BD HSG

Bất đẳng thức Trêbưsép

GV Đỗ Kim Sơn

Cho 2 cặp số	Cùng tăng : $a \le b$ và $A \le B$ $\frac{a.A+b.B}{2} \ge \frac{a+b}{2}.\frac{A+B}{2}$ dấu " = " xảy ra khi $a = b$ và $A = B$	Một tăng , một giảm : $a \le b$ và $A \ge B$ $\frac{a.A+b.B}{2} \le \frac{a+b}{2}.\frac{A+B}{2}$ dấu " = " xảy ra khi $a = b$ và $A = B$
Cho 3 cặp số	Cùng tăng : $a \le b \le c$ và $A \le B \le C$ $\frac{a.A+b.B+c.C}{3} \ge \frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$ dấu " = " xảy ra khi $a = b = c$ và $A = B = C$	Một tăng , một giảm : $a \le b \le c$ và $A \ge B \ge C$ $\frac{a.A+b.B+c.C}{3} \le \frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$ dấu " = " xảy ra khi $a = b = c$ và $A = B = C$
Cho n cặp số	Cùng tăng : $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ $\frac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{n} \ge \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.\frac{b_1+\ldots+b_n}{n}$ dấu " = " xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ và $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$	Một tăng ,một giảm: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$ $\frac{a_1b_1+\ldots+a_nb_n}{n} \le \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.\frac{b_1+\ldots+b_n}{n}$ dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ và $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$

Bài tập áp dụng :

Bài 1 : Cho 2 số a , b thỏa $a + b \ge 2$. CMR : $a^n + b^n \le a^{n+1} + b^{n+1}$ với n = 1 , 2 , 3 , ….

Bài 2 : CMR với a , b , c dương ta có : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$ (BĐT Nesbit cho 3 số)

Bài 3 : Cho a , b , c dương và abc = 1 . Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$

Bài 4 : Cho a , b , c > 0 . CMR : $a^a.b^b.c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

Bài 5 : Cho n số không âm a_i . Chứng minh với mọi số tự nhiên m = 1 , 2 , 3 , … ta có :

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^m$$

Suy ra : $\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n}.\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n} \le \frac{a_1^{m+k}+a_2^{m+k}+\ldots+a_n^{m+k}}{n}$ với m , k là các số tự nhiên

Bài 6 : Cho x , y dương . Chứng minh rằng : $(x+y)(x^3+y^3)(x^7+y^7) \le 4(x^{11}+y^{11})$

Bài 7 : Cho n số dương $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ thỏa $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \ge 1$ và $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. CMR :

$$\frac{a_1^3}{S-a_1}+\frac{a_2^3}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n^3}{S-a_n} \ge \frac{1}{n-1}$$

Bài 8 :

1./ Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 . a_2 . \dots . a_n \ge 1$. CMR : $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \le a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1}$

2./ Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa $a_1 + a_2 + \dots + a_n \ge n$.
CMR với m là số lẻ thì : $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \le a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1}$

3./ Câu 2 còn đúng không nếu m là số chẵn . Giải thích .

4./ Trong trường hợp n = 2 và m là số chẵn thì kết quả của câu 2 như thế nào ?

Bài 9 :

Trong tam giác ABC gọi m_a, m_b, m_c là độ dài 3 đường trung tuyến kẻ từ A , B , C và h_a, h_b, h_c là ba đường cao tương ứng . Chứng minh rằng :

$$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \ge 27 S^2 \quad (\text{ S là diện tích ABC })$$

Bài 10 :

Cho a , b , c là 3 cạnh tam giác , chu vi 2p . CMR : $\dfrac{ab}{p-c} + \dfrac{bc}{p-a} + \dfrac{ca}{p-b} \ge 4p$

Bài 11 :

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các cạnh của một đa giác có chu vi bằng 2p . Chứng minh rằng :

$$\frac{a_1}{p-a_1} + \frac{a_2}{p-a_2} + \dots + \frac{a_n}{p-a_n} \ge \frac{2n}{n-2}$$. Khi nào xảy ra dấu bằng ?

Bài 12 :

Cho a , b , c là 3 cạnh tam giác , chu vi 2p và r , R là bán kính các đường tròn nội , ngoại tiếp .

Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{h_b + h_c} + \dfrac{b}{h_c + h_a} + \dfrac{c}{h_a + h_b} \le \dfrac{R\sqrt{3}}{2r}$

Bài 13 :

Tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn bán kính R = 1 . Chứng minh rằng :

$$\frac{\text{SinA.Sin2A} + \text{SinB.Sin2B} + \text{SinC.Sin2C}}{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}} \le \frac{2S}{3}$$. Dấu "=" xảy ra khi nào ?

Bài 14 :

CMR với mọi tam giác ABC ta có :

1./ $\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC} \ge \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\text{Sin 2A} + \text{Sin 2B} + \text{Sin 2C}}{\text{Cos A} + \text{Cos B} + \text{Cos C}}\right)$

2./ Sin A + Sin B + Sin C $\ge$ Sin 2A + Sin 2B + Sin 2C

3./ $\sqrt{3}$ (Cos A + Cos B + Cos C) $\ge$ Sin 2A + Sin 2B + Sin 2C

Bài 15 :

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng : $\dfrac{aA + bB + cC}{a+b+c} \ge \dfrac{\pi}{3}$

(A , B , C có số đo bằng radian) .

Bài 16 :

Cho ABC là tam giác có ba góc nhọn . CMR : $\dfrac{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}}{\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC}} \le \dfrac{\tan A . \tan B . \tan C}{3}$

Bài làm thêm Trêbưsép

C1 Cho a ,b , c dương thỏa $a^2+b^2+c^2 \ge 1$. Chứng minh rằng :

1./ $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b} \ge \dfrac{1}{2}$ 2./ $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C2 Cho a ,b , c , d dương thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 1$. Chứng minh rằng :

1./ $\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{b^3}{c+d+a}+\dfrac{c^3}{d+a+b}+\dfrac{d^3}{a+b+c} \ge \dfrac{1}{3}$

2./ $\dfrac{a^2}{b+c+d}+\dfrac{b^2}{c+d+a}+\dfrac{c^2}{d+a+b}+\dfrac{d^2}{a+b+c} \ge \dfrac{2}{3}$. Có thể mở rộng được không ?

C3 CMR với mọi tam giác ABC ta có :

1./ $\operatorname{Sin} 2A+\operatorname{Sin} 2B+\operatorname{Sin} 2C \le \operatorname{Sin}^2 A+\operatorname{Sin}^2 B+\operatorname{Sin}^2 C$

2./ $\dfrac{\operatorname{Sin} A+\operatorname{Sin} B+\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} B+\operatorname{Cos} C} \le \dfrac{1}{3}\left(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C\right)$

C4 Chứng minh rằng nếu $a+b \ge 0$ thì $\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a^2+b^2}{2}.\dfrac{a^3+b^3}{2} \le \dfrac{a^6+b^6}{2}$

C5 Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng : $\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \ge \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

C6 CMR với mọi tam giác ABC ta có :

1./ $a+b+c \ge 2\left(a \operatorname{Cos} A+b \operatorname{Cos} B+c \operatorname{Cos} C\right)$

2./ $\dfrac{\pi}{3} \le \dfrac{A.\operatorname{Sin} A+B.\operatorname{Sin} B+C.\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A+\operatorname{Sin} B+\operatorname{Sin} C} \le \dfrac{\pi}{2}$ (A , B , C tính bằng radian)

3./ $\left(\operatorname{Sin}\dfrac{A}{2}+\operatorname{Sin}\dfrac{B}{2}+\operatorname{Sin}\dfrac{C}{2}\right).\left(\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}\right) \ge \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

C7 Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng :

$$\left(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\right).\left(\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C\right) \ge \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right).\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

C8 Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa $a_1+a_2+\ldots+a_n \le S \le n$, với S là hằng số cho trước . CMR :

$\sqrt{a_1^2+\dfrac{1}{a_1^2}}+\sqrt{a_2^2+\dfrac{1}{a_2^2}}+\ldots+\sqrt{a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}} \ge \sqrt{S^2+\left(\dfrac{n^2}{S}\right)^2}$. Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Giải Bài Tập

