MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Trong sách giáo khoa lớp 12 Giải tích đã trình bày cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vì vậy một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa một biến trở nên đơn giản. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất là một bài toán bất đẳng thức và đây là một trong những dạng toán khó ở chương trình trung học phổ thông. Trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức dành cho học sinh khá, giỏi thì biểu thức cần tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất thường chứa không ít hơn hai biến. Không những thế, các bài toán khó thường có giả thiết ràng buộc giữa các biến.

Việc chuyển bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức không ít hơn hai biến sang bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số chứa một biến sẽ giúp chúng ta giải được bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức. Vấn đề đặt ra là những dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất nào thì chuyển về được dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa một ẩn. Vì vậy chúng tôi chọn đề tài

"Ứng dụng đạo hàm để tìm giá nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức".

Trong quá trình giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi và ôn thi đại học, cao đẳng bản thân đã đúc rút được một số kinh nghiệm. Vì vậy trong bài viết này chúng tôi trình bày chi tiết một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa hai biến mà điều kiện ràng buộc của hai biến hoặc biểu thức thể hiện tính đối xứng hoặc tính đẳng cấp, trình bày một số bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa ba biến mà bằng cách đánh giá chúng ta thế được hai biến qua biến còn lại.

Với mục đích như vậy, ngoài lời mở đầu, mục lục và phần tài liệu tham khảo, bài viết được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số. Trong chương này, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở cần thiết để giải bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số. Ở cuối chương, chúng tôi đưa ra một số ví dụ minh hoạ.

Chương 2. Kỹ thuật giảm biến trong bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết các dạng toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa hai biến mà điều kiện ràng buộc của hai biến hoặc biểu thức thể hiện tính đối xứng hoặc tính đẳng cấp, trình bày một số dạng toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa ba biến bằng cách đặt ẩn phụ hoặc thế hai biến qua một biến còn lại.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy giáo trong tổ Toán, cùng các em học sinh lớp 12A-K30, 10C1-K33 trường THPT Đặng Thúc Hứa đã cộng tác, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thiện bài biết.

Trong quá trình thực hiện bài viết này, mặc dù đã rất cố gắng nhưng không thể tránh khỏi những hạn chế, thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô, các bạn và các em học sinh để bài viết được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thanh Chương, tháng 05 năm 2011

Tác giả

CHƯƠNG 1

GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

1.1. Một số kiến thức cơ sở về đạo hàm

Trong mục này chúng tôi trình bày lại một số kiến thức về đạo hàm và một số công thức về đạo hàm.

1.1.1 Định lý. *Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì*

1. $(u + v)' = u' + v'$;
2. $(u - v)' = u' - v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $(ku)' = ku'$;
5. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, *với* $v(x) \neq 0$

1.1.2 Định lý. *Đạo hàm của một số hàm số thường gặp.*

$(c)' = 0$ (*c là hằng số*)	
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = nx^{n-1} (n \in \mathbb{R})$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0)$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$	$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$
$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)(x \neq k\pi)$	$(\cot u)' = -u'(1 + \cot^2 u)$

1.1.3 Nhận xét. Đạo hàm của một số hàm phân thức hữu tỉ thường gặp

1. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a.c \neq 0, ad - cb \neq 0$. Ta có $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.
2. Cho hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a.m \neq 0$. Ta có $y' = \frac{amx^2+2anx+bn-mc}{(mx+n)^2}$.
3. Cho hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ với $a.m \neq 0$. Ta có $y' = \frac{(an-mb)x^2+2(ap-mc)x+(bp-nc)}{(mx^2+nx+p)^2}$.

1.2. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

Trong mục này chúng tôi trình bày lại một số kiến thức về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

1.2.1 Định nghĩa. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

a) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số f trên $\mathcal{D}$, ký hiệu là $M = \max\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$.

b) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số f trên $\mathcal{D}$, ký hiệu là $m = \min\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$.

1.2.2 Nhận xét. Như vậy, muốn chứng tỏ rằng số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$ cần chỉ rõ:

a) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in \mathcal{D}$.

b) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

1.2.3 Nhận xét. Người ta đã chứng minh được rằng hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.

Trong nhiều trường hợp, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó.

Quy tắc tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$ như sau:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

2. Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

3. So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của f trên đoạn $[a; b]$.

1.3. Một số ví dụ tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

Trong mục này chúng tôi trình bày một số ví dụ tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

1.3.1 Ví dụ. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

Bài làm. Tập xác định $\mathcal{D} = [-2; 2]$, $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Bảng biến thiên

t	-2		$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$			$2\sqrt{2}$		
	-2	$\nearrow$		$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x \in [-2;2]} f(x) = f(-2) = -2$ và $\max\limits_{x \in [-2;2]} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

1.3.2 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + 2\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}.$$

Bạn đọc tự giải.

1.3.3 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = 5\cos x - \cos 5x \text{ với } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Bạn đọc tự giải.

1.3.4 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 3}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1}.$$

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{2} \le t \le 2$.

1.3.5 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}.$$

Bạn đọc tự giải.

1.3.6 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = x^6 + 4(1-x^2)^3, \text{ với } x \in [-1; 1].$$

Bạn đọc tự giải.

1.3.7 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \sin 2x - x, \text{ với } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

Bạn đọc tự giải.

1.3.8 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Bạn đọc tự giải.

1.3.9 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = x(\sqrt{1-x^2} + x).$$

Bạn đọc tự giải.

CHƯƠNG 2

KỸ THUẬT GIẢM BIẾN TRONG BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Từ kết quả của Chương 1 chúng ta thấy rằng việc tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số khá đơn giản.Việc chuyển bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức không ít hơn hai biến sang bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số chứa một biến sẽ giúp chúng ta giải được bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức.

2.1. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức bằng phương pháp thế

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa hai biến bằng cách thế một biến qua biến còn lại. Từ đó xét hàm số và tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

2.1.1 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}.$$

Bài làm. Từ giả thiết $x + y = \frac{5}{4}$ ta có $y = \frac{5}{4} - x$. Khi đó $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}, x \in (0; \frac{5}{4})$. Ta có $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(5-4x)^2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ v $x = \frac{5}{3}$ (loại). Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$\frac{5}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x \in (0;\frac{5}{4})} f(x) = f(1) = 5$. Do đó $\min P = 5$ đạt được khi $x = 1, y = \frac{1}{4}$.

Nhận xét. Bài toán này được giải bằng cách thế một biến qua một biến còn lại và xét hàm số chứa một biến.

2.1.2 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $y \leq 0, x^2 + x = y + 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17$.

Bài làm. Từ giả thiết $y \leq 0, x^2+x = y+12$ ta có $y = x^2+x-12$ và $x^2+x-12 \leq 0$ hay $-4 \leq x \leq 3$. Khi đó $P = x^3+3x^2-9x-7$. Xét hàm số $f(x) = x^3+3x^2-9x-7, x \in [-4; 3]$. Ta có $f'(x) = 3(x^2 + 2x - 3)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ v $x = 1$. Ta có bảng biến thiên

x	-4		-3		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-13	$\nearrow$	20	$\searrow$	-12	$\nearrow$	20

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x \in [-4;3]} f(x) = f(1) = -12$, $\max\limits_{x \in [-4;3]} f(x) = f(-3) = f(3) = 20$. Do đó $\min P = -12$ đạt được khi $x = 1, y = -10$ và $\max P = 20$ đạt được khi $x = -3, y = -6$ hoặc $x = 3, y = 0$.

Nhận xét. Bài toán này được giải bằng cách thế một biến qua một biến còn lại nhưng phải đánh giá biến còn lại. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số chứa một biến bị chặn.

2.1.3 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

Bài làm. Từ giả thiết $x, y > 0$, $x + y = 1$ ta có $y = 1 - x$, $0 < x < 1$. Khi đó ta có $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}$, $f'(x) = \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}} - \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min P = \min\limits_{x\in(0;1)} f(x) = f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này được giải bằng cách thế một biến qua một biến còn lại và sử dụng các giả thiết để đánh giá biến còn lại. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số chứa một biến bị chặn.

