MỤC LỤC

Mở đầu 2

Chương 1. Phương pháp sử dụng tính chât hàm lồi (lõm) 5

1.1 Thứ tự sắp được của dãy bất đẳng thức sinh bởi hàm lồi (lõm) 5

1.2 Bất đẳng thức Karamata 11

1.3 Giới thiệu một số hàm lồi và hàm lõm 19

1.3.1 Một số hàm lồi 19

1.3.1 Một số hàm lõm 19

1.4 Bài tập 20

Chương 2 Phương pháp lựa chọn tham số 24

2.1 Các dạng toán chứa tham số độc lập 25

2.1.1 Tham số chỉ thuộc một vế của bất đẳng thức 25

2.1.2 Tham số có trong hai vế của bất đẳng thức 30

2.2 Các dạng toán chứa tham phụ thuộc vào tham số khác 36

2.3 Bài tập 42

Chương 3 Phương pháp sử dụng tính chất của hàm đơn điệu 45

3.1 Hàm đơn điệu 45

3.2 Tính đơn điệu của hàm các đại lượng trung bình 49

3.2.1 Các đại lượng trung bình 50

3.2.2 Các đại lượng trung bình suy rộng 50

3.3 Tính đơn điệu của hàm các đa thức đối xứng sơ cấp 55

Chương 4 Phương pháp hình học 62

4.1 Hình học hóa các đại lượng trung bình 62

4.2 Một số phương pháp khác 65

4.1 Bài tập 72

Kết luận của luận văn 73

Tài liệu tham khảo 74

Mở đầu

Bất đẳng thức (BĐT) là một trong những nội dung quan trọng trong chương trình toán phổ thông, nó vừa là đối tượng để nghiên cứu mà cũng vừa là một công cụ đắc lực, với những ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Trong các đề thi chọn học sinh giỏi toán ở các cấp, những bài toán về chứng minh BĐT thường xuất hiện như một dạng toán khá quen thuộc, nhưng để tìm ra lời giải không phải là một việc dễ dàng.

Lý thuyết BĐT đã được khá nhiều tài liệu đề cập và các bài tập về BĐT cũng khá phong phú, đa dạng, trong đó các phương pháp chứng minh BĐT là phần nội dung quan trọng thường gặp trong nhiều tài liệu.

Một trong những phương pháp chứng minh BĐT hoặc sáng tạo ra những BĐT mới là việc làm chặt BĐT.

Giả sử ta có (hoặc cần chứng minh) BĐT $A < B$ (tương tự với BĐT $A > B,\ A \leq B,\ A \geq B$). Nếu tìm được biểu thức C sao cho $A < C < B$, thì ta nói rằng BĐT thứ nhất đã được làm chặt (nghiêm ngặt) bởi BĐT thứ hai và hiển nhiên, BĐT thứ nhất được suy ra từ BĐT thứ hai. Việc chứng minh được BĐT thứ hai cho ta một cách chứng minh BĐT thứ nhất và đồng thời sáng tạo ra những BĐT mới. Do đó, việc tìm ra các phương pháp để làm chặt BĐT là rất có ý nghĩa.

Đó cũng là nội dung mà luận văn này đề cập.

Luận văn dày 74 trang, gồm các phần mục lục, Mở đầu, 4 chương nội dung, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: *Phương pháp sử dụng tính chất của hàm lồi (lõm)* .

Đây là phương pháp cơ bản và quan trọng nhất để làm chặt BĐT mà một số tài liệu hiện hành cũng đã đề cập, đặc biệt là tài liệu [1]. Phần đóng góp của luận văn, chủ yếu là việc cụ thể hóa lý thuyết của phương pháp này bằng những ví dụ và bài tập cụ thể, có thể tách riêng thành những bài tập về BĐT khá phong phú. Khá nhiều BĐT quen thuộc, là trường hợp riêng của các BĐT đã được tạo ra từ những minh họa này. Trong phần cuối chương, luận văn cũng đã đưa ra được khá nhiều hàm lồi (lõm) để bạn đọc có thể áp dụng sáng tạo ra nhiều BĐT khác.

Chương 2: *Phương pháp lựa chọn tham số.*

Có thể minh họa ý tưởng của phương pháp này bởi một ví dụ sau đây: Giả sử a, b, c là 3 số không âm có tổng bằng 3. Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

Như vậy, với $k \geq \frac{1}{2}$ thì BĐT sau đây luôn đúng

$$a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca.$$

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra, với $k < \frac{1}{2}$ thì khi nào BĐT trên vẫn đúng? Việc tìm được số k ($k < \frac{1}{2}$) nhỏ nhất sao cho BĐT trên vẫn đúng cho ta một phương pháp để làm chặt BĐT.

Đó cũng là nội dung mà luận văn đề cập trong chương này, trong đó tham số k được xét ở hai dạng, là tham số độc lập hoặc còn phụ thuộc vào một tham số khác.

Chương 3: *Phương pháp sử dụng tính chất của hàm đơn điệu.*

Phương pháp này cũng đã được một số tài liệu đề cập, đặc biệt là tài liệu [1]. Phần đóng góp của luận văn ở chương này chủ yếu là việc hệ thống hóa một số phương pháp sắp thứ tự các đại lượng trung bình và cụ thể hóa lý thuyết của phương pháp bằng những ví dụ và bài tập cụ thể. Khá nhiều BĐT mới được luận văn sáng tác, thông qua việc làm chặt BĐT bằng cách sử dụng phương pháp này.

Chương 4: *Phương pháp hình học.*

Nội dung chương này đề cập đến một số phương pháp làm chặt BĐT đại số thông qua những ước lượng trực quan từ hình học, với những ví dụ minh họa khá cụ thể.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Tiến sỹ Trịnh Đào Chiến - Người Thầy rất nghiêm khắc và tận tâm trong công việc, người Thầy không chỉ giúp đỡ, cung cấp tài liệu, gợi mở cho tác giả nhiều ý tưởng hay và truyền đạt nhiều kiến thức quí báu, cũng như những kinh nghiệm nghiên cứu khoa học mà còn chỉ bảo cho tác giả trong tác phong làm việc, thông cảm, khuyến khích động viên tác giả vượt qua những khó khăn trong chuyên môn và cuộc sống. Chính vì vậy mà tác giả luôn tỏ lòng biết ơn chân thành và sự kính phục sâu sắc đối với thầy giáo hướng dẫn - Tiến sỹ Trịnh Đào Chiến.

Nhân đây, tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám Hiệu trường Đại học Quy Nhơn, Phòng đào tạo Đại học và sau Đại học, khoa Toán, quí Thầy cô giáo trực tiếp giảng dạy đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong thời gian tác giả tham gia khóa học.

Đồng thời tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn đến UBND Tỉnh Gia Lai, Sở Giáo dục và đào tạo Tỉnh Gia Lai, Ban Giám Hiệu trường THPT Ia Grai, đã động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả có nhiều thời gian nghiên cứu và hoàn thành đề tài.

Trong quá trình hoàn thành luận văn này, tác giả còn nhận được sự quan tâm động viên của mẹ, vợ, các anh chị em trong gia đình, các bạn đồng nghiệp, các anh chị em trong lớp cao học khóa VII, VIII, IX của trường Đại học Qui Nhơn. Tác giả xin chân thành cảm ơn tất cả sự quan tâm và động viên đó.

Để hoàn thành luận văn, tác giả đã rất cố gắng tập trung nghiên cứu, song do ít nhiều hạn chế về thời gian, cũng như về năng lực nên chắc chắn trong luận văn còn nhiều vấn đề chưa đề cập đến và khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của quí thầy cô và những góp ý của bạn đọc về luận văn này.

Quy Nhơn, tháng 02 năm 2008

Tác giả

Chương 1

Phương pháp sử dụng tính chất hàm lồi (lõm)

1.1 Thứ tự sắp được của dãy bất đẳng thức sinh bởi hàm lồi (lõm)

Trước hết, với hai số thực $a \geq b$, ta sử dụng kí hiệu $I(a;b)$ để ngầm định một trong bốn tập hợp $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$ và $[a;b]$.

Trong [1], hai kết quả sau đây đã được chứng minh:

Định lý 1.1.1. *Giả sử cho trước hàm số $y = f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ (hàm lồi) trên $I(a;b)$ và giả sử $x_1, x_2 \in I(a;b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó, với mọi dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\left(x_1; \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$:*

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < \frac{x_1+x_2}{2} \tag{1.1}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ trong $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; x_2\right)$:

$$\frac{x_1+x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < \ldots < v_1 < v_0 = x_2 \tag{1.2}$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2,\ \forall j = 0, 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \geq f(u_1) + f(v_1) \geq \ldots \geq f(u_n) + f(v_n). \tag{1.4}$$

Nói cách khác: Dãy $\big\{f(u_j) + f(v_j)\big\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, là một dãy giảm.

Định lý 1.1.2. *Giả sử cho trước hàm số $y = f(x)$ có $f''(x) \leqslant 0$ (hàm lõm) trên $I(a;b)$ và giả sử $x_1, x_2 \in I(a;b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó, với mọi dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\left(x_1; \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$:*

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_n < \frac{x_1+x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ trong $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; x_2\right)$:

$$\frac{x_1+x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < ... < v_1 < v_0 = x_2$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2, \forall j = 0, 1, ..., n,$$

ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \leqslant f(u_1) + f(v_1) \leqslant ... \leqslant f(u_n) + f(v_n). \tag{1.5}$$

Nói cách khác: Dãy $\big\{f(u_j) + f(v_j)\big\}$, $j = 0, 1, ..., n$, là một dãy tăng.

Nhận xét rằng, để có được những kết quả từ Định lí 1.1.1 hoặc Định lí 1.1.2, điều quan trọng trước hết là phải xây dựng trên $I(a;b)$ hai dãy $\{u_k\}$ và $\{v_k\}$ thoả mãn những điều kiện của định lí. Sau đó là việc tìm những hàm số $y = f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ hoặc $f''(x) \leqslant 0$ trên $I(a;b)$ để áp dụng.

Dưới đây là một vài minh họa cho hai định lí trên, với những dãy số và hàm số đơn giản nhất. Bạn đọc có thể tìm ra những kết quả khác, phong phú hơn.

Với hai số thực cho trước $x_1 < x_2$, hình ảnh của các điểm u_j và v_j lần lượt "tiến đều" về trung điểm của đoạn $[x_1x_2]$ là $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ trên trục số giúp ta xây dựng được hai dãy $\{u_k\}$ và $\{v_k\}$ thoả mãn những điều kiện của Định lí 1.1.1 và Định lí 1.1.2 như sau:

Ví dụ 1.1.

$$u_0 = x_1, u_1 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2.(n+1)}, \ldots, u_n = x_1 + n\frac{x_2 - x_1}{2(n+1)} = \frac{(n+2)x_1 + nx_2}{2(n+1)};$$

$$v_0 = x_2, v_1 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2.(n+1)}, \ldots, v_n = x_2 - n\frac{x_2 - x_1}{2(n+1)} = \frac{nx_1 + (n+2)x_2}{2(n+1)}.$$

Bây giờ, xét hàm số

$$f(x) = x^2; x \in R.$$

Ta có

$$f''(x) = 2 > 0; \forall x \in R.$$

Do đó, theo Định lí 1.1.1, ta có

Bất đẳng thức 1.1.

$$x_1^2+x_2^2 \geq \Big(\frac{(2n+1)x_1+x_2}{2(n+1)}\Big)^2+\Big(\frac{x_1+(2n+1)x_2}{2(n+1)}\Big)^2 \geq \Big(\frac{2nx_1+2x_2}{2(n+1)}\Big)^2+\Big(\frac{2x_1+2nx_2}{2(n+1)}\Big)^2 \cdots$$
$$\geq \Big(\frac{(n+2)x_1+nx_2}{2(n+1)}\Big)^2+\Big(\frac{nx_1+(n+2)x_2}{2(n+1)}\Big)^2 \geq \Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)^2; \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}.$$

Tiếp tục, nếu xét hàm số

$$f(x)=\frac{1}{x}; x>0.$$

Ta có

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}>0; \forall x>0.$$

Do đó, theo Định lí 1.1.1, ta có

Bất đẳng thức 1.2.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} \geq \frac{2(n+1)}{(2n+1)x_1+x_2}+\frac{2(n+1)}{x_1+(2n+1)x_2} \geq \frac{2(n+1)}{2nx_1+2x_2}+\frac{2(n+1)}{2x_1+2nx_2} \geq \cdots$$
$$\geq \frac{2(n+1)}{(n+2)x_1+nx_2}+\frac{2(n+1)}{nx_1+(n+2)x_2} \geq \frac{4}{x_1+x_2}; \forall x_1,x_2>0,\ n\geq 1.$$

Bây giờ, xét hàm số

$$f(x)=\sqrt{x}; x>0.$$

Ta có

$$f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}>0; \forall x>0.$$

Do đó, theo Định lí 1.1.1, ta có

Bất đẳng thức 1.3.

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \leqslant \sqrt{\frac{(2n+1)x_1+x_2}{2(n+1)}}+\sqrt{\frac{x_1+(2n+1)3x_2}{2(n+1)}} \leqslant \sqrt{\frac{2nx_1+2x_2}{2(n+1)}}+\sqrt{\frac{2x_1+2nx_2}{2(n+1)}}$$
$$\leqslant \cdots \leqslant \sqrt{\frac{(n+2)x_1+nx_2}{2(n+1)}}+\sqrt{\frac{nx_1+(n+2)x_2}{2(n+1)}} \leq \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}};\ \forall x_1,x_2>0\ n\geq 1.$$

Tiếp tục, nếu xét hàm số

$$f(x)=\frac{sinx}{1+sinx};\ x\in(0;\pi).$$

Ta có

$$f''(x)=-\frac{sinx+1+cos^2x}{(1+sinx)^3}<0;\ \forall x\in(0;\pi).$$

Do đó, theo Định lí 1.1.1, ta có

Bất đẳng thức 1.4.

$$\frac{sinx_1}{1+sinx_1}+\frac{sinx_2}{1+sinx_2}\leq\frac{sin\dfrac{(2n+1)x_1+x_2}{2(n+1)}}{1+sin\dfrac{(2n+1)x_1+x_2}{2(n+1)}}+\frac{sin\dfrac{x_1+(2n+1)x_2}{2(n+1)}}{1+sin\dfrac{x_1+(2n+1)x_2}{2(n+1)}}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\frac{sin\dfrac{(n+2)x_1+nx_2}{2(n+1)}}{1+sin\dfrac{(n+2)x_1+nx_2}{2(n+1)}}+\frac{sin\dfrac{nx_1+(n+2)x_2}{2(n+1)}}{1+sin\dfrac{nx_1+(n+2)x_2}{2(n+1)}}$$

$$\leq 2\frac{sin\dfrac{x_1+x_2}{2}}{1+sin\dfrac{x_1+x_2}{2}};\ \forall x_1,x_2\in(0;\pi),\ n\geq 1$$

Bây giờ, trở lại với Định lí 1.1.1 và Định lí 1.1.2. Có thể chứng minh được rằng kết quả (1.4) và (1.5) vẫn đúng nếu thay (1.3) bởi một giả thiết mạnh hơn. Ta có các kết quả sau đây:

Định lý 1.1.3. *Giả sử cho trước hàm số $y=f(x)$ có $f''(x)\geq 0$ (hàm lồi) trên $I(a;b)$ và giả sử $x_1,x_2\in I(a;b)$ với $x_1<x_2$. Khi đó, với mọi dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\left(x_1;\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$:*

$$x_1=u_0<u_1<u_2<...<u_n<\frac{x_1+x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ trong $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};x_2\right)$:

$$\frac{x_1+x_2}{2}<v_n<v_{n-1}<...<v_1<v_0=x_2$$

sao cho

$$x_1+x_2=u_0+v_0\geq u_1+v_1\geq\cdots\geq u_n+v_n, \tag{1.6}$$

ta đều có

$$f(u_0)+f(v_0)\geq f(u_1)+f(v_1)\geq\cdots\geq f(u_n)+f(v_n).$$

Nói cách khác: Dãy $\big\{f(u_j)+f(v_j)\big\}$, $j=0,1,\cdots,n$, là một dãy giảm.

Chứng minh. Với mỗi $j\in\{0,1,\cdots,n\}$, từ các giả thiết, ta có

$$u_j<u_{j+1}<\frac{u_{j+1}+v_{j+1}}{2}\leqslant\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}<v_{j+1}<v_j.$$

Bây giờ, với mỗi $j \in \{0, 1, ..., n\}$, đặt

$$\begin{cases} u_{j+1} - u_j = \epsilon_{j+1} \\ v_j - v_{j+1} = \delta_{j+1}. \end{cases}$$

Thế thì

$$0 < \epsilon_{j+1} \leqslant \delta_{j+1}; \forall j \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Bây giờ, với mỗi $j \in \{0, 1, ..., n\}$, theo Định lí Lagrange, ta có

$f(u_{j+1}) - f(u_j) = f'(c_{j+1})(u_{j+1} - u_j) = f'(c_{j+1})\epsilon_{j+1}$, với $c_{j+1} \in (u_j; u_{j+1})$;

$f(v_j) - f(v_{j+1}) = f'(d_{j+1})(v_j - v_{j+1}) = f'(d_{j+1})\delta_{j+1}$, với $d_{j+1} \in (v_{j+1}; v_j)$.