TRÊBƯSÉP

GV Đỗ Kim Sơn

Bài 1 : Cho 2 số a , b thỏa $a+b\ge 2$. CMR : $a^n+b^n \le a^{n+1}+b^{n+1}$ với $n=1,2,3,\dots$

Giải : Giả sử $a\ge b \Rightarrow a\ge |b|$ (do $a+b\ge 2>0$) $\Rightarrow a^n \ge |b|^n \ge b^n$

Theo Tchébycheff : $\begin{cases} a\ge b \\ a^n\ge b^n \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} \ge \dfrac{a^n+b^n}{2}.\dfrac{a+b}{2} \ge \dfrac{a^n+b^n}{2}$

$\Rightarrow a^{n+1}+b^{n+1} \ge a^n+b^n$

Bài 2 : CMR với a , b , c dương ta có : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ (BĐT Nesbit cho 3 số)

Giải : Giả sử $a\ge b\ge c>0 \Rightarrow a+b\ge a+c\ge b+c$ (1)

$\Rightarrow \dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{b}{a+c}\ge\dfrac{c}{a+b}$ (2) . Áp dụng Trêbưsép cho (1) , (2) .

Dấu "=" khi $a=b=c$

Bài 3 : Cho a , b , c dương và abc = 1 . Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\ge\dfrac{3}{2}$

Giải :

Đặt $x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{1}{b}$, $z=\dfrac{1}{c}$. Ta có $x,y,z>0$ và $xyz=1$

Theo Cauchy : $x+y+z\ge 3$. Theo Nesbit : $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\ge\dfrac{3}{2}$

BĐT cần CM $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\ge\dfrac{3}{2}$ (do $xyz=1$)

Giả sử $x\ge y\ge z>0$ (1) $\Rightarrow \dfrac{x}{y+z}\ge\dfrac{y}{z+x}\ge\dfrac{z}{x+y}>0$ (2) . Áp dụng Tchébycheff cho (1) và (2)

Bài 4 : Cho $a,b,c>0$. CMR : $a^a.b^b.c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

Giải : Giả sử $a\ge b\ge c>0$ (1) $\Rightarrow \log a\ge\log b\ge\log c$ (2)
Áp dụng Trêbưsép cho (1) và (2)

Bài 5 : Cho n số không âm a_i . Chứng minh với mọi số tự nhiên m , k = 1 , 2 , 3 , … ta có :

$$\frac{a_1^m+a_2^m+...+a_n^m}{n}.\frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{n}\le\frac{a_1^{m+k}+a_2^{m+k}+...+a_n^{m+k}}{n}$$

Suy ra : $\frac{a_1^m+a_2^m+...+a_n^m}{n}\ge\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^m$ với m là số tự nhiên

Giải :

Giả sử $0<a_1\le a_2\le...\le a_n\Rightarrow\begin{cases}a_1^m\le a_2^m\le...\le a_n^m & (1)\\ a_1^k\le a_2^k\le...\le a_n^k & (2)\end{cases}$

Áp dụng BĐT Tchébycheff cho (1) và (2)

Bài 6 : Cho x , y dương . Chứng minh rằng : $(x+y)(x^3+y^3)(x^7+y^7)\le 4(x^{11}+y^{11})$

Giải : Giả sử $0<x\le y$ (1) $\Rightarrow x^3\le y^3$ (2) ; $x^4\le y^4$ (3) ; $x^7\le y^7$ (4)
Ap dụng Trêbusép cho (1) và (2) ; (3) và (4) sau đó nhân lại với nhau .

Bài 7 : Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ge 1$ và $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. CMR :

$$\frac{a_1^3}{S-a_1}+\frac{a_2^3}{S-a_2}+...+\frac{a_n^3}{S-a_n}\ge\frac{1}{n-1}$$

Giải :

Giả sử $0<a_1\le a_2\le...\le a_n\Rightarrow\begin{cases}a_1^2\le a_2^2\le...\le a_n^2 & (1)\\ \frac{a_1}{S-a_1}\le\frac{a_2}{S-a_2}\le...\le\frac{a_n}{S-a_n} & (2)\end{cases}$

