NHÌN BÀI TOÁN DƯỚI QUAN ĐIỂM CỰC TRỊ

------------TQT-------------

I - Lý thuyết

Giả sử f(x) là hàm số thực xách định trên miền M. Khi đó:

1. Nếu f(x) có giá trị nhỏ nhất trên M thì:

Nguyên lí 1: $f(x) \geq c$ với mọi $x \in M$ khi và chỉ khi $\min\limits_{x\in M} f(x) \geq c$.

Nguyên lí 2: Bất phương trình $f(x) \leq c$ có nghiệm thuộc M khi và chỉ khi $\min\limits_{x\in M} f(x) \leq c$.

2. Nếu f(x) có giá trị lớn nhất trên M thì :

Nguyên lí 3: $f(x) \leq c$ với mọi $x \in M$ khi và chỉ khi $\max\limits_{x\in M} f(x) \leq c$.

Nguyên lí 4: Bất phương trình $f(x) \geq c$ có nghiệm thuộc M khi và chỉ khi $\max\limits_{x\in M} f(x) \geq c$

3. Nếu f(x) có đồng thời giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên M, thì phương trình f(x) = m có nghiệm khi và chỉ khi
$$\min_{x\in M} f(x) \leq m \leq \max_{x\in M} f(x)$$

Sau đây tôi xin giới thiệu một vài ứng dụng của 4 nguyên lí cực trị trên để giải quyết một số bài toán.

II- Ứng dụng.

1.Ứng dụng trong phương trình và bất phương trình.

a) Xét tam thức bâc hai $f(x)= ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) dưới quan điểm cực trị:

Ta có f(x) = $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

af(x) = $a^2\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$

$\Rightarrow$ af(x) $\geq -\frac{\Delta}{4}$.

Từ đó ta nhận thấy:

+) $a > 0$, $\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$, $\max f(x) = +\infty$.

+) $a < 0$, $\max f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$, $\min f(x) = -\infty$.

+) $f(x) \geq 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \min f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

+)Phương trình f(x)=0 có nghiệm khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ \min f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \leq 0 \leq \max f(x) = +\infty. \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \max f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \geq 0 \geq \min f(x) = +\infty. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \Delta \geq 0$$

Ví du 1: Để chứng minh $ax^2 + bx + c \geq 0$, $\forall x \in R$ ta chứng minh $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

CMR: $x^2y^4 + 2(x^2+2)y^2 + 4xy + x^2 \geq 4xy^3$, $\forall x, y$

Giải

Đpcm $\Leftrightarrow x^2(y^2+1)^2 + 4y(1-y^2)x + 4y^2 \geq 0$

Đặt $f(x) = (y^2+1)^2x^2 + 4y(1 - y^2)x + 4y^2$

Ta có $\Delta' = 4y^2(1 - y^2)^2 — 4y^2(y^2 + 1)^2 = -16y^2 \leq 0\ \forall y$.

Suy ra $\begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ (y^2+1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq 0\ \ \forall x,y$ (đpcm).

VD2: Từ a.f(x) $\geq 0\ \forall$ x suy ra $\Delta \leq 0$.

Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacốpki

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right) \qquad (1)$$

Giải

+) Nếu $\sum a_i^{\,2} = 0$ thì BĐT được chứng minh.

+) Nếu $\sum a_i^{\,2} \neq 0$ thì

$$(1) \ \Leftrightarrow \ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right) \leq 0$$

Đặt f(x) = $(\sum a_i^{\,2})\,x^2 - 2(\sum a_i b_i)X + \sum b_i^{\,2}$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i^{\,2} X^2 - 2a_i b_i X - b_i^{\,2})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i X - b_i)^2 \geq 0 \ , \ \forall X .$$

Ta có : $\begin{cases} af(x) \geq 0 \\ a = \sum a_i^{\,2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right) \leq 0$

$\Rightarrow$ Đpcm.

