BÀI TẬP LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN MIỀN NAM LẦN THỨ XVIII

Chủ đề: BẤT ĐẲNG THỨC

(VĂN PHÚ QUỐC- GV. TRƯỜNG ĐH QUẢNG NAM)

1. (Russia 1991). Cho $\sum_{i=1}^{1990}\left|x_i-x_{i+1}\right|=1991$. Đặt $s_n=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\left|s_1-s_2\right|+\left|s_2-s_3\right|+...+\left|s_{1990}-s_{1991}\right|.$$

HD:

Đặt $M=\left|s_1-s_2\right|+\left|s_2-s_3\right|+...+\left|s_{1990}-s_{1991}\right|$.

$\forall\ 1\le i\le 1990$ ta có: $s_{i+1}-s_i=\dfrac{\sum_{k=1}^{i+1}x_k}{i+1}-\dfrac{\sum_{k=1}^{i}x_k}{i}=\dfrac{ix_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}x_k}{i(i+1)}=\dfrac{\sum_{k=1}^{i}k\left(x_{k+1}-x_k\right)}{i(i+1)}$.

Suy ra: $\left|s_{i+1}-s_i\right|\le\dfrac{\sum_{k=1}^{i}k\left|x_{k+1}-x_k\right|}{i(i+1)}$.

Cho i chạy từ 1 đến 1990, ta thu được 1990 bất đẳng thức và cộng chúng lại, ta có:

$$M=\sum_{i=1}^{1990}\left|s_{i+1}-s_i\right|\le\sum_{i=1}^{1990}\frac{\sum_{k=1}^{i}k\left|x_{k+1}-x_k\right|}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{1990}i\left(\sum_{k=i}^{1990}\frac{1}{k(k+1)}\right)\left|x_{i+1}-x_i\right|$$
$$=\sum_{i=1}^{1990}\left(1-\frac{i}{1991}\right)\left|x_{i+1}-x_i\right|\le\sum_{i=1}^{1990}\left(1-\frac{1}{1991}\right)\left|x_{i+1}-x_i\right|=\frac{1990}{1991}\sum_{i=1}^{1990}\left|x_{i+1}-x_i\right|=1990.$$

2. (United Kingdom 1992). Cho $x,y,z,w>0$. Chứng minh: $\dfrac{12}{x+y+z+w}\le\sum_{sym}\dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}\right)$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có:

$$\sum_{sym}\frac{1}{x+y}\ge\frac{6^2}{\sum_{sym}(x+y)}=\frac{12}{x+y+z+w}\quad;\quad\sum_{sym}\frac{1}{x+y}\le\sum_{sym}\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right).$$

3. (Italia 1993). Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2\le a^2b+b^2c+c^2a+1$.

HD:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le 1$.

Vì $a,b,c\in[0;1]$ nên ta có:

$$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)=(a-1)(b-1)(c-1)+1-abc\le 1.$$

4. (Poland 1994). Cho $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $x_1+\dfrac{x_2^2}{2}+\dfrac{x_3^3}{3}+...+\dfrac{x_n^n}{n}$ biết rằng:

$x_1,x_2,...,x_n>0$ thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}=n$.

HD:

Với mỗi $n \ge k \ge 1$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $x_k^k + (k-1).1 \ge kx_k \Rightarrow \frac{x_k^k}{k} \ge x_k - \frac{k-1}{k}$.

Cho k chạy từ 1 đến n ta thu được n bất đẳng thức và cộng chúng lại với nhau:

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \ldots + \frac{x_n^n}{n} \ge (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) \quad (1)$$

Mặt khác, theo AM-GM thì $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge \dfrac{n^2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = n$ (2)

Từ (1) và (2) ta thu được: $x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \ldots + \frac{x_n^n}{n} \ge 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

5. (India 1995). Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn hai tính chất $|x_i - x_{i+1}| < 1$ và $x_i \ge 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ $(x_{n+1} = x_1)$. Chứng minh rằng: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1$.

