SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Lê Phi Hùng

Trường THPT Năng Khiếu Hà Tĩnh

Trong các đề thi học sinh giỏi của Việt Nam cũng như nhiều nước khác chúng ta gặp rất nhiều các bài toán bất đẳng thức (BĐT) có dạng như sau:

Cho số $n \in$ N* và các số $a_1, a_2 \dots a_n \in$ D thoả mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\alpha$, với $\alpha \in$ D. Chứng minh rằng $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\alpha)$ (hay hoàn toàn tương tự là $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf(\alpha)$), đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \alpha$.

Dạng toán này có tính chất nổi bật: vế trái là biểu thức đối xứng đối với các biến $a_1, a_2, \dots, a_n$ nên thường có nhiều cách giải. Tuy nhiên việc tìm ra một phương pháp chung để có thể giải được hàng loạt bài toán như thế thì hoàn toàn không đơn giản.

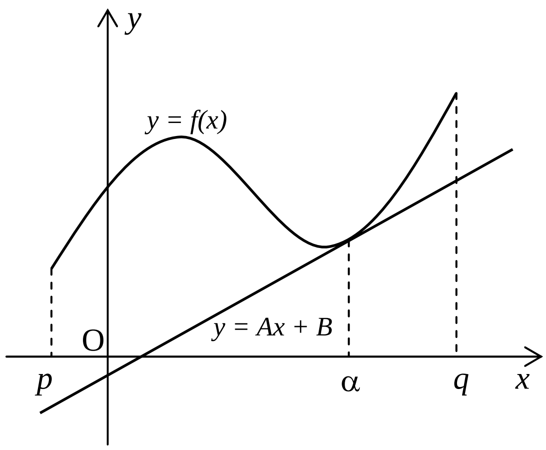
Trong phương pháp của bài viết này chúng ta sẽ vận dụng giả thiết $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\alpha$ một cách linh hoạt, đó là ta sẽ tìm các hằng số A, B thích hợp để có đánh giá $f(x) \geq Ax + B$ với mọi $x \in$ D, đẳng thức xảy ra khi $x = \alpha$. Đối với nhiều bài toán, biểu thức $y = Ax + B$ được chọn ở đây chính là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = \alpha$.

Một kiến thức cơ bản xin được nhắc lại ở đây: phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = \alpha$ là : $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$.

Nhìn qua phương pháp này chúng ta sẽ thấy nó "tương tự" với phương pháp sử dụng BĐT Jensen - còn gọi là BĐT hàm lồi. Thật sự ở đây phương pháp này sẽ "tốt" hơn. Nếu sử dụng BĐT Jensen được thì phương pháp này cũng sử dụng được nhưng điều ngược lại thì có thể không xảy ra.

Ta có sự minh hoạ bằng đồ thị:

Hàm số $y = f(x)$ không lồi trên miền D = $[p, q]$ nhưng có đồ thị vẫn "nằm trên" tiếp tuyến $y = Ax + B$ của nó tại $x = \alpha \in$ D. Trong bài toán này không thể áp dụng BĐT hàm lồi được những vẫn có thể dùng "phương pháp tiếp tuyến" để giải quyết bài toán.



Sau đây chúng tôi xin trình bày ứng dụng của phương pháp để giải quyết một số bài toán được trích dẫn từ một số đề thi Olympic của nước ta và các nước trên thế giới. Trong một số bài toán có thể chúng ta phải sử dụng linh hoạt các giả thiết và tính chất của các biểu thức trong bài toán để vận dụng phương pháp một cách hiệu quả nhất.

Bài toán 1. *(Hồng Kông, 2005)*. Cho các số dương *a, b, c, d* thoả mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8} \qquad (1.1)$$

<u>*Lời giải*</u>

Từ giả thiết ta có $a, b, c, d \in (0, 1)$ và BĐT tương đương với

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8} \qquad (1.2)$$

trong đó $f(x) = 6x^3 - x^2$.