VD3: Cho x,y,z là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ xy + yz + xz = 4 \end{cases}$

CMR: $-\dfrac{8}{3} \leq x, y, z \leq \dfrac{8}{3}$

Giải

Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 - z^2 \\ xy = 4 - z(x+y) \end{cases}$

$\Rightarrow 8 - z^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 8 + 2z(x+y)$

$\Rightarrow (x + y)^2 + 2z(x+y) + z^2 = 16 \ \Rightarrow x + y + z = \pm 4$

+) x+y+z = 4 hay x + y = -z + 4

Thay vào phương trình dưới ta suy ra xy= $(z-2)^2$.

Vậy x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - (4 - z)X + (z - 2)^2 = 0$.

Ta có $\Delta = (4-z)^2 - 4(z-2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow z(8-3z) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq z \leq \frac{8}{3}$ (1)

+) Với x+y+z = -4 hay x+y = -z — 4

Thay vào phương trình sau ta suy ra xy = $(z + 2)^2$.

Vậy x,y là nghiệm của phương trình: $X^2 - (4 + z)X + (z + 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta = (4+z)^2 - 4(z+2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow z(3x+8) \leq 0 \quad \Rightarrow -\frac{8}{3} \leq z \leq 0$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $-\frac{8}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$.

Vì vai trò của x, y, z là như nhau nên ta cũng có $-\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$

<u>Bài tập tham khảo</u>

1) CMR: $19x^2 + 54y^2 + 16z^2 - 16xz - 24yz + 36xy \geq 0 \quad \forall x, y, z$
2) Cho a,b,c thoả mãn điều kiện a+d = b+c. CMR: nếu lấy m sao cho $|ad - bc| \leq 2m$ thì $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0 \ \forall x$.
3) Cho ax + by $\geq \sqrt{xy}$, $\forall x, y$ dương. CMR: ab $\geq \frac{1}{4}$.
4) Cho các số a_i , $b_i > 0$ (i = 1,2,…n) thoả mãn: $0 < m \leq \frac{b_i}{a_i} \leq M$, $\forall i$.

   CMR: a) $b_i^2 + mMa^2 \leq (m+M)a_ib_i$

   b) $\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$

b) Tính chất của hàm số $f(x) = a\cos x + b\sin x + c$ nhìn theo quan điểm cực trị như thế nào

Giải

Ta biết rằng hàm này được quy về $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos x\,(x - \varphi) + c$,*với* $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Khi đó ta thấy ngay min f(x)= c - $\sqrt{a^2 + b^2}$ và max f(x)= c+$\sqrt{a^2 + b^2}$. Từ đó ta ta suy ra:

i) f(x) ≥0 với mọi x khi và chỉ khi min f(x) = c-- $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ và do đó c≥ $\sqrt{a^2 + b^2}$

ii) f(x) ≤0 với mọi x khi và chỉ khi min f(x) = c+ $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 0$ và do đó c ≤ $\sqrt{a^2 + b^2}$

iii) Phương trình f(x)=0 có nghiệm khi và chỉ khi c-$\sqrt{a^2 + b^2} \leq 0$ $\leq c + \sqrt{a^2 + b^2}$.

điều này tương đương với $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$,hay $c^2 \leq a^2 + b^2$

iv) Bất phương trình f(x) ≤0 có nghiệm khi và chỉ khi

mìn f(x) = c - $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 0$ hay c ≤ $\sqrt{a^2 + b^2}$

v) Bất phương trình f (x) ≥0 có nghiệm khi và chỉ khi

maxf(x) = c+ $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ hay c≥ $-\sqrt{a^2 + b^2}$

vi) f(x)đồng nhất khi và chỉ khi f(x)=maxf(x)=0 tương đương

c - $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 0 \leq$ c+ $\sqrt{a^2 + b^2}$,hay a=b=c=0.