HD:

Do $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_n}{x_1} = 1$ nên $\exists$ chỉ số k sao cho $\frac{x_k}{x_{k+1}} \le 1$ (1)

Từ giả thiết $\Rightarrow x_i < x_{i+1} + 1 < 2x_{i+1} \Rightarrow \frac{x_i}{x_{i+1}} < 2 \ \forall i$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} = \sum_{i \ne k} \frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_k}{x_{k+1}} < 2(n-1) + 1 = 2n - 1$.

6. (Romania 1996). Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$ thỏa mãn: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{n+1}$.

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i (x_{n+1} - x_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1} (x_{n+1} - x_i)}$.

HD:

Ta có: $\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1} - x_i) = nx_{n+1}^2 - x_{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i = (n-1)x_{n+1}^2$.

Bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{x_i}{x_{n+1}}}{n-1}} \le 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta thấy: $1 = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{2x_{n+1}} + \frac{1 - \frac{x_i}{x_{n+1}}}{2(n-1)} \right] \ge \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{x_{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{x_i}{x_{n+1}}}{n-1}}$.

7. (Iran 1997). Cho $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ thỏa mãn: $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$. Chứng minh rằng:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \ge max\left\{ x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right\}.$$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với mỗi i ta có: $x_i^3+1+1\geq 3x_i$.

Suy ra: $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+8\geq (x_1+x_2+x_3+x_4)+3(x_1+x_2+x_3+x_4)$

$$\geq x_1+x_2+x_3+x_4+2.4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=x_1+x_2+x_3+x_4+8$$

$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\geq x_1+x_2+x_3+x_4$.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\frac{1}{3}\left[\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)+\left(x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)+\left(x_1^3+x_3^3+x_4^3\right)+\left(x_1^3+x_2^3+x_4^3\right)\right]$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(3\sqrt[3]{x_1^3x_2^3x_3^3}+3\sqrt[3]{x_2^3x_3^3x_4^3}+3\sqrt[3]{x_3^3x_4^3x_1^3}+3\sqrt[3]{x_4^3x_1^3x_2^3}\right)=\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

8. (Vietnam 1998). Cho $n\geq 2$ và $x_1,x_2,...,x_n>0$ thỏa mãn: $\dfrac{1}{x_1+1998}+\dfrac{1}{x_2+1998}+...+\dfrac{1}{x_n+1998}=\dfrac{1}{1998}$.

Chứng minh: $\dfrac{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$.

HD:

Với mỗi i $(1\leq i\leq n)$, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{x_i}{1998(x_i+1998)}=\frac{1}{1998}-\frac{1}{x_i+1998}=\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_j+1998}\geq\frac{n-1}{\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}(x_j+1998)}}\Rightarrow x_i\geq 1998(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{(x_i+1998)^{n-1}}{\prod_{j\neq i}(x_j+1998)}}.$$

Cho i chạy từ 1 đến n, ta sẽ thu được n bất đẳng thức và nhân chúng lại với nhau ta được đpcm.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n=1998(n-1)$.

9. (Korea 1999). Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc\geq 1$. Chứng minh: $\dfrac{1}{a+b^4+c^4}+\dfrac{1}{a^4+b+c^4}+\dfrac{1}{a^4+b^4+c}\leq 1$.

HD:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cùng với giả thiết $abc\geq 1$ ta được:

$$b^4+c^4=\frac{3b^4+c^4}{4}+\frac{b^4+3c^4}{4}\geq bc\left(b^2+c^2\right)\geq\frac{b^2+c^2}{a}\Rightarrow\frac{1}{a+b^4+c^4}\leq\frac{a}{a^2+b^2+c^2}.$$

Làm tương tự cho hai số hạng còn lại ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Sau đó, cộng vế theo vế của các bất đẳng thức ta được: $\dfrac{1}{a+b^4+c^4}+\dfrac{1}{a^4+b+c^4}+\dfrac{1}{a^4+b^4+c}\leq\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz và AM-GM thì $\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}\leq\dfrac{3}{a+b+c}\leq\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}\leq 1$.