Áp dụng BĐT Tchébycheff cho (1) và (2) ta có :

$$\frac{a_1^3}{S-a_1}+\frac{a_2^3}{S-a_2}+...+\frac{a_n^3}{S-a_n}\ge\frac{1}{n}\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+...+\frac{a_n}{S-a_n}\right)$$

$$\ge\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+...+\frac{a_n}{S-a_n}\right)$$

$$\ge\frac{1}{n^2}(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+...+\frac{1}{S-a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}.\frac{1}{n-1}(S-a_1+S-a_2+...+S-a_n)\left(\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+...+\frac{1}{S-a_n}\right)$$

$$\ge\frac{1}{n^2}.\frac{1}{n-1}.n^2\sqrt[n]{(S-a_1)(S-a_2)...(S-a_n)}.\sqrt[n]{\left(\frac{1}{S-a_1}\right)\left(\frac{1}{S-a_2}\right)...\left(\frac{1}{S-a_n}\right)}\ge\frac{1}{n-1}$$

Bài 8 :

1./ Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 . a_2 . \dots . a_n \ge 1$. CMR : $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \le a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1}$

2./ Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa $a_1 + a_2 + \dots + a_n \ge n$.

CMR với m là số lẻ thì : $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \le a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1}$

3./ Câu 2 còn đúng không nếu m là số chẵn . Giải thích .

4./ Trong trường hợp n = 2 và m là số chẵn thì kết quả của câu 2 như thế nào ?

Giải :

1./ Giả sử $0 < a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \Rightarrow \begin{cases} a_1^m \le a_2^m \le \dots \le a_n^m \\ a_1 - 1 \le a_2 - 1 \le \dots \le a_n - 1 \end{cases}$ và đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\Rightarrow \left(a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m\right)\left(a_1 - 1 + a_2 - 1 + \dots + a_n - 1\right) \le n\left[a_1^m\left(a_1 - 1\right) + a_2^m\left(a_2 - 1\right) + \dots + a_n^m\left(a_n - 1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m\right)\left(S - n\right) \le n\left[\left(a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1}\right) - \left(a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m\right)\right]$$

Do $a_i > 0$ nên $S \ge n\sqrt[n]{a_1 . a_2 \dots . a_n} \ge n$.

Vế trái không âm . Dấu " = " khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

2./ CM tương tự .

3./ Nếu m chẵn , bài toán không còn đúng . Ví dụ : n = 3 , m = 2 (chẵn)

Cho $a_1 = a_2 = 4$, $a_3 = -5$ Ta có : $a_1 + a_2 + a_3 = 3$; $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 57 > a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 3$

4./ Xem lại bài 1 .

Bài 9 :

Trong tam giác ABC gọi m_a , m_b , m_c là độ dài 3 đường trung tuyến kẻ từ A , B , C và h_a , h_b , h_c là ba đường cao tương ứng . Chứng minh rằng :

$$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) (h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \ge 27 S^2 \quad (\text{S là diện tích ABC})$$

Giải : Ta có : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) /4$

BĐT trở thành $(a^2 + b^2 + c^2) (h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \ge 36 S^2$

Giả sử : $a \ge b \ge c \Rightarrow h_a \le h_b \le h_c$ (vì $h_a = 2S / a$) . Áp dụng Trêbưsép .

Bài 10 :

Cho a , b , c là 3 cạnh tam giác , chu vi 2p . CMR : $\dfrac{ab}{p-c} + \dfrac{bc}{p-a} + \dfrac{ca}{p-b} \ge 4p$

Giải :

Đặt $x = a + b - c$; $y = b + c - a$; $z = c + a - b$.