2.1.4 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2}.$$

Bài làm. Ta có $P = \frac{3x^2+4}{4x} + \frac{2}{y^2} + y$. Áp dụng bất đẳng thức AM -GM ta có $P = \frac{3x^2+4}{4x} + (\frac{2}{y^2} + \frac{y}{4} + \frac{y}{4}) + \frac{y}{2} \geq \frac{3x^2+4}{4x} + 3\sqrt[3]{\frac{2.y.y}{y^2.4.4}} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(x+y) + (\frac{x}{4} + \frac{1}{x}) + \frac{3}{2} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{x.1}{4.x}} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. Do đó $\min P = \frac{9}{2}$ đạt được khi $x = y = 2$.

Nhận xét. Bài toán này được giải bằng cách đánh giá biểu thức P và cố gắng chuyển về một biến.

2.1.5 Bài tập. Cho $x, y \in [-3; 2]$ thoả mãn $x^3 + y^3 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Bạn đọc tự giải.

2.1.6 Bài tập. Cho $x, y \geq 0$ thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

Bạn đọc tự giải.

2.1.7 Bài tập. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

Bạn đọc tự giải.

2.1.8 Bài tập. Cho $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + 3(x^2 - y^2) + 3(x + y).$$

Bạn đọc tự giải.

2.1.9 Bài tập. Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $0 < a, b \leq 4, a + b \leq 7$ và $2 \leq x \leq 3 \leq y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2+y^2+2x+y}{xy(a^2+b^2)}$.

Hướng dẫn. Tìm giá trị lớn nhất của $Q = a^2 + b^2$, Xét hàm số $g(y) = f(x, y)$ với ẩn y và x là tham số, tìm giá trị nhỏ nhất của $g(y)$ là $h(x)$. Sau đó tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)$ với $x \in [2; 3]$.

2.1.10 Bài tập. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x^3 \leq y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 - 8x + 16.$$

Hướng dẫn. Nếu $x > 0$ thì $x^6 \leq y^2$ từ đó xét hàm số $f(x) = x^6 + x^2 - 8x + 16$. Nếu $x \leq 0$ thì $x^2 + y^2 - 8x + 16 \geq 16$ với mọi $x \leq 0$, $x^3 \leq y$.

2.1.11 Bài tập. Cho $x, y \in (0; 1)$ thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^x + y^y$.

Hướng dẫn. Xét hàm số $f(x) = x^x$, $x \in (0; 1)$. Chứng minh $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f(\frac{x+y}{2})$. Ta có $P = x^x + (1 - x)^{1-x} = f(x) + f(1 - x) \geq 2f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$.

2.1.12 Bài tập. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng $xy \leq x^x y^y$.

Bạn đọc tự giải.

2.2. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức đối xứng

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa hai biến mà giả thiết hoặc biểu thức đó thể hiện tính đối xứng. Từ đó xét hàm số và tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

2.2.1 Ví dụ. Cho $x^2 + y^2 = x + y$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$.

Bài làm. Đặt $t = x+y$, từ giả thiết $x^2+y^2 = x+y$ ta có $2xy = (x+y)^2-(x+y) = t^2-t$ hay $xy = \frac{t^2-t}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 2(x+y)$ hay $t^2 \leq 2t$ suy ra $0 \leq t \leq 2$. Khi đó biểu thức $P = (x+y)^3 - 2xy(x+y) = t^2$. Do đó ta có $\max P = 4$ đạt được khi $t = 2$ hay $x + y = 2$ và $xy = 1$ suy ra $x = 1$ và $y = 1$, ta có $\min P = 0$ đạt được khi $t = 0$ hay $x = 0$ và $y = 0$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Vì vậy, chúng ta nghĩ đến cách đổi biến $t = x + y$. Nhưng để giải bài toán trọn vẹn thì phải tìm điều kiện của biến t. Sau đây là một số bài toán với định hướng tương tự.

2.2.2 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y+1}$.

Bài làm. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết $x, y > 0$ và $x^2 + xy + y^2 = 1$ suy ra $xy = t^2 - 1$. Áp dụng bất đẳng thức $(x + y)^2 \geq 4xy$ suy ra $0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó $P = t - 1 \leq \frac{\sqrt{3}-3}{3}$. Vì vậy $\max P = \frac{\sqrt{3}-3}{3}$ đạt được khi $(x; y) = (\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}})$ hoặc $(x; y) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}})$.

2.2.3 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y+1}$.

Bài làm. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta có $(x + y)^2 - xy = (x + y) + 1$ hay $xy = t^2 - t - 1$. Áp dụng bất đẳng thức $(x + y)^2 \geq 4xy$ suy ra $3t^2 - 4t - 4 \leq 0$ hay $-\frac{2}{3} \leq t \leq 2$. Khi đó $P = \frac{t^2-t-1}{t+1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-t-1}{t+1}$, $f'(t) = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ v $t = -2$(loại). Bảng biến thiên

t	$-\frac{2}{3}$		0		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t\in[-\frac{2}{3};2]} f(t) = f(0) = -1$ đạt được khi $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (1; -1)$ và $\max P = \max\limits_{t\in[-\frac{2}{3};2]} f(t) = f(-\frac{2}{3}) = f(2) = \frac{1}{3}$ đạt được khi $x = y = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = y = 1$.

2.2.4 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $0 < x, y \leq 1$ và $x + y = 4xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy$.

Bài làm. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết $0 < x, y \leq 1$ và $x + y = 4xy$ suy ra $xy = \frac{t}{4}$ và $1 \leq t \leq 2$. Khi đó $P = (x+y)^2 - 3xy = t^2 - \frac{3}{4}t$. Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{3}{4}t$, $f'(t) = 2t - \frac{3}{4}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}$(loại). Bảng biến thiên

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(1) = \frac{1}{4}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$ và $\max P = \max\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(2) = \frac{5}{2}$ đạt được khi $(x; y) = (\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2})$ hoặc $(x; y) = (\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2})$.

2.2.5 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x, y \neq 0$ và $xy(x+y) = x^2 + y^2 - x - y + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Bài làm. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết $xy(x+y) = x^2 + y^2 - x - y + 2$ hay $xy(x+y) = (x+y)^2 - 2xy - (x+y) + 2$ suy ra $xy = \frac{t^2-t+2}{t+2}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ suy ra $\frac{t^3-2t^2+4t-8}{t+2} \geq 0$ hay $t < -2$ v $t \geq 2$. Khi đó $P = \frac{x+y}{xy} = \frac{t^2+2t}{t^2-t+2}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+2t}{t^2-t+2}$, $f'(t) = \frac{-3t^2+4t+4}{(t^2-t+2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ v $t = -\frac{2}{3}$(loại). Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2	$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$		$-\frac{2}{7}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max\limits_{t<-2 v t\geq 2} f(t) = f(2) = 2$ đạt được khi $x = y = 1$.

2.2.6 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $xy + x + y = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} + \frac{xy}{x+y} \leq x^2 + y^2 + \frac{3}{2}.$$

Bài làm. Đặt $t = x + y$ từ giả thiết $x, y > 0$, $xy + x + y = 3$, bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ ta có $xy = 3 - t$, $t > 0$ và $t^2 + 4t - 12 \geq 0$ hay $t \geq 2$ hoặc $t \leq -6$(loại). Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{3(x+y)^2-6xy+3(x+y)}{xy+(x+y)+1} + \frac{xy}{x+y} \leq (x+y)^2 - 2xy + \frac{3}{2}$ hay $\frac{3t^2+9t-18}{4} + \frac{3-t}{t} \leq t^2 + 2t - \frac{9}{2} \Leftrightarrow t^3 - t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+6) \geq 0$ luôn đúng $\forall t \geq 2$, dấu bằng xảy ra khi $t = 2$ hay $x = y = 1$.

2.2.7 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (1+x)(1+\frac{1}{y}) + (1+y)(1+\frac{1}{x})$.