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số y= $\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$ trong khoảng [-π; π]

Vì $2\cos x - \sin x + 4 > 0$ nên

y_0 thuộc miền giá trị của hàm số : $y_0 = \frac{cosx+2sinx+3}{2cosx-sinx+4}$

$\Leftrightarrow (2y_0 - 1)cosx - (y_0 + 2)sinx = -4y_0 + 3$ (1)

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow (2y_0 - 1)^2 + (y_0 + 2)^2 \geq (3 - 4y_0)^2$

$\Leftrightarrow 11y_0^2 - 24y_0^2 + 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y_0 \leq 2$

Suy ra $miny = \frac{2}{11}$, $\max y = 2$.

BÀI TẬP THAM KHẢO

1) Cho hàm số $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ với x$\in [-2;0]$.

Tìm a để min y=2.

2) Cho hàm số $y = cos^4x + sin^4x + msinxcosx$. Tùy theo m tìm min, max của hàm số.

3) Xách định m để $1 + cosx + \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}cos3x \geq m, \forall x$.

4) Xách định a để với mọi x thì :

$$3cos^4x - 5cos3x - 36sin^2x - 15cosx + 36 + 24a - 120 \geq 0.$$

c) Bài toán biện luận số nghiệm và tính có nghiệm của một phương trình và bất phương trình luôn là một bài toán quan trọng, sử dụng cực trị để giải bài toán này là một công cụ hết sức hiệu quả. Trong phần này tôi xin giới thiệu một số bài toán áp dụng tính chất 3 để giải quyết tương đối dễ dàng.

Ví dụ 1: Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$$

Giải

TXĐ : $\mathcal{R}$

Xét hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{2x^2+1}$

f'(x) =$1 + \frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}4x = \frac{\sqrt{2x^2+1}+2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

f'(x)= 0 ⇔ $\sqrt{2x^2+1}$ +2x = 0

⇔ $\sqrt{2x^2+1}$ + 2x ⇔ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có bảng biến thiên :

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗ $+\infty$

Vậy phương trình f(x) = m có nghiệm ⇔ $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 2:Giải phương trình sau:

$$sin^n x + cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}} \qquad (x \in (o;\frac{\pi}{2}))$$

Giải

xét hàm số f(x) = $sin^n x + cos^n x \qquad (x \in (o;\frac{\pi}{2}))$

f'(x)= n $sin^{n-1}x\, cosx + cos^{n-1}x\, sinx$

= n $sinxcosx(sin^{n-2}x + cos^{n-2}x\ )$

trong $(o;\frac{\pi}{2})$ thì n sinxcosx > 0

$$f'(x) = (sin^{n-2}x + cos^{n-2}x \;= 0 \text{ mà } x \in (o; \frac{\pi}{2}) \;\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$			$\searrow$	$2^{\frac{2-n}{2}}$	$\nearrow$		

Vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất $\frac{\pi}{4}$

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ xác định trên miền M.
Nếu $f(x) \le c \le g(x)\ \forall x \in M$ thì phương trình tương đương với phương trình sau : $f(x) = c = g(x)$.

Xét ví dụ

Giải phương trình $\dfrac{sin^{10}x+cos^{10}x}{4} = \dfrac{sin^6x+cos^6x}{4cos^2 2x+sin^2 2x}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{sin^{10}x + cos^{10}x}{4} = \frac{1-\frac{3}{4}sin^2 2x}{4-3sin^2 2x} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \; sin^{10}x + cos^{10}x = 1$$

Ta có : $\begin{cases} sin^{10}x \le sin^2x \\ cos^{10}x \le cos^2x \end{cases}$

suy ra $sin^{10}x + cos^{10}x \le 1$

Do đó ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} sin^{10}x = sin^2x & (2) \\ cos^{10}x = cos^2x & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sinx = 0 \quad hoặc \quad |sinx| = 1 \\ cosx = 0 \quad hoặc \quad |cosx| = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = k\frac{\pi}{2}$ $; k \in \mathbb{Z}$