Ta có : $x , y , z > 0$ và $x + y + z = a + b + c = 2p$

Ngoài ra ta còn có : (x+y)(x+z) = 4ab ; (y+x)(y+z) = 4bc ; (z+x)(z+y) = 4ac ;

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{4ab}{2(p-c)} + \frac{4bc}{2(p-a)} + \frac{4ac}{2(p-b)} \ge 8p$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x+z)}{x} + \frac{(y+x)(y+z)}{y} + \frac{(z+y)(z+x)}{z} \ge 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x(y+z) + yz}{x} + \frac{y^2 + y(x+z) + xz}{y} + \frac{z^2 + z(x+y) + xy}{z} \ge 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{x} + \frac{xy}{y} + \frac{yx}{z} \ge x + y + z$$

Giả sử $0 < x \le y \le z \Rightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{1}{z} \le \dfrac{1}{y} \le \dfrac{1}{x} \\ xy \le xz \le yz \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)(xy+xz+yz) \le \dfrac{yz}{x}+\dfrac{xy}{y}+\dfrac{yx}{z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{yz}{x}+x+y+z+\frac{xz}{y}+x+y+z+\frac{xy}{z}\right)(xy+xz+yz) \le \frac{yz}{x}+\frac{xy}{y}+\frac{yx}{z}$$

$$\Rightarrow x+y+z \le \frac{yz}{x}+\frac{xy}{y}+\frac{yx}{z}$$

<u>Bài 11 :</u>

Gọi a_1 , a_2 , … , a_n là các cạnh của một đa giác có chu vi bằng 2p . Chứng minh rằng :

$$\frac{a_1}{p-a_1}+\frac{a_2}{p-a_2}+...+\frac{a_n}{p-a_n} \ge \frac{2n}{n-2}$$. Khi nào xảy ra dấu bằng ?

<u>Giải :</u>

Giả sử $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} p-a_1 \le p-a_2 \le ... \le p-a_n \\ \dfrac{a_1}{2p-2a_1} \ge \dfrac{a_2}{2p-2a_2} \ge ... \ge \dfrac{a_n}{2p-2a_n} \end{cases}$

$$\left[\frac{a_1}{2p-2a_1}+\frac{a_2}{2p-2a_2}+...+\frac{a_n}{2p-2a_n}\right].\underbrace{\left[(p-a_1)+(p-a_2)+...+(p-a_n)\right]}_{(n-2)p}$$

$$\ge n\left[(p-a_1)\frac{a_1}{2p-2a_1}+(p-a_2)\frac{a_2}{2p-2a_2}+...+(p-a_n)\frac{a_n}{2p-2a_n}\right] = np$$

<u>Bài 12 :</u>

Cho a , b , c là 3 cạnh tam giác , chu vi 2p và r , R là bán kính các đường tròn nội , ngoại tiếp .

Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{h_b+h_c}+\dfrac{b}{h_c+h_a}+\dfrac{c}{h_a+h_b} \le \dfrac{R\sqrt{3}}{2r}$

<u>Giải :</u> Giả sử $a \le b \le c$ (1) $\Rightarrow$ $h_c \le h_b \le h_a$ $\Rightarrow$ $h_c + h_b \le h_a + h_c \le h_b + h_a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{h_b+h_c} \ge \dfrac{1}{h_c+h_a} \ge \dfrac{1}{h_a+h_b}$ (2) Ap dụng Trêbusép cho (1) , (2) ta có :

$$\frac{a}{h_b+h_c}+\frac{b}{h_c+h_a}+\frac{c}{h_a+h_b} \le \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{h_b+h_c}+\frac{1}{h_c+h_a}+\frac{1}{h_a+h_b}\right)$$

$$\le \frac{1}{3}2R(\text{Sin}A+\text{Sin}B+\text{Sin}A)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_a}\right) \quad .,$$

$$\le \frac{1}{3}.2R.\frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{r} = \frac{R\sqrt{3}}{2r}$$

Bài 13 :

Tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn bán kính R = 1 . Chứng minh rằng :

$$\frac{\text{SinA.Sin2A} + \text{SinB.Sin2B} + \text{SinC.Sin2C}}{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}} \le \frac{2S}{3}$$. Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Giải : Trong tam giác ABC ta có : $\text{Sin } 2A + \text{Sin } 2B + \text{Sin } 2C = 2S / R^2 = 2S$ do R = 1 .