Bài làm. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết $x, y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$ suy ra $xy = \frac{t^2-1}{2}$ và $t > 1$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ suy ra $1 < t \leq \sqrt{2}$. Khi đó $P = [1 + (x+y) + xy][\frac{x+y}{xy}] = \frac{t^2+t}{t-1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+t}{t-1}$, $f'(t) = \frac{t^2-2t-1}{t-1}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}$(loại). Bảng biến thiên

t	1	$\sqrt{2}$
$f'(t)$	$\|\|$	$-$
$f(t)$	$+\infty$ $\searrow$	$4+3\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t\in(1;\sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 4+3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.2.8 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x+y+1 = 3xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

Bài làm. Đặt $t = x+y$. Từ giả thiết $x+y+1 = 3xy$ suy ra $xy = \frac{t+1}{3}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ ta có $3t^2 - 4t - 4 \geq 0$ hay $t \geq 2$ v $t \leq -\frac{2}{3}$(loại). Ta có $P = \frac{3xy(x+y)+3(x+y)^2-6xy}{xy[xy+(x+y)+1]} - \frac{(x+y)^2-2xy}{x^2y^2} = \frac{9(4t^2-t-2)}{4(t+1)^2} - \frac{3(3t^2-2t-2)}{(t+1)^2} = \frac{3(5t+2)}{4(t+1)^2}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{3(5t+2)}{4(t+1)^2}$, $f'(t) = \frac{3(-5t+3)}{4(t+1)^3}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$(loại). Bảng biến thiên

t	2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	1 $\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max\limits_{t\in[2;+\infty)} f(t) = f(2) = 1$ đạt được khi $x = y = 1$

2.2.9 Ví dụ. Cho x, y không đồng thời bằng 0 thoả mãn $x+y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y^2+1} + \frac{y^2}{x^2+1}$.

Bài làm. Đặt $t = x^2+y^2$, ta có $(x+y)^2 = 1$ suy ra $(x^2+y^2)+2xy = 1$ hay $xy = \frac{1-t}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ suy ra $t \geq \frac{1}{2}$. Khi đó

$$P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{(x^4+y^4)+(x^2+y^2)}{x^2y^2+(x^2+y^2)+1} = \frac{1}{t} + \frac{2t^2+8t-2}{t^2+2t+5}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{2t^2+8t-2}{t^2+2t+5}$, $f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{-4t^2+24t+44}{(t^2+2t+5)^2}$,

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)^2(t-5) = 0.$$

Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1		5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{12}{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{12}{5}$	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max\limits_{t\in[\frac{1}{2};+\infty]} f(t) = f(\frac{1}{2}) = f(5) = \frac{12}{5}$ đạt được khi $(x;y) = (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ hoặc $(x;y) = (2;-1);(x;y) = (-1;2)$ và $\min P = \min\limits_{t\in[\frac{1}{2};+\infty]} f(t) = f(1) = 2$ đạt được khi $(x;y) = (1;0);(x;y) = (0;1)$.

2.2.10 Ví dụ. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$.

*Bài làm.*Đặt $t = x + y$, từ giả thiết $x^2 + y^2 = 1$ hay $xy = \frac{(x+y)^2-1}{2} = \frac{t^2-1}{2}$ và bất đẳng thức $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ ta có $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$. Khi đó ta có

$$P^2 = (x+y)^2 - 2xy + 2xy(x+y) + 2xy\sqrt{1+(x+y)+xy} = 1 + \frac{t^3-t}{2} + \frac{(t^2-1)|t+1|}{\sqrt{2}}.$$

Nếu $-1 \le t \le \sqrt{2}$ thì $P^2 = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})t^3 + \sqrt{2}t^2 - (1+\sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}]$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})t^3 + \sqrt{2}t^2 - (1+\sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}]$, $f'(t) = \frac{1}{2}[3(1+\sqrt{2})t^2 + 2\sqrt{2}t - 1 - \sqrt{2}]$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} - 1$ v $t = -\frac{1+\sqrt{2}}{3}$. Ta có bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{1+\sqrt{2}}{3}$		$\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{38-6\sqrt{2}}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2+\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \leq 2+\sqrt{2}$ đẳng thức xảy ra khi $t=\sqrt{2}$ hay $P^2 \leq 2+\sqrt{2}$ suy ra $\max P = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ đạt được khi $t=\sqrt{2}$ hay $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nếu $-\sqrt{2} \leq t \leq -1$ thì $P^2 = \frac{1}{2}[(1-\sqrt{2})t^3 - \sqrt{2}t^2 - (1-\sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}]$. Xét hàm số $g(t) = \frac{1}{2}[(1-\sqrt{2})t^3 - \sqrt{2}t^2 - (1-\sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}]$, $g'(t) = \frac{1}{2}[3(1-\sqrt{2})t^2 - 2\sqrt{2}t - 1 + \sqrt{2}]$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -(\sqrt{2}+1)$(loại) v $t = -\frac{\sqrt{2}-1}{3}$(loại). Ta có bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	-1
$g'(t)$	$+$	
$g(t)$	$2-\sqrt{2}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $g(t) \leq 1$ đẳng thức xảy ra khi $t=-1$ hay $P^2 \leq 1$ suy ra $\min P = -1$ đạt được khi $t=-1$ hay $x=-1, y=0$ hoặc $x=0, y=-1$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến nhưng biểu thức P chưa đưa được về dạng $x+y, xy$. Vì vậy để giải được bài toán này, chúng ta bình phương biểu thức P. Sau đây là một bài toán tương tự.

2.2.11 Ví dụ. Cho $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{1+y}} + \frac{y}{\sqrt{1+x}}$.

Bài làm. Đặt $t=x+y$, từ giả thiết $x^2+y^2=1$ hay $xy = \frac{(x+y)^2-1}{2} = \frac{t^2-1}{2}$ và bất đẳng thức $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ ta có $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. Khi đó ta có

$$P^2 = \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y) + (x+y)^2 - 2xy}{1+(x+y)+xy} + \frac{2xy}{\sqrt{1+(x+y)+xy}}$$

$$= \frac{-t^3+3t+2}{t^2+2t+1} + \frac{\sqrt{2}(t^2-1)}{|t+1|} \text{ với } t \neq -1.$$

Nếu $-1 < t \leq \sqrt{2}$ thì $P^2 = (\sqrt{2}-1)t + 2 - \sqrt{2}$. Do đó $P^2 \leq 4-2\sqrt{2}$ suy ra $\max P = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ đạt được khi $t=\sqrt{2}$ hay $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nếu $-\sqrt{2} \le t < -1$ thì $P^2 = -(1+\sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}$. Do đó $P^2 \le 4 + 2\sqrt{2}$ suy ra $\min P = -\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ đạt được khi $t = -\sqrt{2}$ hay $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.2.12 Ví dụ. Cho $x, y \neq 0$ thay đổi thoả mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Bài làm. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$. Khi đó, giả thiết $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ trở thành $a + b = a^2 + b^2 - ab$ hay $(a+b) = (a+b)^2 - 3ab$ và biểu thức

$$P = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] = (a+b)^2.$$

Đặt $t = a+b$. Áp dụng bất đẳng thức $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, từ giả thiết $(a+b) = (a+b)^2 - 3ab$ ta có$ab = \frac{t^2-t}{3} \le \frac{t^2}{4}$ hay $t^2 - 4t \le 0$ suy ra $0 \le t \le 4$. Khi đó $P = t^2 \le 16$. Vì vậy $\max P = 16$ đạt được khi $t = 4$ hay $a = b = 2$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

2.2.13 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x^2 + xy + y^2 \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 - xy + y^2$.

Bài làm. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết $x^2 + xy + y^2 \le 2$ hay $(x+y)^2 - xy \le 2$ ta có $xy \ge t^2 - 2$. Áp dụng bất đẳng thức $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ ta có $t^2 \le \frac{8}{3}$ hay $-\sqrt{\frac{8}{3}} \le t \le \sqrt{\frac{8}{3}}$. Khi đó $P = (x+y)^2 - 3xy \le -2t^2 + 6$. Bảng biến thiên hàm số $f(t) = -2t^2 + 6$

t	$-\sqrt{\frac{8}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{8}{3}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{2}{3}$	↗	6	↘	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{t \in [-\sqrt{\frac{3}{8}};\sqrt{\frac{3}{8}}]} f(t) = f(0) = 6$ suy ra $\max P = 6$ đạt được khi $(x; y) = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ hoặc $(x; y) = (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết là một bất đẳng thức đối xứng và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Để giải được bài toán này, chúng ta đánh giá biểu thức P, đổi biến $t = x + y$ và tìm điều kiện của biến t. Sau đây là một số bài toán với định hướng tương tự.