Vậy $\dfrac{1}{a+b^4+c^4}+\dfrac{1}{a^4+b+c^4}+\dfrac{1}{a^4+b^4+c}\leq 1$.

10. (Singapore 2000). Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $c^2+d^2=\left(a^2+b^2\right)^3$. Chứng minh $\dfrac{a^3}{c}+\dfrac{b^3}{d}\geq 1$.

HD:

Áp dụng với bất đẳng thức Cauchy Schwarz và kết hợp với giả thiết bài toán ta có:

$$\left(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\right)(ac+bd)=\left[\left(\sqrt{\frac{a^3}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b^3}{d}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{ac}\right)^2+\left(\sqrt{bd}\right)^2\right]$$

$$\geq\left(\sqrt{\frac{a^3}{c}}.\sqrt{ac}+\sqrt{\frac{b^3}{d}}.\sqrt{bd}\right)^2=\left(a^2+b^2\right)=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\geq ac+bd.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

11. (Belarus 2001). Cho $x_1,x_2,x_3\in[-1;1]$ và $y_1,y_2,y_3\in[0;1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{1-x_1}{1-x_2y_3}.\frac{1-x_2}{1-x_3y_1}.\frac{1-x_3}{1-x_1y_2}.$$

HD:

Vì $1-x_1y_2=(1-x_1)y_2+(1-y_2)>0$; $1+x_1\geq 0$ và $1-y_2>0$ nên ta có:

$$\frac{1-x_1}{1-x_1y_2}-\frac{2}{1+y_2}=-\frac{(1+x_1)(1-y_2)}{(1+y_2)(1-x_1y_2)}\leq 0\Rightarrow 0\leq\frac{1-x_1}{1-x_1y_2}\leq\frac{2}{1+y_2}\leq 2.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $0\leq\frac{1-x_2}{1-x_3y_1}\leq 2;\ \ 0\leq\frac{1-x_3}{1-x_1y_2}\leq 2$.

Suy ra: $\frac{1-x_1}{1-x_2y_3}.\frac{1-x_2}{1-x_3y_1}.\frac{1-x_3}{1-x_1y_2}=\frac{1-x_1}{1-x_1y_2}.\frac{1-x_2}{1-x_2y_3}.\frac{1-x_3}{1-x_3y_1}\leq 8$.

Dễ thấy dấu "=" có thể xảy ra chẳng hạn lấy $x_1=x_2=x_3=-1$, $y_1=y_2=y_3=0$.

Vậy 8 là giá trị lớn nhất của bài toán.

12. (China 2002). Cho $(P_1,P_2,...,P_n)$ $(n\geq 2)$ là một hoán vị bất kì của $(1,2,...,n)$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+...+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2}$.

HD:

Đặt $A=\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+...+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$A\geq\frac{(n-1)^2}{(P_1+P_2)+(P_2+P_3)+...+(P_{n-1}+P_n)}$$

$$=\frac{(n-1)^2}{2(P_1+P_2+...+P_n)-P_1-P_2}=\frac{(n-1)^2}{2(1+2+...+n)-P_1-P_n}$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-P_1-P_n}\geq\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-1-2}=\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)-1}>\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)}=\frac{n-1}{n+2}.$$

13. (USA 2003). Cho $a,b,c\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $\sum\frac{\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c)}{\sin(b+c)}\geq 0$.

HD:

Đặt $x=\sin a, y=\sin b, z=\sin c$. Khi đó $x,y,z>0$.

Dễ thấy $\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c).\sin(a+b).\sin(a+c)=x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-z^2\right)$.

Cần chứng minh: $\sum x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-z^2\right)\geq 0$?