Giả sử $A \le B \le C \Rightarrow \begin{cases} 0 < \text{Sin } A \le \text{Sin } B \le \text{Sin } C \\ \text{Cos } A \ge \text{Cos } B \ge \text{Cos } C \end{cases} \Rightarrow \text{Sin2A} \ge \text{Sin2B} \ge \text{Sin2C}$

A;p dụng Trêbusép cho 1 dãy tăng và 1 dãy giảm :

$$\left(\frac{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}}{3}\right)\left(\frac{\text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}}{3}\right) \ge \frac{\text{SinA.Sin2A} + \text{SinB.sin 2B} + \text{SinC.sin 2C}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{SinA.Sin2A} + \text{SinB.sin 2B} + \text{SinC.sin 2C}}{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}} \le \frac{\text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}}{3} = \frac{2S}{3}$$

Bài 14 :

CMR với mọi tam giác ABC ta có :

1./ $\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{\text{Sin } 2A + \text{Sin } 2B + \text{Sin } 2C}{\text{Cos } A + \text{Cos } B + \text{Cos } C}\right)$

2./ $\text{Sin } A + \text{Sin } B + \text{Sin } C \ge \text{Sin } 2A + \text{Sin } 2B + \text{Sin } 2C$

3./ $\sqrt{3}\,(\text{Cos } A + \text{Cos } B + \text{Cos } C) \ge \text{Sin } 2A + \text{Sin } 2B + \text{Sin } 2C$

Giải :

1./ Giả sử $a \le b \le c \Rightarrow \text{Sin } A \le \text{Sin } B \le \text{Sin } C$ (2) và $\text{Cos } A \ge \text{Cos } B \ge \text{Cos } C$ (3)

Áp dụng Trêbusép cho 1 dãy tăng và 1 dãy giảm :

$$\left(\frac{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}}{3}\right)\left(\frac{\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC}}{3}\right) \ge \frac{\text{SinA.CosA} + \text{SinB.CosB} + \text{SinC.CosC}}{3}$$

$$= \frac{\text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}}{6}$$

Suy ra : $\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC} \ge \frac{3}{2}.\left(\frac{\text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}}{\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC}}\right)$

do $\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC} = 1 + 4\,\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2} > 0$. Dấu = khi ABC đều .

2./ Từ câu 2 ta có :

$$\left(\frac{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}}{3}\right)\left(\frac{\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC}}{3}\right) \ge \frac{\text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}}{6}$$

Suy ra : $\frac{2}{3}(\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC})(\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}) \ge \text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}$

mà : $\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC} \le \frac{3}{2}$ nên $\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC} \ge \text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}$

3./ Tương tự

$\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$ nên $\sqrt{3}(\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC}) \ge \text{Sin2A} + \text{Sin2B} + \text{Sin2C}$

Bài 15 :

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng : $\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \dfrac{\pi}{3}$

(A , B , C có số đo bằng radian) .

Giải : Giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow A \leq B \leq C$

Theo Trêbusép : $(a+b+c)(A+B+C) \leq 3(aA+bB+cC)$

Bài 16 :

Cho ABC là tam giác có ba góc nhọn . CMR : $\dfrac{SinA+SinB+SinC}{CosA+CosB+CosC} \leq \dfrac{tgA.tgB.tgC}{3}$

Giải :

Với tam giác ABC nhọn ta có : tgA + tgB + tgC = tgA . tgB . tgC

Giả sử $A \geq B \geq C$ (nhọn) ta có : $\begin{cases} tgA \geq tgB \geq tgC \\ CosA \leq CosB \leq Cos\,C \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{tgA+tgB+tgC}{3}\right)\left(\frac{CosA+CosB+CosC}{3}\right) \geq \left(\frac{tgA.CosA+tgB.CosB+tgC.CosC}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{tgA+tgB+tgC}{3}\right)(CosA+CosB+CosC) \geq (SinA+SinB+SinC)$$

Bài giải

C1 Cho a ,b , c dương thỏa $a^2+b^2+c^2 \geq 1$. Chứng minh rằng :

1./ $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}$ 2./ $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Giải :

1./ Giả sử $0<a_1 \leq a_2 \leq a_3 \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 \leq a_2^2 \leq a_3^2 \quad (1) \\ \dfrac{a_1}{a_2+a_3} \leq \dfrac{a_2}{a_1+a_3} \leq \dfrac{a_3}{a_2+a_1} \quad (2) \end{cases}$