2.2.14 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x + y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}.$$

Bài làm. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết suy ra $0 < t \leq 1$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ suy ra $xy \leq \frac{t^2}{4}$. Khi đó $P = \frac{(x+y)^2 - xy}{x+y} + \frac{x+y+3}{xy} \geq \frac{3t}{4} + \frac{4(t+3)}{t^2}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{3t}{4} + \frac{4(t+3)}{t^2}$, $f'(t) = \frac{3}{4} - \frac{4(t+6)}{t^3} = \frac{3t^3 - 16t - 96}{4t^3}$, với $0 < t \leq 1$ ta có bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$	$\|\|$	$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{67}{4}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t \in (0;1]} f(t) = f(1) = \frac{67}{4}$ suy ra $\min P = \frac{67}{4}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

2.2.15 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2$.

Bài làm. Đặt $t = x^2 + y^2$. Từ giả thiết $2(x^2 + y^2) = xy + 1$ ta có $xy = 2t - 1$ và áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ và bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq -2xy$ ta có $\frac{2}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}$. Khi đó $P = 7(x^2+y^2)^2 - 10x^2y^2 = -33t^2 + 40t - 10$. Xét hàm số $f(t) = -33t^2 + 40t - 10$, $f'(t) = -66t + 40$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{33}$. Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{2}{5}$		$\frac{20}{33}$		$\frac{2}{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{18}{25}$	$\nearrow$	$\frac{609}{160}$	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t\in[\frac{2}{5};\frac{2}{3}]} f(t) = f(\frac{2}{5}) = \frac{18}{25}$ đạt được khi $(x;y) = (-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}})$ hoặc $(x;y) = (\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}})$ và $\max P = \max\limits_{t\in[\frac{2}{5};\frac{2}{3}]} f(t) = f(\frac{20}{33}) = \frac{609}{160}$ đạt được khi $(x;y) = (\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{\sqrt{33}};\frac{\sqrt{34}-\sqrt{6}}{\sqrt{33}})$ v $(x;y) = (\frac{\sqrt{34}-\sqrt{6}}{\sqrt{33}};\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{\sqrt{33}})$ v $(x;y) = (\frac{-\sqrt{34}+\sqrt{6}}{\sqrt{33}};\frac{-\sqrt{34}-\sqrt{6}}{\sqrt{33}})$ v $(x;y) = (\frac{-\sqrt{34}-\sqrt{6}}{\sqrt{33}};\frac{-\sqrt{34}+\sqrt{6}}{\sqrt{33}})$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Để giải được bài toán này, chúng ta đổi biến $t = x^2+y^2$ để bậc của biểu thức càng nhỏ càng tốt. Sau đây là một bài toán tương tự.

2.2.16 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x^2(2x^2-1)+y^2(2y^2-1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2(x^2-4)+y^2(y^2-4)+2(x^2y^2-4)$.

Bài làm. Đặt $t = x^2+y^2$. Từ giả thiết $x^2(2x^2-1)+y^2(2y^2-1) = 0$ hay $2(x^2+y^2)^2-4x^2y^2-(x^2+y^2) = 0$ ta có $x^2y^2 = \frac{2t^2-t}{4}$. Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2 \geq 2xy$ suy ra $2t^2-t \leq t^2$ hay $0 \leq t \leq 1$. Khi đó $P = (x^2+y^2)^2-4(x^2+y^2)-8 = t^2-4t-8$. Xét hàm số $f(t) = t^2-4t-8$, $f'(t) = 2t-4$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$(loại). Bảng biến thiên

t	0	1
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$-8 \searrow$	-11

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max\limits_{t\in[0;1]} f(t) = f(0) = -8$ đạt được khi $(x;y) = (0;0)$ và $\min P = \min\limits_{t\in[0;1]} f(t) = f(1) = -11$ đạt được khi $(x;y) = (\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$; $(x;y) = (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$; $(x;y) = (\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$ hoặc $(x;y) = (\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$.

2.2.17 Ví dụ. Cho x, y thoả mãn $(x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2)+2 = -x^2-3x^2y^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2+2y^2-3x^2y^2$.

Bài làm. Đặt $t = x^2+y^2$. Từ giả thiết $(x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2)+2 = -x^2-3x^2y^2$ ta có $t^2-3t+2 \leq 0$ hay $1 \leq t \leq 2$. Khi đó $P = -(x^2+3x^2y^2)+2(x^2+y^2) = t^2-t+2$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t + 2$, $f'(t) = 2t - 1$, $f'(t) > 0\ \forall t \in [1;2]$. Vì vậy $\max P = \max\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(2) = 4$ đạt được khi $(x;y) = (0;\pm\sqrt{2})$ và $\min P = \min\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(1) = 2$ đạt được khi $(x;y) = (0;\pm 1)$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng không đối xứng với hai biến. Để giải được bài toán này, chúng ta đánh giá giả thiết và đặt $t = x^2 + y^2$.

2.2.18 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

Bài làm. Đặt $t = x^2 + y^2$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$. Từ giả thiết $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$ suy ra $(x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2$ hay $x + y \geq 1$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ ta có $t \geq \frac{1}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x^2+y^2)^2 \geq 4x^2y^2$ ta có $P = 3[(x^2+y^2)^2 - x^2y^2] - 2(x^2+y^2) + 1 \geq 3(x^2+y^2)^2 - \frac{3(x^2+y^2)^2}{4} - 2(x^2+y^2) + 1$ hay $P \geq \frac{9t^2}{4} - 2t + 1$. Xét hàm số $f(t) = \frac{9t^2}{4} - 2t + 1$, $f'(t) = \frac{9t}{2} - 2$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{9}$. Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$\frac{9}{16}$ $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t\in[\frac{1}{2};+\infty)} f(t) = f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{16}$. Vì vậy $\min P = \frac{9}{16}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết là bất đẳng thức đối xứng và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Để giải được bài toán này, chúng ta đánh giá biểu thức P và đặt $t = x^2 + y^2$.

2.2.19 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

Bài làm. Đặt $xy = t$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ suy ra $0 < t \leq \frac{1}{4}$. Khi đó $P^2 = \frac{(x+y)^2-2xy-xy(x+y)}{1-(x+y)+xy} + \frac{2xy}{\sqrt{1-(x+y)+xy}} = \frac{-3t+1}{t} + 2\sqrt{t}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{-3t+1}{t} + 2\sqrt{t}$, $f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sqrt{t}}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$(loại) v $t = 0$(loại). Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{4}$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$+\infty$ $\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t\in(0;\frac{1}{4}]} f(t) = f(\frac{1}{4}) = 2$ suy ra $\min P = \sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Ngoài cách đổi biến $t = x + y$ ta có thể giải bài toán này với cách đổi biến $t = xy$. Sau đây là một bài toán với định hướng tương tự.

2.2.20 Ví dụ. Cho các số thực x, y thoả mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)}{x^2+y^2-3}$.

Bài làm. Từ giả thiết $x^2 + y^2 - xy = 1$ ta có $1 = x^2 + y^2 - xy \geq xy$ và $1 = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy \geq -3xy$ suy ra $-\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$.
Đặt $t = xy$. Khi đó $P = \frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+xy+1}{(x^2+y^2)-3} = \frac{-t^2+3t+2}{t-2}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2+3t+2}{t-2}$, $f'(t) = \frac{-(t-2)^2-4}{(t-2)^2} < 0\ \forall t \in [-\frac{1}{3}; 1]$.

Do đó $\min P = \min\limits_{t\in[-\frac{1}{3};1]} f(t) = f(1) = -4$ đạt được khi $x = y = 1$ hoặc $x = y = -1$ và $\max P = \max\limits_{t\in[-\frac{1}{3};1]} f(t) = f(-\frac{1}{3}) = -\frac{8}{21}$ đạt được khi $(x; y) = (\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3})$ hoặc $(x; y) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$.

2.2.21 Ví dụ. Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $\frac{(x^4+y^4)}{(x+y)^4} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{5}{8}$.