Hơn nữa, vì $c_{j+1} < d_{j+1}$; $\forall j \in \{0, 1, ..., n\}$ và $f''(x) \geq 0$, nên ta có

$$f'(c_{j+1}) \leqslant f'(d_{j+1}); \forall j \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Do đó, ta có

$$f(u_{j+1}) - f(u_j) \leqslant f(v_j) - f(v_{j+1}); \forall j \in \{0, 1, ..., n\},$$

hay

$$f(u_j) + f(v_j) \geq f(u_{j+1}) + f(v_{j+1}); \forall j \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Tương tự, ta có

Định lý 1.1.4. *Giả sử cho trước hàm số $y = f(x)$ có $f''(x) \leqslant 0$ (hàm lõm) trên $I(a; b)$ và giả sử $x_1, x_2 \in I(a; b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó, với mọi dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\left(x_1; \dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$:*

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ trong $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; x_2\right)$:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0 = x_2$$

sao cho

$$x_1 + x_2 = u_0 + v_0 \geq u_1 + v_1 \geq \cdots \geq u_n + v_n,$$

ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \leqslant f(u_1) + f(v_1) \leqslant \cdots \leqslant f(u_n) + f(v_n).$$

Nói cách khác: Dãy $\big\{f(u_j) + f(v_j)\big\}$, $j = 0, 1, \cdots, n$, là một dãy tăng.

Bây giờ, với hai số thực cho trước $x_1 < x_2$, hình ảnh của các điểm u_j và v_j lần lượt ”tiến chậm dần đều” về trung điểm của đoạn $[x_1x_2]$ là $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ trên trục số giúp ta xây dựng được hai dãy $\{u_k\}$ và $\{v_k\}$ thoả mãn những điều kiện của Định lí 1.1.3 và Định lí 1.1.4 như sau:

Ví dụ 1.2.

$$u_0 = x_1, u_1 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2^2}, ...,$$

$$u_n = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2^2} + \cdots + \frac{x_2 - x_1}{2^{n+1}} = \frac{(2^{n+1} - 2^n + 1)x_1 + (2^n - 1)x_2}{2^{n+1}};$$

$$v_0 = x_2, v_1 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2^2}, \cdots,$$

$$v_n = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2^2} - \cdots - \frac{x_2 - x_1}{2^{n+1}} = \frac{(2^n - 1)x_1 + (2^{n+1} - 2^n + 1)x_2}{2^{n+1}}.$$

Ngoài ra, có thể phối hợp các cách tạo dãy như trên, ta thu được các cặp dãy $\{u_k\}$ và $\{v_k\}$ thoả mãn những điều kiện của Định lí 1.1.3 và Định lí 1.1.4, chẳng hạn:

Ví dụ 1.3.

$$u_0 = x_1, u_1 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2(n+1)} - \frac{x_2 - x_1}{2^2(n+1)}, \cdots,$$

$$\begin{aligned} u_n &= x_1 + n\frac{x_2 - x_1}{2(n+1)} - \left(\frac{x_2 - x_1}{2^2(n+1)} + \frac{x_2 - x_1}{2^3(n+1)} + \cdots + \frac{x_2 - x_1}{2^{n+1}(n+1)}\right) \\ &= \frac{\big((n+1)2^{n+1} - (n-1)2^n - 1\big)x_1 + \big((n-1)2^n + 1\big)x_2}{(n+1)2^{n+1}}; \end{aligned}$$

$$v_0 = x_2, v_1 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2(n+1)}, \cdots, v_n = x_2 - n\frac{x_2 - x_1}{2(n+1)} = \frac{nx_1 + (n+2)x_2}{2(n+1)}.$$

Cuối cùng, với việc chọn các hàm số $y = f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ hoặc $f''(x) \leqslant 0$ trên $I(a;b)$, ta sẽ thu được khá nhiều ví dụ phong phú.

Đối với các hàm số lồi hoặc lõm, ngoài các định lí nêu trên, các dạng của Bất đẳng thức Karamata còn cho ta những phương pháp làm chặt bất đẳng thức rất hiệu quả. Sau đây là các kết quả cổ điển, đã được trình bày trong [1], mà ta có thể mô tả thông qua một số ví dụ.

1.2 Bất đẳng thức Karamata

Định lý 1.2.1. *(Bất đẳng thức Karamata)*

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a;b)$ sao cho $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a;b)$.

Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thuộc [a;b], thoả mãn điều kiện

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n,$$

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq a_1 \\ x_1 + x_2 \geq a_1 + a_2 \\ ... \\ x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} \geq a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Nhận xét rằng, các giả thiết của hai dãy $\{x_k\}$ và $\{a_k\}$ là khá nhiều. Với những kiến thức cơ bản về đại số tuyến tính, ta có thể chứng minh kết quả sau đây

Định lý 1.2.2. *(I.Schur)*

Điều kiện cần và đủ để hai bộ dãy số đơn điệu giảm $\{x_k, a_k; k = 1, 2, \cdots, n\}$, thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} x_1 \geq a_1 \\ x_1 + x_2 \geq a_1 + a_2 \\ ... \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

là giữa chúng có một phép biến đổi tuyến tính dạng

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j; i = 1, 2, \cdots, n,$$

trong đó

$$t_{kl} \geq 0, \sum_{j=1}^{n} t_{kj} = 1, \sum_{j=1}^{n} t_{jl} = 1; k, l = 1, 2, \cdots, n.$$

Có thể mô tả ma trận (t_{ij}) qua một ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.4. *Xét dãy số không âm bất kỳ* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *có tổng bằng* $\alpha > 0$. *Với mỗi* $i = 1, 2, \cdots, n$, *ta đặt*

$$\frac{\alpha_i}{\alpha} = a_i$$

Thế thì ma trận (a_{ij}); $i, j = 1, 2, \cdots, n$, *có thể xác định như sau*

$$a_{ij} = a_{i+j-1};\ \text{nếu } i + j \leqslant n + 1$$
$$a_{ij} = a_{i+j-n-1};\ \text{nếu } i + j > n + 1.$$

Ví dụ 1.5. *Giả sử* ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 *là 3 số dương có tổng bằng 1. Chọn k thoả mãn*

$$0 \leqslant k \leqslant min\{\frac{1}{\epsilon_1(1-\epsilon_1)}; \frac{1}{\epsilon_2(1-\epsilon_2)}; \frac{1}{\epsilon_3(1-\epsilon_3)}\}.$$

Thế thì ma trận (a_{ij}); $i, j = 1, 2, \cdots, n$, *có thể xác định như sau*

$$a_{ij} = k\epsilon_i^2 - k\epsilon_i + 1\ ;\ \text{nếu } i = j$$
$$a_{ij} = k\epsilon_i\epsilon_j\ ;\ \text{nếu } i \neq j.$$

Tương tự Định lí 1.2.5, ta có

Định lý 1.2.3. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm cấp hai tại mọi* $x \in (a; b)$ *sao cho* $f''(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a; b)$.

Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *và* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *là các số thuộc [a;b], thoả mãn điều kiện*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,$$

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \leqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \leqslant a_1 + a_2 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Tuy nhiên, khi giả thiết cuối cùng

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

trong Định lí 1.2.1 và Định lí 1.2.2 bị phá vỡ, cần phải có những kết quả mạnh hơn để thay thế. Ta có hai kết quả sau đây

Định lý 1.2.4. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$ và $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$.*

Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thuộc [a;b], đồng thời thoả mãn các điều kiện

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n,$$

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq a_1 \\ x_1 + x_2 \geq a_1 + a_2 \\ ... \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Định lý 1.2.5. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$ và $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$.*

Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thuộc [a;b], đồng thời thoả mãn các điều kiện

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n,$$

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \leqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \leqslant a_1 + a_2 \\ ... \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Ta thấy rằng, đối với các dạng của bất đẳng thức Karamata, việc tìm ra các cặp dãy $\{a_k\}$ và $\{x_k\}$ thoả mãn điều kiện của định lí là rất quan trọng. Sau đây là một số ví dụ về việc xây dựng các dãy này.

Ví dụ 1.6. *Giả sử cho trước dãy số giảm*

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n.$$

Khi đó, luôn tồn tại dãy số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ sao cho

$$x_1 - \alpha_1 \geq x_2 + \alpha_1 - \alpha_2 \geq \cdots \geq x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} \geq x_n + \alpha_{n-1}.$$

Thật vậy, ta chỉ cần chọn dãy $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ như sau

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2}, 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \frac{x_2 - x_3}{2}, \cdots, 0 \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \frac{x_{n-1} - x_n}{2}.$$

Chẳng hạn, xét dãy số $\{x_n\}$, với $x_n = -n$, $n = 1, 2, \cdots$

Khi đó, ta có $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$.

Ngoài ra, với mọi $n \geq 2$, ta có

$$\frac{x_{n-1} - x_n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vậy, nếu chọn dãy số $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$, trong đó

$$\alpha_n = \frac{1}{2n}; n \geq 2$$

thì ta có

$$0 < \alpha_n \leqslant \frac{1}{2}; \forall n \geq 2$$

và

$$\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} = \frac{1}{2(n-2)(n-1)}; \forall n \geq 3.$$

Thế thì, ta có

$$x_1 - \alpha_1 \geq x_2 + \alpha_1 - \alpha_2 \geq \cdots \geq x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} \geq x_n + \alpha_{n-1}.$$

Bây giờ, xét hàm lồi $f(x) = x^2$; $x \in R$. Thế thì, theo nhận xét trên, ta có kết quả sau đây

Bất đẳng thức 1.5.

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \cdots$$
$$+ \left(x_{n-1} + \frac{1}{2(n-2)(n-1)}\right)^2 + \left(x_n + \frac{1}{2(n-1)}\right)^2$$

với mọi số thực $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Ví dụ 1.7. *Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là các số thực dương.*

Ta xét bộ $b = \big(b_1, b_2, \cdots, b_n\big)$ là bộ hoán vị của dãy $\big(lna_1, lna_2, \cdots, lna_n\big)$ xếp theo thứ tự giảm dần. Với mỗi $i \in \{1, \cdots, n\}$, có thể coi $b_i = lna_{k_i}$, với $\big(k_1, k_2, \cdots, k_n\big)$ là hoán vị nào đó của $(1, 2, \cdots, n)$.

Bây giờ, ta lại xét bộ $c = \big(c_1, c_2, \cdots, c_n\big)$ là bộ hoán vị của dãy

$$\Big(ln\frac{a_1^2}{a_2}, ln\frac{a_2^2}{a_3}, \cdots, ln\frac{a_{n-1}^2}{a_n}, ln\frac{a_n^2}{a_1}\Big)$$

xếp theo thứ tự giảm dần. Với mỗi $i \in \{1, \cdots, n\}$, có thể coi $c_i = ln\dfrac{a_{k_i}^2}{a_{k_i+1}}$, với $\big(k_1, k_2, \cdots, k_n\big)$ là hoán vị nào đó của $(1, 2, \cdots, n)$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng cặp dãy $\{c_k\}$ và $\{b_k\}$ thoả mãn điều kiện của Định lí 1.2.1.

Bây giờ, xét hàm lồi $f(x) = \ln\big(1 + e^x\big)$, $x \in R$. Thế thì, theo Định lí 1.2.1, ta có

Bất đẳng thức 1.6.

$$\big(1 + a_1\big)\big(1 + a_2\big)\cdots\big(1 + a_n\big) \leqslant \Big(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\Big)\Big(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\Big)$$

với mọi số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Hệ quả 1.2.1.

$$\big(1 + a_1\big)\big(1 + a_2\big)\cdots\big(1 + a_n\big) \leqslant \Big(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\Big)\Big(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\Big)$$

$$\leqslant \Big(1 + \frac{a_1^4 a_3}{a_2^4}\Big)\Big(1 + \frac{a_2^4 a_4}{a_3^4}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{a_n^4 a_2}{a_1^4}\Big) \leqslant \cdots$$

với mọi số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Ta thấy rằng, với cặp dãy $\{c_k\}$ và $\{b_k\}$ trên, nếu chọn hàm số phù hợp, ta sẽ thu được nhiều bất đẳng thức khác. Chẳng hạn, xét hàm lồi $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$, $x \in R$, ta được

Bất đẳng thức 1.7.

$$\sqrt{1 + a_1} + \sqrt{1 + a_2} + \cdots + \sqrt{1 + a_n} \leqslant \sqrt{1 + \frac{a_1^2}{a_2}} + \sqrt{1 + \frac{a_2^2}{a_3}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{a_n^2}{a_1}},$$

với mọi số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Hệ quả 1.2.2.

$$\sqrt{1+a_1}+\sqrt{1+a_2}+\cdots+\sqrt{1+a_n}\leqslant\sqrt{1+\frac{a_1^2}{a_2}}+\sqrt{1+\frac{a_2^2}{a_3}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{a_n^2}{a_1}}$$

$$\leqslant\sqrt{1+\frac{a_1^4a_3}{a_2^4}}+\sqrt{1+\frac{a_2^4a_4}{a_3^4}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{a_n^4a_2}{a_1^4}}\leqslant\cdots$$

với mọi số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Ví dụ 1.8. *Trước hết, ta có nhận xét rằng: Nếu hai dãy số* $\{x_k, y_k \in I(a;b); k = 1, 2, \cdots, n\}$ *thoả mãn các điều kiện*

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n,$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

và

$$\frac{x_i}{x_j} \geq \frac{y_i}{y_j}; \forall i < j,$$

thì chúng thoả mãn điều kiện của Định lí 1.2.1.

Chứng minh. Thật vậy, xét hai bộ số $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Với i lần lượt bằng $1, 2, \cdots, n$, ta có

$$\frac{x_i}{x_1} \geq \frac{y_i}{y_1}.$$

Cộng các bất đẳng thức này theo vế, ta có

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{x_1} \geq \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{y_1}.$$

Suy ra

$$x_1 \geq y_1.$$

□

Bây giờ, tiếp tục xét hai bộ số $(x_1 + x_2, x_3, \cdots, x_n)$ và $(y_1 + y_2, y_3, \cdots, y_n)$.

Chứng minh tương tự, ta có

$$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2.$$

Tiếp tục quá trình tương tự, ta có

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$$

Như vậy, cùng với những giả thiết ban đầu, nhận xét trên đã được khẳng định. Bây giờ, xét $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Với mỗi $i \in \{1, ..., n\}$, ta đặt

$$y_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

$$x_i = \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Khi đó

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Khi đó

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n,$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n.$$

Ngoài ra, với mọi $i \geq j$, ta có

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{a_i^2}{a_j^2} \geq \frac{a_i}{a_j} = \frac{y_i}{y_j}.$$

Như vậy, theo nhận xét trên, cặp dãy số $\{x_k\}$ và $\{y_k\}$ thoả mãn điều kiện của Định lí 1.2.1 và do đó, với hàm số lồi

$$f(x) = \frac{x}{1-x}; x > 0,$$

ta có kết quả sau

Bất đẳng thức 1.8.

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + ... + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \leqslant \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2},$$

với mọi số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Hệ quả 1.2.3.

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \leqslant \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2} + ... + \frac{a_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2}$$

$$\leqslant \frac{a_1^4}{a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4} + \cdots + \frac{a_n^4}{a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_{n-1}^4} \leqslant \cdots,$$

với mọi số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Lưu ý: Người ta đã chứng minh được rằng, các kết quả của Định lí 1.2.1 và Định lí 1.2.4 vẫn đúng mà không cần đến giả thiết

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n.$$

Điều này cũng tương tự đối với giả thiết

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

trong các Định lí 1.2.3 và Định lí 1.2.5.

Khi đó, ta quy ước gọi các định lí tương tự lần lượt là Định lí 1.2.1a, Định lí 1.2.3a, Định lí 1.2.4a và Định lí 1.2.5a.

Ngoài ra, trong [1] cũng đã trình bày một số kết quả về các dạng Định lí Karamata mở rộng mà bạn đọc có thể tham khảo.

Hơn nữa, khá nhiều kết quả về độ gần đều và thứ tự sắp được của một dãy các tam giác cũng đã được đề cập trong [1]. Đây chính là một phương pháp khá hữu hiệu để làm chặt các bất đẳng thức lượng giác của tam giác. Ví dụ sau đây sẽ cho ta một minh hoạ đơn giản về vấn đề này.

Ví dụ 1.9. *Xét tam giác ABC. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử*

$$A \geq B \geq C.$$

Đặt $A' = 2A - B$, $B' = 2B - C$, $C' = 2C - A$.

Rõ ràng $A' > 0$ và $B' > 0$. Do đó, nếu thêm giả thiết $C' > 0$ (tức là $A < 2C$), thì A', B' , C' cũng là 3 góc của một tam giác. Hơn nữa, ta có

$$A' \geq A$$

$$A' + B' \geq A + B$$

$$A' + B' + C' = A + B + C$$

Do đó, hai bộ dãy số $\{A, B, C\}$ và $\{A', B', C'\}$ thoả mãn các điều kiện của Định lí 1.2.1a.

Bây giờ, nếu xét hàm số lồi $f(x) = sinx$; $x \in (0; \pi)$, thì ta có kết quả sau

Bất đẳng thức 1.9. *Giả sử tam giác ABC có góc lớn nhất nhỏ hơn hai lần góc nhỏ nhất. Thế thì, ta có*

$$sin(2A - B) + sin(2B - C) + sin(2C - A) \geq sinA + sinB + sinC.$$

Phần này sẽ được khép lại với việc giới thiệu một số hàm lồi, lõm để bạn đọc có thể áp dụng.

