\sqrt{3}}{9}$ với $x \in (0;1)$

Điều này thì thật dễ dàng bằng cách xét hàm $x(1-x^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$ trên khoảng (0;1).

Ví dụ 3. (Khối A-2003): Cho x,y,z dương thoả mãn $x + y + z \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82} \quad (9)$$

Giải. Đặt vế trái của (9) là P. Theo các kết quả quen biết ta có:

$$P \ge \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \ge \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2}$$

Nếu giả thiết cho $x+y+z=1$ thì đã quá ổn rồi, nhưng ở đây giả thiết lại cho $x+y+z\le 1$. Giả thiết này thường làm cho các em HS bối rối. Tại sao không nghĩ tới hàm số nhỉ. Các bạn chỉ cần đặt $(x+y+z)^2=t$ thì $0<t\le 1$ và BĐT cần chứng minh trở thành $t+\frac{81}{t}\ge 82$ với $0<t\le 1$. Điều này thì quá đơn giản rồi. Bài toán được chứng minh xong.

Chú ý là dấu bằng vẫn xảy ra khi $x+y+z=1$ và x=y=z, hay $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Như vậy sức mạnh của PP hàm số có thể xuyên thủng bất kì "*hàng phòng ngự nào*" cho dù giả thiết và đề bài mới nhìn đã choáng. Tôi xin dẫn chứng thêm một vài bài BĐT "*không đối xứng*" nữa thì chắc các bạn mới tâm phục khẩu phục điều tôi nói.

Ví dụ 4. Cho a,b,c dương thỏa mãn a+b+c=1. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=a^3+b^3+\frac{1}{4}c^3$$

Giải. Sử dụng đánh giá $a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}$, suy ra

$$P\ge\frac{(a+b)^3}{4}+\frac{1}{4}c^3=\frac{(1-c)^3}{4}+\frac{1}{4}c^3=\frac{1}{4}(3c^2-3c+1)$$

Ta đã thành công khi đưa BĐT với 3 biến về chỉ còn 1 biến c, chú ý là $c\in(0;1)$.

Xét hàm $f(c)=\frac{1}{4}(3c^2-3c+1)$, ta có $f'(c)=\frac{1}{4}(6c-3)=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$

Từ đó $f(c)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a=b\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\frac{1}{4}\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy GTNN của P bằng $\frac{1}{16}$, khi $a=b=\frac{1}{4};c=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Cho a,b,c không âm thỏa mãn điều kiện a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}\quad(10)$$

Giải. W.L.O.G, giả sử c là số nhỏ nhất trong 3 số a,b,c. Khi đó $c\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Ta có $ab+bc+ca-2abc=c(1-c)+ab(1-2c)\le c(1-c)+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1-2c)$

$$= c(1-c)+\left(\frac{1-c}{2}\right)^2(1-2c).$$

Xét hàm số $f(c)=c(1-c)+\left(\frac{1-c}{2}\right)^2(1-2c)$ với $c\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Ta có $f'(c)=\frac{1}{2}c(1-3c)\ge 0$, suy ra hàm f(c) đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Do đó $f(c)\le f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Chứng minh rằng:

a) $x > sinx,\quad \forall x>0$ b) $e^x>1+x+\frac{x^2}{2},\quad \forall x>0$

c) $sinx+\tan x>2x,\quad \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 2. Tìm m để: $m^2x^4-2x^2+m\ge 0\ \ \forall x$.

Bài 3. a) Cho $x\in(0;1)$. CMR: $x(1-x^2)\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

b) với $\forall a,b,c>0: a^2+b^2+c^2=1$ ta có: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 4. Cho $a\ge b\ge 0$. CMR: $a+\frac{1}{a^2+1}\ge b+\frac{1}{b^2+1}$.

Bài 5. Cho $\alpha>1$. CMR với mọi $x\ge 0$ thì : $(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x$.