Bài làm. Do bất đẳng thức đúng với x, y thì cũng đúng với tx, ty nên ta chuẩn hoá $x + y = 1$. Đặt $t = \sqrt{xy}$. Khi đó $P = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + \sqrt{xy} = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 + \sqrt{xy} = 2t^4 - 4t^2 + t + 1$. Xét hàm số $f(t) = 2t^4 - 4t^2 + t + 1$ với $t \in (0; \frac{1}{2}]$. Ta có $f'(t) = 8t^3 - 8t + 1$, do $f'(-2)f'(0) < 0, f'(0)f'(\frac{1}{2}) < 0, f'(\frac{1}{2})f'(1) < 0$ nên phương trình $f'(t) = 0$ có đúng 1 nghiệm $t_0 \in (0; \frac{1}{2})$ ta có bảng biến thiên

t	0		t_0		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$f(t_0)$	$\searrow$	$\frac{5}{8}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t \in (0; \frac{1}{2}]} f(t) = f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$ đạt được khi $t = \frac{1}{2}$ và $x + y = 1$ hay $x + y = 1, \sqrt{xy} = \frac{1}{2}$ suy ra $x = y = \frac{1}{2}$. Do đó $P \geq \frac{5}{8}, \forall x, y > 0$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Để giải được bài toán này chúng ta dùng phương pháp chuẩn hoá.

2.2.22 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = 1$ và $m > 0$ cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{m}{xy}$.

Bài làm. Đặt $x = \frac{1}{2} + t, y = \frac{1}{2} - t$ với $0 \leq |t| < \frac{1}{2}$. Khi đó $P = \frac{2}{4t^2+1} - \frac{4m}{4t^2-1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{4t^2+1} - \frac{4m}{4t^2-1}$, $f'(t) = -\frac{16t}{(4t^2+1)^2} + \frac{32mt}{(4t^2-1)^2} = \frac{16t[4(\sqrt{m}-1)t^2+\sqrt{m}+1][4(\sqrt{m}+1)t^2+\sqrt{m}-1]}{(16t^4-1)^2}$.

Nếu $m \geq 1$ thì $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Kho đó $\min P = \min\limits_{t \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})} f(t) = f(0) = 2 + 4m$.

Nếu $0 < m < 1$ thì $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ v$t^2 = \frac{1-\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)}$ v $t^2 = \frac{\sqrt{m}+1}{4(1-\sqrt{m})} > \frac{1}{4}$(loại) hay $t = 0, t = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)}}, t = \sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)}}$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		$-\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)}}$		0		$\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)}}$		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$				$2+4m$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$2m+3\sqrt{m}+1$				$2m+3\sqrt{m}+1$		

Từ bảng biến thiên ta có

$$\min P = \min_{t\in(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})} f(t) = f(-\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)}}) = f(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)}}) = 2m+3\sqrt{m}+1.$$

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Ngoài những định hướng quen thuộc bài toán được giải với phương pháp đổi biến khác.

2.2.23 Bài tập. Cho $x, y \geq 1$. Chứng minh rằng $(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}) \leq \frac{1}{16}$.

Hướng dẫn. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{x-1}{x^2}\frac{y-1}{y^2} \leq \frac{1}{16}$ hay $\frac{xy-(x+y)+1}{x^2y^2} \leq \frac{1}{16}$.

2.2.24 Bài tập. Cho $x, y \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - 2(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Hướng dẫn. Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$.

2.2.25 Bài tập. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

Hướng dẫn. Đặt $t = x^2 + y^2$, với $0 < t \leq 1$.

2.3. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức thể hiện tính đẳng cấp

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa hai biến mà giả thiết hoặc biểu thức đó thể hiện tính đẳng cấp. Từ đó xét hàm số và tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

2.3.1 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = y(x + y).$$

Bài làm. Đặt $y = tx$ từ điều kiện $x, y > 0$ suy ra $t > 0$. Từ giả thiết $x^2 + y^2 = 1$ ta có $x^2 = \frac{1}{t^2+1}$. Khi đó biểu thức $P = x^2 t(t + 1) = \frac{t^2+t}{t^2+1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+t}{t^2+1}$, $f'(t) = \frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} + 1$ v $t = 1 - \sqrt{2}$(loại). Ta có bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}+1$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t) = f(\sqrt{2} + 1) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$ và $y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết và biểu thức P được cho dưới dạng đẳng cấp với hai biến. Sau đây là một số bài toán với định hướng tương tự.

2.3.2 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x^2 + xy + y^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 - 2xy + 3y^2$.

Bài làm. Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 2$ suy ra $P = 6$.

Nếu $x \neq 0$ thì đặt $y = tx$. Khi đó từ giả thiết $x^2 + xy + y^2 = 2$ ta có $x^2 = \frac{2}{t^2+t+1}$. Vì vậy $P = \frac{2(3t^2-2t+1)}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2(3t^2-2t+1)}{t^2+t+1}$, $f'(t) = \frac{2(5t^2+4t-3)}{(t^2+t+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2\pm\sqrt{19}}{5}$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{19}}{5}$		$\frac{-2+\sqrt{19}}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	6	$\nearrow$	$\frac{500+100\sqrt{19}}{75}$	$\searrow$	$\frac{500-100\sqrt{19}}{75}$	$\nearrow$	6

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f(\frac{-2+\sqrt{19}}{5}) = \frac{500-100\sqrt{19}}{75}$ đạt được khi $(x;y) = (5\sqrt{\frac{2}{38+\sqrt{19}}}; \sqrt{\frac{2}{38+\sqrt{19}}}(-2+\sqrt{19}))$ hoặc
$(x;y) = (-5\sqrt{\frac{2}{38+\sqrt{19}}}; -\sqrt{\frac{2}{38+\sqrt{19}}}(-2+\sqrt{19}))$ và
$\max P = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f(\frac{-2-\sqrt{19}}{5}) = \frac{500+100\sqrt{19}}{75}$ đạt được khi
$(x;y) = (5\sqrt{\frac{2}{38-\sqrt{19}}}; \sqrt{\frac{2}{38-\sqrt{19}}}(-2-\sqrt{19}))$ hoặc
$(x;y) = (-5\sqrt{\frac{2}{38-\sqrt{19}}}; \sqrt{\frac{2}{38-\sqrt{19}}}(2+\sqrt{19}))$.

2.3.3 Ví dụ. Cho $x, y \geq 0$ thoả mãn $x^2+y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4x^2+6xy-5}{2xy-2y^2-1}.$$

Bài làm. Nếu $x = 0$ thì từ giả thiết $x^2+y^2 = 1$ và $y \geq 0$ suy ra $y = 1$. Khi đó $P = \frac{5}{3}$.

Nếu $x \neq 0$ thì đặt $y = tx$. Từ giả thiết $x, y \geq 0$ và $x^2+y^2 = 1$ suy ra $t \geq 0$ và $x^2 = \frac{1}{t^2+1}$. Khi đó $P = \frac{x^2(4+6t)-5}{x^2(2t-2t^2)-1} = \frac{5t^2-6t+1}{3t^2-2t+1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{5t^2-6t+1}{3t^2-2t+1}$, $f'(t) = \frac{8t^2+4t-4}{(3t^2-2t+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ v $t = -1$(loại). Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) < \frac{5}{3}$ $\forall t \geq 0$ và $\min P = \min\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) = f(\frac{1}{2}) = -1$ đạt được khi $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Vì vậy $\max P = \frac{5}{3}$ đạt được khi $x = 0, y = 1$ và $\min P = -1$ đạt được khi $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2.3.4 Ví dụ. Cho $x, y \in [2010; 2011]$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{xy^2}(x^2 + y^2)$.

*Bài làm.*Đặt $t = \frac{x}{y}$. Khi đó $P = \frac{(t+1)(t^2+1)}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{(t+1)(t^2+1)}{t}$, $f'(t) = 2t + 1 - \frac{1}{t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 1 = 0$.

Nếu $2010 \leq x \leq y \leq 2011$ thì $\frac{2010}{2011} \leq t \leq 1$. Ta có $f'(t) > 0$, $\forall t \in [\frac{2010}{2011}; 1]$ suy ra $\max P = \max\limits_{t \in [\frac{2010}{2011};1]} f(t) = f(1) = 4$ đạt được khi $x = y$ và $\min P = \min\limits_{t \in [\frac{2010}{2011};1]} f(t) = f(\frac{2010}{2011}) = 3,999005965$ đạt được khi $x = \frac{2010y}{2011}$.