1.3 Giới thiệu một số hàm lồi và hàm lõm

1.3.1 Một số hàm lồi

$f(x) = x^{\alpha}$; $x > 0$, $\alpha < 0$.
$f(x) = (S - x)^{\alpha}$; $S > 0$, $x \in (0; S)$, $\alpha < 0$.
$f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}$; $x > 0$, $\alpha > 1$.
$f(x) = \dfrac{x^2}{x + S}$; $S > 0$, $x \geq 0$.
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $x > 0$.
$f(x) = \dfrac{x}{S - x}$; $S > 0$, $x \in (0; S)$.
$f(x) = e^{\alpha x}$; $x \in R$, $\alpha > 0$.
$f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\alpha x}}$; $x \geq 0$, $\alpha \geq 1$.
$f(x) = \left(e^x + \dfrac{1}{e^x}\right)^2$; $x \in R$.
$f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; $x > 0$.
$f(x) = \ln\left(1 + e^{\alpha x}\right)$; $x \in R$, $\alpha > 0$.
$f(x) = \ln\left(e^x + \dfrac{1}{e^x}\right)$; $x \in R$.
$f(x) = \sin^k x$; $x \in (0; \pi)$, $k < 0$.
$f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{sin^2 x}\right)$; $x \in (0; \pi)$.
$f(x) = \cos^k x$; $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $k < 0$.
$f(x) = \tan^k x$; $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $k \geq 1$.
$f(x) = \arcsin x$; $x \in (0; 1)$.
$f(x) = \arctan(e^x)$; $x < 0$.
$f(x) = \arctan\dfrac{x}{S - x}$; $S > 0$, $x \in (0; S)$.

1.3.2 Một số hàm lõm

$f(x) = x^{\alpha}$; $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.
$f(x) = (S - x)^{\alpha}$; $S > 0$, $x \in (0; S)$, $0 < \alpha < 1$.
$f(x) = \ln x^{1/n}$; $x > 1$, $n = 1, 2, ...$
$f(x) = \ln\left(e^{\alpha x} - 1\right)$; $x > 0$, $\alpha > 0$.
$f(x) = \ln x$; $x > 0$.
$f(x) = \sin^k x$; $x \in (0; \pi)$, $k \in (0; 1]$.
$f(x) = \ln(\sin x)$; $x \in (0; \pi)$.

$f(x) = \dfrac{sinx}{1+sinx}$; $x \in (0;\pi)$.
$f(x) =$cos$^k x$; $x \in \Big(0;\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $k \in (0;1]$.
$f(x) =$ln(1- cos$x$) ; $x \in (0;\pi)$.
$f(x) =$cos$x$ tan$x$; $x \in \Big(0;\dfrac{\pi}{2}\Big)$.
$f(x) =$arcsin$\dfrac{x}{1+x}$; $x \geq 0$.
$f(x) =$arcsin$\dfrac{x}{S+x}$; $S > 0$, $x > 0$.
$f(x) =$arctan$x$; $x > 0$.

1.4 Bài tập

Bài tập 1.1. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng với $\alpha > 0$, ta có:*

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^\alpha+\Big(\frac{b+c}{2}\Big)^\alpha+\Big(\frac{c+a}{2}\Big)^\alpha \leq \Big(\frac{2a+b}{3}\Big)^\alpha+\Big(\frac{2b+c}{3}\Big)^\alpha+\Big(\frac{2c+a}{3}\Big)^\alpha$$
$$\leq \left(\frac{2(4a+b)}{9}\right)^\alpha+\left(\frac{2(4b+c)}{9}\right)^\alpha+\left(\frac{2(4c+a)}{9}\right)^\alpha \leq \cdots$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = x^\alpha$; $x > 0$

Bài tập 1.2. *Cho $a \geq b \geq c \geq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c} \geq \frac{1}{\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)}+\frac{4}{\Big(\dfrac{c+a}{2}\Big)}+\frac{9}{\Big(\dfrac{b+c}{2}\Big)}$$
$$\geq \frac{1}{\Big(\dfrac{2a+b+c}{4}\Big)}+\frac{4}{\Big(\dfrac{a+2b+c}{4}\Big)}+\frac{9}{\Big(\dfrac{a+b+2c}{4}\Big)} \geq \cdots$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x > 0$

Bài tập 1.3. *Cho a, b, c không âm.Chứng minh rằng với $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$, ta có:*

$$\Big(1+a^2\Big)^\alpha+\Big(1+b^2\Big)^\alpha+\Big(1+c^2\Big)^\alpha \geq \Big(1+ab\Big)^\alpha+\Big(1+bc\Big)^\alpha+\Big(1+ca\Big)^\alpha$$
$$\geq 3\Big(3+\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Big)^\alpha.$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; $x \geq 0$

Bài tập 1.4. *Cho* $a, b, c \in (0; 1)$*. Chứng minh rằng:*

$$\begin{aligned}\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c} &\le \sqrt{1-\sqrt{ab}}+\sqrt{1-\sqrt{bc}}+\sqrt{1-\sqrt{ca}}\\ &\le \sqrt{1-\sqrt[4]{ab^2c}}+\sqrt{1-\sqrt[4]{bc^2a}}+\sqrt{1-\sqrt[4]{ca^2b}} \le \cdots\end{aligned}$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-x};\ x \in (0; 1)$

Bài tập 1.5. *Cho* $a, b, c \in (0; 1)$*. Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c} &\le \sqrt{1-\sqrt{ab}}+\sqrt{1-\sqrt{bc}}+\sqrt{1-\sqrt{ca}}\\ &\le \sqrt{\frac{a+b-2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{b+c-2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{c+a-2ca}{c+a}}\end{aligned}$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-x}\,; x \in (0; 1)$

Bài tập 1.6. *Cho* $a \ge b \ge c \ge 0$*. Chứng minh rằng:*

$$\begin{aligned}a+2\sqrt{b}+3\sqrt[3]{c} &\ge \sqrt{ab}+2\sqrt[4]{ca}+3\sqrt[6]{ca}\\ &\ge \sqrt[4]{a^2bc}+2\sqrt[8]{ab^2c}+3\sqrt[12]{abc^2} \ge \cdots\end{aligned}$$

Hướng dẫn: Xét hám số $f(x) = e^x\,; x \in \mathbb{R}$

Bài tập 1.7. *Cho* $a, b, c > 0$*. Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}a+b+c &\le \sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a}\\ &\ge \sqrt[9]{a^4b^4c}+\sqrt[9]{b^4c^4a}+\sqrt[9]{c^4a^4b} \ge \cdots\end{aligned}$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = e^x\,; x \in \mathbb{R}$

Bài tập 1.8. *Cho* $a, b, c > 0$*. Chứng minh rằng với* $\alpha, \beta > 0$ *và* $\alpha + \beta = 1$*, ta có:*

$$\begin{aligned}a+b+c &\ge a^\alpha b^\beta + b^\alpha c^\beta + c^\alpha a^\beta\\ &\ge a^{\alpha^2}b^{2\alpha\beta}c^{\beta^2}+b^{\alpha^2}c^{2\alpha\beta}a^{\beta^2}+c^{\alpha^2}a^{2\alpha\beta}b^{\beta^2} \ge \cdots\end{aligned}$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = e^x\,, x \in \mathbb{R}$

Bài tập 1.9. *Choa*$, b, c$ *dương. Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} &\le \sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a}\\ &\le \sqrt[9]{a^8b^2}+\sqrt[9]{b^8c^2}+\sqrt[9]{c^8a^2} \le \cdots\end{aligned}$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = e^x\,, x \in \mathbb{R}$

Bài tập 1.10. *Cho a, b, c không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \le \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{1+\sqrt[3]{a^2b}}+\frac{\sqrt[3]{b^2c}}{1+\sqrt[3]{b^2c}}+\frac{\sqrt[3]{c^2a}}{1+\sqrt[3]{c^2a}}$$
$$\le \frac{\sqrt[9]{a^4b^4c}}{1+\sqrt[9]{a^4b^4c}}+\frac{\sqrt[9]{b^4c^4a}}{1+\sqrt[9]{b^4c^4a}}+\frac{\sqrt[9]{c^4a^4b}}{1+\sqrt[9]{c^4a^4b}} \le \cdots.$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}\,; x\ge 0$

Bài tập 1.11. *Cho a, b, c không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng với $\alpha, \beta > 0$ và $\alpha+\beta=1$, ta có:*

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \le \frac{a^\alpha b^\beta}{1+a^\alpha b^\beta}+\frac{b^\alpha c^\beta}{1+b^\alpha c^\beta}+\frac{c^\alpha a^\beta}{1+c^\alpha a^\beta}$$
$$\le \frac{a^{\alpha^2}.b^{2\alpha\beta}.c^{\beta^2}}{1+a^{\alpha^2}.b^{2\alpha\beta}.c^{\beta^2}}+\frac{b^{\alpha^2}.c^{2\alpha\beta}.a^{\beta^2}}{1+b^{\alpha^2}.c^{2\alpha\beta}.a^{\beta^2}}+\frac{c^{\alpha^2}.a^{2\alpha\beta}.b^{\beta^2}}{1+c^{\alpha^2}.a^{2\alpha\beta}.b^{\beta^2}} \le \cdots$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}\,; x\ge 0$

Bài tập 1.12. *Cho a, b, c lớn hơn 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}+\frac{c}{c-1} \ge \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2b}-1}+\frac{\sqrt[3]{b^2c}}{\sqrt[3]{b^2c}-1}+\frac{\sqrt[3]{c^2a}}{\sqrt[3]{c^2a}-1}$$
$$\ge \frac{\sqrt[9]{a^4b^4c}}{\sqrt[9]{a^4b^4c}-1}+\frac{\sqrt[9]{b^4c^4a}}{\sqrt[9]{b^4c^4a}-1}+\frac{\sqrt[9]{c^4a^4b}}{\sqrt[9]{c^4a^4b}-1} \ge \cdots.$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}\,; x> 0$

Bài tập 1.13. *Cho a, b, c lớn hơn 1. Chứng minh rằng với $\alpha, \beta > 0$ và $\alpha+\beta=1$, ta có:*

$$\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}+\frac{c}{c-1} \ge \frac{a^\alpha b^\beta}{a^\alpha b^\beta-1}+\frac{b^\alpha c^\beta}{b^\alpha c^\beta-1}+\frac{c^\alpha a^\beta}{c^\alpha a^\beta-1}$$
$$\ge \frac{a^{\alpha^2}.b^{2\alpha\beta}.c^{\beta^2}}{a^{\alpha^2}.b^{2\alpha\beta}.c^{\beta^2}-1}+\frac{b^{\alpha^2}.c^{2\alpha\beta}.a^{\beta^2}}{b^{\alpha^2}.c^{2\alpha\beta}.a^{\beta^2}-1}+\frac{c^{\alpha^2}.a^{2\alpha\beta}.b^{\beta^2}}{c^{\alpha^2}.a^{2\alpha\beta}.b^{\beta^2}-1} \ge \cdots$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}\,; x> 0$

Bài tập 1.14. *Cho $a, b, c \in (0;1)$. Chứng minh rằng:*

$$(1-a)(1-b)(1-c) \le \left(1-\sqrt{ab}\right)\left(1-\sqrt{bc}\right)\left(1-\sqrt{ca}\right)$$
$$\le \left(1-\sqrt[4]{ab^2c}\right)\left(1-\sqrt[4]{bc^2a}\right)\left(1-\sqrt[4]{ca^2b}\right) \le \cdots$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = ln(1-x)$; $x \in (0;1)$

Bài tập 1.15. *Cho* $a, b, c \in (0;1)$. *Chứng minh rằng:*

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c) &\leq \left(1-\sqrt{ab}\right)\left(1-\sqrt{bc}\right)\left(1-\sqrt{ca}\right)\\ &\leq \left(\frac{a+b-2ab}{a+b}\right)\left(\frac{b+c-2bc}{b+c}\right)\left(\frac{c+a-2ca}{c+a}\right)\end{aligned}$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = ln(1-x)$; $x \in (0;1)$

Chương 2

Phương pháp lựa chọn tham số

Trước hết ta xét bài toán sau
Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 số không âm có tổng bằng 3, thì ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

Lời giải cho bài toán này không quá khó.
Ta có

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2c^2).$$

Do đó ta cần chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq 9$$

Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (thường gọi là bất đẳng thức AM-GM) cho 3 số, ta có

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a} \geq 3a$$

$$b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b} \geq 3b$$

$$c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c} \geq 3c$$

Cộng các vế của các bất đẳng thức trên, ta được điều cần chứng minh.
Nhận xét rằng, bất đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}} \geq ab+bc+ca$$

Như vậy, với $k \geq \dfrac{1}{2}$ thì bất đẳng thức sau đây luôn đúng

$$a^k+b^k+c^k \geq ab+bc+ca.$$

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: Với $k < \dfrac{1}{2}$, thì khi nào bất đẳng thức trên vẫn còn đúng? Nói cách khác, ta có bài toán.

Tìm hằng số k tốt nhất (nhỏ nhất) trong bất đẳng thức sau

$$a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca,$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm và $a + b + c = 3$.

Cách đặt vấn đề và việc giải các bài toán tương tự như trên cho ta một phương pháp để làm chặt bất đẳng thức: Phương pháp lựa chọn tham số (tốt nhất).

Có thể chia những bài toán thuộc phương pháp này bởi hai dạng như sau.

+ **Dạng 1**: Tham số k là tham số độc lập (không phụ thuộc vào một tham số nào khác) và chỉ có mặt ở một vế của bất đẳng thức (chẳng hạn ở bài toán trên) hoặc có mặt ở hai vế của bất đẳng thức.

+ **Dạng 2**: Tham số k là tham số phụ thuộc vào các tham số khác (chẳng hạn $k = k(n)$, với n là số các số thực cho trước).

Trong chương này, luận văn sẽ đề cập đến một số bài toán minh hoạ cho phương pháp lựa chọn tham số (tốt nhất) với các dạng nêu trên, cùng với việc đề xuất lời giải phù hợp.

2.1 Các dạng toán chứa tham số độc lập

2.1.1 Tham số chỉ thuộc một vế của bất đẳng thức

Khi tham số chỉ thuộc một vế của bất đẳng thức thì vế còn lại của bất đẳng thức được xem là không đổi. Phương pháp này được minh hoạ bởi các bài toán sau

Bài toán 2.1. *Tìm hằng số k tốt nhất (nhỏ nhất) trong bất đẳng thức sau*

$$a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca,$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm và $a + b + c = 3$

Lời giải. Theo phần giới thiệu ta đã chứng minh bất đẳng thức trên với $k = \dfrac{1}{2}$, do đó nó vẫn đúng với mọi $k \geq \dfrac{1}{2}$. Bây giờ ta xét bất đẳng thức khi $k \leq \dfrac{1}{2}$. Trước hết ta xét bổ đề sau

Bổ đề 2.1.1. *Giả sử $a + b = 2t \geq 1$, khi đó*

$$a^k + b^k - ab \geq min\big((2t)^k, 2t^k - t^2\big).$$

Thật vậy, giả sử $a \geq b$. Tồn tại một số không âm x với $a = t + x$, $b = t - x$.

Xét hàm số

$$\begin{aligned} f(x) &= (t+x)^k + (t-x)^k - t^2 + x^2 \\ f'(x) &= k(t+x)^{k-1} - k(t-x)^{k-1} + 2x \\ f''(x) &= k(k-1)(t+x)^{k-2} + k(k-1)(t-x)^{k-2} + 2 \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2)\Big((t+x)^{k-3} - (t-x)^{k-3}\Big) \end{aligned}$$

Như vậy $f'''(x)$ có duy nhất một nghiệm $x = 0$, do đó $f''(x)$ là hàm đơn điệu và có quá không quá một nghiệm, suy ra $f'(x)$ có không quá 2 nghiệm ($t \geq x \geq 0$). Vì f'(0)=0 và

$$f''(0) = 2k(k-1)t^{k-2} + 2 = 2 - 2k(1-k) \geq 0,$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của f sẽ lấy tại $x = 0$ hoặc $x = t$.

Với bổ đề trên, bài toán được chứng minh như sau: Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a + b = 2t \geq 1$, khi đó

$$a^k + b^k + c^k - (ab + bc + ca) \geq min\Big((2t)^k, 2t^k - t^2\Big) - 2ct + c^k.$$

(i) Nếu $(2t)^k \leq 2t^k - t^2$, áp dụng bổ đề với $2t$ và c

$$a^k + b^k + c^k - (ab+bc+ca) \geq (2t)^k + c^k - c.2t \geq min\Big((2t+c)^k, 2(t+\frac{c}{2})^k - (t+\frac{c}{2})^2\Big).$$

Vì $2t + c = 3$ nên

$$a^k + b^k + c^k - (ab + bc + ca) \geq min\Big(3^k, 2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4}\Big)$$

(ii) Nếu $(2t)^k \geq 2t^k - t^2$. Ta có thể coi trường hợp này giống như $a = b = z \geq 1, c = 3 - 2z$. Xét hàm số

$$\begin{aligned} g(z) &= 2z^k + (3-2z)^k - 2z(3-2z) - z^2 \\ &= 2z^k + (3-2z)^k - 6z + 3z^2 \\ g'(z) &= 2kz^{k-1} - 2k(3-2z)^{k-1} - 6 + 6z \\ g''(z) &= 2k(k-1)\Big(z^{k-2} - 2(3-2z)^{k-2}\Big) + 6 \\ g'''(z) &= 2k(k-1)(k-2)\Big(z^{k-3} - 4(3-2z)^{k-3}\Big) \end{aligned}$$

Dễ thấy $g'''(z)$ vô nghiệm với $z \geq 1$, suy ra $g'(z)$ có không quá hai nghiệm.