Bài 6. a) CMR với mọi x thì $x^5+(1-x)^5\ge\frac{1}{16}$.

b) Tổng quát: $a^n+b^n\ge\frac{1}{2^{n-1}}$ với n nguyên dương; a,b>0 thoả mãn a+b=1

c) Tìm GTNN của $f(x)=\sin^{10}x+\cos^{10}x$.

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi x>0 thì: $\ln x<\sqrt{x}$.

Bài 8. Cho $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$. CMR: $2^{2\sin x}+2^{tgx}\ge 2^{\frac{3x}{2}+1}$.

Bài 9. Cho 0<b<a. CMR: $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

Bài 10. a) Cho $t\ge 1$. CMR: $\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}\ge 0$

b) Cho x>y>0. CMR: $\dfrac{x+y}{2}>\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y}$.

Bài 11. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}\ge\sqrt{2}$.

Bài 12. (Khối A-2003). Cho x,y,z>0 thoả mãn: $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}\ .$$

Bài 13. (Khối D-2001). CMR với mọi $x\ge 0$ và với mọi α>1 ta luôn có $x^{\alpha}+\alpha-1\ge\alpha x$.

Từ đó hãy CMR: Với ba số dương a,b,c bất kì ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Bài 14. Chứng minh rằng với mọi $x\ge 0$ ta có: $\cos x\ge 1-\dfrac{x^2}{2}$.

Bài15. Cho tam giac ABC nhọn. Chứng minh rằng

$$\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2\pi$$

Bài 16. Chứng minh rằng mọi $x\ge 0$ thì ta có: $e^{x}-e^{-x}\ge 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Bài 17. Cho $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. CMR: $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8$.

Bài 18. Tìm GTNN của hàm số $f(x)=4x+\dfrac{9\pi^2}{x}+\sin x,\quad x>0$

Bài 19. Cho $0<\alpha\le\dfrac{3}{4}$. Chứng minh rằng $2.\alpha+\dfrac{1}{\alpha^2}>3$

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

Bài 21. Cho x,y,z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng:

$$6(y+z-x)+27xyz\leq 10$$

Bài 22. Cho x,y,z, dương thoả mãn x+y+z=4 và xyz=2. Tìm GTLN và GTNN của

$$P=x^4+y^4+z^4$$

V. MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC VÀ LỜI GIẢI

Bài 1: Chứng minh rằng với $\forall a,b,c>0$ ta có

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}\quad(1)$$

Bài giải

Với a, b, c > 0 ta chứng minh được: $\begin{cases}a^3+b^3\ge a^2b+ab^2\\ b^3+c^3\ge b^2c+bc^2\\ c^3+a^3\ge c^2a+ca^2\end{cases}$

$$\text{VT (1)}\le\frac{1}{a^2b+ab^2+abc}+\frac{1}{b^2c+bc^2+abc}+\frac{1}{c^2a+ca^2+abc}$$

$$=\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{abc}.$$

Bài 2: Cho x, y, z $\ge$ 0 thoả mãn $x+y+z\le3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\le\frac{3}{2}\le\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}$$

Bài giải

* Ta có: $1+x^2\ge2x\ \Rightarrow\ \frac{x}{1+x^2}\le\frac{1}{2}$. Tương tự $\frac{y}{1+y^2}\le\frac{1}{2}$ và $\frac{z}{1+z^2}\le\frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\le\frac{3}{2}$

* Ta có: $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge\frac{9}{(1+x)+(1+y)+(1+z)}\ge\frac{9}{3+(x+y+z)}\ge\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

Bài 3: Cho a, b, c > 0 sao cho abc = 1. Tìm GTNN của $P=\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ca}{b^2a+b^2c}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}$

Bài giải

Biến đổi $P=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(a+c)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{b+c}{bc}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{a+c}{ac}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Đến đây thì mọi thứ trở lên nhẹ nhàng hơn nhiều rồi

Ta chỉ cần đặt $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$, khi đó $xyz = 1$ và $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

