

ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC TRONG GIẢI VÀ SÁNG TÁC MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

©T_EX by Nguyễn Minh Tuấn

1. Một số bài toán có thể giải được bằng số phức

Bài toán 1 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Lấy $PT(1) + i.PT(2)$ ta sẽ được

$$x + yi + \frac{3(x - yi) - (xi + y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Đặt $z = x + yi$ khi đó phương trình trở thành

$$z + \frac{3\bar{z} - i\bar{z}}{|z|^2} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3\bar{z} - i\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3 - i}{z} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = 1 - i \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1), (1; -1) \square$

Bài tập đề nghị :

Bài 1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$

Bài 2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{5x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 5y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$

Bài 3 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{16x - 11y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y - \frac{11x + 16y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$

Bài 4 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (6-x)(x^2+y^2) = 6x+8y \\ (3-y)(x^2+y^2) = 8x-6y \end{cases}$$

Bài toán 2 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = \frac{5}{2} \\ 3x^2y - y^3 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Lời giải

Nhân phương trình (2) với i ta được

$$3x^2yi - 2y^3i = \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

Biến đổi một chút đồng thời cộng với phương trình (1) ta được

$$x^3 + 3xy^2i^2 + 3x^2yi + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow z = 5 \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (z = x + yi)$$

Theo công thức *De – Moivre* ta thu được các nghiệm sau

$$\begin{cases} z = \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \\ z = \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right) \\ z = \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right) \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm :

$$(x; y) = \left(\sqrt[3]{5} \cos \frac{\pi}{9}; \sqrt[3]{5} \sin \frac{\pi}{9} \right), \left(\sqrt[3]{5} \cos \frac{7\pi}{9}; \sqrt[3]{5} \sin \frac{7\pi}{9} \right), \left(\sqrt[3]{5} \cos \frac{13\pi}{9}; \sqrt[3]{5} \sin \frac{13\pi}{9} \right) \square$$

Bài tập đề nghị :

Bài 1 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Bài 2 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ 3x^2y - y^3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Bài toán 3 (VMO 1996): Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{x} = a > 0$, $\sqrt{y} = b > 0$. Ta có hệ mới như sau

$$\begin{cases} a + \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ b - \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$PT(1) + i \cdot PT(2) \Leftrightarrow (a + bi) + \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i$$

Đặt $z = a + bi$ phương trình đã cho trở thành

$$z + \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \Leftrightarrow z^2 - 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \right) z + 1 = 0$$

Ta có

$$\Delta' = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \right)^2 - 1 = -\frac{38}{21} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}}$$

Giờ ta cần phân tích cho Δ' dưới dạng bình phương của một số phức khác thì mới có thể giải được phương trình ban đầu. Như vậy xét số phức $m + ni$ thỏa

$$(m + ni)^2 = -\frac{38}{21} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - n^2 = -\frac{38}{21} \\ 2mn = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{\sqrt{21}}, n = \sqrt{2} \\ m = -\frac{2}{\sqrt{21}}, n = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$z = a + bi = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2} \right) i$$

Vì $a, b > 0$ nên

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \\ b = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \right)^2 = \frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \right)^2 = \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = \left(\frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}}; \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}} \right) \square$

Bài tập đề nghị :

Bài 1 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{3} \left(1 + \frac{6}{x+y}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{6}{x+y}\right) = 1 \end{cases}$$

Bài 2 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right) = 2 \\ \sqrt{y} \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right) = 6 \end{cases} \quad (\text{Việt Nam 2006})$$

Bài 3 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{10x} \left(1 + \frac{3}{5x+y}\right) = 3 \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{3}{5x+y}\right) = 1 \end{cases}$$

Bài 4 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} \left(\frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt[4]{y} \left(\frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y}\right) = 1 \end{cases}$$

Bài 5 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(2 + \frac{7}{2x+5y}\right) = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{5y} \left(2 - \frac{7}{2x+5y}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 6 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(2 - \frac{15}{x+2y}\right) = 2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{y} \left(2 + \frac{15}{x+2y}\right) = 3\sqrt{3} - 3 \end{cases}$$

Bài 7 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(3 + \frac{5}{42x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{2y} \left(3 - \frac{5}{42x+y}\right) = 4 \end{cases}$$

Bài toán 4 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 5y = xy + 2 \\ x^2 + 4y + 21 = y^2 + 10x \end{cases}$$

Lời giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2i(xy - 2x - 5y + 2) = 0 \\ x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi - 10(x + yi) - 4i(x + yi) + 21 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (10 - 4i)z + 21 + 4i = 0$$

$$\Delta' = 16i = 8(i + 1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 5 + 2\sqrt{2} + (2 + 2\sqrt{2})i \\ z = 5 - 2\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (5 + 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}), (5 - 2\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}) \square$

Bài toán 5 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{2\sqrt{x}}{x+y} = 1 + y \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x + \frac{2\sqrt{x}}{x+y} = 1 + y \\ -2\sqrt{xy} + \frac{2\sqrt{y}}{x+y} + 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b \quad a, b > 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + \frac{2a}{a^2 + b^2} - 1 = 0 \\ -2ab + \frac{2b}{a^2 + b^2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \frac{2a}{a^2 + b^2} - 1 = 0 \\ -2abi + \frac{2bi}{a^2 + b^2} + i = 0 \end{cases}$$

