

VỀ MỘT BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KINH ĐIỂN

Nguyễn Minh Tuấn - K62CLC Toán Tin - Hanoi National University of
Education

Lượng giác là một phân môn kết nối giữa Đại số, Hình học, Giải tích. Nó mang trong mình sự đẹp đẽ, kiêu hãnh bởi các phép biến đổi. Xin giới thiệu một đẳng thức lượng giác khá nổi tiếng sau

Bài toán. Chứng minh rằng

$$\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$$

Lời giải

Đây là một bài toán chứng minh đẳng thức khó, cái khó ở đây có phải là do mấy cái biểu thức lượng giác cồng kềnh mà ở đây sự xuất hiện của các góc khó chịu $\frac{3\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}$ khiến các cách biến đổi của chúng ta rất hay lạc lối. Xin giới thiệu 2 cách giải cho bài toán trên, một là biến đổi lượng giác, hai là sử dụng số phức.

Cách 1 : Đặt vế trái là A . Ta có

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{\sin \frac{3\pi}{11}}{\cos \frac{3\pi}{11}} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} \right)^2 \\ &= \frac{\left(\sin \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} \cdot \cos \frac{3\pi}{11} \right)^2}{\cos^2 \frac{3\pi}{11}} \\ &= \frac{\left(\sin \frac{3\pi}{11} + 2 \sin \frac{5\pi}{11} - 2 \sin \frac{\pi}{11} \right)^2}{\cos^2 \frac{3\pi}{11}} \\ &= \frac{\sin^2 \frac{3\pi}{11} + 4 \sin^2 \frac{5\pi}{11} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{11} + 4 \sin \frac{3\pi}{11} \cdot \sin \frac{5\pi}{11} - 4 \sin \frac{3\pi}{11} \cdot \sin \frac{\pi}{11} - 8 \sin \frac{5\pi}{11} \cdot \sin \frac{\pi}{11}}{\cos^2 \frac{3\pi}{11}} \end{aligned}$$

Đến đây sử dụng công thức hạ bậc và tích thành tổng rút gọn ta được

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{\frac{9}{2} - 2 \cos \frac{2\pi}{11} - 2 \cos \frac{4\pi}{11} + \frac{7}{2} \cos \frac{6\pi}{11} - 2 \cos \frac{8\pi}{11} - 2 \cos \frac{10\pi}{11}}{\cos^2 \frac{3\pi}{11}} \\ &= \frac{\frac{9}{2} + \frac{11}{2} \cos \frac{6\pi}{11} - 2 \left(\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} \right)}{\cos^2 \frac{3\pi}{11}} \end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$2 \left(\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} \right) = \frac{\sin \frac{11\pi}{11} - \sin \frac{\pi}{11}}{\sin \frac{\pi}{11}} = -1$$

Vậy

$$A^2 = \frac{\frac{11}{2} \left(1 + \cos \frac{6\pi}{11} \right)}{\cos^2 \frac{3\pi}{11}} = 11$$

Từ đó có $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$ ■

Ta thấy rằng đây là một cách giải rất tự nhiên bằng biến đổi lượng giác thuần túy, tuy nhiên có những đoạn biến đổi khá táo bạo và cần nhãn quan tốt.

Còn một hướng đi khác đó là sử dụng số phức để giải.

Ta biết rằng

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Cách 2 (Dựa theo ý tưởng của Kee-wai Lau và Bob Prielipp)

Đặt $x = e^{\frac{2\pi i}{11}}$ thế thì

$$2(2i \sin \frac{3\pi}{11}) = 2(e^{\frac{2\pi i}{11}} - e^{\frac{-2\pi i}{11}}) = 2(e^{\frac{2\pi i}{11}} - e^{\frac{20\pi i}{11}}) = 2(x - x^{10})$$

và

$$i \tan \frac{3\pi}{11} = \frac{e^{\frac{6\pi i}{11}} - 1}{e^{\frac{6\pi i}{11}} + 1} = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$$

Để ý $1 = e^{\frac{33\pi i}{11}} = x^{33}$ Vậy

$$i \tan \frac{3\pi}{11} = \frac{x^3 - x^{33}}{x^3 + 1} = x^3 - x^6 + x^9 - x + x^4 - x^7 + x^{10} - x^2 + x^5 - x^8$$

Đặt $S = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^9$ và $S' = x^{10} + x^8 + x^7 + x^6 + x^2 = x^{-1} + x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-9}$

Thế thì $i \left(\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} \right) = S - S'$

Ta có

$$1 + S + S' = \frac{x^{11} - 1}{x - 1} = 0 \Rightarrow S + S' = -1$$

Đồng thời

$$S.S' = 5 + 2(S + S') = 3$$

Suy ra

$$(S - S')^2 = (S + S')^2 - 4S.S' = -11 \Rightarrow S - S' = i\sqrt{11}$$

Tức là

$$i \left(\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} \right) = i\sqrt{11} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$$

■

Có thể nói đây là một chứng minh đậm chất kĩ thuật của 2 tác giả trên, qua đó mới thấy số phức đóng vai trò to lớn như thế nào trong việc xử lí các bài toán Đại số.

Bài tập tự luyện . Chứng minh rằng

1. $\tan \frac{2\pi}{11} - 4 \sin \frac{5\pi}{11} = -\sqrt{11}$

2. $\tan \frac{4\pi}{11} + 4 \sin \frac{\pi}{11} = \sqrt{11}$

3. $\tan \frac{5\pi}{11} - 4 \sin \frac{4\pi}{11} = \sqrt{11}$

4. $\tan \frac{\pi}{9} + 4 \sin \frac{\pi}{9} = \sqrt{3}$

5. $\tan \frac{\pi}{7} - 4 \sin \frac{2\pi}{7} = -\sqrt{7}$

6. $\tan \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = -\sqrt{7}$

Bài viết có tham khảo trên diễn đàn Mathscope