Vì $\lim_{z \to \frac{3}{2}} g(z) = -\infty$, nên giá trị nhỏ nhất của $g(z)$ với $1 \leq z \leq \dfrac{3}{2}$ lấy ở 2 đầu

$$g(z) \geq min\Big(0, 2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4}\Big).$$

Kết hợp cả hai trường hợp ta tìm được

$$a^k + b^k + c^k - (ab + bc + ca) \geq min\Big(0, 2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4}\Big).$$

Để có $a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca$, ta phải có

$$2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{2ln3 - 3ln2}{ln3 - ln2} \approx 0.2905$$

Khi đó sẽ có hai trường hợp xảy ra đẳng thức là $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}$, $c = 0$, hoặc các hoán vị tương ứng. □

Bài toán 2.2. *Tìm hằng số k tốt nhất trong bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{k}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải. Nhận xét rằng: Cố định $|a|, |b|, |c|$ thì bất đẳng thức nhỏ nhất khi $abc \leq 0$, nói cách khác ta có thể giả sử $a \geq c \geq 0 \geq b$. Điều này tương đương với việc ta chứng minh bất đẳng thức sau (sau khi đã đổi dấu của b) là

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a-c)^2} \geq \frac{k}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (a, b, c \geq 0),$$

trong đó k vẫn là hệ số mà ta chưa biết. Việc đầu tiên là ta loại bỏ c khỏi biểu thức vế trái nhờ bất dẳng thức đơn giản sau

$$\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a-c)^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$$

Do đó hiển nhiên ta có

$$VT \geq \frac{9}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{2(a^2+b^2)} \geq \frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Ta tìm được k tốt nhất là $\frac{9}{2}$, bất đẳng được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a = -b$, $c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Bài toán 2.3. *1. Các số thực dương a, b, c thoả mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Xét bất đẳng thức*

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

(i) Chứng minh bất đẳng thức không thể luôn đúng với mọi a, b, c.

(ii) Chứng minh rằng bất đẳng thức sẽ đúng nếu a, b, c thoả mãn điều kiện

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq abc(a^3 + b^3 + c^3).$$

2. Tìm hằng số dương k tốt nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 3\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k+c^k}{3}}$$

Lời giải. 1.(i). Cho $a=b=0.8,\ c=\sqrt[3]{1.976}$

(ii). Theo bất đẳng AM-GM ta có

$$a^2b+b^2a+1\geq 3ab,$$

$$b^2c+c^2b+1\geq 3bc,$$

$$c^2a+a^2c+1\geq 3ca$$

$$\Rightarrow abc\Big(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\Big)\geq abc(ab+bc+ca).$$

Từ đó kết hợp với điều kiện $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geq abc(a^3+b^3+c^3)=3abc$, ta suy ra

$$(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 3abc(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq 3abc\Rightarrow \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 3.$$

2. Ta xét bài toán ngược lại, giả sử rằng a, b, c là các số thực thoả mãn

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=3,$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$S=a^k+b^k+c^k.$$

Đặt $x=\frac{ab}{c},\ y=\frac{bc}{a},\ z=\frac{ca}{b}$. Khi đó $x+y+z=3$.

$$S=(xy)^{\frac{k}{2}}+(yz)^{\frac{k}{2}}+(zx)^{\frac{k}{2}}.$$

Theo một kết quả quen biết thì

$$S\leq max\Big(3,\frac{3^k}{2^k}\Big).$$

Và do đó giá trị tốt nhất để bất đẳng thức còn đúng là

$$3=\frac{3^k}{2^k}\Leftrightarrow k=\frac{ln3}{ln3-ln2}\approx 2.709511...<3$$

$\square$

Bài toán 2.4. *Giả sử a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3, hãy tìm số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \le 3.$$

Lời giải. Ta thực hiện phương pháp dồn biến. Hiển nhiên với mọi $k \le 0$ thì bất đẳng thức trên luôn đúng. ta xét trong trường hợp $1 \le k \le 2$.

Đặt $t = \dfrac{a+b}{2},\ u = \dfrac{a-b}{2} \Rightarrow a = t+u,\ b = t-u$. Xét hàm

$$\begin{aligned} f(u) &= c^k\Big((t+u)^k + (t-u)^k\Big) + (t^2-u^2)^k, \\ f'(u) &= kc^k\Big((t+u)^{k-1} - (t-u)^{k-1}\Big) - 2ku(t^2-u^2)^{k-1} \\ &= kc^k(t^2-u^2)^{k-1}\left(\frac{1}{(t-u)^{k-1}} - \frac{1}{(t+u)^{k-1}} - \frac{2u}{c^k}\right). \end{aligned}$$

Theo định lý Lagrange với hàm $g(x) = x^{1-k}$, tồn tại $t_0 \in [t-u, t+u]$ sao cho

$$(t+u)^{1-k} - (t-u)^{1-k} = 2u(1-k)t_0^{-k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(t-u)^{k-1}} - \frac{1}{(t+u)^{k-1}} = \frac{2u(k-1)}{t_0^k}.$$

Vì $t_0 \ge t-u \ge c$ nên $t_0^k \ge c^k$, mặt khác do $k \le 2$ nên

$$\frac{1}{(t-u)^{k-1}} - \frac{1}{(t+u)^{k-1}} = \frac{2u(k-1)}{t_0^k} \le \frac{2u}{c^k}.$$

Do đó $f'(u) \le 0 \Rightarrow f(u) \le f(0)$. Với kết quả này ta chỉ cần xét bài toán khi $a = b \ge 1 \ge c$. Xét hàm số một biến của a

$$\begin{aligned} h(a) &= 2a^k(3-2a)^k + a^{2k}, \\ h'(a) &= 2ka^{k-1}(3-2a)^k - 4ka^k(3-2a)^{k-1} + 2ka^{2k-1} \\ &= 2ka^{k-1}(3-2a)^{k-1}\left(3 - 4a + \frac{a^k}{(3-2a)^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Xét phương trình

$$h'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{a^k}{(3-2a)^{k-1}} = 4a - 3.$$

Rõ ràng phương trình vô nghiệm khi $a \le \dfrac{3}{4}$, ta chỉ cần xét khi $a \ge \dfrac{3}{4}$, khi đó phương trình tương đương với

$$kln a - (k-1)ln(3-2a) = ln(4a-3).$$

Xét hàm số sau

$$q(a) = klna - (k-1)ln(3-2a) - ln(4a-3),$$
$$q'(a) = \frac{k}{a} + \frac{2(k-1)}{3-2a} - \frac{4}{4a-3},$$
$$aq'(a) = k + \frac{2(k-1)a}{3-2a} - \frac{4a}{4a-3}.$$

Chú ý rằng các hàm số $\frac{a}{3-2a}$ và $-\frac{a}{4a-3}$ là các hàm số tăng nên phương trình $aq'(a) = 0$ có không quá một nghiệm, do đó phương trình $q(a) = 0$ có không quá 2 nghiệm, suy ra phương trình $h'(a) = 0$ có không quá 2 nghiệm. Do $h'(1) = 0$ và $q'(1) = k + 2(k-1) - 4 = 3k - 6 \leq 0$ nên từ bảng biến thiên ta suy ra

$$h(a) \leq max\left(h(1), h\left(\frac{3}{2}\right)\right).$$

Bài toán được chứng minh khi $2 \geq k \geq 1$. Nếu $k \leq 1$ thì

$$3\left((ab)^k + (ba)^k + (ca)^k\right) \leq (a^k + b^k + c^k)^2 \leq 3.$$

Còn nếu $k \geq 2$, với giả thiết $a \geq b \geq c$, ta sẽ chứng minh

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq (ab + ac)^k,$$

nhưng điều này hiển nhiên vì $VP \geq (ab)^k + (bc)^k + a^{k-2}bc \geq VT$.

Ngoài ra $a(b+c) = a(3-a) \leq \frac{9}{4}$ nên

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$$

Từ các chứng minh trên ta đi đến kết luận sau

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq max\left(3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\right).$$

Và hằng số k tốt nhất cần tìm là $\frac{ln3}{2(ln3 - ln2)}$. □

2.1.2 Tham số có trong hai vế của bất đẳng thức

Trong trường hợp này cả hai vế của bất đẳng thức sẽ thay đổi theo giá trị của tham số. Phương pháp này được minh hoạ bởi các bài toán sau

Bài toán 2.5. *(i) Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực tuỳ ý ta luôn có*

$$a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a).$$

(ii) Giả sử a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab + ba + ca = 6$. Chứng minh rằng

$$a^3b + b^3c + c^3a + abc(a + b + c) \leq 6.$$

(iii) Tìm hằng số k tốt nhất (lớn nhất) sao cho bất đẳng thức sau

$$a^4 + b^4 + c^4 + k(ab + bc + ca)^2 \geq (1 + 3k)(a^3b + b^3c + c^3a)$$

luôn đúng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$

Lời giải. Xét khai triển sau

$$(x^2 - kxy + kxz - z^2)^2 + (y^2 - kyz + kyx - x^2)^2 + (z^2 - kzx + kzy - y^2)^2 \geq 0.$$

Từ khai triển trên ta suy ra

$$a^4 + b^4 + c^4 + (k^2 - 1)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + k(ab^3 + bc^3 + ca^3)$$
$$\geq 2k(a^3b + b^3c + c^3a) + (k^2 - k)abc(a + b + c).$$

(i). Cho $k = 1$ ta được

$$a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a).$$

(ii). Cho $k = 2$ ta được

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + (ab^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2(ab^3 + bc^3 + ca^3)$$
$$\geq 4(a^3b + b^3c + c^3a) + 2abc(a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2 \geq 6(a^3b + b^3c + c^3a) + 6abc(a + b + c).$$

Vậy nếu $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$ thì

$$a^3b + b^3c + c^3a + abc(a + b + c) \leq 6 \qquad .$$

(iii). Xét khai triển

$$\Big((a - b)^2 + 2c(a - c)\Big)^2 + \Big((b - c)^2 + 2a(b - a)\Big)^2 + \Big((c - a)^2 + 2b(c - b)\Big)^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 6(a^4 + b^4 + c^4) + 4abc(a + b + c) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 12(a^3b + b^3c + c^3a)$$
$$\Leftrightarrow \qquad a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2 \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Vậy hằng số k tốt nhất (lớn nhât) cho bất đẳng thức là $k = \dfrac{1}{3}$ $\square$

Bài toán 2.6. *Tìm hằng số dương k lớn nhất để ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq k+\frac{3}{2}.$$

đúng với mọi a, b, c không âm.

Lời giải. Trong lời giải này, ta ký hiệu $\sum\limits_{sym}$ - Tổng đối xứng, sym là viết tắt của symmetric, chẳng hạn

$$\sum_{sym} a^3(b+c+d) = a^3(b+c+d)+b^3(c+d+a)+c^3(d+a+b)+d^3(a+b+x)$$

Ta sử dụng biến đổi

$$\sum_{sym}\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Bất đẳng thức được viết thành

$$\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+b)(b+c)}\geq k\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(a-b)^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(b+c)}-k\right)\geq 0.$$

+ Cho $b=c$, khi đó k phải thoả mãn điều kiện sau với mọi a, b không âm

$$k\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(b+c)}=\frac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}.$$

Có thể dễ dàng tìm được với $a, b\geq 0$ thì

$$minf(a,b)=\frac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh đây là giá trị tốt nhất của k.

+ Với $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c$.

$$S_a=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(a+b)}-k,\quad S_b=\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+a)(b+c)}-k,\quad S_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(c+b)}-k.$$

Khi đó dễ thấy $S_c\geq S_b\geq S_a$. Ngoài ra

$$S_b+S_a=\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+2c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}-2k.$$

Đặt $t = \dfrac{a+b}{2}$, không mấy khó khăn ta chứng minh được

$$S_b + S_a \geq \frac{2t^2 + c^2)(2t + 2c)}{2t(t+c)^2} - 2k = \frac{2t^2 + c^2}{t(t+c)} - 2k \geq 0$$

(Theo sự xác định của số k, mà ta không cần tính cụ thể từ trước). Vậy giá trị tốt nhất của k là $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ và có thêm trường hợp $a = b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c$ (hoặc các hoán vị) khi $k = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. □

Bài toán 2.7. *Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} + \frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8 + k,$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Lời giải. Ta sử dụng các biến đổi sau

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - 8 = \frac{c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2}{abc}$$
$$1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + b(c-a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Vậy ta phải tìm k thoả mãn bất đẳng thức

$$\sum_{sym}(a-b)^2\left(\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab} - k\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(a-b)^2 S_c \geq 0 \tag{2.1}$$

trong đó các hệ số S_a, S_b, S_c được xác định bởi

$$S_a = 2a(a^2+b^2+c^2) - kabc,$$

$$S_b = 2b(a^2+b^2+c^2) - kabc,$$

$$S_c = 2c(a^2+b^2+c^2) - kabc.$$

(i). *Điều kiện cần*:

Lấy $b = c$, ta có $S_b = S_c$. Để (2.1) đúng thì phải có

$$S_b \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2 + 2b^2) \geq kab.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta tìm được ngay giá trị tốt nhất của k là $4\sqrt{2}$.

(ii). *Điều kiện đủ*:

Với $k \leq 4\sqrt{2}$, ta chứng minh bất đẳng thức của đề bài luôn đúng. Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq S_b \geq S_c$.

$$S_a = 2a(a^2+b^2+c^2) - kabc \geq 0 \text{ là hiển nhiên}$$

$$S_b + S_c = 2(b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2kabc \geq 4x(a^2+2x^2) - 2kax^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo sự xác định của số k, ở đây $x = \sqrt{bc}$.

Kết luận: Bất đẳng thức đúng với mọi $a, b, c \geq 0$ khi và chỉ khi $k \leq 4\sqrt{2}$.

Nếu $k = 4\sqrt{2}$ thì đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = \sqrt{2}b = \sqrt{2}c$. Ngoài giá trị đó chỉ có một trường hợp xảy ra đẳng thức là $a = b = c$ $\square$

Bài toán 2.8. *Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm.*

$$\frac{c^2+kab}{(a+b)^2} + \frac{b^2+kac}{(a+c)^2} + \frac{a^2+kbc}{(b+c)^2} \geq \frac{3(1+k)}{4}$$

Lời giải. Cho $c = 0$ và $a = b$ rút ra $k \leq \frac{5}{2}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là kết quả tốt nhất của k. Rõ ràng để chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi $k \leq \frac{5}{2}$ ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $k = \frac{5}{2}$.

$$\frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2} + \frac{2b^2+5ac}{(a+c)^2} + \frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} \geq \frac{21}{4}.$$

Ta có

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} - \frac{7}{4} = \frac{8a^2+6bc-7b^2-7c^2}{4(b+c)^2} = \frac{4(2a^2-b^2-c^2)-3(b-c)^2}{4(b+c)^2}.$$

Ta phải chứng minh

$$4\sum_{sym}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{(a+c)^2}\right) \geq 3\sum_{sym}\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{sym}\frac{(a-b)^2(a+b)(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2} \geq 3\sum_{sym}\frac{a-b)^2}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}\Big(4(a+b)^3(a+b+2c) - 3(a+c)^2(b+c)^2(a-b)^2 \geq 0.$$

Lấy tương ứng S_c, S_a, S_b là các hệ số của $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ trong khai triển cơ sở trên. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

Dễ thấy $S_c \geq S_b \geq S_a$ và như vậy phần còn lại của bài toán ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $S_a + S_b \geq 0$, hay

$$4(a+c)(b+c)\Big((a+c)^2+(b+c)^2\Big)+4(a+b)\Big((a+c)^3+(b+c)^3\Big)\geq$$
$$\geq 3(a+b)^2\Big((b+c)^2+(a+c)^2\Big).$$

Có thể nhận thấy rằng hệ số của c và c^2 ở vế phải nhỏ hơn ở vế trái. Do đó ta chỉ cần chứng minh trên khi $c=0$, hay

$$4ab(a^2+b^2)+4(a+b)(a^3+b^3)\geq 3(a+b)^2(a^2+b^2).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a^4+b^4+2ab(a^2+b^2)\geq 6a^2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(4ab+a^2+b^2)\geq 0.$$

Hiển nhiên đúng, đẳng thức xảy ra trong trường hợp $k=\dfrac{5}{2}$ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị. □

Bài toán 2.9. *Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm.*

$$\frac{a^2+kbc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+kac}{a^2+c^2}+\frac{c^2+kab}{a^2+b^2}\geq\frac{3(1+k)}{2}$$

Lời giải. Ta lấy $c=0, a=b$ để suy ra $k\leq\dfrac{1}{2}$. Ta sẽ chứng minh giá trị này thoả mãn, và do đó bất đẳng thức sẽ vẫn đúng với mọi $k\leq\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{2b^2+ac}{a^2+c^2}+\frac{2c^2+ab}{a^2+b^2}\geq\frac{9}{2}$$

Đưa về các tổng bình phương bằng khai triển

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}-\frac{3}{2}=\frac{2(2a^2-b^2-c^2)-(b-c)^2}{2(b^2+c^2)}$$

Và do đó ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$2\sum_{sym}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{a^2+c^2}\right)\geq\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{sym}\Big(2(a+b)^2(a^2+b^2)-(a^2+c^2)(b^2+c^2)\Big)(a-b)^2\geq 0.$$

Lấy S_a, S_b, S_c là các hệ số tương ứng của $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ trong bất đẳng thức trên, không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$, khi đó $S_c\geq S_b\geq S_a$. Ta phải chứng minh thêm $S_b+S_a\geq 0$, hay tương đương với

$$2(a+c)^2(a^2+c^2)+2(b+c)^2(b^2+c^2)\geq(a^2+b^2)(a^2+b^2+2c^2).$$

Cũng dễ dàng nhận thấy hệ số của c^2 ở vế phải nhỏ hơn vế trái, và do đó ta chỉ cần chứng minh khi $c = 0$, hay

$$2a^4 + 2b^4 \geq (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và nếu $k = \dfrac{1}{2}$ thì có thêm 1 trường hợp $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

2.2 Các dạng toán chứa tham số phụ thuộc vào tham số khác

Về mặt bản chất, các dạng toán này khác hẳn với các dạng toán ở phần trên và thường có lời giải khá phức tạp. Dưới đây là một số bài toán minh hoạ cho phương pháp này.