Lấy trên trừ dưới và đặt $z = a + bi$ ta được

$$\begin{aligned} (a + bi)^2 + \frac{2(a - bi)}{a^2 + b^2} - (1 + i) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 + \frac{2}{z} - (1 + i) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^3 - (1 + i)z + 2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z^2 + (1 + i)z - (1 - i) = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH1 : } z = 1 + i \Rightarrow x = y = 1$$

$$\text{TH2 : } z^2 + (1 + i)z - (1 - i) = 0$$

$$\Delta = 4 - 2i = (t + ui)^2 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - u^2 = 4 \\ tu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{2 + \sqrt{5}} \\ u = -(\sqrt{5} - 2)\sqrt{2 + \sqrt{5}} \\ t = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \\ u = (\sqrt{5} - 2)\sqrt{2 + \sqrt{5}} \end{cases}$$

Đến đây trả lại biến a, b sẽ là

$$\begin{cases} a = \frac{-1 - \sqrt{2 + \sqrt{5}}}{2} \\ b = \frac{-1 - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{5}(2 + \sqrt{5})}{2} \\ a = \frac{-1 + \sqrt{2 + \sqrt{5}}}{2} \\ b = \frac{-1 + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{5}(2 + \sqrt{5})}{2} \end{cases}$$

Cuối cùng trả lại biến x, y

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{4}; \frac{\sqrt{5} - 1 - 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}}{4} \right),$
 $\left(\frac{3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{4}; \frac{\sqrt{5} - 1 + 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}}{4} \right) \square$

2. Phương pháp sáng tạo các hệ phương trình bằng số phức

2.1 Sáng tạo hệ phương trình thông qua một phương trình ngẫu nhiên biến phức z

Từ một phương trình bất kì ẩn z tức $f(z) = 0$, ta thay $z = x + yi$ sau đó tiến hành cân bằng thực ảo hai bên, thế là ta đã xây dựng một hệ phương trình đẹp mắt và đánh đố. Ta sẽ thử xây dựng xem sao.

Từ một phương trình ngẫu nhiên theo biến z , tất nhiên ta chỉ xét những phương trình có thể giải được bằng thuần túy đại số, giả sử

$$z^2 - (10 - 4i)z + 21 + 4i = 0$$

Giờ thay $z = x + yi$ quay trở lại phương trình, khai triển rồi rút gọn ta được

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2xyi - 10(x + yi) - 4i(x + yi) + 21 + 4i &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21) + 2(2x + 5y - xy - 2)i &= 0 \end{aligned}$$

Cân bằng thực ảo 2 bên và ta thu được

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21 = 0 \\ 2x + 5y - xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Vậy là ta đã xây dựng thành công, tất nhiên còn vô vàn phương trình khác nữa. Thậm chí khi nâng lên thành bậc 3 hoặc bậc 4 ta sẽ ra những hệ rất khó. Thử một trường hợp bậc 3 xem sao. Xét phương trình

$$z^3 + (1 - i)z - z + 1 + i = 0$$

Cũng thay $z = x + yi$ rồi cân bằng thực ảo như trên ta sẽ được hệ

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - y^2 + 2xy + x^2 - x + 1 = 0 \\ y^3 - 3yx^2 - y^2 - 2xy + x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Để hình thức thêm đẹp và có tính kỉ bí ta sẽ sắp xếp lại các hạng tử của hệ thành

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 = y^2 - 2xy - x^2 \\ y^3 - 3yx^2 + y - 1 = y^2 + 2xy - x^2 \end{cases}$$

Tất nhiên hình thức đẹp nhưng rất khó mà các phương pháp thông thường khó có thể giải quyết được.

2.2 Sáng tạo hệ phương trình bằng phép biến đổi và sử dụng tính chất của số phức

Ta cũng sẽ bắt đầu từ một phương trình ngẫu nhiên sau đây

$$z^2 - 3z + 3 - i = 0$$

Nhưng ta sẽ không thay $z = x + yi$ vội mà tiến hành biến đổi một chút nó đã. Phương trình tương đương

$$z + \frac{3 - i}{z} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3\bar{z} - i\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3\bar{z} - i\bar{z}}{|z|^2} = 3$$

Giờ thay $z = x + yi$ vào đẳng thức trên ta được

$$x + yi + \frac{3(x - yi) - (xi + y)}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2}\right) = 3$$

Cân bằng thực ảo hai bên ta sẽ thu được

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Bài toán số 3 cũng được xây dựng từ cách trên, tuy nhiên người ta đã khéo đổi biến sau đó thêm chút biến đổi để che lấp hình thức của nó.

2.3 Sáng tạo hệ phương trình từ việc tìm căn bậc 2, căn bậc 3,... của số phức

Xét số phức

$$z = a + bi = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$$

Cân bằng phần thực ảo hai bên đẳng thức trên ta được

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a \\ 3x^2y - y^3 = b \end{cases}$$

Chọn $a = b = 1$ là ta thu được

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Đây là một hệ thoát nhìn qua ta thấy nó là đẳng cấp bậc 3, tuy nhiên giải nó theo chỉ hướng đó quả thật không đơn giản vì nghiệm của nó rất lẻ.

Nếu ta thay lũy thừa bậc 3 thành bậc cao hơn thì ta cũng thu được những hệ đẳng cấp bậc cao. Ví dụ :

Bài 1 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} \\ x^3y - xy^3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài 2 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 4 \\ x^3y - xy^3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 3 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4) = \sqrt{3} \\ y(y^4 - 10x^2y^2 + 5x^4) = -1 \end{cases}$$

Tài liệu

[1] Nguyễn Tài Chung, *Một số phương pháp sáng tác và giải các bài toán về phương trình, hệ phương trình.*

[2] Diễn đàn Mathscope : www.forum.mathscope.org