Xét $f(x)$ trên $(0, 1)$. Tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại $x = \frac{1}{4}$ có phương trình $y = \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}$. Mặt khác $f(x) - (\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}) = 6x^3 - x^2 - (\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}(4x - 1)^2(3x + 1) \geq 0$ với mọi $x \in (0, 1)$ hay $f(x) \geq \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}$ với mọi $x \in (0, 1)$. Từ đó suy ra

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5}{8}.(a + b + c + d) - 4.\frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Vậy BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Bài toán 2. (*Mỹ, 2003*). Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8 \qquad (2.1)$$

<u>*Lời giải*</u>

Do tính đẳng cấp của các số hạng ở VT nên ta có thể đưa về xét với $a + b + c = 3$. Khi đó số hạng đầu tiên sẽ là $\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} = \frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}$ và hai số hạng tương tự ta sẽ có BĐT tương đương

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}+\frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3}+\frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \leq 24 \qquad (2.2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3}$ trên $(0, 3)$. Phương trình tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $x = 1$ là $y = 4x + 4$. Ta xét hiệu $f(x) - (4x + 4) = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3} - (4x + 4) = -\frac{(x-1)^2(4x+3)}{x^2-2x+3} \leq 0$ với mọi $x \in (0, 3)$. Từ đó $f(x) \leq 4x + 4$ mọi $x \in (0, 3)$.

Áp dụng cho các số $a, b, c \in (0, 3)$ ta có $f(a) + f(b) + f(c) \le 4(a + b + c) + 12 = 24$. BĐT (2.2) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra ở (2.2) $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Từ đó BĐT (2.1) đúng và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài toán 3. *(Mở rộng bài toán thi Olympic Ba Lan, 1996 và Olympic 30 - 4, 1999)* Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \le \frac{9}{10} \qquad (3.1)$$

<u>*Lời giải*</u>

Đặt $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Khi đó BĐT (3.1) trở thành

$$f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{9}{10} \qquad (3.2)$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên (ta sẽ đưa thêm vào một số giá trị như $x = -3$, $x = -\dfrac{1}{3}$, $x = 2$ và giá trị của hàm số $f(x)$ tại đó để so sánh)

x	$-\infty$	-3	-1	$-1/3$	1	2	$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)	0	$-3/10$ ↘	$-1/2$	$-3/10$ ↗	$1/2$	$2/5$ ↘	0

(ở trên BBT thì $f(-3) = -\dfrac{3}{10}$, $f(-\dfrac{1}{3}) = -\dfrac{3}{10}$ và $f(2) = \dfrac{2}{5}$)

Xét các trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1. Có một số, giả sử $a \in (-\infty, -3] \Rightarrow b + c \ge 4$ nên có một số, giả sử $b \ge 2$. Khi đó ta có: $f(a) + f(b) + f(c) < 0 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{10}$.

Trường hợp 2. Có một số, giả sử $a \in (-3, -\dfrac{1}{3}]$. Khi đó $f(a) + f(b) + f(c) \le -\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{10} < \dfrac{9}{10}$.

Trường hợp 3. Cả ba số $a, b, c \in (-\dfrac{1}{3}, +\infty)$. Khi đó tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $x = \dfrac{1}{3}$ có phương trình $y = \dfrac{18}{25}x + \dfrac{3}{50}$. Ta có $f(x) - (\dfrac{18}{25}x + \dfrac{3}{50}) = \dfrac{x}{1+x^2} - (\dfrac{18}{25}x + \dfrac{3}{50})$ $= -\dfrac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(1+x^2)} \le 0$ với mọi $x > -\dfrac{1}{3}$ hay $f(x) \le \dfrac{18}{25}x + \dfrac{3}{50}$ với mọi $x > -\dfrac{1}{3}$.

Áp dụng BĐT này cho các số $a, b, c > -\frac{1}{3}$ và $a + b + c = 1$ ta có $f(a) + f(b) + f(c)$ $\leq \frac{18}{25}(a + b + c) + 3.\frac{3}{50} = \frac{9}{10}$.

Vậy trong mọi trường hợp BĐT (3.2) đều đúng. Vậy bài toán được chứng minh, dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét cách giải: Đây là một bài toán khó, không thể sử dụng phương pháp hàm lồi để giải (*người đọc có thể* xem *ở* [2]). Chúng ta đã giải bài toán bằng cách phân chia trục số thành các khoảng $(-\infty, -3]$, $(-3, -\frac{1}{3}]$ và $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ và sử dụng linh hoạt giả thiết $a + b + c = 1$ để áp dụng tính chất của hàm số $f(x)$ cùng với tiếp tuyến của nó tại điểm $x = \frac{1}{3}$ một cách như mong muốn.