áp dụng BĐT Côsi ta được: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge x$, $\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\ge y$, $\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge z$

$\Rightarrow P+\frac{x+y+z}{2}\ge x+y+z$ $\Rightarrow P\ge\frac{x+y+z}{2}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$. Vậy $P_{min}=\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$

Bài 4: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\ge\left(1+ab^2\right)\left(1+bc^2\right)\left(1+ca^2\right)\quad(1)$$

Bài giải

Ta có (1) tương đương

$a^3+b^3+c^3+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ge ab^2+bc^2+ca^2+a^3b^2c+ab^3c^2+a^2bc^3$.

áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có:

$a^3+b^3+b^3\ge 3ab^2$

$b^3+c^3+c^3\ge 3bc^2$

$c^3+a^3+a^3\ge 3ca^2$

Từ đó suy ra $3(a^3+b^3+c^3)\ge 3(ab^2+bc^2+ca^2)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge ab^2+bc^2+ca^2$ (2)

Tương tự ta có $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ge ab^3c^2+a^2bc^3+a^3b^2c$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $a^3+b^3+c^3+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ge ab^2+bc^2+ca^2+a^3b^2c+ab^3c^2+a^2bc^3$

Bài 5: Cho a, b, c > 0: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8\quad(1)$$

Bài giải

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ suy ra $3abc=ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\ge 1$

Biến đổi (1) $\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)-\frac{8}{abc}\ge 0$ (2)

Ta có VT(2) = $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}-\frac{7}{abc}$

$$= 4+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}-\frac{7}{abc}$$

$$\ge 4+3\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}-\frac{7}{abc}\ge 4+\frac{3}{abc}-\frac{7}{abc} \text{ (do } abc\ge 1)$$

$$\ge 4-\frac{4}{abc}\ge 0 \text{ (do } abc\ge 1) \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 6: Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

Bài giải

Ta có: $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x^3y^2}}+\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y^3z^2}}+\frac{2\sqrt{z}}{2\sqrt{z^3x^2}}=$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

Bài 7: Cho a, b > 0 thoả mãn a + b = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\ge 6$$

Bài giải

Theo BĐT Côsi ta có $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4$, $\forall x,y>0$ và $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$, $\forall x,y>0$

Do đó $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{4}{[illegible]}+\frac{4}{[illegible]}\ge 2+4=6$.

Bài 8: (Khối A- 2003). Cho x, y, z là ba số dương thoả mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$

Bài giải

Gặp những bài toán dạng này ta thường sử dụng BĐT sau (BĐT Mincôpxki)

$$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}\ge\sqrt{(x+y)^2+(a+b)^2}\quad (1) \text{ với mọi a,b,x,y}$$

$$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}\quad (2) \text{ với mọi a,b,c,x,y,z}$$

Chứng minh BĐT (1) thật đơn giản, có thể đưa ra 2 cách như sau:

Cách 1: Biến đổi tương đương (1) bằng cách bình phương hai vế và đưa về BĐT đúng $(bx-ay)^2\ge 0$

Cách 2: Sử dụng BĐT véc tơ

Với mọi véc tơ $\vec{u},\vec{v}$ ta có $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ (*)

(vì $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2+2\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\left(\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\right)^2$)

Đặt $\vec{u}=(x;a)$, $\vec{v}=(y;b)$. áp dụng (*) suy ra ngay BĐT (1)

áp dụng hai lần BĐT (1) ta suy ra BĐT (2), và cũng suy ra các BĐT tổng quát cho bộ 2n số…

Trở lại bài toán: áp dụng BĐT (2) ta được:

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}\ge\sqrt{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2+\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right)^2}=\sqrt{9t+\frac{9}{t}}$$

Với $t=\sqrt[3]{(xyz)^2}\Rightarrow 0<t\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\le\frac{1}{9}$.