Chú ý Từ cách giải trên bằng cách tương tự giải bài toán tổng quát sau:
Với m, n nguyên lớn hơn 2 , giải phương trình sau:

$$sin^m x + cos^n x = 1$$

Khi đó ta thấy nó tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} sin^m x = sin^2 x \\ cos^n x = cos^2 x \end{cases}$$

Có 4 khả năng sau xảy ra:

1.Nếu m=2k ,n=2l (tức m,n cùng chẵn)

$$x = t\frac{\pi}{2} \quad ; t \in \mathbb{Z}$$

2. Nếu m = 2k, n = 2l +1 (m chẵn ,n lẻ)

$$x = \frac{\pi}{2} + t\pi \ , x = 2t\pi \quad ; t \in \mathbb{Z}$$

3.Nếu m ,n cùng lẻ

$$x = 2t\pi \ ; \ x = \frac{\pi}{2} + t\pi$$

4.Nếu m lẻ ,n chẵn :

$$x = t\pi \ ; x = \frac{\pi}{2} + t\pi \quad .$$

BÀI TẬP THAM KHẢO

1) Giải phương trình

$$sin^2 x + cos^2 x + \ sin^2(x+y) = \frac{9}{4}$$

2) Giải phương trình

$$sin^8 x + cos^8 x = 32(\ sin^{12} x + cos^{12} x)$$

3) Giải phương trình

$$sinx + cosx = \sqrt{2}\ (2 - \sin 3x) \ .$$

2. Bất đẳng thức nhìn dưới quan điểm cực trị:

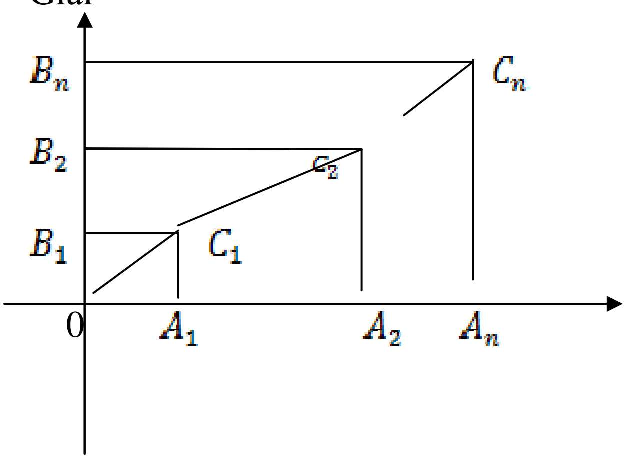
Chứng minh 1 bất đẳng thức đại số $f(x) \geq a \quad \forall\ x; \quad (f(x) \leq a)) \quad x \in \mathbb{R}^n$ nhìn dưới quan điểm cực trị là tìm cực đại hoặc cực tiểu của hàm số : min f(x) (max f(x)) rồi chứng minh min f(x)$\geq a; (f(x) \leq a)$.trong việc khảo sát hàm số,cực trị của hàm số là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất mà hàm số đạt được trong lân cận đủ nhỏ.

<u>VD1</u>

Cho $a_1, a_2, \ldots a_n,\ b_1, b_2, \ldots b_n$> 0. Ta có thể chứng minh một cách rất dễ dàng bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a_1^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2}$$

Giải



Trên trục hoành và trục tung ta đặt liên tiếp các đoạn thẳng sau:

$$OA_1 = a_1; A_1A_2 = a_2; \ldots; A_{n-1}A_n = a_n; OB_1 = b_1; B_1B_2 = b_2; \ldots; B_{n-1}B_n = b_n$$

khi đó ta thấy ,theo Pitago thì:

$$OC_1 = \sqrt{a_1^2 + b_2^2} \ ; \ldots; C_{n-1}C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$OC_n = f_k(x)$$

Như vậy VT là tổng của những đường gấp khúc từ O tới C_n.

VP là độ dài đoạn OC_n

Vì vậy hiển nhiên là VP = $OC_n \leq$ VT.