Nếu $2010 \leq y \leq x \leq 2011$ thì $1 \leq t \leq \frac{2011}{2010}$. Ta có $f'(t) > 0$, $\forall t \in [1; \frac{2011}{2010}]$ suy ra $\max P = \max\limits_{t \in [1;\frac{2011}{2010}]} f(t) = f(\frac{2011}{2010}) = 4,00099552$ đạt được khi $x = \frac{2011y}{2010}$ và $\min P = \min\limits_{t \in [1;\frac{2011}{2010}]} f(t) = f(1) = 4$ đạt được khi $x = y$.

Nhận xét. Bài toán này biểu thức P có tử và mẫu cùng bậc. Để giải bài toán này ta đặt $t = \frac{x}{y}$ và sử dụng giả thiết để xét các trường hợp xảy ra của t.

2.3.5 Ví dụ. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x, y \neq 0$ và $x^2 + y^2 = x^2y + xy^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$.

Bài làm. Đặt $y = tx$. Từ giả thiết $x^2 + y^2 = x^2y + xy^2$ suy ra $x = \frac{t^2+1}{t^2+t}$. Khi đó $P = \frac{(t^2+t)(2t+1)}{t(t^2+1)}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{2t^2+3t+1}{t^2+1}$, $f'(t) = \frac{-3t^2+2t+3}{(t^2+1)^2}$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$.
Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$\frac{3-\sqrt{10}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3+\sqrt{10}}{2}$	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max f(t) = f(\frac{1+\sqrt{10}}{3}) = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ đạt được khi $(x; y) = (\frac{20+2\sqrt{10}}{14+5\sqrt{10}}; \frac{40+22\sqrt{10}}{42+15\sqrt{10}})$ và
$\min P = \min f(t) = f(\frac{1-\sqrt{10}}{3}) = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ đạt được khi $(x; y) = (\frac{20-2\sqrt{10}}{14-5\sqrt{10}}; \frac{40-22\sqrt{10}}{42-15\sqrt{10}})$.

2.3.6 Ví dụ. Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $\frac{4xy^2}{(x+\sqrt{x^2+4y^2})^3} \leq \frac{1}{8}$.

Bài làm. Đặt $t = \frac{x}{y}$. Từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $t > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{4t}{(t+\sqrt{t^2+4})^3} \leq \frac{1}{8}$ hay $t(\sqrt{t^2+4}-t)^3 \leq 2$. Xét hàm số $f(t) = t(\sqrt{t^2+4}-t)^3$, $f'(t) = (\sqrt{t^2+4}-t)^3 - \frac{3t(\sqrt{t^2+4}-t)^3}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{(\sqrt{t^2+4}-t)^3(\sqrt{t^2+4}-3t)}{\sqrt{t^2+4}}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2$ hay $t(\sqrt{t^2+4}-t)^3 \leq 2$ dấu bằng xảu ra khi $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $y = \sqrt{2}x$.

2.3.7 Ví dụ. Cho $x > y > 0$. Chứng minh rằng $\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y} > \sqrt{xy}$.

Bài làm. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\sqrt{\frac{x}{y}} < \frac{\frac{x}{y}-1}{ln(\frac{x}{y})} < \frac{\frac{x}{y}+1}{2}$.

Ta chứng minh $\ln\frac{x}{y} > \frac{2(x-y)}{x+y}$. Đặt $t = \frac{x}{y}$. Từ giả thiết $x > y > 0$ suy ra $t > 1$. Chứng minh $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t$, $f'(t) = \frac{4}{(t+1)^2} - \frac{1}{t} = \frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2} \leq 0$ $\forall t > 1$. Ta có bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$	$\|\|$	$-$	
$f(t)$	0		
		$\searrow$	
			$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) < 0$ $\forall t > 1$ hay $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t$ $\forall t > 1$.

Ta chứng minh $\sqrt{\frac{x}{y}} < \frac{\frac{x}{y}-1}{ln(\frac{x}{y})}$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$. Bất đẳng thức trở thành $t^2 - 2tlnt - 1 > 0$. Xét hàm số $g(t) = t^2 - 2tlnt - 1$, $g'(t) = 2(t - lnt - 1)$, $g''(t) = 2(1 - \frac{1}{t}) \geq 0$, $\forall t > 0$. Suy ra đpcm.

2.3.8 Ví dụ. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y^2} + 9\frac{y^3}{x^3}.$$

Bài làm. Đặt $x = ty$. Từ giả thiết $x, y > 0$ và $xy \leq y - 1$ ta có $ty^2 + 1 = y$ hay $1 = t^2 y + \frac{1}{y} \geq 2t$ suy ra $0 < t \leq \frac{1}{2}$. Khi đó $P = t^2 + \frac{9}{t^3}$. Xét hàm số $f(t) = t^2 + \frac{9}{t^3}$, $f'(t) = 2t - \frac{27}{t^4}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{\frac{27}{2}}$(loại). Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$	$\Vert$	$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{289}{4}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t \in (0; \frac{1}{2}]} f(t) = f(\frac{1}{2}) = \frac{289}{4}$ đạt được khi $(x; y) = (1; 2)$.

Nhận xét. Bài toán này giả thiết có các số hạng không cùng bậc. Để giải bài toán này ta đánh giá giả thiết ràng buộc giữa hai biến x, y.

2.3.9 Bài tập. Cho $x, y \geq 0$. Chứng minh rằng $3x^3 + 7y^3 \geq 9xy^2$.

Bạn đọc tự giải.

2.3.10 Bài tập. Cho $x, y \geq 0$. Chứng minh rằng $x^4 + y^4 \geq x^3 y + xy^3$.

Bạn đọc tự giải.

2.3.11 Bài tập. Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{y^3} + y^3 \leq \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + y$.

Bạn đọc tự giải.

2.3.12 Bài tập. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}) - 8(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$ với $x, y \neq 0$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $|t| \geq 2$.

2.3.13 Bài tập. Cho $0 < x < y < 1$. Chứng minh rằng $x^2 \ln y - y^2 \ln x > \ln x - lny$.

Hướng dẫn. Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$.

2.3.14 Bài tập. Cho $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3+y^3+7xy(x+y)}{xy\sqrt{x^2+y^2}}$.

Bạn đọc tự giải.

2.3.15 Ví dụ. Cho $a, b > 0$ và $x > y > 0$. Chứng minh rằng $(a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x$.

Bạn đọc tự giải.

2.4. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa ba biến

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa ba biến bằng cách đặt ẩn phụ hoặc thế hai biến qua một biến còn lại. Từ đó, chuyển được bài toán về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

2.4.1 Ví dụ. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \geq 16$.

Bài làm. Đặt $t = x+y$. Từ giả thiết ta có $z = 1-(x+y)$ hay $z = 1-t$ và $0 < t < 1$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ hay $xy \leq \frac{t^2}{4}$. Khi đó $P = \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{t}{xy(1-t)} \geq \frac{4}{-t^2+t}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{-t^2+t}$, $f'(t) = \frac{4(2t-1)}{(-t^2+t)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t\in(0;1)} f(t) = f(\frac{1}{2}) = 16$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2}$. Vì vậy $\frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \geq 16$.

Nhận xét. Bài toán này khá đơn giản, chỉ cần thế biến z theo biến x, y và đổi biến $t = x + y$ chúng ta đã chuyển được bài toán về một biến.

2.4.2 Ví dụ. Cho $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z+xy+yz+zx$.

Bài làm. Đặt $t=x+y+z$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy -Schwarz ta có $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)$ suy ra $-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}$. Khi đó

$$P=(x+y+z)+\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]=\frac{1}{2}(t^2+2t-1).$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}(t^2+2t-1)$, $f'(t)=2t+2$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$1-\sqrt{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$1+\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min P=\min\limits_{t\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}f(t)=f(-1)=-1$ đạt được khi $t=-1$ hay $(x;y;z)=(-1;0;0)$ và các hoán vị của nó;

$\max P=\max\limits_{t\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}f(t)=f(\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$ đạt được khi $t=\sqrt{3}$ hay $(x;y;z)=(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Nhận xét. Bài toán này đối xứng với ba biến, bằng cách đặt $t=x+y+z$ chúng ta đã chuyển được về một biến. Sau đây là một số bài toán với định hướng tương tự.