Đặt $x=\sqrt{u},\ y=\sqrt{v},\ z=\sqrt{w}$. Bất đẳng thức thành: $\sum\sqrt{u}\left(u-v\right)\left(u-w\right)\geq 0$ đúng theo bất đẳng thức Schur.

14. (Japan 2004). Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$.

HD:

Ta có: $\frac{1+a}{1-a}=\frac{\left(a+b+c\right)+a}{\left(a+b+c\right)-a}=\frac{2a}{b+c}+1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sum\left(\frac{2b}{a}-\frac{2b}{c+a}\right)\geq 3\Leftrightarrow\sum\frac{bc}{a\left(c+a\right)}\geq\frac{3}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có: $\sum\frac{bc}{a\left(c+a\right)}=\sum\frac{b^2c^2}{abc\left(c+a\right)}\geq\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{2abc\left(a+b+c\right)}=\frac{3}{2}$.

15. (Taiwan 2005). Cho $a_1,a_2,...,a_{95}>0$. Chứng minh: $\sum_{k=1}^{95}a_k\leq 94+\prod_{k=1}^{95}max\left\{1,a_k\right\}$.

HD:

Đặt $b=max\left\{a_k,1\right\}$ thì ta có: $\prod_{k=1}^{95}max\left\{1,a_k\right\}=\prod_{k=1}^{95}b_k$ và $\prod_{k=1}^{95}a_k\leq\prod_{k=1}^{95}b_k$.

Cần chứng minh: $\sum_{k=1}^{95}b_k\leq 94+\prod_{k=1}^{95}b_k$?

Thật vậy, $\sum_{k=1}^{95}b_k\leq 94+\prod_{k=1}^{95}b_k\Leftrightarrow\left(1-b_1\right)\left(1-b_2\right)+\left(1-b_1b_2\right)\left(1-b_3\right)+...+\left(1-b_1b_2...b_{94}\right)\left(1-b_{95}\right)\geq 0$, hiển nhiên đúng vì $b_k\geq 1\ \ \forall k=1,2,...,95$.

16. (Bulgaria 2006). Cho $b^3+b\leq a-a^3$. Tìm giá trị lớn nhất của $a+b$.

HD:

Đặt $a+b=c$. Từ giả thiết, ta có: $\left(c-a\right)^3+\left(c-a\right)\leq a-a^3\Leftrightarrow 3ca^2-\left(3c^2+2\right)a+c^3+c\leq 0$.

Nếu $c>0$ thì để đẳng thức này đúng, ta cần có $\Delta\geq 0\Leftrightarrow 4-3c^4\geq 0\Leftrightarrow c\leq\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

Dấu "=" xảy ra khi a là nghiệm kép của phương trình bậc hai tương ứng (cụ thể $a=\frac{3c^2+2}{6c}$). Do đó giá trị lớn nhất của tổng $a+b$ là: $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

17. (Austria 2007). Cho $0<x_0,x_1,...,x_{669}<1$ là các số thực khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng tồn tại cặp số $\left(x_i,x_j\right)$ sao cho: $0<x_ix_j\left(x_i-x_j\right)<\frac{1}{2007}$.

HD: Không mất tính tổng quát, giả sử $0<x_0<x_1<...<x_{669}<1$. Đặt $S=\sum_{i=0}^{668}x_{i+1}x_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$S=\sum_{i=0}^{668}x_{i+1}x_i\left(x_{i+1}-x_i\right)<\sum_{i=0}^{668}\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)^2\left(x_{i+1}-x_i\right)=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{668}\left(x_{i+1}^3-x_i^3+x_{i+1}^2x_i-x_{i+1}x_i^2\right)$$

$=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=0}^{668}\left(x_{i+1}^3-x_i^3\right)+\sum_{i=0}^{668}\left(x_{i+1}^2x_i-x_{i+1}x_i^2\right)\right]=\frac{1}{4}\left(x_{669}^3-x_0^3+S\right)<\frac{1}{4}(1+S)$

Suy ra: $S<\frac{1}{3}$. Gọi $x_{k+1}x_k\left(x_{k+1}-x_k\right)$ là số hạng nhỏ nhất trong 669 số hạng của S thì theo đánh giá trên, ta có: $\frac{1}{3}>S\ge 669x_{k+1}\left(x_{k+1}-x_k\right)\Rightarrow 0<x_{k+1}\left(x_{k+1}-x_k\right)<\frac{1}{3.669}=\frac{1}{2007}$ (đpcm).