Định lý 2.2.1. *(Inequality General Induction).*

Cho các số thực dương $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I \subset \mathbb{R}$ và $(c_n) \in I' \subset \mathbb{R}$ là một dãy số thực không giảm cho trước. Với điều kiện $x_1.x_2 \cdots x_n = k^n$ ($k = const$). Xét bất đẳng thức sau

$$f(c, x_1) + f(c, x_2 + \cdots + f(c, x_n) \geq nf(c, k) \qquad (*)$$

Trong đó $f(c, x) : I' \times I \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện

1. f là hàm thuần nhất với hai biến c, x, tức là tồn tại số d sao cho

$$f(ac, ax) = a^d f(c, x),\ \forall a \in I, c \in I'.$$

2. Bất đẳng thức (*) đúng với mọi $c \geq c_n$ trong trường hợp

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}.$$

Khi đó (*) luôn đúng với mọi $c \geq c_n$ và với mọi dãy $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Định lý Inequality General Induction thường được gọi là định lý I.G.I (lấy theo các chữ cái đầu trong tên tiếng Anh)

Bài toán 2.10. *Tìm $k = k(n)$ nhỏ nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi dãy số thực $x_1, x_2, \cdots, x_n$*

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq k(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} S_k \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{c_i}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i,\ c_i \geq 0$$

Chọn các số $c_i,\ i = \overline{1,n}$

$$\frac{S_1 + S - 2 + \cdots + S_n}{c_1} = \frac{S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{c_2} = \cdots = \frac{S_n}{c_n} = t$$

$$\Rightarrow c_i = sini\alpha - sin(i-1),\ \alpha = \frac{\pi}{2n+1}$$

Từ đó suy ra

$$k = k(n) = \frac{1}{4sin^2\frac{\pi}{2(2n+1)}}.$$

□

Bài toán 2.11. *Tìm số thực $k = k(n)$ lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi dãy số $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$*

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geq k(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho hai số

$$a_1 y_1^2 + \frac{1}{a_1} y_2^2 + 2y_1 y_2 \geq 0$$

....

$$a_{n-1} y_{n-1}^2 + \frac{1}{a_n} y_n^2 + 2y_{n-1} y_n \geq 0$$

trong đó $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là các số thực dương mà ta chọn sau. Cộng theo vế các bất đẳng thức trên lại ta được

$$\begin{aligned} a_1 y_1^2 + \Big(\frac{1}{a_1} + a_2\Big) y_2^2 + \cdots + \Big(\frac{1}{a_{n-2}} + a_{n-1}\Big) y_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}} y_n^2 + \\ + 2y_1 y_2 + 2y_2 y_3 + \cdots + 2y_{n-1} y_n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Chọn các số thực dương $a_i,\ i = \overline{1,n}$ để

$$a_1 = \frac{1}{a_1} + a_2 = \cdots = \frac{1}{a_{n-1}} - 1$$

Ta tìm được

$$a_k = \frac{sin(k+1)\alpha}{sin(k\alpha)},\ \alpha = \frac{2\pi}{2n+1}$$

Từ (2.2) ta có

$$2cos\alpha(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) + 2(y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_{n-1}y_n) + y_n^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2(1+cos\alpha)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \geq 2(y_1^2 + \cdots + y_n^2) - 2(y_1y_2 + \cdots + y_{n-1}y_n) - y_n^2$$
$$\Leftrightarrow 2(1+cos\alpha)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq y_1^2 + (y_1-y_2)^2 + \cdots + (y_{n-1}-y_n)^2$$

Thay các số $y_i,\ i=\overline{1,n}$ bởi $y_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$,ta được

$$4cos^2\frac{\alpha}{2}\Big(x_1^2 + (x_1+x_2)^2 + \cdots + (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\Big) \geq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Số $k = k(n)$ tốt nhất bằng $\dfrac{1}{4cos^2\frac{\pi}{2n+1}}$, đẳng thức xảy ra khi

$$x_k = (-1)^k\big(sink\alpha + sin(k-1)\alpha\big).$$

$\square$

Bài toán 2.12. *Tìm hằng số $k = k_n$ tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số $x_1, x_2, \cdots, x_n,\ x_i \geq 0\ \forall i = \overline{1,n}$ và $x_1x_2\cdots x_n = 1$*

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+k_nx_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+k_nx_n}} \leq n-1$$

Lời giải. Cho $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{k_n+1}} \leq n-1 \Leftrightarrow k_n \geq \frac{2n-1}{(n-1)^2}.$$

Để chứng minh điều kiện đủ, ta sẽ chứng minh bài toán hoán toàn tương đương

$$\frac{1}{\sqrt{c_n+x_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_n+x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{c_n+x_n}} \leq \sqrt{2n-1},\ \text{với } c_n = \frac{1}{k_n} = \frac{(n-1)^2}{2n-1}$$

Nhưng ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát hơn, đó là

$$\frac{1}{\sqrt{c+x_1}} + \frac{1}{\sqrt{c+x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{c+x_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{c+1}},\ \forall c \geq c_n$$

Thật vậy, để cho gọn ta xét trong trường hợp có $n+1$ số.
Lấy $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ và $x_{n+1} = x^{-n}$. Ta phải chứng minh

$$\frac{n}{\sqrt{c+x}} + \frac{1}{\sqrt{c+x^{-n}}} \leq \frac{n+1}{\sqrt{c+1}} \tag{2.3}$$

Giả sử $f(x)$ là vế trái của bất đẳng thức. Sử dụng đạo hàm

$$f'(x) = -\frac{n}{2(c+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{nx^{-n-1}}{2(c+x^{-n})^{\frac{3}{2}}}.$$

Và do đó

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(c+x)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{x^{-n-1}}{(c+x^{-n})^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow (cx^n+1)^3 = x^{n-2}(c+x)^3. \\ g(x) &= (cx^n+1)^3 - x^{n-2}(c+x)^3 \\ &= c^3x^{3n} + 3c^2x^{2n} - x^{n+1} - 3c^2x^{n-1} - c^3x^{n-2} + 1 \\ &= (x^{n+1}-1)(c^3x^{2n-1} + 3c^2x^{n-1} + c^3x^{n-1} - 1) = 0 \end{aligned}$$

Do hàm $c^3x^{2n-1}+3c^2x^{n-1}+c^3x^{n-1}-1$ đơn điệu tăng nên có duy nhất một nghiệm trong khoảng $(0;1)$. Chú ý rằng $g(1)=0$ nên ta có

$$\max_{x\geq 0} f(x) = \max[f(0), f(1)] = \max\Big(\frac{n}{\sqrt{c}}, \frac{n+1}{\sqrt{c+1}}\Big)$$

Từ đó, kết hợp với điều kiện $c_{n+1} \geq \dfrac{n^2}{2n+1}$, (2.3) đã được chứng minh xong.

Đặt $f(c,x) = \dfrac{1}{\sqrt{c+x}}$. Hiển nhiên $f(c,x)$ là một hàm thuần nhất.

Ta phải chứng minh

$$f(c,x_1) + f(c,x_2) + \cdots + f(c,x_n) \leq nf(c,1),\ \forall c \geq c_n.$$

Dễ thấy rằng $c_n = \dfrac{(n-2)^2}{2n-1}$ là một dãy số dương tăng.

Theo chứng minh trên thì $f(c,x)$ đã thoả điều kiện (2) của định lý I.G.I. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn chỉnh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi cả n số x_i bằng nhau hoặc có $n-1$ số bằng 0, số còn lại bằng $+\infty$ □

Bài toán 2.13. *Giả sử n và k là hai số tự nhiên thoả mãn $n \geq k > 2$. Tìm số thực lớn nhất $g(n,k)$ có tính chất: bất kỳ k trong n số thực dương $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sẽ là độ dài k cạnh của một đa giác lồi nếu*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\Big) < g(n,k).$$

Lời giải. Chúng ta biết rằng $a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_1$ là độ dài k cạnh của một k giác lồi khi và chỉ khi $a_1+a_2+\cdots+a_{k-1} > a_k$. Do đó bài toán sau có thể diễn đạt lại là: với điều kiện $x_n \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}$ và $x_n \geq x_{n-1} \geq \cdots \geq x_1$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\Big) < g(n,k).$$

Để làm điều đó ta sẽ thiết lập hệ thức liên hệ $g(n+1,k)$ và $g(n,k)$.
Giả sử rằng giá trị $g(n,k)$ đã xác định và đẳng thức có xảy ra tại$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})$ với $\overline{x_n} \geq \overline{x_{n-1}} \geq \cdots \geq \overline{x_1}$. Xét điều kiện

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n+1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Đặt

$$A = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$
$$B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}.$$

Xét hàm số $f(x) = (x + A)\Big(\dfrac{1}{x} + B\Big)$ với $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + B - \frac{x+A}{x^2} = B - \frac{A}{x^2}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{A}{B}} = x_0 > 0.$$

Do $A \leq n x_{n+1},\ B \geq \dfrac{n}{x_{n+1}} \Rightarrow x_0 \leq x_{n+1}$. Tại x_0, hàm f đặt cực tiểu vì vậy

$$f(x) \geq f(x_0) = \Bigg(\sqrt{\frac{A}{B}} + A\Bigg)\Bigg(\sqrt{\frac{B}{A}} + B\Bigg) = (\sqrt{AB} + 1)^2.$$

Theo giả thiết $AB \geq g(n,x)$ và đẳng thức xảy ra được nên

$$g(n+1,x) \geq \Big(\sqrt{g(n,k)} + 1\Big)^2$$

Đẳng thức xảy ra tại

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}, \overline{x_{n+1}}) = \left(\sqrt{\frac{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}}{\frac{1}{\overline{x_1}} + \frac{1}{\overline{x_2}} + \cdots + \frac{1}{\overline{x_n}}}}\right).$$

Bây giờ ta chỉ cần tính giá trị của $g(k,k)$, xét với điều kiện
$0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}$. Ta vẫn đặt $A' = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}$

và $B' = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_{k-1}}$.

Xét hàm số

$$h(x) = (x + A')\Big(\frac{1}{x} + B'\Big) \Rightarrow h'(x) = B' - \frac{A'}{x^2}$$

Với điều kiện $x \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} \geq x_{k-1}$, vì $\sqrt{\dfrac{A}{B}} < x_{k-1} < x$ nên

$$\begin{aligned} h(x) &\geq h(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}) = h(A') = 2A'\Big(\frac{1}{A'} + B'\Big) = 2 + 2A'B' \\ &= 2 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1})\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{k-1}}\Big) \\ &\geq 2 + 2(k-1)^2 = 2k^2 - 4k + 4 \end{aligned}$$

vậy $g(k,k) = 2k^2 - 4k + 4$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = \frac{x_k}{k-1}$$

Từ kết quả trên suy ra

$$\sqrt{g(n,k)} = \sqrt{g(n-1,k)} + 1 \Rightarrow g(n,k) = \big(n - k + \sqrt{2k^2 - 4k + 4}\big)^2$$

Và do đó $n^2 + 1$ chưa phải là đánh giá tốt nhất cho bất đẳng thức ban đầu, giá trị tốt nhất phải là $(n - 3 + \sqrt{10})^2 \geq n^2 + 1,\ \forall n \geq 3.$ $\square$

2.3 Bài tập

Bài tập 2.1. *Tìm số thực α nhỏ nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x > 0$*

$$2\left(x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha} + 3\right) \geq 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Bài tập 2.2. *Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hằng số $C_k > 0$ để bất đẳng thức sau đúng với các số thực a, b, c tuỳ ý*

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq C_k(ab+bc+ca)^k$$

Bài tập 2.3. *Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hằng số $C_k > 0$ để bất đẳng thức sau đúng với các số thực a, b, c tuỳ ý*

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq C_k(a+b+c)^k.$$

Bài tập 2.4. *Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi x, y, z không âm có tổng bằng 1*

$$\sqrt{x+k(y-z)^2} + \sqrt{y+k(z-x)^2} + \sqrt{z+k(x-y)^2} \leq \sqrt{3}$$

Bài tập 2.5. *Tìm hằng số dương k tốt nhất sao cho với mọi a, b, c không âm thoả mãn $a+b+c = 3$ thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{2+\sqrt[k]{a}} + \frac{1}{2+\sqrt[k]{b}} + \frac{1}{2+\sqrt[k]{c}} \geq 1.$$

Bài tập 2.6. *Tìm hằng số dương k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm có tổng bằng 3*

$$a^3 + b^3 + c^3 + kabc \leq 3 + k$$

Bài tập 2.7. *Tìm hằng số dương k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với các bộ số thực không âm a, b, c tuỳ ý*

$$\frac{1}{\sqrt{k^2a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{k^2b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{k^2c^2+ab}} \geq \frac{4+2k}{k(a+b+c)}$$

Bài tập 2.8. *Tìm hằng số thực k tốt nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{1+bc}{ka^2+bc} + \frac{1+ca}{kb^2+ca} + \frac{1+ab}{kc^2+ab} \geq \frac{12}{k+1}$$

với a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $ab+bc+ca = 1$.

Bài tập 2.9. *Tìm hằng số thực dương k nhỏ nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{c+a)^2}+k\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{3}{4}+\frac{k}{3},$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Bài tập 2.10. *Tìm hằng số thực dương k nhỏ nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+k\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\geq 1+\frac{k}{3},$$

với a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Bài tập 2.11. *Tìm điều kiện cho các số dương k, l để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+l\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{3}{2}+k+\frac{l}{3}$$

Bài tập 2.12. *Tìm hằng số thực k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^2+kbc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+kac}{a^2-ac+c^2}+\frac{c^2+kab}{a^2-ab+b^2}\geq 3(1+k).$$

Bài tập 2.13. *Cho các số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$ thoả mãn điều kiện $a_1a_2\cdots a_n=1$. Tìm giá trị tốt nhất của k để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}+\cdots+\frac{1}{(1+a_n)^k}\geq\frac{n}{2^k}$$

Bài tập 2.14. *Tìm hằng số $k=k(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi dãy số không âm $a_1, a_2, \cdots, a_n$*

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\geq k(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1).$$

Bài tập 2.15. *Cho các số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$ có tích bằng 1. Tìm hằng số thực $k=k(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_na_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+k_na_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+k_na_n}}\geq n-1$$

Bài tập 2.16. *Cho các số thực không âm $x_1, x_2, \cdots, x_n$ có tổng bằng n. Tìm hằng số dương $k=k_n$ tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$x_1x_2\cdots x_n\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\Big)\leq n+k_n(x_1x_2\cdots x_n-1).$$

Bài tập 2.17. *Cho $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n và k là số thực dương tuỳ ý. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau*

(i) $S_{k,n-1} = (x_1.x_2 \cdots x_{n-1})^k + (x_2.x_3 \cdots x_n)^k + \cdots + (x_n.x_1.x_2 \cdots x_{n-2})^k.$

(ii) $S_{k,p} = \sum\limits_{1 \leq i_1 > i_2 \cdots < i_p \leq n} x_{i_1}^k x_{i_2}^k \cdots x_{i_p}^k.$

Chương 3

Phương pháp sử dụng tính chất của hàm đơn điệu

3.1 Hàm đơn điệu

Một hàm số $f(x)$ xác định trên tập $I(a,b) \subset \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện: Với mọi $x_1, x_2 \in I(a,b)$, ta đều có

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2,$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $I(a,b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a,b)$, ta đều có

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng thực sự trên $I(a,b)$.

Ngược lại, khi

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2;\ \forall x_1, x_2 \in I(a,b),$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a,b)$. Nếu xảy ra

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2;\ \forall x_1, x_2 \in I(a,b),$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a,b)$.