Đến đây thì ý tưởng dùng hàm số là khá rõ ràng rồi

Xét hàm số $f(t)=9t+\frac{9}{t}$ với $t\in\left(0,\frac{1}{9}\right]$

Ta có $f'(t) = 9 - \frac{9}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0, \frac{1}{9}\right] \Rightarrow f(t)$ giảm trên $\left(0, \frac{1}{9}\right] \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = 82$.

Vậy $P \geq f(t) \geq \sqrt{82}$.

Bài 9: (Khối A – 2005). Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

Bài giải

Từ giả thiết và BĐT cần chứng minh cho phép ta nghĩ ngay tới BĐT cơ bản sau:

* Với a,b dương ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, hay $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b

* áp dụng "*khéo léo*" BĐT trên ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z}\right) \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z}\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{x+z}\right) \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2z}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{y+x}\right) \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2x}\right) \quad (3)$$

Cộng theo từng vế các BĐT (1), (2) và (3) ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$$

Bài 10: (Khối B – 2005). Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$$

Bài giải

* Mấu chốt của bài toán là phải biết phân tích các cơ số ở vế trái

$\frac{12}{5}.\frac{15}{4}=3^2$; $\frac{12}{5}.\frac{20}{3}=4^2$; $\frac{15}{4}.\frac{20}{3}=5^2$

* Đến đây áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x\geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x}=2.3^x \quad (1)$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\geq \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x}=2.4^x \quad (2)$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x}=2.5^x \quad (3)$$

Cộng các BĐT (1), (2), (3) ta được $\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\geq 3^x+4^x+5^x$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x=0.

Bài 11: (Khối D – 2005). Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn xyz = 1.

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq 3\sqrt{3}$$

Bài giải

* áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta có

$$1+x^3+y^3\geq 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3}=3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\geq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \quad (1)$$

* Cùng hai BĐT tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$$

* Mặt khác: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}}=3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq 3\sqrt{3}$$

Bài 12: (Dự bị D– 2005). Cho x, y, z là ba số thực thoả mãn $x+y+z=0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3+4^x}+\sqrt{3+4^y}+\sqrt{3+4^z}\geq 6$$

Bài giải

* Bài toán này có chút gần gũi với bài 11, nếu tinh ý ta thấy rằng

$4^x.4^y.4^z = 4^{x+y+z} = 4^0 = 1$

* Ta có : $3+4^x = 1+1+1+4^x \ge 4\sqrt[4]{4^x} \Rightarrow \sqrt{3+4^x} \ge 2\sqrt{\sqrt[4]{4^x}} = 2\sqrt[8]{4^x}$

* Cùng hai BĐT tương tự ta được

$$\sqrt{3+4^x}+\sqrt{3+4^y}+\sqrt{3+4^z} \ge 2\left[\sqrt[8]{4^x}+\sqrt[8]{4^y}+\sqrt[8]{4^z}\right] \ge 6\sqrt[3]{\sqrt[8]{4^x.4^y.4^z}} = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x=y=z=0.

Bài 13: (Dự bị A – 2005). Chứng minh rằng với mọi $x, y > 0$, ta có

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \ge 256$$

Bài giải

* Ta có $1+x = 1+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3} \ge 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{3^3}}$

Tương tự : $1+\frac{y}{x} = 1+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x} \ge 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{3^3.x^3}}$

Và $1+\frac{9}{\sqrt{y}} = 1+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}} \ge 4\sqrt[4]{\frac{3^3}{\left(\sqrt{y}\right)^3}} \Rightarrow \left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \ge 16\sqrt[4]{\frac{3^6}{y^3}}$

Do đó $(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \ge 256\sqrt[4]{\frac{x^3}{3^3}\cdot\frac{y^3}{3^3x^3}\cdot\frac{3^6}{y^3}} = 256$

Bài 14: (Dự bị B – 2005). Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn $a+b+c = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a} \le 3$$