18. (Indonesia 2008). Cho số tự nhiên $n\ge 3$ và các số thực $x_1,x_2,...,x_n>1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1x_2}{x_3-1}+...+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1-1}+\frac{x_nx_1}{x_2-1}\ge 4n.$$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{x_1x_2}{x_3-1}+...+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1-1}+\frac{x_nx_1}{x_2-1}\ge\frac{x_1x_2}{\frac{x_3^2+4}{4}-1}+...+\frac{x_{n-1}x_n}{\frac{x_1^2+4}{4}-1}+\frac{x_nx_1}{\frac{x_2^2+4}{4}-1}$$

$$=4\left(\frac{x_1x_2}{x_3^2}+...+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1^2}+\frac{x_nx_1}{x_2^2}\right)\ge 4n\sqrt[n]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}...\frac{x_{n-1}x_n}{x_1^2}.\frac{x_nx_1}{x_2^2}}=4n.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n=2$.

19. (Moldova 2009). Cho $x,y,z\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ và a,b,c là một hoán vị tùy ý của chúng. Chứng minh rằng:

$$\frac{60a^2-1}{4xy+5z}+\frac{60b^2-1}{4yz+5x}+\frac{60c^2-1}{4zx+5y}\ge 12.$$

HD:

Do $x,y\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ nên $(x-2)(2y-1)+(y-2)(2x-1)\le 0\Rightarrow 4xy\le 5(x+y)-4$.

Do $60a^2-1>0$ nên $\frac{60a^2-1}{4xy+5z}\ge\frac{60a^2-1}{5(x+y+z)-4}$.

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự như thế và rồi cộng vế theo vế ba bất đẳng thức này ta được:

$$\frac{60a^2-1}{4xy+5z}+\frac{60b^2-1}{4yz+5x}+\frac{60c^2-1}{4zx+5y}\ge\frac{60\left(a^2+b^2+c^2\right)-3}{5(x+y+z)-4}.$$

Ta chỉ cần chứng minh: $20\left(a^2+b^2+c^2\right)-1\ge 20(x+y+z)-16$?

Do $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$ nên bất đẳng thức này tương đương với:

$20\left(x^2+y^2+z^2\right)-20(x+y+z)+15\ge 0\Leftrightarrow 5(2x-1)^2+5(2y-1)^2+5(2z-1)^2\ge 0$, luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$.

20. Cho $x_1, x_2, ..., x_{2012} \in (0;1)$. Chứng minh rằng: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} + \sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < 1$.

HD:

Để ý rằng: $\sqrt[2011]{x} < \sqrt[2012]{x}$ với $x \in (0;1)$.

Như vậy: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} < \sqrt[2012]{x_1x_2...x_{2012}}$; $\sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < \sqrt[2012]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} < \sqrt[2012]{x_1x_2...x_{2012}} \le \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{2012}}{2012}$

và $\sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < \sqrt[2012]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} \le \dfrac{(1-x_1)+(1-x_2)+...+(1-x_{2012})}{2012}$.

Suy ra: $\sqrt[2011]{x_1x_2...x_{2012}} + \sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{2012})} < 1$.

21. Giả sử phương trình $x^4 + mx^3 + 2x^2 + nx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Chứng minh $m^2 + n^2 \ge 8$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có: $m^2 + n^2 \ge \dfrac{\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)^2}{x^2 + x^6} \ge 8 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^4 \ge 0$ luôn đúng.

22. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh rằng: $x^2 + 4y^2 < 1$.

HD:

Ta có: $\left(x^3 + y^3\right)\left(1 - x^2 - 4y^2\right) = \left(x^3 + y^3\right) - \left(x^3 + y^3\right)\left(x^2 + 4y^2\right) = x^3 + y^3 - (x - y)\left(x^2 + 4y^2\right)$

$= y\left(x^2 - 4xy + 5y^2\right) = y\left[(x - 2y)^2 + y^2\right] > 0$.

23. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2013$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c}$$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM , ta có: $4xy \le (x + y)^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x + y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Ta có: $\dfrac{1}{2a + b + c} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a + b} + \dfrac{1}{a + c}\right) \le \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)\right] = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c}\right)$

Tương tự: $\dfrac{1}{a + 2b + c} \le \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2c}\right)$, $\dfrac{1}{a + b + 2c} \le \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Cộng vế theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{2013}{4}.$$

24. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + a + b = 3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{3a}{b + 1} + \dfrac{3b}{a + 1} + \dfrac{ab}{a + b} \le a^2 + b^2 + \dfrac{3}{2}$

HD:

Từ giả thiết $a, b > 0$ và $ab + a + b = 3$ ta suy ra ba điều sau đây:

(i) $3 = ab + a + b \le \dfrac{(a+b)^2}{4} + a + b \Rightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) - 12 \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b \ge 2 \\ a+b \le -6 \end{array}\right.$.

$a+b \le -6$ không xảy ra. Vì thế $a+b \ge 2$ (1)

(ii) $ab + a + b = 3 \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b} + 1 = \dfrac{3}{a+b} \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b} = -1 + \dfrac{3}{a+b}$ (2)

(iii) $ab + a + b = 3 \Rightarrow a(b+1) + b + 1 = 4 \Rightarrow (a+1)(b+1) = 4$ (3)

Sử dụng $(2),(3)$ để biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh ta được:

$$a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \ge \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} = 3a\frac{a+1}{4} + 3b\frac{b+1}{4} + \frac{3}{a+b} - 1$$

$$= \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2\right) + \frac{3}{4}(a+b) + \frac{3}{a+b} - 1$$

Hay $4\left(a^2 + b^2\right) + 6 \ge 3\left(a^2 + b^2\right) + 3(a+b) + \dfrac{12}{a+b} - 4$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge 3(a+b) + \dfrac{12}{a+b} - 10$ (4).

Để ý rằng $a^2 + b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}$ nên (4) sẽ được chứng minh nếu bất đẳng thức sau là đúng:

$\dfrac{(a+b)^2}{2} \ge 3(a+b) + \dfrac{12}{a+b} - 10$ (5).

Đặt $a+b = s$. Từ giả thiết và (1) ta suy ra: $ab \le 1$. Khi đó bất đẳng thức (5) trở thành:

$s^2 - 6s - \dfrac{24}{s} + 20 \ge 0 \Leftrightarrow (s-2)\left(s^2 - 4s + 12\right) \ge 0 \quad \forall s \ge 2$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra khi $s = 2 \Leftrightarrow a = b = 1$.

25. Cho số nguyên n $(n \ge 2)$ và hai số thực không âm x, y. Chứng minh $\sqrt[n]{x^n + y^n} \ge \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

HD:

+ Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

+ Xét trường hợp $x > 0, y > 0$.

Vai trò của x, y như nhau trong bất đẳng thức cần chứng minh nên không giảm tính tổng quát có thể giả sử $x \ge y$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sqrt[n]{x^n\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n\right)} \ge \sqrt[n+1]{x^{n+1}\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\right)} \Leftrightarrow \sqrt[n]{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n} \ge \sqrt[n+1]{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n\right)^{n+1} \ge \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\right)^n.$$

Ta có: $0 < \dfrac{y}{x} \le 1 \Rightarrow 0 < \left(\dfrac{y}{x}\right)^n \ge \left(\dfrac{y}{x}\right)^{n+1}$.