2.4.3 Ví dụ. Cho $x,y,z\ge 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

Bài làm. Đặt $t=x+y+z$. Áp dụng bất đẳng thức $xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$ và $xyz\le\frac{(x+y+z)^3}{27}$. Ta có

$$P=\frac{1}{(x+y+z)+1}-\frac{1}{xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1}\le\frac{1}{t+1}-\frac{1}{\frac{t^3}{27}+\frac{t^2}{3}+t+1}$$

$$= \frac{1}{t+1} - \frac{27}{(t+3)^3}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{27}{(t+3)^3}$, $f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{81}{(t+3)^4}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+3)^4 = [9(t+1)]^2$ hay $t = 0$ v $t = 3$. Ta có bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
			$\frac{1}{8}$		
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t) = f(3) = \frac{1}{8}$ suy ra $\max P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

2.4.4 Ví dụ. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Bài làm. Từ giả thiết $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1$ ta có $xy + yz + zx - 2xyz = xy(1-z) + yz(1-x) + zx \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $(x; y; z) = (1; 0; 0)$ và các hoán vị của nó.

Do vai trò của x, y, z bình đẳng nên ta luôn giả sử được $x = \min\{x, y, z\}$. Từ giả thiết $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1$ ta có $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ và $y + z = 1 - x$. Áp dụng bất đẳng thức $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4}$ và $1 - 2x > 0$. Khi đó biểu thức

$$P = xy + yz + zx - 2xyz = x(y+z) + yz(1-2x) \geq x(1-x) + (1-2x)\frac{(y+z)^2}{4}$$

$$= x(1-x) + (1-2x)\frac{(1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}(-2x^3 + x^2 + 1).$$

Xét hàm số $f(x) = -2x^3 + x^2 + 1$ với $x \in [0; \frac{1}{3}]$. Ta có $f'(x) = -6x^2 + 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ v $x = \frac{1}{3}$. Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$1 \nearrow \frac{28}{27}$	

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{x\in[0;\frac{1}{3}]} f(x) = f(\frac{1}{3}) = \frac{28}{27}$. Do đó $\max P = \frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0;\frac{1}{3}]} f(x) = \frac{7}{27}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bài toán này đối xứng với ba biến, để chuyển nó về theo một biến chúng ta phải chọn phần tử đại diện, tìm cách đánh giá phần tử đó và biến đổi biểu thức về theo phần tử đại diện. Sau đây là một số bài toán với định hướng tương tự.

2.4.5 Ví dụ. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz \geq \frac{1}{4}.$$

Bài làm. Do vai trò của x, y, z bình đẳng nên ta luôn giả sử được $x = \min\{x, y, z\}$. Từ giả thiết $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1$ ta có $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ và $y + z = 1 - x$. Áp dụng bất đẳng thức $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4}$ và $\frac{27x}{4} - 3 < 0$. Khi đó biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz$$
$$= x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z) + \frac{15xyz}{4} = x^3 + (y+z)^3 + yz[\frac{15x}{4} - 3(y+z)]$$
$$= x^3 + (1-x)^3 + yz(\frac{27x}{4} - 3) \geq x^3 + (1-x)^3 + \frac{(y+z)^2}{4}(\frac{27}{4}x - 3)$$
$$= \frac{1}{16}(27x^3 - 18x^2 + 3x + 4).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{16}(27x^3 - 18x^2 + 3x + 4)$, $f'(x) = \frac{1}{16}(81x^2 - 36x + 3)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ v $x = \frac{1}{3}$. Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{7}{27}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{x\in[0;\frac{1}{3}]} f(x) = f(0) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$. Do đó $P \geq \frac{1}{4}$ dấu bằng xảy ra khi $(x;y;z) = (\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ hoặc $(x;y;z) = (0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ và các hoán vị của nó.

2.4.6 Ví dụ. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}}$.

Bài làm. Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$, $f'(x) = \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(\frac{1}{3};\frac{1}{\sqrt{6}})$ là $y = \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}(15x-1)$.

Chứng minh $\frac{x}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}(15x-1)$. Nếu $0 < x < \frac{1}{15}$ thì bất đẳng thức đúng.

Nếu $\frac{1}{15} \leq x < 1$ thì bất đẳng thức tương đương với $(3x-1)^2(25x-1) \geq 0$ luôn đúng, đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$.

Tương tự ta có $\frac{y}{\sqrt{1-y}} \geq \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}(15y-1)$, $\frac{z}{\sqrt{1-z}} \geq \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}(15z-1)$.

Cộng theo vế ta có $P \geq \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}[15(x+y+z)-3] = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Do đó $\min P = \frac{\sqrt{6}}{2}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bài toán này đối xứng với ba biến. Biểu thức chứa mỗi số hạng mà trong mỗi số hạng chỉ chứa một biến. Để giải bài toán này chúng ta thường nghĩ đến phương pháp tiếp tuyến. Sau đây là một bài toán với định hướng tương tự.

2.4.7 Ví dụ. Cho $x, y, z \in (0;1)$ thoả mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$.

Bài làm. Ta có $P = \frac{x^2}{x(1-x^2)} + \frac{y^2}{y(1-y^2)} + \frac{z^2}{z(1-z^2)}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$ với $0 < x < 1$, $f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ v $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$(loại). Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\frac{1}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\forall x \in (0;1)$. Vì vậy

$$P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(xy+yz+zx) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $\min P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.4.8 Ví dụ. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x^2+y^2+z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2}$.

Bài làm. Ta có $P = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{y^2}{1-y^2} + \frac{z^2}{1-z^2}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$ với $0 < x < 1$, $f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ v $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$(loại). Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\frac{1}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\forall x \in (0;1)$.

Vì vậy $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^3+y^3+z^3)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$x^6+x^3y^3+x^3y^3 \geq 3x^4y^2$; $x^6+x^3z^3+x^3z^3 \geq 3x^4z^2$; ...; $x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3 \geq 3x^2y^2z^2$.

Khi đó $3(x^6+y^6+z^6+2x^3y^3+2y^3z^3+2x^3z^3) \geq x^6+y^6+z^6+3x^4y^2+3x^4z^2+3x^2y^4+3y^4z^2+3x^2z^4+3y^2z^4+6x^2y^2z^2$.

Vì vậy ta chứng minh được bất đẳng thức $3(x^3+y^3+z^3)^2 \geq (x^2+y^2+z^2)^3$ hay $x^3+y^3+z^3 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^3+y^3+z^3) \geq \frac{3}{2}$ suy ra $\min P = \frac{3}{2}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.4.9 Bài tập. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn điều kiện $x + y + z = 1$ Chứng minh

$$xy + yz + zx \leq \frac{2}{7} + \frac{9}{7}xyz.$$

Hướng dẫn. Nếu $\frac{7}{9} \leq x \leq 1$ thì $yz \leq \frac{9}{7}xyz$ và $y + z \leq \frac{2}{9}$. Suy ra $xy + yz < \frac{2}{9} < \frac{2}{7}$. Nếu $0 \leq x < \frac{7}{9}$ thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(x + 1)(3x - 1)^2 \geq 0$.

2.4.10 Bài tập. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh $\frac{13}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$.

Bạn đọc tự giải.

2.4.11 Bài tập. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(x^2 + y^2 + z^2) + 12xyz \geq \frac{5}{3}.$$

Bạn đọc tự giải.

2.4.12 Bài tập. Cho $1 \leq x, y, z \leq 3$ thoả mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 14.$$

Hướng dẫn. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Khi đó $2 \leq x \leq 3$ và $P = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(y - 1)(z - 1)$. Xét hàm số theo ẩn x.

2.4.13 Bài tập. Cho $0 \leq x, y, z \leq 2$ thoả mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 \leq 9.$$

Hướng dẫn. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Khi đó $1 \leq x \leq 2$ và $P = x^3 + y^3 + z^3 \leq x^3 + y^3 + z^3 + 3yz(y + z)$. Xét hàm số theo ẩn x.

2.4.14 Bài tập. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Hướng dẫn. Đặt $t = x + y + z$.

2.4.15 Bài tập. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz$.

Bạn đọc tự giải.