Bài giải

Cách 1

Ta có

$\sqrt[3]{a+3b} = \sqrt[3]{(a+3b)1.1} \le \frac{a+3b+1+1}{3} = \frac{1}{3}(a+3b+2)$

$$\sqrt[3]{b+3c}=\sqrt[3]{(b+3c)1.1}\le\frac{b+3c+1+1}{3}=\frac{1}{3}(b+3c+2)$$

$$\sqrt[3]{c+3a}=\sqrt[3]{(c+3a)1.1}\le\frac{c+3a+1+1}{3}=\frac{1}{3}(c+3a+2)$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\le\frac{1}{3}[4(a+b+c)+6]\le\frac{1}{3}\left[4\cdot\frac{3}{4}+6\right]=3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=\dfrac{3}{4}\\ a+3b=b+3c=c+3a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{4}$

Cách 2

Đặt

$x=\sqrt[3]{a+3b}\Rightarrow x^3=a+3b$

$y=\sqrt[3]{b+3c}\Rightarrow y^3=b+3c$

$z=\sqrt[3]{c+3a}\Rightarrow z^3=c+3a$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=4(a+b+c)=4\cdot\frac{3}{4}=3$. Ta cần chứng minh $x+y+z\le 3$

BĐT này là quá đơn giản rồi! (các em tự chứng minh xem nhé).

Bài 15: (Dự bị 2 B – 2005). Chứng minh rằng nếu $0\le x\le y\le 1$ ta có

$$x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\le\frac{1}{4}.$$

Bài giải

Từ $0\le x\le 1$ suy ra $\sqrt{x}\ge x^2$

Biến đổi BĐT tương đương $x\sqrt{y}\le\frac{1}{4}+y\sqrt{x}$

áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta có

$\frac{1}{4}+y\sqrt{x}\ge yx^2+\frac{1}{4}\ge 2\sqrt{yx^2\cdot\frac{1}{4}}=x\sqrt{y}\quad\Rightarrow x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\le\frac{1}{4}$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le y\le 1\\ \sqrt{x}=x^2\\ yx^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Bài 16: (Dự bị 2 D – 2005). Cho x, y, z dương thoả mãn $x.y.z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3}{2}$$

Bài giải

Ta có $\frac{x^2}{1+y}+\frac{1+y}{4}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{1+y}\cdot\frac{1+y}{4}}=x$

Cùng hai BĐT tương tự ta được

$$\left(\frac{x^2}{1+y}+\frac{1+y}{4}\right)+\left(\frac{y^2}{1+z}+\frac{1+z}{4}\right)+\left(\frac{z^2}{1+x}+\frac{1+x}{4}\right)\ge x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3(x+y+z)}{4}-\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\cdot 3.\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$ (đpcm).

Bài 17: (Dự bị A– 2006). Cho x,y,z dương thoả mãn $3^{-x}+3^{-y}+3^{-z}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{9^x}{3^x+3^{y+z}}+\frac{9^y}{3^y+3^{z+x}}+\frac{9^z}{3^z+3^{x+y}}\ge\frac{3^x+3^y+3^z}{4}\quad(1)$$

Bài giải

Đặt $a=3^x$, $b=3^y$, $c=3^z$ $(a,\ b,\ c>0)$

Ta có : $3^{-x}+3^{-y}+3^{-z}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow ab+bc+ca=abc$ (*)

BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{a^2}{a+bc}+\frac{b^2}{b+ca}+\frac{c^2}{c+ab}\ge\frac{a+b+c}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2+abc}+\frac{b^3}{b^2+abc}+\frac{c^3}{c^2+abc}\ge\frac{a+b+c}{4}\quad(2)$$

Ta có: $a^2+abc=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$ (do $ab+bc+ca=abc$)

Tương tự $b^2+abc=(b+a)(b+c)$ và $c^2+abc=(c+a)(c+b)$

Do đó (2) $\Leftrightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{a+b+c}{4}$ (3)

áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta có

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+b}{8}+\frac{a+c}{8}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{a^3}{64}}=\frac{3}{4}a$$

Tương tự $\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{b+c}{8}+\frac{b+a}{8}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{b^3}{64}}=\frac{3}{4}b$

$$\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\frac{c+a}{8}+\frac{c+b}{8}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{c^3}{64}}=\frac{3}{4}c$$

Cộng từng vế của ba BĐT ta được:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\frac{1}{2}(a+b+c)\ge\frac{3(a+b+c)}{4}$$

$\Leftrightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{a+b+c}{4}$, suy ra (3) được chứng minh

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 18: (Khối A – 2007). Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn xyz=1.

Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Bài giải

* Giả thiết "xyz=1" thường có rất nhiều kỹ thuật "*xử lí* " tinh tế, việc dùng nó thế nào còn phụ thuộc vào từng bài toán. Trong bài toán này có một liên hệ nhỏ giữa tử và mẫu, cụ thể ta thực hiện lời giải như sau:

Ta có $x^2(y+z)=x^2y+x^2z\ge 2\sqrt{x^4yz}=2x\sqrt{x}$ (do xyz=1)

Tương tự $y^2(z+x)\ge 2y\sqrt{y}$ và $z^2(x+y)\ge 2z\sqrt{z}$

$$\Rightarrow P\ge\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

* Đến đây tử và mẫu đã quá "*gần gũi*" rồi. Để bài toán đơn giản hơn ta thực hiện phép đổi biến "*không làm thay đổi giả thiết*" sau: $a=x\sqrt{x};b=y\sqrt{y};c=z\sqrt{z}$, khi đó abc=1.

Lúc đó $P\ge\frac{2a}{b+2c}+\frac{2b}{c+2a}+\frac{2c}{a+2b}$

* Các bạn hãy chứng minh BĐT sau nhé (rất quan trọng đấy, quá nhiều áp dụng hay)

$$\frac{a}{mb+nc}+\frac{b}{mc+na}+\frac{c}{ma+nb}\ge\frac{3}{m+n}$$

(với mọi a,b,c dương; m,n là hằng số dương cho trước)

* áp dụng BĐT này ta có ngay $P \geq 2$ (cũng chẳng cần đến abc=1 nữa)

Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1. Vậy GTNN của P bằng 2.

Bài 19: (Khối B – 2007). Cho x, y, z là các số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

Bài giải

Ta có $P = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$

Do đó : $x^2+y^2+z^2 = \frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2} \geq xy+yz+zx$

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \geq \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

$\Rightarrow P \geq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}\right)$

ý tưởng dùng hàm số lại đến rất tự nhiện

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}$ với t >0 $\Rightarrow$ $f'(t) = t - \frac{1}{t^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Lập bảng biến thiên ta được $f(t) \geq \frac{3}{2}, \forall t > 0$

Suy ra $P \geq \frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Vậy GTNN của P băng $\frac{9}{2}$.

Bài 20: (Khối D- 2007). Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$$

Bài giải

$$\left(1+4^a\right)^b \le \left(1+4^b\right)^a \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1+4^a\right)}{a} \le \frac{\ln\left(1+4^b\right)}{b}$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+4^x\right)}{x}$ với x>0. Ta có:

$$f'(x)=\frac{4^x\ln 4^x-(1+4^x)\ln\left(1+4^x\right)}{x^2(1+4^x)}<0$$

Suy ra f(x) nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do f(x) nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $a\ge b>0$ nên $f(a)\le f(b)$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 21: (Khối B- 2008). Cho hai số thực x,y thay đổi thoả mãn hệ thức $x^2+y^2=1$.

Tìm GTLN, GTNN của $P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.

Bài giải

Ta có $P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}=\dfrac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}$

* Nếu y=0 thì $x^2=1\Rightarrow P=2$.

* Nếu $y\ne 0$ thì $P=\dfrac{2\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+6\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)+3}=\dfrac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$

Đến đây có thể dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai hoặc dùng đạo hàm để khảo sát hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$, với $t\in\mathbb{R}$.