Những hàm số đơn điệu tăng thực sự trên $I(a,b)$ được gọi là hàm đồng biến trên $I(a,b)$ và hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a,b)$ được gọi là hàm nghịch biến trên tập đó.

Nhận xét 3.1. *Đối với nhiều bài toán, để chứng minh tính chất đơn điệu của hàm số trong một khoảng, đôi khi việc áp dụng một số kỹ thuật cơ bản lại tỏ ra không hiệu lực bằng việc áp dụng những tính chất sau đây (tính chất phân số ở bậc tiểu học)*

Định lý 3.1.1. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b).*

(i) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó

(ii) Nếu $f(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khảng đó.

Định lý 3.1.2. *hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm số đơn điệu tăng khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big).$$

Định lý 3.1.3. *Cho phân số $\dfrac{p}{q}$ với $q > 0$ và số dương d. Khi đó*

(i) Nếu phân số $\dfrac{p}{q}$ dương thì $\dfrac{p}{q} \geq \dfrac{p}{q+d}$.

(ii) Nếu phân số $\dfrac{p}{q}$ âm thì $\dfrac{p}{q} \leq \dfrac{p}{q+d}$

Dưới đây là một số bài toán mà việc sử dụng tính chất của hàm số đơn điệu như là một phương pháp hữu hiệu để làm chặt bất đẳng thức.

Bài toán 3.1. *Với mọi bộ số dương cho trước, hàm số*

$$f(x) = \frac{a^t}{b^t + c^t} + \frac{b^t}{c^t + a^t} + \frac{c^t}{a^t + b^t},\ t \in \mathbb{R},$$

là một hàm số đồng biến trong $[0, +\infty)$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c > 0$.Khi đó với mọi $t_1 \geq t_2$, ta có

$$b^{t_1} + c^{t_1} < c^{t_1} + a^{t_1} < a^{t_1} + b^{t_1}$$

$$b^{t_2} + c^{t_2} < c^{t_2} + a^{t_2} < a^{t_2} + b^{t_2}$$

Suy ra

$$M = \frac{a^{t_1}}{b^{t_1} + c^{t_1}} - \frac{a^{t_2}}{b^{t_2} + c^{t_2}} = \frac{a^{t_2}.b^{t_2}(a^{t_1-t_2} - b^{t_1-t_2}) + a^{t_2}.c^{t_2}(a^{t_1-t_2} - c^{t_1-t_2})}{(b^{t_1} + c^{t_1})(b^{t_2} + c^{t_2})} \geq 0$$

$$N = \frac{b^{t_1}}{c^{t_1} + a^{t_1}} - \frac{b^{t_2}}{c^{t_2} + a^{t_2}} = \frac{b^{t_2}.c^{t_2}(b^{t_1-t_2} - c^{t_1-t_2}) + b^{t_2}.a^{t_2}(b^{t_1-t_2} - a^{t_1-t_2})}{(c^{t_1} + a^{t_1})(c^{t_2} + a^{t_2})}$$

$$P = \frac{c^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1}} - \frac{c^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2}} = \frac{a^{t_2}.c^{t_2}(c^{t_1-t_2} - a^{t_1-t_2}) + b^{t_2}.c^{t_2}(c^{t_1-t_2} - b^{t_1-t_2})}{(a^{t_1} + b^{t_1})(a^{t_2} + b^{t_2})} \leq 0$$

mặt khác

$$M \geq \frac{a^{t_2}.b^{t_2}(a^{t_1-t_2} - b^{t_1-t_2}) + a^{t_2}.c^{t_2}(a^{t_1-t_2} - c^{t_1-t_2})}{(c^{t_1} + a^{t_1})(c^{t_2} + a^{t_2})}$$

$$N = \frac{b^{t_2}.c^{t_2}(b^{t_1-t_2} - c^{t_1-t_2}) + b^{t_2}.a^{t_2}(b^{t_1-t_2} - a^{t_1-t_2})}{(c^{t_1} + a^{t_1})(c^{t_2} + a^{t_2})}$$

$$P \geq \frac{a^{t_2}.c^{t_2}(c^{t_1-t_2} - a^{t_1-t_2}) + b^{t_2}.c^{t_2}(c^{t_1-t_2} - b^{t_1-t_2})}{(c^{t_1} + a^{t_1})(c^{t_2} + a^{t_2})}$$

Do đó $M + N + P \geq 0$, hay

$$\frac{a^{t_1}}{b^{t_1} + c^{t_1}} + \frac{b^{t_1}}{c^{t_1} + a^{t_1}} + \frac{c^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1}} \geq \frac{a^{t_2}}{b^{t_2} + c^{t_2}} + \frac{b^{t_2}}{c^{t_2} + a^{t_2}} + \frac{c^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2}}$$

Tức là

$$f(t_1) \geq f(t_2)$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$ □

Hệ quả 3.1.1. *Cho $\alpha \geq \beta \geq 0$. Chứng minh rằng với mọi bộ số dương a, b, c, ta đều có*

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha + c^\alpha} + \frac{b^\alpha}{c^\alpha + a^\alpha} + \frac{c^\alpha}{a^\alpha + b^\alpha} \geq \frac{a^\beta}{b^\beta + c^\beta} + \frac{b^\beta}{c^\beta + a^\beta} + \frac{c^\beta}{a^\beta + b^\beta}.$$

Bài toán 3.2. *Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng hàm số*

$$f(t) = \Big(\frac{3a}{2b + 2c - a}\Big)^t + \Big(\frac{3b}{2c + 2a - b}\Big)^t + \Big(\frac{3c}{2a + 2b - c}\Big)^t.$$

là một hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$

Chứng minh. Nhận xét rằng với a, b, c là 3 cạnh của tam giác, thì

$$\frac{3a}{2b + 2c - a} + \frac{3b}{2c + 2a - b} + \frac{3c}{2a + 2b - c} \geq 1$$

Khi đó, với $\forall t \geq 1$, ta có

$$\Big(\frac{3a}{2b + 2c - a}\Big)^t + \Big(\frac{3b}{2c + 2a - b}\Big)^t + \Big(\frac{3c}{2a + 2b - c}\Big)^t \geq 3$$

Thật vậy, bất đẳng thức đúng với $t = 1$. Ta xét trường hợp $t > 1$. Ta có

$$\Big(\frac{3a}{2b + 2c - a}\Big)^t + t - 1 \geq t\Big(\frac{3a}{2b + 2c - a}\Big),$$

$$\Big(\frac{3b}{2c + 2a - b}\Big)^t + t - 1 \geq t\Big(\frac{3b}{2c + 2a - b}\Big),$$

$$\Big(\frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^t + t - 1 \geq t\Big(\frac{3c}{2a+2b-c}\Big),$$

$$(t-1)\Bigg(\frac{3a}{2b+2c-a} + \frac{3b}{2c+2a-b} + \frac{3c}{2a+2b-c}\Bigg) \geq 3(t-1)\ \forall a,b,c>0,\ \forall t\geq 1.$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức ta thu được điều phải chứng minh

$$\Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^t + \Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^t + \Big(\frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^t \geq 3$$

Tiếp theo ta chứng minh hàm $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$,
tức là $\forall t_1, t_2 \in [1;+\infty), t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $f(t_1) \leq f(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^{t_2} \geq$$
$$\geq \Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^{t_1} + \frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^{t_1}$$

Ta có

$$\Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^{t_1},$$
$$\Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^{t_1},$$
$$\Big(\frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^{t_1},$$
$$(\frac{t_2}{t_1} - 1)\Bigg(\Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^{t_1} + \frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^{t_1}\Bigg) \geq 3(\frac{t_2}{t_1} - 1).$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^{t_2} \geq$$
$$\geq \Big(\frac{3a}{2b+2c-a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{3b}{2c+2a-b}\Big)^{t_1} + \frac{3c}{2a+2b-c}\Big)^{t_1},\ \forall t_2 > t_1 \geq 1$$

Vậy $f(t)$ đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$ □

Bài toán 3.3. *Chứng minh rằng với mọi bộ số $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ ta luôn có đa thức*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j}$$

là một hàm đồng biến trong $[0,+\infty)$

Chứng minh. Nhận xét rằng khi $n=1$, ta có

$$Q(x) = \frac{a_i^2}{2}x^2 \Rightarrow Q'(x) = a_i^2 x^2 = \frac{1}{x}(a_i x)^2 > 0,\ \forall x > 0$$

và $n = 2$, ta có

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{a_ia_j}{i+j}x^{i+j} \\ \Rightarrow Q'(x) &= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_ia_jx^{i+j} = \frac{1}{x}(a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + a_2x^4) \\ &= \frac{1}{x}\big(a_1x + a_2x^2\big)^2 = \frac{1}{x}\Big(\sum_{i=1}^{2}a_ix_i\Big)^2 > 0,\ \forall x > 0 \end{aligned}$$

Do đó khi

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j}x^{i+j} \\ \Rightarrow Q'(x) &= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_jx^{i+j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_ia_1x^{i+1} + a_ia_2x^{i+2} + \cdots + a_ia_nx^{i+n}) \\ &= a_1a_1x^2 + a_1a_2x^3 + \cdots + a_1a_nx^{1+n} + a_2a_1x^3 + a_2a_2x^4 + \cdots + a_2a_nx^{2+n} + \\ &+ \ \cdots + a_na_1x^{n+1} + a_na_2x^{n+2} + \cdots + a_na_nx^{2n} \\ &= a_1^2x^2 + a_2^2x^4 + \cdots + a_n^2x^{2n} + 2a_1a_2x^3 + \cdots + 2a_na_1x^{n+1} \\ &= \frac{1}{x}(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\Big)^2 > 0,\ \forall x > 0 \end{aligned}$$

□

3.2 Tính đơn điệu của hàm các đại lượng trung bình

Bất đẳng thức về các đại lượng trung bình đóng một vai trò khá quan trọng trong việc nghiên cứu và sáng tạo bất đẳng thức. Do đó, việc làm chặt các bất đẳng thức này là rất có ý nghĩa. Nghiên cứu tính đơn điệu của hàm các đại lượng trung bình là một trong những phương pháp đó.

3.2.1 Các đại lượng trung bình

Ký hiệu $a = (a_i)_{i=1}^n$ là dãy của n số không âm. Với n cố định, ta ký hiệu

$$A(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i,\ G(a) = \Big(\prod_{i=1}^n a_i\Big)^{\frac{1}{n}},\ H(a) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}\ (a_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$$

Ta biết rằng, $A(a), G(a), H(a)$ tương ứng được gọi là trung bình cộng, trung bình nhân và trung bình điều hòa. Hơn nữa, định lý quan trọng sau đây đã được nhiều tài liệu chứng minh

Định lý 3.2.1. *Có các bất đẳng thức sau*

$$A(a) \geq G(a) \geq H(a)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3.2.2 Các đại lượng trung bình suy rộng

Với $a = (a_i)_{i=1}^n,\ a_i > 0,\ r \in \mathbb{R}, r \neq 0$, ký hiệu

$$M_r(a) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^r\Big)^{\frac{1}{r}}$$

Rõ ràng là

$$M_1(a) = A(a),\ M_{-1} = H(a).$$

Sử dụng quy tắc Lopital, dễ dàng chứng minh được rằng

$$\lim_{r\to 0} M_r(a) = G(a).$$

Nếu $a_k = \max(a)$, thì với $r > 0$, ta có

$$a_k \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \leq M_r(a) \leq a_k.$$

Do đó

$$\lim_{r\to\infty} M_r(a) = \max(a).$$

Mặt khác, từ hệ thức

$$M_{-r}(a) = \frac{1}{M_r(\frac{1}{a})},$$

ta có

$$\lim_{r\to -\infty} M_r(a) = \min(a).$$

Vì vậy, ta định nghĩa

$$M_0(a) := G(a),\ M_{+\infty}(a) = \max(a),\ M_{-\infty}(a) = \min(a).$$

Ta có kết quả sau đây

Định lý 3.2.2. *Với dãy số dương* $a = (a_i)_{i=1}^n,\ r_1 < r_2,$ *thì* $M_{r_1}(a) \leq M_{r_2}(a)$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Chứng minh. a) **Trường hợp $\mathbf{r_1 < 0 < r_2}$:**
Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i^{r_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^{r_1}$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức này với số mũ $\dfrac{1}{r_1} < 0$, ta có

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

Vậy $M_0(a) \geq M_{r_1}(a)$
Tương tự ta cũng chứng minh được

$$M_0(a) \leq M_{r_2}(a).$$

Suy ra $M_{r_1}(a) \leq M_{r_2}(a)$.
b) **Trường hợp $\mathbf{0 < r_1 < r_2}$:**
Đặt $k = M_{r_1}(a)$. Khi đó

$$\frac{M_{r_2}(a)}{M_{r_1}(a)} = \frac{M_{r_2}(a)}{k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$
$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{k}\right)^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{k}\right)^{r_1(\frac{r_2}{r_1})}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$

Đặt

$$d_i = \left(\frac{a_i}{k}\right)^{r_1};\ i = \overline{1, n}.$$

Thế thì, ta có

$$\frac{M_{r_2}(a)}{M_{r_1}(a)} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}} \tag{3.1}$$

Ngoài ra, ta có

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_1}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{k}\right)^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{r_1}\right)\frac{1}{r_1}$$

$$= \frac{1}{k}.M_{r_1}(a) = \frac{k}{k} = 1.$$

Suy ra $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = n.$

Đặt $d_i = 1 + x_i;\ i = \overline{1,n}$, với $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0;\ x_i \geq -1,\ \forall i = \overline{1,n}.$

Vì $\dfrac{r_2}{r_1} > 1$ nên theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$d_i^{\frac{r_2}{r_1}} = \left(1 + x_i\right)^{\frac{r_2}{r_1}} \geq 1 + \frac{r_2}{r_1}x_i;\ i = \overline{1,n}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^{\frac{r_2}{r_1}} \geq n + \frac{r_2}{r_1}\sum_{i=1}^{n} x_i = n. \tag{3.2}$$

Bởi (3.1) và (3.2), ta suy ra

$$\frac{M_{r_2}(a)}{M_{r_1}(a)} \geq 1$$

hay $M_{r_1}(a) \leq M_{r_2}(a).$

c) **Trường hợp $\mathbf{r_1 < r_2 < 0}$**: Lập luận tương tự phần trên và áp dụng bất đẳng thức Bernoulli vơi $0 < \dfrac{r_2}{r_1} < 1$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^{\frac{r_2}{r_1}} \leq n + \frac{r_2}{r_1}\sum_{i=1}^{n} x_i = n.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{M_{r_2}(a)}{M_{r_1}(a)} \geq 1$$

hay $M_{r_1}(a) \leq M_{r_2}(a).$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.2. *Định lý (3.2.2) cho ta một phương pháp làm chặt bất đẳng thức về các đại lượng trung bình suy rộng*

Bây giờ, giả sử p_i $(i = \overline{1,n})$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ và $x = \left(x_i\right)_{i=1}^{n}$ là dãy số không âm. Ta ký hiệu

$$M_r(x,p) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

và gọi $M_r(x,p)$ là trung bình với trọng p.
Nhận xét rằng, nếu đặt

$$x_i = n^{-\frac{1}{r}} p_i^{-\frac{1}{r}} a_i;\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

thì ta được

$$M_r(x,p) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = M_r(a).$$

Có thể chứng minh được rằng

$$\lim_{r\to 0} M_r(x,p) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i},$$

$$\lim_{r\to +\infty} M_r(x,p) = \max(x),$$

$$\lim_{r\to -\infty} M_r(x,p) = \min(x).$$

Tương tự các trung bình $A(a)$, $G(a)$, $H(a)$, ta định nghĩa

$$A(x,p) = M_1(x,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

$$G(x,p) = M_0(x,p) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i},$$

$$H(x,p) = M_{-1}(x,p) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{-r}\right)^{-1}.$$

Tương tự, ta có kết quả sau đây

Định lý 3.2.3. *Có các bất đẳng thức*
a) $A(x,p) \geq G(x,p) \geq H(x,p)$
b) $M_{r_1}(x,p) \leq M_{r_2}(x,p)$, $\forall r_1 < r_2$.

Nhận xét 3.3. *Định lý (3.2.3) tiếp tục cho ta một phương pháp làm chặt bất đẳng thức về các đại lượng trung bình với trọng p.*

Tiếp theo, ta ký hiệu

$$S_r(a) = \left(\sum_{i=1}^{n} a^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Rõ ràng là

$$S_r(a) = n^{\frac{1}{r}} M_r(a).$$

Ta có kết quả sau đây

Định lý 3.2.4. *Nếu* $0 < \alpha < \beta$, *thì*

$$S_\beta(a) \leq S_\alpha(a)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ *hoặc chỉ có một* $a_i \neq 0$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Trước hết ta chứng minh với $n = 2$, nghĩa là chứng minh bất đẳng thức

$$\left(a_1^\beta + a_2^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(a_1^\alpha + a_2^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ 0 < \alpha < \beta.$$

Thật vậy, nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$, thì bất đẳng thức đúng.

Giả sử $a_1 > 0, a_2 > 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 > 0$.

Ta có $0 < \dfrac{a_1}{a_2} \leq 1$. Vì $\beta > \alpha$, nên

$$\begin{aligned} 0 < \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta \leq \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha &\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta \leq 1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2$.