Suy ra: $\left(1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^n\right)^{n+1} = \left[1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^n\right]\left[1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^n\right]^n > \left[1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^n\right]^n \ge \left[1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{n+1}\right]^n$.

Trong trường hợp $x, y > 0$, bất đẳng thức không có dấu "=" xảy ra. Vậy dấu "=" chỉ xảy ra khi $x = 0$ hoặc $y = 0$.

26. Cho x, y, z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{4\left(x^3+y^3\right)} + \sqrt[3]{4\left(y^3+z^3\right)} + \sqrt[3]{4\left(z^3+x^3\right)} + 2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right).$$

HD:

Với $x, y, z > 0$ ta luôn có:

a) $4\left(x^3+y^3\right) \ge \left(x+y\right)^3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

b) $4\left(y^3+z^3\right) \ge \left(y+z\right)^3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y = z$.

c) $4\left(z^3+x^3\right) \ge \left(z+x\right)^3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z = x$.

Ta chứng minh a). Việc chứng minh b) và c) là hoàn toàn tương tự như việc chứng minh a).

Ta có: $a) \Leftrightarrow 4\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right) \ge \left(x+y\right)^3 \Leftrightarrow 4\left(x^2-xy+y^2\right) \ge \left(x+y\right)^2$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2-2xy\right) \ge 0 \Leftrightarrow 3\left(x-y\right)^2 \ge 0$.

Bất đẳng thức a) có dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Khi đó: $\sqrt[3]{4\left(x^3+y^3\right)} + \sqrt[3]{4\left(y^3+z^3\right)} + \sqrt[3]{4\left(z^3+x^3\right)} \ge 2\left(x+y+z\right) \ge 6\sqrt[3]{xyz}$.

Lại có: $2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right) \ge \frac{6}{\sqrt[3]{xyz}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Suy ra: $P \ge 6\left(\sqrt[3]{xyz} + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right) \ge 12.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

27. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{4^a+9^b+16^c} + \sqrt{9^a+16^b+4^c} + \sqrt{16^a+4^b+9^c}$.

HD:

Đặt $\vec{u} = \left(2^a;3^b;4^c\right), \vec{v} = \left(2^c;3^a;4^b\right), \vec{w} = \left(2^b;3^c;4^a\right) \Rightarrow M = \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| + \left|\vec{w}\right|$

$$M \ge \left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right| = \sqrt{\left(2^a+2^b+2^c\right)^2 + \left(3^a+3^b+3^c\right)^2 + \left(4^a+4^b+4^c\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $2^2+2^b+2^c \ge 3\sqrt[3]{2^{a+b+c}} = 6$

$3^a+3^b+3^c \ge 3\sqrt[3]{3^{a+b+c}} = 9$; $4^a+4^b+4^c \ge 4\sqrt[3]{4^{a+b+c}} = 16$.

Vậy $M \ge 3\sqrt{29}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

28. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9}$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$(1.x+1.y+1.z)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Rightarrow x+y+z \le \sqrt{3}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Ta lại có: $x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$ và $xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$.

Do đó $\dfrac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)} \leq \dfrac{xyz\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right).3\sqrt[3]{(xyz)^2}} =$

$=\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \dfrac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{9}.$

29. Cho $a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{3c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \sqrt{10}$.