Dấu '='xảy ra khi $O;\ C_1; C_2;\ ...;\ C_n$ thẳng hàng .

Tức là $\frac{a_1}{b1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Bây giờ ta thử nhìn bài toán trên theo quan điểm cực trị.

Xét hàm số :$f_k(x) = a_k sinx + b_k cosx$

và có $\max\ f_k(x) = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}$

Đặt $f(x) = f_1(x) + \ ... + \ f_n(x) = (a_1 + \cdots + a_n)sinx + (b_1 + \cdots + b_n)cosx$

$\max\ f(x) = \sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 \ + (b_1 + \cdots + b_n)^2}$

Ta có

$\max\ f_1(x) + \cdots + \max\ f_n(x) \geq \max f(x)$

Bài toán được chứng minh.

<u>Nhận xét</u>

Ta thấy rằng đối với cách này, điều kiện các số: $a_1, a_2, ... a_n,\ b_1, b_2, ... b_n > 0$

là không cần thiết.

Như vậy ,với các số $a_1, a_2, ... a_n,\ b_1, b_2, ... b_n \in \mathbb{R}$ thì cách 1 là không thỏa mãn? Liệu khắc phục như thế nào?

Rõ ràng vẫn lấy các đoạn thẳng như trên nhưng bằng cách với những số dương ta lấy các điểm trên trục hoành sang bên phải điểm liền trước(trục tung lấy lên trên) và lấy sang bên trái điểm liền trước nếu giái trị âm (trục tung lấy xuống dưới). Ta được ĐPCM.

VD2 Cho hàm số $f(x) = x^n + (c-x)^n, c > 0, n \geq 1$.

Chứng minh $f(x) \geq 2(\frac{c}{2})^n$. Từ đó chứng minh $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$

Giải

Miền xác định: D =$\mathbb{R}$;

$f'(x) = n[x^{n-1} - (c-x)^{n-1}]$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{n-1} = (c-x)^{n-1}$

Với n chẵn :$(1) \Leftrightarrow x = c - x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}$ .vậy $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{c}{2}$

Ta có $f''(x) = n(n-1)[x^{n-2} - (c-x)^{n-2}]$

$f'\left(\frac{c}{2}\right) = 2n(n-1)(\frac{c}{2})^{n-1} > 0$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$\frac{c}{2}$
f'(x)	0
f(x)	$\searrow$ $2(\frac{c}{2})^n$ $\nearrow$

Suy ra f(x) đạt cực tiểu tại $x = \frac{c}{2}$ và $f\left(\frac{c}{2}\right) = 2(\frac{c}{2})^n$

Chọn $x = a\,; c = a + b\,;\ a + b > 0$, ta có

$a^n + b^n \geq (\frac{a+b}{2})^n$ hay $\frac{a^n + b^n}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^n$

VD3: Cho n nguyên dương . CMR:

$$x^n\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}} \qquad \forall\ x \in (0;1)$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $x^{2n}(1-x) < \frac{1}{2ne}$

Xét hàm số $f(x) = x^{2n}(1-x) \qquad 0 < x < 1$

Ta có $\qquad f'(x) = x^{2n-1}[2n-(2n+1)x]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2n}{2n+1} \qquad x > 0$$

Suy ra $f(x) \le f\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{2n^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}$

Ta cm $\qquad \frac{2n^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} < \frac{1}{2ne} \qquad (2)$

$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} < \frac{1}{e}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1} > e$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} > e$$

Ta có dãy số $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ là dãy số giảm và có giới hạn là e

$\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n > e \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

Vậy ta có đpcm.

BÀI TẬP THAM KHẢO

1.CMR $x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2.CMR $\sqrt[4]{2} \leq \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq 2 \ \forall x \in \ [0;1]$

3.Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $3x - x^3 < \frac{2}{\sin 2x}$

3) Ứng dụng vào các bài toán cực trị hình học

Trong toán học giải tích, nguyên lí cực trị "hàm nhận giá trị thực và liên tục trên tập compact luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó". Dùng nguyên lí này ta có thể dễ dàng chứng minh sự tồn tại cực trị của bài toán hình học.