Mặt khác, vì $1 + \left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^\beta > 1$ và $0 < \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{\alpha}$, nên

$$\left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} < \left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.4}$$

Từ (3.3) và (3.4), suy ra

$$\left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} < \left(1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

hay

$$\left(a_1^\beta + a_2^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(a_1^\alpha + a_2^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ giả sử bất đẳng thức đúng với n số không âm $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Khi đó, ta có

$$\left(\left(a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta\right) + a_{n+1}^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\left(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} + a_{n+1}^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq$$

$$\leq \left(\left(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha\right)^{\frac{\alpha}{\alpha}} + a_{n+1}^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha + a_{n+1}^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ta có điều phải chứng minh $\square$

Nhận xét 3.4. *Định lý 3.2.4 cũng cho ta một phương pháp làm chặt bất đẳng thức về các đại lượng trung bình suy rộng một cách tổng quát nhất.*

3.3 Tính đơn điệu của hàm các đa thức đối xứng sơ cấp

Trước hết ta nhắc lại công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k.$$

Nếu ta coi $(x+a)^n$ như là tích của n thừa số: $(x+a)(x+a)\cdots(x+a)$, thì khi đó tích

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

cũng có thể viết dưới dạng một biểu thức tương tự như công thức khai triển nhị thức Newton như sau:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{n-k}^{n-k} x^k,$$

trong đó

$$\begin{cases} p_1 &= \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \\ p_2^2 &= \dfrac{\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j}{\binom{n}{2}}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n^n &= a_1 a_2 \cdots a_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Vậy nên, nếu các số $a_1, a_2, \cdots, a_n$ đều dương (hoặc không âm và không đồng thời bằng 0) thì không mất tính tổng quát, ta có thể coi các số $p_1, p_2, \cdots, p_n$ đều là số dương (không âm). Từ (3.5), ta thu được

$$\begin{cases} p_1 &= \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \\ p_2 &= \sqrt{\dfrac{\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j}{\binom{n}{2}}}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Ta thấy, p_1 chính là trung bình cộng, p_n là trung bình nhân, và do đó các p_j khác cũng là các đại lượng trung bình cần đặt tên cho chúng như là những đối tượng cơ bản cần tập trung nghiên cứu.

Định nghĩa 3.1. *Cho $\overline{a}$ là bộ n số dương $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$. Khi đó*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) \\ &= x^n + E_1(\overline{a})x^{n-1} + E_2(\overline{a})x^{n-2} + \cdots + E_n(\overline{a}), \end{aligned}$$

trong đó

$$E_1(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ E_2(\overline{a}) = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \cdots,\ E_n(\overline{a}) = a_1a_2\cdots a_n.$$

Đặt $E_0(\overline{a}) = 1$. Ta gọi $E_r(\overline{a})$, $(r \in \{1, \cdots, n\})$ là các hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp thứ r ($E_r(\overline{a})$ là tổng của tất cả các tích r số khác nhau của bộ số $\overline{a}$).

Ký hiệu

$$P_r(\overline{a}) = \frac{r!(n-r)!}{n!}E_r(\overline{a}).$$

Định nghĩa 3.2. *Giả sử $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là bộ n các số thực không âm (ký hiệu bởi $(\overline{x})$) và $y_1, y_2, \cdots, y_n$ là bộ các số thực không âm khác (được ký hiệu bởi $(\overline{y})$). Hai dãy $(\overline{x})$ và $(\overline{y})$ được gọi là đồng dạng (và ký hiệu $(\overline{x}) \sim (\overline{y})$) nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ sao cho ta có $x_j = \lambda y_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$.*

Bài toán 3.4. *Cho $\overline{a}$ là bộ $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ các số thực dương. Đặt $P_0 = 1$, $P_k = P_k(\overline{a})$; $E_r = E_r(\overline{a})$. Chứng minh rằng*

$$P_{k-1}.P_{k+1} \leq P_k^2\ (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

(Nếu các a_i đều dương và không đồng thời bằng nhau thì ta có dấu bất đẳng thức thực sự).

Chứng minh. Giử sử

$$f(x,y) = (x+a_1y)x+a_2y)\cdots(x+a_ny) = E_0x^n + E_1x^{n-1}y + \cdots + E_ny^n,$$

E_i là tổng tất cả các tích i số khác nhau,

$$P_k = \frac{k!(n-k)!}{n!}e_k.$$

Vì tất cả các $a_i > 0$ và $t =: \dfrac{x}{y} = 0,\ v := \dfrac{y}{x} = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $f(t,1) = 0$ và $f(1,v) = 0$, tương ứng, nên $\dfrac{x}{y} = 0$ và $\dfrac{y}{x} = 0$ không phải là nghiệm bội trong các phương trình nhận từ đạo hàm của nó.

Từ đó ta có kết luận rằng các số $P_i > 0$, tức là phương trình

$$P_{k-1}x^2 + 2P_k xy + P_{k+1}y^2 = 0$$

nhận được từ $f(x, y) = 0$ bằng cách lấy vi phân liên tiếp theo x và y. Do phương trình này có nghiệm thực nên

$$P_{k-1}.P_{k+1} \leq P_k^2$$

$\square$

Bài toán 3.5. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$E_{r-1}E_{r+1} \leq E_r^2.$$

Chứng minh. Từ bất đẳng thức trong bài toán 3.3 ta có

$$P_{k-1}.P_{k+1} \leq P_k^2.$$

Suy ra

$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!}E_{k-1}\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!}E_{k+1} \leq \Big(\frac{k!(n-k)!}{n!}\Big)^2 E_k^2$$

hay

$$\frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)}E_{k-1}.E_{k+1} \leq E_k^2$$

Vì $\dfrac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} > 1$ nên, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 3.6. *Cho các số $a_i > 0$ $(i \in \{1, 2, \cdots, n\})$ và không đồng thời bằng nhau. Chứng minh bất đẳng thức*

$$P_1 > p_2^{\frac{1}{2}} > P_3^{\frac{1}{3}} > \cdots > P_n^{\frac{1}{n}}. \tag{3.7}$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức trong bài toán 3.3, ta có

$$P_0.P_2 < P_1^2$$

$$(P_1.P_3)^2 < P_2^4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(P_{r-1}.P_{r+1})^r < P_r^{2r}$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
&(P_0.P_2)(P_1.P_3)^2\cdots(P_{r-1}.P_{r+1})^r < P_1^2P_2^4\cdots P_r^{2r}\\
&\Rightarrow P_{r+1}^r < P_r^{r+1} \Rightarrow P_r^{\frac{1}{r}} > P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Nhận xét 3.5. *Ta dễ dàng chứng minh $P_{r-1}P_{r+1} < P_r^2$ bằng phương pháp quy nạp.*

Thật vậy, giả sử bất đẳng thức đúng với $n-1$ số dương $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ và đặt $E'_r,\ P'_r$ là các $E_r,\ P_r$ tạo bởi $n-1$ số ấy và giả sử tất cả các số đó không đồng thời bằng nhau.
Khi đó $E'_r = a_nE'_{r-1} \Rightarrow \dfrac{r}{n}P'_r + \dfrac{r}{n}a_nP'_{r-1}$.
Từ đó suy ra

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2,$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
A &= \Big((n-r)^2 - 1\Big)P'_{r-1}P'_{r+1} - (n-r)^2P'_r\\
B &= (n-r+1)(r+1)P'_{r-1}P'_{r+1} + (n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} -\\
&\quad - 2(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1}\\
C &= (r^2-1)P'_{r-2}P^2_{r+1}.
\end{aligned}
$$

Vì các a_i không đồng thời bằng nhau nên theo giả thiết ta có

$$
\begin{aligned}
&P'_{r-1}P'_{r+1} < P'_rP'_{r-2} - P'_r < P'_{r-1}\\
&P'_{r-2}P'_{r+1} < P'_{r-1}P'_r \Rightarrow A < -P'_r,\ B < 2P'_{r-1}P'_r,\ C < P'_{r-1}\\
&n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P'_r) < -(P'_r - a_nP'_{r-1}) \le 0.
\end{aligned}
$$

Điều này vẫn đúng khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$. Khi đó $a_n \neq a_1$.
Từ bất đẳng thức (3.7), ta thu được bất đẳng thức sau:

Hệ quả 3.3.1. *Ta có $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_n$, trong đó*

$$
\begin{cases}
p_1 &= \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},\\
p_2 &= \sqrt{\dfrac{\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j}{\binom{n}{2}}},\\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\\
p_n &= \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.
\end{cases}
$$

Đặc biệt, $p_1 \ge p_n$. Đó chính là bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân.

Bây giờ ta xét trường hợp riêng của sự xen kẽ vào bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (với $n = 4$). cụ thể ta có kết quả sau:
Với $a, b, c, d \geq 0$, ta có dãy bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

Điều hay ở đây là ta dùng chính bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân để chứng minh

Trước hết ta chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \qquad (*)$$

Thật vậy, sau khi lũy thừa ba cả hai vế, ta có

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{\left(\sqrt{ab+ac+ad+bc+bd+cd}\right)^3} \leq \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

Đặt $S = ab + ac + ad + bc + bd + cd$ và chú ý rằng

$$\frac{abc}{(\sqrt{S})^3}.\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt[4]{a^2bc}.\sqrt[4]{ab^2c}.\sqrt[4]{abc^2}}{\sqrt{S}\sqrt{S}\sqrt{S}}.\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Khi đó theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\frac{abc}{(\sqrt{S})^3}.\frac{1}{\sqrt{6}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a^2bc+ab^2c+abc^2}{S^2} + \frac{1}{6^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{(\sqrt{S})^3} \leq \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{a^2bc+ab^2c+abc^2}{S^2} + \frac{\sqrt{6}}{4.6^2}$$

Lý luận hoàn toàn tương tự, ta có

$$\frac{abd}{(\sqrt{S})^3} \leq \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{a^2bd+ab^2d+abd^2}{S^2} + \frac{\sqrt{6}}{4.6^2}$$

$$\frac{acd}{(\sqrt{S})^3} \leq \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{a^2cd+ac^2d+acd^2}{S^2} + \frac{\sqrt{6}}{4.6^2}$$

$$\frac{bcd}{(\sqrt{S})^3} \leq \frac{\sqrt{6}}{4}\frac{b^2cd+bc^2d+bcd^2}{S^2} + \frac{\sqrt{6}}{4.6^2}$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{\left(\sqrt{ab+ac+ad+bc+bd+cd}\right)^3} \le \frac{\sqrt{6}}{4S^2}(a^2bc+ab^2c+abc^2+a^2bd+ab^2d+$$

$$+abd^2+a^2cd+ac^2d+acd^2+b^2cd+bc^2d+bcd^2)+\frac{1}{6\sqrt{6}}$$

Ta hãy chứng minh

$$\frac{\sqrt{6}}{4S^2}(a^2bc+ab^2c+abc^2+a^2bd+ab^2d+abd^2+a^2cd+$$

$$+ac^2d+acd^2+b^2cd+bc^2d+bcd^2)+\frac{1}{6\sqrt{6}} \le \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{4S^2}(a^2bc+ab^2c+abc^2+a^2bd+ab^2d+abd^2+a^2cd+ac^2d+acd^2+$$

$$+b^2cd+bc^2d+bcd^2) \le \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow a^2bc+ab^2c+abc^2+a^2bd+ab^2d+abd^2+a^2cd+ac^2d+acd^2+$$

$$b^2cd+bc^2d+bcd^2 \le \frac{1}{3}S^2$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2bc+ab^2c+abc^2+a^2bd+ab^2d+abd^2+a^2cd+ac^2d+acd^2+$$

$$b^2cd+bc^2d+bcd^2) \le (ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2$$

Thật vậy, đặt $X = ab+cd;\ Y = ac+bd;\ Z = ad+bc$, thì

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 = (X+Y+Z)^2 \ge 3(XY+YZ+ZX)$$

hay

$$\Leftrightarrow 3(a^2bc+ab^2c+abc^2+a^2bd+ab^2d+abd^2+a^2cd+ac^2d+acd^2+$$

$$b^2cd+bc^2d+bcd^2) \le (ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2$$

Khi đó, bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh

$$\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \le \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6} \le \frac{(a+b+c+d)^2}{16}$$

$\Leftrightarrow 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leq 3(a+b+c+d)^2$

$\Leftrightarrow 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(d-b)^2+(c-d)^2 \geq 0$

điều này hiển nhiên đúng. Ta chứng minh vế còn lại

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$$

$$\Rightarrow \frac{(abcd)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{4} \geq (abcd)\sqrt[4]{(abcd)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{abc+abd+acd+bcd}{4} \geq \sqrt[4]{(abcd)^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Vậy dãy bất đẳng thức (ứng với $n=4$) được chứng minh.

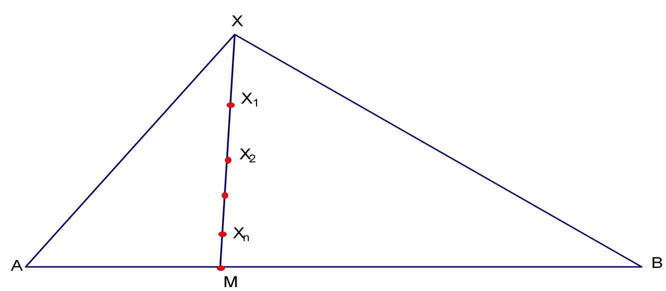
Chương 4

Phương pháp hình học

Khá nhiều bất đẳng thức đại số được làm chặt nhờ vào những nhận xét trực quan từ hình học. Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

4.1 Hình học hóa các đại lượng trung bình

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(a;b),\ B(c;d),\ X(x;y)$. Gọi $M(p;q)$ là điểm thuộc đoạn AB (M khác B). Khi đó điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $m \leq 0$ và ta có



$$p = \frac{a - mc}{1 - m},\quad q = \frac{b - md}{1 - m}$$

Bây giờ, trên đoạn MX lấy lần lượt các điểm $X_1(x_1;y_1),\ X_2(x_2;y_2),\ \cdots, X_n(x_n;y_n)$ sao cho

$$MX \geq MX_1 \geq MX_2 \geq \cdots \geq MX_n \geq 0.$$

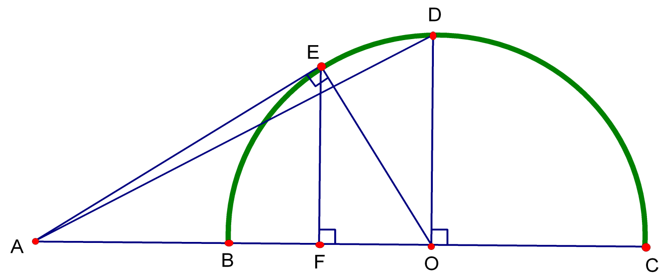
Khi đó, nếu X_1 khác X, thì với mỗi $i = 1, 2, \cdots, n$, điểm X_i sẽ chia đoạn MX theo tỉ số $k_i \leq 0$.

Rõ ràng
$$k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n \le 0$$
và với mỗi $i = 1, 2, \cdots, n$, ta có
$$x_i = \frac{p - k_i x}{1 - k_i}, \quad y_i = \frac{q - k_i y}{1 - k_i}.$$
Do đó
$$XA + XB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} =: f_0$$
$$X_iA + X_iB = \sqrt{(x_i-a)^2 + (y_i-b)^2} + \sqrt{(x_i-c)^2 + (y_i-d)^2} =: f_i \ (i = \overline{1,n})$$
$$MA + MB = AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} =: f^*.$$
Theo tính chất trong hình học phẳng, ta thu được bất đẳng thức sau đây
$$f_0 \ge f_1 \ge \cdots \ge f_n \ge f^*.$$

Bất đẳng thức 4.1. *Cho các số thực a, b, c, d, x, y. Với mỗi số $m \le 0$ và dãy số $k_1, k_2, \cdots, k_n$ thỏa mãn*
$$k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n \le 0,$$
đặt
$$p = \frac{a - mc}{1 - m}, \quad q = \frac{b - md}{1 - m},$$
$$x_i = \frac{p - k_i x}{1 - k_i}, \quad y_i = \frac{q - k_i y}{1 - k_i},$$
$$f_0 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$
$$f_i = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$
$$f^* = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$
Thế thì, ta có
$$f_0 \ge f_1 \ge \cdots \ge f_n \ge f^*.$$

Nhận xét 4.1.

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC, bán kính OD vuông góc với BC. Trên tia CB lấy điểm A sao cho B nằm giữa A,C. Vẽ tiếp tuyến AE với nửa đường tròn. Hạ EF vuông góc với BC (hình vẽ)



Đặt $AB = a_1,\ AC = a_2$. Ta có

- $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{\dfrac{(AO - OD)^2 + (AO + OD)^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{(AO - OB)^2 + (AO + OC)^2}{2}}$
  $= \sqrt{\dfrac{AB^2 + AC^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$.

  Vậy AD là trung bình bình phương của a_1, a_2.

- $AO = \dfrac{AB + AC}{2} = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$.

  Vậy AO là trung bình cộng của a_1, a_2.

- $AE = \sqrt{AB.AC} = \sqrt{a_1.a_2}$.

  Vậy AE là trung bình nhân của a_1 và a_2.

- $AF = \dfrac{AE^2}{AO} = \dfrac{a_1.a_2}{\dfrac{a_1 + a_2}{2}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}}$.