HD:

Đặt $a=\tan\alpha,\ b=\tan\beta,\ c=\tan\gamma$ với $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Theo giả thiết $ab+bc+ca=1 \Leftrightarrow \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$

$\Leftrightarrow (\tan\alpha+\tan\gamma).\tan\beta = 1-\tan\gamma\tan\alpha \Leftrightarrow \dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}$

$\Leftrightarrow \cot\beta=\tan(\alpha+\gamma) \Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta+\gamma)=0 \quad (1)$

Vì $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $\alpha+\beta+\gamma \in \left(0;\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+6\sin\gamma \leq 2\sqrt{10} \quad (2)$

$VT(2)=2\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)+6\sin\gamma = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right).\cos(\alpha-\beta)+6\sin\gamma$

$= 2\cos\gamma.\cos(\alpha-\beta)+6\sin\gamma \leq \sqrt{\left[4\cos^2(\alpha-\beta)+6^2\right]\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\right)} \leq \sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$.

30. Cho $x,y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^2(x+7y)+y^2(y+7x)}{\sqrt{x^4y^2+x^2y^4}}$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$x^2(x+7y)+y^2(y+7x)=x^3+y^3+7xy(x+y)=(x+y)^3+4xy(x+y) \geq 4\sqrt{xy}(x+y)^2$

$\sqrt{x^4y^2+x^2y^4}=\sqrt{\dfrac{xy}{2}}\sqrt{2xy\left(x^2+y^2\right)} \leq \sqrt{\dfrac{xy}{2}}.\dfrac{x^2+y^2+2xy}{2}=\dfrac{\sqrt{xy}(x+y)^2}{2\sqrt{2}}$

Suy ra: $A \geq 8\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Vậy $\min A = 8\sqrt{2}$.

31. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$$

HD:

Đặt $x=a+b,\ y=b+c,\ z=a+c$. Suy ra: $x+y+z=2(a+b+c)=1$.

Khi đó: $P=\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{zx}{zx+y}}$.

Ta có: $\frac{xy}{xy+z}=\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}=\frac{xy}{(x+z)(y+z)}\Rightarrow\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{x}{x+z}.\frac{y}{y+z}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$.

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right)$; $\sqrt{\frac{zx}{zx+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+y}\right)$.

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $P\le\frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{6}$.

Vậy $\max P=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{6}$.

32. Cho α,β là các góc nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)}{\cot\alpha+\cot\beta}$.

HD:
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$P\le\frac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)}{2\sqrt{\cot\alpha\cot\beta}}=\frac{1}{4}.2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}.\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right).\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)\le\frac{2}{27}.$$

33. Cho $x,y,z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x^2+y^2+2z^2}{xy+yz}$.

HD:

Ta có: $A-\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{\left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}y\right)^2+2\left(z-\sqrt{\frac{1}{6}}y\right)^2}{xy+yz}\ge 0$. Dễ dàng suy ra $MinA=\sqrt{\frac{8}{3}}$ khi $x=\sqrt{\frac{2}{3}}y$ và $z=\sqrt{\frac{1}{6}}y$.

34. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $f(x)=x\left(2012+\sqrt{2014-x^2}\right)$ trên miền xác định của nó.

HD:
Điều kiện: $-\sqrt{2014}\le x\le\sqrt{2014}$.
Áp dụng lần lượt có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM ta có:

$$|f(x)|=|x|\left(\sqrt{2012}.\sqrt{2012}+1.\sqrt{2014-x^2}\right)\le|x|\sqrt{2013}\sqrt{2012+2014-x^2}\le\sqrt{2013}.\frac{x^2+4026-x^2}{2}=2013\sqrt{2013}$$

Suy ra: $-2013\sqrt{2013}\le f(x)\le 2013\sqrt{2013}$.

Dễ dàng kiểm tra được: $f\left(\sqrt{2013}\right)=2013\sqrt{2013}$; $f\left(-\sqrt{2013}\right)=-2013\sqrt{2013}$.

35. Cho $a,b,c\in(1;2)$. Chứng minh: $\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\ge 1$.

HD: Chứng minh: $\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}\ge\frac{a}{a+b+c}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(a+b)(b+c)\ge 4b\sqrt{ac}$ luôn đúng.
Dễ dàng suy ta được điều phải chứng minh.