Áp dụng BĐT Tchébycheff cho (1) và (2) ta có :

$$\frac{a_1^3}{a_2+a_3}+\frac{a_2^3}{a_1+a_3}+\frac{a_3^3}{a_2+a_1} \geq \frac{1}{3}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_1+a_3}+\frac{a_3}{a_2+a_1}\right)$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_1+a_3}+\frac{a_3}{a_2+a_1}\right)$$

$$\geq \frac{1}{3^2}(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_3}+\frac{1}{a_2+a_1}\right)$$

$$= \frac{1}{9}.\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_2+a_3+a_3+a_1)\left(\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_3}+\frac{1}{a_2+a_1}\right)$$

$$\geq \frac{1}{9}.\frac{1}{2}.9\sqrt[3]{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1)}.\sqrt[3]{\frac{1}{a_2+a_3}.\frac{1}{a_1+a_3}.\frac{1}{a_2+a_1}} \geq \frac{1}{2}$$

2 Cho a ,b , c , d dương thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 1$. Chứng minh rằng :

1./ $\dfrac{a^3}{b+c+d} + \dfrac{b^3}{c+d+a} + \dfrac{c^3}{d+a+b} + \dfrac{d^3}{a+b+c} \ge \dfrac{1}{3}$

2./ $\dfrac{a^2}{b+c+d} + \dfrac{b^2}{c+d+a} + \dfrac{c^2}{d+a+b} + \dfrac{d^2}{a+b+c} \ge \dfrac{2}{3}$. Có thể mở rộng được không ?

Giải :

Tương tự chứng minh của bài 1 (hoặc xem lời giải tổng quát trong bài 7)

3 CMR với mọi tam giác ABC ta có :

1./ $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

2./ $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \le \dfrac{1}{3}\left(\tan A + \tan B + \tan C\right)$ với A , B , C nhọn .

Giải :

2./ Xem lời giải trong bài 16 .

4 Chứng minh rằng nếu $a + b \ge 0$ thì $\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a^2+b^2}{2}.\dfrac{a^3+b^3}{2} \le \dfrac{a^6+b^6}{2}$

Giải :

Giả sử $a \ge b$, vì $a + b \ge 0$ nên $a \ge -b$. Suy ra $a \ge |b|$. Do đó $a^3 \ge b^3$

Theo Trêbưsép :

$$\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{a^3+b^3}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2}.\frac{a^3+b^3}{2} \le \frac{a^3+b^3}{2}.\frac{a^3+b^3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2}.\frac{a^3+b^3}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2}$$

5 Cho n số dương a_1 , a_2 , … , a_n . Chứng minh rằng : $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}\right)^n \ge \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

Giải :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}\right)^n \ge \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \Leftrightarrow n.\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}\right) \ge \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)$$

$$\Leftrightarrow n.\sum_{i=1}^{n} a_i.\ln a_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i.\sum_{i=1}^{n} \ln a_i$$

Giả sử $0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \Rightarrow \ln a_1 \le \ln a_2 \le \ldots \le \ln a_n$

Áp dung Trêbưsép :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.\sum_{i=1}^{n} \ln a_i \le n.\sum_{i=1}^{n} a_i.\ln a_i$$

6 CMR với mọi tam giác ABC ta có :

1./ $a + b + c \ge 2\,(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$

2./ $\frac{\pi}{3} \le \frac{A.\operatorname{Sin}A + B.\operatorname{Sin}B + C.\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Sin}A + \operatorname{Sin}B + \operatorname{Sin}C} \le \frac{\pi}{2}$ (A , B , C tính bằng radian)

3./ $\left(\operatorname{Sin}\frac{A}{2} + \operatorname{Sin}\frac{B}{2} + \operatorname{Sin}\frac{C}{2}\right).\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) \ge \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Giải : Tự giải

7. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng :

$$(\tan A + \tan B + \tan C).(\cot A + \cot B + \cot C) \ge \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right).\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

Giải : Tự giải

8. Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le S \le n$, với S là hằng số cho trước . CMR :

$$\sqrt{a_1^2 + \frac{1}{a_1^2}} + \sqrt{a_2^2 + \frac{1}{a_2^2}} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}} \ge \sqrt{S^2 + \left(\frac{n^2}{S}\right)^2}$$

. Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Giải : Tự giải