Xét bài toán :

Trong một đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ luôn tồn tại các diểm I làm cho

$\sum_{k=1}^{n} a_k IA_k^{\alpha_k}$ đạt giá trị lớn nhất,nhỏ nhất (α_k là các giá trị thực không âm).

Giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy,gọi tọa độ các điểm là:

$A_1(x_1;y_1);\dots;A_n(x_n;y_n)$; $I(x;y)$

Đặt $f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2})^{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k IA_k^{\alpha_k}$.

Vì $A_1A_2 \dots A_n$ là một đa giác lồi nên $f(x,y)$là hàm 2 biến số xác định trên tập compact; các α_k không âm nên f(x,y) là hàm liên tục .Vậy theo nguyên lí trên thì $f(x,y)$ luôn đạt giá trị nhỏ nhất ,lớn nhất trên đó. Tức là luôn tồn tại điểm I thỏa mãn yêu cầu.

Bài toán 1 Cho hình vuông có cạnh huyền là a không đổi . Cho đường thẳng d quay xung quanh cạnh huyền. Hỏi chiều cao tương ứng với cạnh huyền là bao nhiêu để hiệu 2 hình nón sinh ra đạt giá trị max.

VD1: Cho tam giác ABC vuông hoặc tù. Chứng minh rằng : $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2}+1$

GIẢI

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{r}{R} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow 1+\frac{r}{R} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C \leq \sqrt{2}$$

Không giảm tính tổng quát , giả sử A=max{A;B;C} ≥ $\frac{\pi}{2}$;

Ta có: $\cos A+\cos B+\cos C = 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \leq -2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}+1$

Đặt $x=\sin\frac{A}{2}$. Bởi vì $A \geq \frac{\pi}{2}$ suy ra: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1$.

Xét hàm số $f'(x)=-4x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ với $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1$.

Lập bảng:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
f'(x)				
f(x)			$\searrow$	

$$f'(x) \leq f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}; \forall x \in [\frac{\sqrt{2}}{2};1)$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C \leq \sqrt{2} \ \forall x \in [\frac{\sqrt{2}}{2};1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} cos\frac{B-C}{2}=1 \\ sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ A=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

VD2: Cho tam giác ABC với a, b,c là độ dài 3 cạnh

Chứng minh rằng : $ab\sin^2 A + bc\sin^2 B + ca\sin^2 C \le p^2$

Giải

Bđt cần chứng minh tương đương

$(a+b+c)^2 - 2ab(1-\cos 2A) - 2bc(1-\cos 2B) - 2ca(1-\cos 2C) \ge 0$

$\Leftrightarrow f(a) = a^2 + 2(b\cos 2A + c\cos 2C)a + (b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B) \ge 0$

Xem f(a) là tam thức bậc hai cúa

$\nabla' = (b\cos 2A + c\cos 2C)^2 + (b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B) \ge 0$

$= -b^2\sin^2 2A + 2bc\sin 2A\sin 2C - c^2\sin^2 2C)$

$= -(b\sin 2A - c\sin 2C)^2 \le 0$

đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \text{-}b\cos 2A \text{ - } c\cos 2C \\ b\sin 2A - c\sin 2C = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\cos 2A = \text{-}a \text{ - } c\cos 2C(1) \\ b\sin 2A = c\sin 2C \end{cases}$$

$\Rightarrow b = (a + \cos\ \ 2A)^2 + c^2\sin^2 2C)$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 \quad + c^2\cos 2C$

$\Leftrightarrow \cos 2B + \cos 2C = 0$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{2C-B}{2}\cos\dfrac{2C+B}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2C - B = \pi(3) \\ 2C + B = \pi(4) \end{array}\right.$

Xét đẳng thức(3): $2C - B = \pi \Rightarrow 2C = \pi + B$

$$\Rightarrow \begin{cases} C > \frac{\pi}{2} \\ \sin 2C = -\sin B \end{cases}$$

Thay vào (2): bsin2A= -CsinB.