Ta tìm ra $P_{max}=3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}, y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc $x=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}, y=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$P_{min}=-6\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt{13}}, y=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}, y=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

Bài 22: Khối D- 2008). Cho hai số thực không âm x,y thay đổi . Tìm GTLN, GTNN của

$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Bài giải

Ta sẽ áp dụng BĐT sau: $(a+b)^2 \geq 4ab$

Ta có $|P| = \left|\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right| \leq \frac{(x+y)(1+xy)}{\left[(x+y)+(1+xy)\right]^2} \leq \frac{1}{4}$

Suy ra $-\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}$

Khi x=0, y=1 thì $P = -\frac{1}{4}$. Khi x=1, y=0 thì $P = \frac{1}{4}$.

Vậy GTNN của P bằng $-\frac{1}{4}$, GTLN của P bằng $\frac{1}{4}$.

Bài 23 (Dự bị A- 2007): Cho x,y,z dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{4(x^3+y^3)} + \sqrt[3]{4(y^3+z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3+x^3)} + 2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right)$$

Bài giải

Ta có $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3 \quad \forall a,b \geq 0$ nên $P = \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \geq a+b$

áp dụng BĐT này ta được

$$P \geq (x+y)+(y+z)+(x+z)+2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right) = 2\left(x+y+z+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right)$$

Đến đây ta dùng BĐT côsi cho 6 số ta được

$$P \geq 2.6\sqrt[6]{x.y.z.\frac{x}{y^2}.\frac{y}{z^2}.\frac{z}{x^2}} = 12$$

Đẳng thức xảy ra khi x=y=z=1. Vậy GTNN của P bằng 12

Bài 24: Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng

$$P=\frac{y+z}{x+\sqrt[3]{4(y^3+z^3)}}+\frac{x+z}{y+\sqrt[3]{4(x^3+z^3)}}+\frac{x+y}{z+\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}}\le 2$$

Bài giải

Ta có $x+\sqrt[3]{4(y^3+z^3)}\ge x+y+z$, suy ra $\frac{y+z}{x+\sqrt[3]{4(y^3+z^3)}}\le\frac{y+z}{x+y+z}$

Cùng hai BĐT tương tự ta được đpcm.

Bài 25: Cho a,b,c dương thoả mãn điều kiện $a+b+c\ge\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{abc}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{a^3b}{1+ab^2}+\frac{b^3c}{1+bc^2}+\frac{c^3a}{1+ca^2}$$

Bài giải

Biến đổi $P=\frac{a^2}{\frac{1}{ab}+b}+\frac{b^2}{\frac{1}{bc}+c}+\frac{c^2}{\frac{1}{ca}+a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+\frac{a+b+c}{abc}}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\left(1+\frac{1}{abc}\right)}$

Theo giả thiết ta có $1+\frac{1}{abc}\le\frac{2}{3}(a+b+c)$, suy ra $P\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c).\frac{2}{3}(a+b+c)}=\frac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}a=b=c\\ 1+\frac{1}{abc}=\frac{2}{3}(a+b+c)\end{cases}\Rightarrow 2a^4-a^3-1=0\Leftrightarrow(a-1)(2a^3+a^2+a+1)=0\Leftrightarrow a=1$$

Vậy GTNN của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Trên đây chỉ là một cách tiếp cận với phương pháp và cách học về BĐT mà tôi muốn giới thiệu với các bạn, đặc biệt là các em học sinh lớp 12 chuẩn bị thi ĐH- CĐ. Còn một số chuyên đề sâu hơn tôi sẽ tiếp tục gửi tới các bạn sau. Hy vọng chút ít kiến thức này sẽ giúp các em học sinh 12 đạt được kết quả cao nhất trong kỳ thi ĐH sắp tới. Chúc các em thành công.

Địa chỉ email: lexuandaicvp@gmail.com; SĐT: 0912960417