  Vậy AF là trung bình điều hòa của a_1 và a_2
  Ta có

$$AD > AO > AE > AF$$

Do đó ta có bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 4.2. *Cho* $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_1 \neq a_2$. *Thế thì*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} > \frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2} > \frac{2}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}}.$$

4.2 Một số phương pháp khác

Trong quá trình dạy và học toán, chúng ta đã giải nhiều bài tập, chứng minh nhiều BĐT, ... nhưng thông thường chỉ dừng lại ở những bài tập rời rạc đó, ít khi trăn trở, suy ngẫm tìm mối liên hệ giữa chúng với nhau, đặc biệt là mối liên hệ giữa các bài toán đại số với các bài toán hình học, từ đó có thể khai thác và sáng tạo ra nhiều bài toán mới đầy thú vị. Sau đây là những ví dụ minh họa.

Bài toán 4.1. *(Bài toán đại số) Đối với bất kì* $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, *ta luôn có*

$$\frac{x}{2} < tan\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi} < sinx < x.$$

Chứng minh. Dưới đây chỉ chứng minh hai bất đẳng thức

$$sinx > \frac{2x}{\pi}, \text{ và } tan\frac{x}{2} < \frac{2x}{2}$$

a) Đặt $f(x) = \frac{1}{x}sinx$ là hàm số xác định và liên tục trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có

$$f'(x) = \frac{xcosx - sinx}{x^2}.$$

Đặt $g(x) = xcosx - sinx$ trong $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, khi đó $g'(x) = -xsinx \leq 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $g(x) < g(0) = 0$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Do đó $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $f(x) > f(\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$ hay $sinx > \frac{2x}{\pi}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) Đặt $h(x) = \frac{1}{x}tan\frac{x}{2}$ xác định và liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có

$$h'(x) = \frac{x - sinx}{2x^2cos^2\frac{x}{2}} > 0, \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

nên hàm số $h(x)$ đồng biến, do đó

$h(x) < h(\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$ hay $tan\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. □

Bây giờ xét tam giác ABC với các kí hiệu quen biết, $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi A, B, C là độ lớn các góc trong tam giác tính bằng radian; r, R, p, S thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nửa chu vi và diện tich tam giác; l_a, h_a, m_a, r_a tương ứng là độ dài đường phân giác, đường cao, đường trung tuyến và bán kính đường tròn bàn tiếp ứng với đỉnh A.

Bài toán 4.2. *Trong tam giác nhọn ABC, ta luôn có*

$$\frac{p\pi}{4R} < Acos^2\frac{A}{2} + Bcos^2\frac{B}{2} + Ccos^2\frac{C}{2} < \frac{p}{R}$$

Từ định lý hàm số sin quen thuộc trong tam giác ta có

$$sinA + sinB + sinC = \frac{p}{R}$$

$$Acos^2\frac{A}{2} < 2tan\frac{A}{2}cos^2\frac{A}{2} = sinA < \frac{4}{\pi}Acos^2\frac{A}{2}$$

Bài toán 4.3. *Trong tam giác ABC nhọn, ta luôn có*

$$\sqrt{2p} < \sqrt{r_a sinA} + \sqrt{r_b sinB} + \sqrt{r_c sinC} < \frac{\pi}{2}\sqrt{2p}.$$

Bài toán này được xây dựng từ công thức $r_a = ptan\frac{A}{2}$, $r_b = ptan\frac{B}{2}$, $r_c = ptan\frac{C}{2}$, kết hợp với kết quả $\frac{A}{\pi} < sin\frac{A}{2} < \frac{A}{2}$ ta được

$$\frac{A\sqrt{2p}}{\pi} < \sqrt{r_a sinA} = \sqrt{2p}sin\frac{A}{2} < \sqrt{2p}.\frac{A}{2}$$

Do đó

$$\frac{\sqrt{2p}}{\pi}(A+B+C) < \sqrt{r_a sinA} + \sqrt{r_b sinB} + \sqrt{r_c sinC} < \frac{A+B+C}{2}\sqrt{2p}.$$

Bài toán 4.4. *Trong tam giác nhọn ABC, ta luôn có*

$$4 < h_a\Big(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) + h_b\Big(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\Big) + h_c\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big) < 2\pi$$

Bài toán được xuất phát từ kết quả

$$sinB = \frac{h_a}{c} = \frac{h_c}{a},\ sinA = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b},\ sinC = \frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$$

và kết quả của bài toán đại số, ta có $2 < sinA + sinB + sinC < \pi$. Do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 4.5. *Trong tam giác ABC nhọn, ta luôn có*

$$\frac{12R}{\pi} < \frac{ab}{l_c} + \frac{bc}{l_a} + \frac{ca}{l_b} < 3\pi R$$

Bài toán này được xây dựng từ công thức $l_a = \dfrac{2bccos\dfrac{A}{2}}{b+c}$ và kết quả bài toán trên

$$\frac{R(B+C)}{\pi - A}\pi > \frac{bc}{l_a} = \frac{b+c}{2cos\dfrac{A}{2}} = \frac{2R(sinB+sinC)}{2sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)} > \frac{R.\dfrac{2(C+B)}{\pi}}{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\pi R(B+C)}{B+C} > \dfrac{bc}{l_a} > \dfrac{4R}{\pi}.\dfrac{B+C}{B+C}$

$\Rightarrow \pi R > \dfrac{bc}{l_a} > \dfrac{4R}{\pi}$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\pi R > \frac{ab}{l_c} > \frac{4R}{\pi},\ \pi R > \frac{ca}{l_b} > \frac{4R}{\pi}$$

Từ đó ta suy ra được điều cần chứng minh.

Bài toán 4.6. *Trong tam giác nhọn ABC, ta có*

$$\pi(2R-r) < aA + bB + cC < 4(2R-r)$$

Từ các kết quả

$$r_a = ptan\frac{A}{2},\ r_b = ptan\frac{B}{2},\ r_c = ptan\frac{C}{2}$$

$$r = (p-a)tan\frac{A}{2} = (p-b)tan\frac{B}{2} = (p-c)tan\frac{C}{2}$$

Dẫn đến $r_a = r + atan\dfrac{A}{2},\ r_b = r + btan\dfrac{B}{2},\ r_c = r + ctan\dfrac{C}{2}$.

Suy ra $r_a + r_b + r_c = 4R + r$. áp dụng kết quả bài toán đại số ta được

$$4R + r = 3r + atan\frac{A}{2} + btan\frac{B}{2} + ctan\frac{C}{2} < 3r + \frac{2}{\pi}(aA+bB+cC)$$

và

$$4R + r = 3r + atan\frac{A}{2} + btan\frac{B}{2} + ctan\frac{C}{2} > 3r + \frac{1}{2}(aA+bB+cC)$$

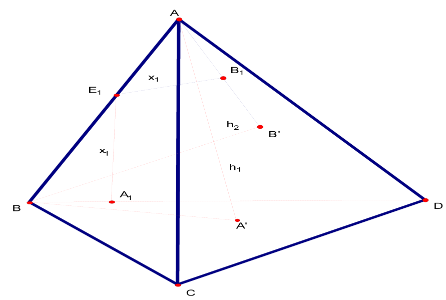
Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Bài toán 4.7. *Tứ diện ABCD có độ dài các đường cao là h_i $(i = 1,2,3,4)$. Các mặt phân giác của các nhị diện (của tứ diện) cắt các cạnh đối tương ứng ở các* *điểm* E_i $(i = \overline{1,6})$*. Gọi* x_i *là khoảng cách từ* E_i *đến hai mặt bên không chứa* E_i*. Chứng minh*

$$\frac{384}{\left(\sum_{i=1}^{4} h_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i^2} \leq 6\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i^2}\right)$$

Khi nào xảy ra các dấu đẳng thức?

Lời giải. Gọi $h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4$ là độ dài các đường cao của tứ diện lần lượt hạ từ các đỉnh A, B, C, D; S_i là diện tích của mặt ứng với đường cao h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Giả sử $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5,\ E_6$ lần lượt thuộc các cạnh Ab, AC, AD, BC, BD, CD và V là thể tích của tứ diện. Ta có các hệ thức sau



$$\begin{aligned} 3V &= (S_1 + S_2)x_1 = (S_1 + S_3)x_2 = (S_1 + S_4)x_3 = (S_2 + S_3)x_4 = \\ &= (S_2 + S_4)x_5 = (S_3 + S_4)x_6 = S_i h_i \ (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Từ đó ta được

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}; \quad \frac{1}{x_4} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$
$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3}; \quad \frac{1}{x_5} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_4}$$
$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_4}; \quad \frac{1}{x_6} = \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$$

áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có ngay nếu $a > 0, b > 0$, thì

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Từ đó theo trên suy ra

$$\frac{1}{x_1^2} \leq 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_1^2}\right); \quad \frac{1}{x_4^2} \leq 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2}\right)$$

$$\frac{1}{x_2^2} \leq 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2}\right); \quad \frac{1}{x_5^2} \leq 2\left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_4^2}\right)$$

$$\frac{1}{x_3^2} \leq 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_4^2}\right); \quad \frac{1}{x_6^2} \leq 2\left(\frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}\right)$$

Cộng từng vế 6 bất đẳng thức trên, ta được

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i^2} \leq 6\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 \Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện gần đều.
Mặt khác theo bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ ta có

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_6^2} = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i}\right)^2$$

Hơn nữa ta có

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i} \geq \frac{16}{\sum\limits_{i=1}^{4} h_i}$$

Suy ra $\quad \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_6^2} \geq \dfrac{128}{\left(\sum\limits_{i=1}^{4} h_i\right)^2}$

Lý luận hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_5^2} \geq \frac{128}{\left(\sum\limits_{i=1}^{4} h_i\right)^2}$$

$$\frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} \geq \frac{128}{\left(\sum\limits_{i=1}^{4} h_i\right)^2}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i^2} \geq \frac{384}{\left(\sum\limits_{i=1}^{4} h_i\right)^2}$$

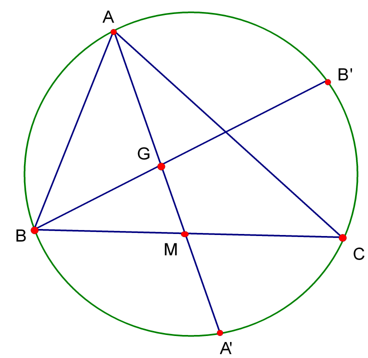
Dấu đẳng thức xảy ra khi $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 \Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện gần đều. $\square$

Bài toán 4.8. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G và nội tiếp trong đường trong bán kính R. Các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tại các điểm A', B', C' tương ứng. Chứng minh rằng*

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} + \frac{1}{GC'} \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}\right)$$

Lời giải. Mọi M là trung điểm của BC. Khi đó $\triangle AMB \sim \triangle MA'C$ suy ra

$$MA.MA' = MB.MC \tag{4.2}$$



Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của $\triangle ABC$ đối diện với các đỉnh A, B, C; còn m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến tương ứng. Như vậy từ 4.2 ta có

$$m_a.MA' = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MA' = \frac{a^2}{4m_a}$$

Ta có $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}m_a$, vậy

$$GA' = GM + MA' = \frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}.$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$GA' = \frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{3}m_a.\frac{a^2}{4m_a}} = \frac{a^2}{4m_a}$$

suy ra

$$\frac{1}{GA'} \leq \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{BC}. \tag{4.3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{3}m_a = \dfrac{a^2}{4m_a} \Leftrightarrow m_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Lý luận tương tự, ta có

$$\frac{1}{GB'} \leq \frac{\sqrt{3}}{AC}. \tag{4.4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m_b = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{GC'} \leq \frac{\sqrt{3}}{AB}. \tag{4.5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m_c = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

Cộng từng vế (4.3), (4.4), (4.5), ta được

$$\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} + \frac{1}{GB'} \le \sqrt{3}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời dấu đẳng thức trong (4.3), (4.4), (4.5) xảy ra,

$$\Leftrightarrow m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ m_b = \frac{b\sqrt{3}}{2},\ m_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m_a^2 = \frac{3a^2}{4},\ m_b^2 = \frac{3b^2}{4},\ m_c^2 = \frac{3c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3a^2 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 3b^2 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 2a^2 \\ a^2 + c^2 = 2b^2 \\ a^2 + b^2 = 2c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b = c$$

Hay tam giác ABC đều.

Vậy bất đẳng thức bên phải được chứng minh, bây giờ ta xét bất đẳng thức bên trái của bài toán.

Ta có

$$\frac{GA}{GA'} = \frac{\dfrac{2}{3}m_a}{\dfrac{1}{3}m_a + \dfrac{a^2}{4m_a}} = \frac{8m_a^2}{4m_a^2 + 3a^2} =$$

$$= \frac{2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 3a^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{GB}{GB'} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\frac{GC}{GC'} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{GA}{GA'} + \frac{GB}{GB'} + \frac{GC}{GC'} = 3$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{AA'}{GA'} + \frac{BB'}{GB'} + \frac{CC'}{GC'} = 1 + \frac{GA}{GA'} + 1 + \frac{GB}{GB'} + 1 + \frac{GC}{GC'} = 6$$

Do $AA' \leq 2R,\ BB' \leq 2R,\ CC' \leq 2R$. Suy ra

$$6 = \frac{AA'}{GA'} + \frac{BB'}{GB'} + \frac{CC'}{GC'} \leq 2R\left(\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} + \frac{1}{GC'}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} + \frac{1}{GC'} \geq \frac{3}{R}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AA' = BB' = CC' = 2R \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều. Vậy bài toán được chứng minh □

4.3 Bài tập

Bài tập 4.1. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:*

$$2\pi p - 8(R+r) < aA + bB + cC < 2\pi p - 2\pi(R+r)$$

Bài tập 4.2. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:*

$$\frac{\pi S}{2} < (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) < 2S$$

Bài tập 4.3. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:*

$$abc < a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) < \frac{\pi}{2}abc$$

Bài tập 4.4. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:*

$$\frac{4}{\pi^2}(A^2 + B^2 + C^2) < \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} < A^2 + B^2 + C^2$$

Bài tập 4.5. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:*

$$4 < l_a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + l_b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + l_c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < 2\pi$$

Kết luận của luận văn

Luận văn đề cập đến một số phương pháp làm chặt BĐT. Những kết quả chính của luận văn thu được là:

1. Đã cụ thể hóa lý thuyết của phương pháp sử dụng tính chất của hàm lồi (lõm) bằng những ví dụ và bài tập cụ thể, có thể tách riêng thành những bài tập về BĐT khá phong phú. Khá nhiều BĐT quen thuộc, là trường hợp riêng của các BĐT đã được tạo ra từ những minh họa này. Trong phần cuối chương, luận văn cũng đã đưa ra được khá nhiều hàm lồi (lõm) để bạn đọc có thể áp dụng sáng tạo ra nhiều BĐT khác và các bài tập do tác giả luận văn sáng tác.

2. Luận văn đã đưa ra các cách lựa chọn tham số k để làm chặt Bất đẳng thức, trong đó tham số k được trình bày ở hai dạng:

Dạng 1: Tham số k độc lập không phụ thuộc vào tham số khác và chỉ xuất hiện ở một vế của Bất đẳng thức.

Dạng 2: Tham số k còn phụ thuộc vào tham số khác.

3. Luận văn hệ thống hóa một số phương pháp sắp thứ tự các đại lượng trung bình và cụ thể hóa lý thuyết của phương pháp bằng những ví dụ và bài tập cụ thể. Khá nhiều BĐT mới được luận văn sáng tác, thông qua việc làm chặt BĐT bằng cách sử dụng phương pháp này.

4. Luận văn cuối cùng của luận văn đề cập đến một số phương pháp làm chặt BĐT đại số thông qua những ước lượng trực quan từ hình học, với những ví dụ minh họa khá cụ thể.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất đẳng thức- định lý và áp dụng*, NXB Giáo dục.

[2] Trịnh Đào Chiến (2005), Hội nghị khoa học "Các chuyên đề chọn lọc trong hệ THPT chuyên", *Một số phương pháp làm chặt bất đẳng thức*, Hà Nội.

[3] Phạm Kim Hùng (2006), *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri thức.

[4] Trương Ngọc Đắc (1995), Luận văn Thạc sỹ Toán Lý , *Bất đẳng thức Karamata và ứng dụng*, Trường Đại học tổng hợp Hà Nội.

[5] Quach Văn Giang (2005), Hội nghị khoa học " Các chuyên đề chọn lọc trong hệ THPT chuyên", tr. 62, *Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp tham số hóa*, Hà Nội.

[6] Phạm Văn Thuận (2005), Hội nghị khoa học "Các chuyên đề chọn lọc trong hệ THPT chuyên", tr. 148, *Bất đẳng thức đồng bậc*, Hà Nội.

[7] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên) (2004), *Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan*, NXB Trường ĐHKHTN Hà Nội.

[8] Nguyễn Văn Mậu-Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng - Trần Nam Dũng-Bùi Công Huấn (2004),*Một số chuyên đề toán chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi*, NXB Trường ĐHKHTN Hà Nội.

[9] Nguyễn Văn Mậu - Phạm Thị Bạch Ngọc (2004),*Một số bài toán chọn lọc về lượng giác*, NXB Giáo dục.

[10] Phan Huy Khải (2001),*10.000 Bài toán sơ cấp về Bất đẳng thức*, NXB Giáo dục.