$\Rightarrow sin2A = -sinC$ <0

$\Rightarrow A > \frac{\pi}{2}$

Vậy (3)không xaỷ ra.

Từ (4) $\Rightarrow A = C$.Thay vào (2) ta có : bsin2A = c sin2A

Cần nhận xét $A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sin2A > 0$

Từ đó suy ra b = c . Vậy thì A = B = C.

<u>BÀI TẬP THAM KHẢO</u>

1) Cho hình vuông có cạnh huyền là a không đổi .Cho đường thẳng d quay xung quanh cạnh huyền. Hỏi chiều cao tương ứng với cạnh huyền là bao nhiêu để hiệu 2 hình nón sinh ra đạt giá trị max.

2) Cho tam giác ABC với A > B > C ; gọi d = OI. CMR:

$$\cos A < \frac{1}{2} - \frac{d}{2R} < cosB < \frac{1}{2} + \frac{d}{2R} < \cos C$$

3) Cho tam giác ABC .CMR

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

<u>4) Các bài toán liên quan đến dạng f(x) + $|g(x)|$</u>

Để giải các loại bài toán này, thông thường ta phải phá dấu trị tuyệt đối, vì vậy cần giải phương trình g(x) = 0. Mà phương trình này không phải lúc nào cũng giải được. Nhưng ta biết rằng :

Với 2 số thực a, b thì:

i) $\min\{a,b\} = \frac{(a+b)-|a-b|}{2}$;

ii) $\max\{a,b\} = \frac{(a+b)+|a-b|}{2}$;

Ngược lại, thì a - $|b| = \min\{a+b, a-b\}$ và a + $|b| = \max\{a+b, a-b\}$

Như vậy dựa vào những tính chất này để giải các bài toán tìm min, max của những hàm số có dạng y= f(x) + $|g(x)|$ đơn giản hơn nhiều so với việc phá dấu trị tuyệt đối.

Ta có: $\max_{x\in M} y = \max_{x\in M}[\max\{f(x)+g(x),\ f(x)-g(x)\}]$

$$= \max\{\max_{x\in M}\big(g(x)+f(x)\big), \max_{x\in M}(f(x)-g(x))\}$$

$$\min_{x\in M} y = \min_{x\in M}\ [\min\{f(x)+g(x), f(x)-g(x)\}]$$

$$= \min\{\min_{x\in M}\big(g(x)+f(x)\big), \min_{x\in M}(f(x)-g(x))\}$$

Ví dụ **:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số y = 2cosx + sinx - $|cosx + 3sinx - 2|$.

Giải

Đặt f(x) = 2cosx + sinx + (cosx+ 3sinx -2) = 3cosx + 4sinx -2.

g(x) = 2cosx + sinx - (cosx+ 3sinx -2)= cosx – 2sinx +2.

Dễ thấy rằng min f(x) = -2 - $\sqrt{3^2+4^2} = -7$

min g(x) = 2 - $\sqrt{1^2+2^2}$ = 2- $\sqrt{5}$.

Vậy min y = -7.

BÀI TẬP THAM KHẢO

1) Cho hàm số y = $|3x^2 - 6x + 2a - 1|$ với -2 $\leq x \leq 3$.

   a) Xác định a để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

   b) Tìm a để giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 29.

2) Tìm giá trị nhỏ nhấ của hàm số sau: y = $|cos4x + cos2x - 2| + cosx - 11$.

KẾT LUẬN

Các bài toán sơ cấp là rất đa dạng và phong phú. Đối với một số dạng bài toán, nếu nhìn dưới quan điểm cực trị có thể đưa lại cho ta những cách giải rất độc đáo. Mong được tiếp tục trao đổi với bạn đọc.