Bài toán 4. (*Rumania, 2005*). Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2 \qquad (4.1)$$

Lời giải

Theo giả thiết $a, b, c > 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 < (a + b + c)^2 = 9$. Từ đó nếu có một trong ba số, giả sử $a < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} > 9 > a^2+b^2+c^2$ nên (1) đúng.

Ta xét trường hợp $a, b, c \geq \frac{1}{3}$. Vì $a + b + c = 3 \Rightarrow a, b, c \leq \frac{7}{3}$. Vậy $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

$$\text{BĐT (4.1)} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}-a^2 + \frac{1}{b^2}-b^2 + \frac{1}{c^2}-c^2 \geq 0 \qquad (4.2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}-x^2$ trên $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$. Tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại $x = 1$ là $y = -4x + 4$. Ta có $f(x) - (-4x + 4) = \frac{1}{x^2}-x^2 - (-4x + 4) = -\frac{(x-1)^2(x^2-2x-1)}{x^2} \geq 0$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$ (do $g(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 < 0$ trên $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$) hay $f(x) \geq -4x + 4$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

Áp dụng cho các số $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$ ta có $f(a) + f(b) + f(c) \geq -4(a + b + c) + 4.3 = 0$. Vậy BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét cách giải: Tương tự bài toán trên, từ giả thiết bài toán ta mới chỉ có điều kiện $a, b, c \in (0, 3)$. Việc xét các trường hợp đặc biệt để đưa về xét trường hợp $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$ và áp dụng tính chất của $f(x)$ trên đó là hết sức cần thiết.

Bài toán 5. (*Trung Quốc, 2005*). Cho các số không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geq 1 \qquad (5.1)$$

Lời giải

Đặt $f(x)=10x^3-9x^5$. Khi đó BĐT (5.1) trở thành

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq 1 \qquad (5.2)$$

Trường hợp 1. Trong ba số a, b, c có một số, giả sử $a \geq \frac{9}{10}$. Khi đó thì $a \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$ và $b, c \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$. Xét hàm số $f(x)$ trên $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$ có $f'(x) = 30x^2 - 45x^4 = 15x^2(2 - 3x^2) \leq 0$ với mọi $x \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$. Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$ và từ đó $f(a) \geq f(1) = 1$ khi $a \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$. Hơn nữa với $b, c \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ thì $f(b) = 10b^3 - 9b^5 \geq 0$ và $f(c) = 10c^3 - 9c^5 \geq 0$ nên $f(a) + f(b) + f(c) \geq 1 + 0 + 0 = 1$ hay (5.2) đúng.

Trường hợp 2. Các số $a, b, c \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$. Khi đó tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $x = \frac{1}{3}$ có phương trình $y = \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}$. Ta có $f(x) - (\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}) = 10x^3 - 9x^5 - (\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}) = -\frac{1}{27}(3x-1)^2(27x^3 + 18x^2 - 21x - 16)$. Đặt $g(x) = 27x^3 + 18x^2 - 21x - 16$. Xét hàm số $g(x)$ trên $\left[0, \frac{9}{10}\right]$. Ta có $g'(x) = 81x^2 + 36x - 21$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = -\frac{7}{9}$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left[0, \frac{9}{10}\right]$:

x	0		1/3		9/10
g'(x)		-	0	+	
g(x)		↘		↗	

Từ BBT và $g(0) = -16$, $g(\frac{9}{10}) = -\frac{637}{1000} \Rightarrow g(x) < 0$ trên $\left[0, \frac{9}{10}\right] \Rightarrow f(x) - (\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}) \geq 0$ trên $\left[0, \frac{9}{10}\right]$ hay là $f(x) \geq \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}$ với mọi $x \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$.

Áp dụng cho các số $a, b, c \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$ và $a + b + c = 1$ ta có

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{25}{9}.(a + b + c) - 3.\frac{16}{27} = 1 \quad \text{hay (5.2) đúng.}$$

Vậy trong mọi trường hợp BĐT đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc (a, b, c) là một hoán vị bất kỳ của (1, 0, 0).