2.4.16 Bài tập. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 9xy + 10xz + 22yz$.

Hướng dẫn. $P = 9xy + 10(x+y)z + 12yz = -10(x+y)^2 + 30(x+y-12y^2+36y-3xy)$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t$ với $t \in [0; 3]$. Suy ra

$$P = 10f(x+y) + 12f(y) - 2xy \leq 22 \max_{t\in[0;3]} f(t).$$

2.4.17 Bài tập. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4+2ln(1+x)-y} + \frac{1}{4+2ln(1+y)-z} + \frac{1}{4+2ln(1+z)-x}$.

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy -Schwarz và xét hàm số

$$f(t) = 2\ln(1+t) - t.$$

2.4.18 Bài tập. Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Hướng dẫn. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{2}{b}, z = \frac{3}{c}$. Bài toán trở thành: cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $2x + 4y + 7z \leq 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y + z$. Áp dụng $z \geq \frac{2x+4y}{2xy-7}$ ta có

$$P \geq x + y + \frac{2x + 4y - \frac{14}{x} + \frac{14}{x}}{x(2y - \frac{7}{x})} \geq x + y + \frac{2}{x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} = x + \frac{11}{2x} + \frac{2xy-7}{2x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AG-MG và xét hàm số $f(x) = x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}$.

2.4.19 Bài tập. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Chứng minh rằng

$$2(x + y + z) \leq xyz + 10.$$

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$[2(x+y+z)-xyz]^2 = [x(2-yz)+2(y+z)]^2 \leq [x^2+(y+z)^2][(2-yz)^2+2^2].$$

hay $[2(x+y+z)-xyz]^2 \leq (9+2yz)(y^2z^2-4yz+8)$. Đặt $t = yz$ ta có

$$[2(x+y+z)-xyz]^2 \leq 2t^3+t^2-20t+72.$$

Giả sử $|x| \geq |y| \geq |z|$ từ giả thiết $x^2+y^2+z^2=9$ suy ra $|x|^2 \geq 3$. Vì vậy

$$|t| = |yz| \leq \frac{y^2+z^2}{2} = \frac{9-x^2}{2} \leq 3.$$

2.4.20 Bài tập. Cho $x, y, z \in [0;1]$. Chứng minh $2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x) \leq 3$.

Hướng dẫn. Xét hàm số $g(x) = f(x,y,z)$ với ẩn x và y, z là tham số. Hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$ hoặc $x=1$ nhưng $f(0) \leq f(1)$ nên ta chứng minh $f(1) \leq 3$. Tiếp tục xét hàm số $h(y)$...

2.4.21 Bài tập. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Hướng dẫn. Do bất đẳng thức đúng với a, b, c thì cũng đúng với ta, tb, tc. Vì vậy giả sử $a+b+c=3$. Áp dụng phương pháp tiếp tuyến.

2.4.22 Bài tập. Cho $x, y, z \in [1006; 2012]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}.$$

Hướng dẫn. Giả sử $1006 \leq x \leq y \leq z \leq 2012$. Đặt $y = kx$, $z = tx$, khi đó $1 \leq k \leq t \leq 2$ và $P = \frac{1+k^3+t^3}{kt}$.

Chứng minh $P \leq \frac{1+k^3+2^3}{2k}$. Xét hàm số $f(k) = \frac{k^3+9}{2k}$ với $k \in [1;2]$.

2.4.23 Bài tập. Cho các số thực a, b, c không đồng thời bằng 0 thoả mãn $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}.$$

Hướng dẫn. Đặt $x = \frac{4a}{a+b+c}$, $y = \frac{4b}{a+b+c}$, $z = \frac{4c}{a+b+c}$. Khi đó ta có $x + y + z = 4$ và $xy + yz + zx = 4$. Áp dụng bất đẳng thức $(y + z)^2 \geq 4yz$ suy ra $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

Khi đó $P = \frac{1}{32}(x^3 + y^3 + z^3) = \frac{1}{32}(3x^3 - 12x^2 + 12x + 16)$.

2.4.24 Bài tập. Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}).$$

Hướng dẫn. Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$ suy ra $(1-\frac{x}{y})(1-\frac{y}{z}) \geq 0$ và $(1-\frac{y}{x})(1-\frac{z}{y}) \geq 0$. Nhân ra rồi cộng theo vế ta có

$$P = (\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) + (\frac{y}{z} + \frac{z}{y}) + (\frac{x}{z} + \frac{z}{x}) + 3 \leq 5 + 2(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}).$$

Đặt $t = \frac{x}{z}$, với $t \in [\frac{1}{2}; 1]$. Ta có $(2 - t)(\frac{1}{2} - t) \leq 0$ hay $t + \frac{1}{t} \leq \frac{5}{2}$.

2.4.25 Bài tập. Cho $x + y \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + (\frac{1 - xy}{x + y})^2 \text{ và } Q = 4x^2 + 13y^2 + (\frac{xy - 12}{x + y})^2.$$

Hướng dẫn. Đặt $z = \frac{1-xy}{x+y}$.

2.4.26 Bài tập. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 6(y + z - x) + 27xyz$.

Hướng dẫn. $P \leq 6[\sqrt{2(y^2 + z^2)} - x] + 27x.\frac{y^2+z^2}{2} = 6[\sqrt{2(1 - x^2)} - x] + \frac{27x(1-x^2)}{2}$.

2.4.27 Bài tập. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}$.

Hướng dẫn. Đặt $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$, $z = \frac{a}{c}$ suy ra $xyz = 1$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{(1 + x)^3} + \frac{1}{(1 + y)^3} + \frac{1}{(1 + z)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2(1+x)^2}$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$ $\forall x, y > 0$.

Ta có $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2}$.
Xét hàm số $f(z) = \frac{z}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2}$.

2.4.28 Bài tập. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bạn đọc tự giải.

2.4.29 Bài tập. Cho $x, y, z \in [0; 1]$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}$.

Hướng dẫn. Áp dụng phương pháp tiếp tuyến và bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} \geq 1 + \frac{1}{(x+y)^2+1} \forall x, y > 0; x + y \leq 1.$$

2.4.30 Bài tập. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$.

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq 1 - x$ và bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \leq 1 + \sqrt{\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}} \forall x + y \leq \frac{4}{5}.$$

2.4.31 Bài tập. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$.

Hướng dẫn. Đặt $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $y = \sqrt{\frac{b}{c}}$, $z = \sqrt{\frac{c}{a}}$ suy ra $xyz = 1$ và bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy} \forall xy \leq 1.$$

2.4.32 Bài tập. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $(x + y + z)^3 = 32xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{383 - 165\sqrt{5}}{2} \leq \frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x+y+z)^4} \leq \frac{9}{128}.$$

Hướng dẫn. Giả sử $x + y + z = 4$. Đặt $t = xy + yz + zx$.

2.4.33 Bài tập. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$3(x+y+z) + 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 21.$$

Hướng dẫn. Đặt $t = x + y + z$.

2.4.34 Bài tập. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) - (x+y+z) \geq 2\sqrt{3}.$$

Hướng dẫn. Đặt $t = x + y + z$.

2.4.35 Bài tập. Cho $x, y, z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x+y+z)^3 + 9xyz}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}.$$

Hướng dẫn. Giả sử $x + y + z = 1$ và $z = \min\{x, y, z\}$ suy ra $0 < z \leq \frac{1}{3}$.

2.4.36 Bài tập. Cho $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{7}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$.

Hướng dẫn. Giả sử $x + y + z = 1$ và $z = \min\{x, y, z\}$ suy ra $0 < z \leq \frac{1}{3}$.

2.4.37 Bài tập. Cho $a, b, c, d > 0$ thoả mãn $a^2 + b^2 = 1$ và $c - d = 3$. Chứng minh rằng $P = ac + bd - cd \leq \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$P \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - cd = \sqrt{2d^2 + 6d + 9} - d^2 - 3d.$$

KẾT LUẬN

Bài viết thu được các kết quả sau.

1. Trình bày cụ thể cách tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

2. Hệ thống một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa hai biến bằng cách thế một biến qua biến còn lại.

3. Hệ thống một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa hai biến bằng cách đặt ẩn phụ theo tính đối xứng $t = x + y$, $t = x^2 + y^2$ hoặc $t = xy$.

4. Hệ thống một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa hai biến bằng cách đặt ẩn phụ theo tính đẳng cấp $t = \frac{x}{y}$.

5. Hệ thống một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa ba biến bằng cách đặt ẩn phụ hoặc thế hai biến qua một biến còn lại.