Nhận xét cách giải: Đây là bài toán rất khó và đặc biệt là đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc (a, b, c) là một hoán vị bất kỳ của (1, 0, 0). Hơn nữa hàm số xuất hiện trong bài toán cũng là một hàm đa thức bậc cao (bậc 5). Để giải bài toán này chúng ta phải chia miền giá trị của các biến một cách chặt chẽ. Trong cách giải trên việc chia tập [0, 1] thành $\left[0, \frac{9}{10}\right]$ và $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$ là một cách chia hợp lý.

Bài toán 6. (*Moldova, 2005*). Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1 \tag{6.1}$$

Lời giải

Vì $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ nên $\frac{1}{4-ab} \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)}$ do đó

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)} + \frac{2}{8-(b^2+c^2)} + \frac{2}{8-(c^2+a^2)}$$

Để vận dụng giả thiết $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ ta đặt $x = (b^2 + c^2)^2$, $y = (c^2 + a^2)^2$, $z = (a^2 + b^2)^2$ thì ta có $x, y, z > 0$ và $x + y + z = (b^2 + c^2)^2 + (c^2 + a^2)^2 + (a^2 + b^2)^2 \leq 4(a^4 + b^4 + c^4) = 12$. Từ đó $0 < x, y, z < 12$.

Ta sẽ chứng minh $$\frac{1}{8-\sqrt{x}} + \frac{1}{8-\sqrt{y}} + \frac{1}{8-\sqrt{z}} \leq \frac{1}{2} \tag{6.2}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{8-\sqrt{t}}$ trên (0, 12). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(t)$ tại $t = 4$ có phương trình $y = \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}$. Hơn nữa ta có : $\frac{1}{8-\sqrt{t}} - (\frac{1}{144}t + \frac{5}{36}) = -\frac{1}{144}(\sqrt{t}-2)^2(4-\sqrt{t}) \leq 0$ với mọi $t \in (0, 12)$. Vậy $f(t) \leq \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}$ với mọi $t \in (0, 12)$.

Từ đó: $f(x) + f(y) + f(z) \leq \frac{1}{144}(x + y + z) + 3\frac{5}{36} \leq \frac{1}{144}.12 + \frac{15}{36} = \frac{1}{2}$.

Vậy BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 4 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Từ một số ví dụ được chọn, chúng tôi đã tự giải để minh hoạ được tinh thần chính của phương pháp. Người đọc có thể so sánh phương pháp này với việc giải các bài toán trên bằng những phương pháp khác. Tuy nhiên với những hạn chế nhất định của người viết và khuôn khổ bài viết chúng tôi không thể đưa ra nhiều hơn nữa các bài toán khác. Việc mở rộng kết quả của những bài toán trên theo nhiều huống hay đưa thêm các bài tập về lượng giác chắc chắn sẽ thu được nhiều kết quả thú vị. Chúng tôi rất mong người đọc đóng góp những ý kiến và bổ sung nhiều bài tập để cho bài viết này được đầy đủ hơn. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn! Cuối cùng là một số bài tập để các bạn có thể rèn luyện việc vận dụng phương pháp này.

Bài toán 7. *(Nhật Bản, 1997).* Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq \frac{3}{5}$$

Bài toán 8. **(*Dự bị Olympic 30 - 4, 2006*).** Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn $a+b+c+d\leq 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geq 1$$

Bài toán 9. (***Vasile Cirtoaje***). Cho các số không âm a, b, c thoả mãn $a+b+c\geq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\leq 1$$

Bài toán 10. (*Trung Quốc, 2003*).

Cho các số $x_1, x_2, \dots, x_5\geq 0$ và $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leq 1$.

Tháng 5 năm 2007

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

[2]. Tuyển tập đề thi Olympic 30 – 4, môn Toán lần thứ 5, *NXB Giáo dục, 1999*.

[3]. Tuyển tập đề thi Olympic 30 – 4, môn Toán lần thứ 12, *NXB Giáo dục, 2006*.

[4]. Đề thi Olympic Toán các nước tham khảo từ Internet.