

VỀ MỘT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CỦA RAMANUJAN

NGUYỄN MINH TUẤN - K62CLC MATH - HNUE

Bài viết là một chút tìm tòi của tôi về một đẳng thức lượng giác rất đẹp của lượng giác sơ cấp và một số đẳng thức khác cùng loại với nó. Có thể bài viết không làm thỏa mãn bạn đọc do sự hiểu biết có hạn chế của tôi, mọi ý kiến đóng góp các bạn có thể gửi cho tôi qua địa chỉ www.facebook.com/minhtuan1210.

Trước hết chúng ta sẽ mở đầu bằng một bài toán.

Bài toán : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

Nhiều bạn sẽ thấy bài toán này quen thuộc bởi vì nó đã xuất hiện trong một số cuốn sách như "Hệ thức lượng giác" của thầy Trần Phương, "Một số bài toán chọn lọc về lượng giác" của thầy Nguyễn Văn Mậu và Phạm Thị Bạch Ngọc. Đây là một đẳng thức tuyệt đẹp của lượng giác sơ cấp mà người tìm ra nó là một nhà toán học người Ấn Độ tên là Ramanujan. Ban đầu khi thấy công thức này trong sách, tôi cứ đinh ninh đây là một đề thi nào đó, tuy nhiên, khi đọc một bài viết của thầy Hoàng Chúng trên báo THPT về nhà toán học này, tôi lại nhìn thấy công thức đó và thực sự hứng thú, tìm tòi nó. Trước hết chúng ta sẽ tìm hiểu một chút về nhà toán học này.

Ramanujan (22/12/1887 - 26/4/1920) là một nhà toán học, một thần đồng toán học của Ấn Độ. Ông sống và làm việc trong hoàn cảnh nghèo khó, bệnh tật. Ông là một tấm gương sáng về tinh thần tự học, tự tìm tòi. Ông để lại khoảng hơn 3000 công thức và định lý, chủ yếu trong lĩnh vực phương trình và đồng nhất thức. Một số kết quả không có chứng minh. Năm 1976, người ta tìm thấy một cuốn sổ thất lạc của ông trong thư viện của trường Cambridge, với 600 công thức. Có một số kết quả khiến nhiều người phải sửng sốt. Một số công thức của Ramanujan

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} \\ \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} &= \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}} \\ \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} &= \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}}\end{aligned}$$

Công thức đầu tiên chứng minh khá đơn giản, nhưng hai công thức sau thì không đơn giản một chút nào. Ở bài viết này chúng ta sẽ tìm hiểu công thức số 2 và sẽ thấy rằng $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}$ là bộ ba góc tuyệt vời của lượng giác.

Việc đầu tiên chúng ta sẽ đến với Định Lý Vi-et cho phương trình bậc 3.

Định lý : Giả sử a, b, c là 3 nghiệm (kể cả phức) của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Khi đó

$$\begin{cases} a + b + c = -p \\ ab + bc + ca = q \\ abc = -r \end{cases}$$

Trong phần này việc quan trọng là tìm $A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ theo các hệ số như nào. Ta đặt thêm $B = \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc}$. Khi đó ta có

$$A^3 = a + b + c + 3(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc}) - 3\sqrt[3]{abc} = 3AB - p + 3\sqrt[3]{r}$$

$$B^3 = ab + bc + ca + 3(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc}).\sqrt[3]{abc}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) - 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = q - 3\sqrt[3]{r}AB - 3\sqrt[3]{r^2}$$

Ta được hệ

$$\begin{cases} A^3 = 3AB - p + 3\sqrt[3]{r} \\ B^3 = q - 3\sqrt[3]{r}AB - 3\sqrt[3]{r^2} \end{cases}$$

Nhân vế với vế ta được phương trình bậc 3 ẩn AB . Giải ra sau đó thay lại ta sẽ tìm ra A và B ■

Tiếp theo chúng ta sẽ đến với một số bổ đề quan trọng về bộ số là nghiệm của phương trình bậc 3.

Bổ đề 1 : Ba số $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} = 0$$

Chứng minh : Để ý $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$\cos 4x = \cos 3x \iff (\cos x - 1)(8 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 1) = 0$$

Do $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}$ đều khác 1 nên ta có điều phải chứng minh ■

Bổ đề 2 : Ba số $\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + 4t^2 - 4t - 8 = 0$$

Chứng minh : Thay t bằng $\frac{1}{t}$ ở bổ đề 1 ta có ngay điều phải chứng minh ■

Bổ đề 3 : Ba số $\cos^2 \frac{2\pi}{7}, \cos^2 \frac{4\pi}{7}, \cos^2 \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{5}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{1}{64} = 0$$

Chứng minh : Do $\cos \frac{16\pi}{7} = \cos \frac{2\pi}{7}$ nên ba số $\cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}, \cos \frac{16\pi}{7}$ cũng là nghiệm của bổ đề (1). Mà dễ thấy $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ nên thay t bởi $2t - 1$ vào bổ đề 1 ta có

ngay điều phải chứng minh

Bổ đề 4 : Ba số $\frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{7}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{4\pi}{7}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{8\pi}{7}}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 24t^2 + 80t - 64 = 0$$

Chứng minh : Trong bổ đề 3 thay t bởi $\frac{1}{t}$ ta có điều phải chứng minh

Bổ đề 5 : Ba số $\sin^2 \frac{2\pi}{7}, \sin^2 \frac{4\pi}{7}, \sin^2 \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{7}{4}t^2 + \frac{7}{8}t - \frac{7}{64} = 0$$

Chứng minh : Trong bổ đề 3 thay t bởi $1 - t$ ta có điều phải chứng minh

Bổ đề 6 : Ba số $\frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{7}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{4\pi}{7}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{8\pi}{7}}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 8t^2 + 16t - \frac{64}{7} = 0$$

Chứng minh : Trong bổ 5 thay t bởi $\frac{1}{t}$ ta có ngay điều phải chứng minh

Bổ đề 7 : Ba số $\sin \frac{2\pi}{7}, \sin \frac{4\pi}{7}, \sin \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{\sqrt{7}}{2}t^2 + \frac{\sqrt{7}}{8} = 0$$

Dựa vào bổ đề 5 ta dễ dàng tính được các đại lượng $a + b + c, ab + bc + ca, abc$ theo các đại lượng của a^2, b^2, c^2

Bổ đề 8 : Ba số $\tan^2 \frac{2\pi}{7}, \tan^2 \frac{4\pi}{7}, \tan^2 \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 21t^2 + 35t - 7 = 0$$

Chứng minh : Vì $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$ nên từ bổ đề 4 thay t bằng $1 + t$ ta có ngay điều phải chứng minh

Bổ đề 9 : Ba số $\cot^2 \frac{2\pi}{7}, \cot^2 \frac{4\pi}{7}, \cot^2 \frac{8\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 5t^2 + 3t - \frac{1}{7} = 0$$

Chứng minh : Trong bổ đề 8 thay t bởi $\frac{1}{t}$ ta có ngay điều phải chứng minh

Bổ đề 10 : Ba số $\tan \frac{2\pi}{7}, \tan \frac{4\pi}{7}, \tan \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + \sqrt{7}t^2 - 7t - \sqrt{7} = 0$$

Chứng minh : Như bổ đề 7

Bổ đề 11 : Ba số $\cot \frac{2\pi}{7}, \cot \frac{4\pi}{7}, \cot \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + \sqrt{7}t^2 - t - \frac{1}{\sqrt{7}} = 0$$

Chứng minh : Trong bổ đề 10 thay t bởi $\frac{1}{t}$ ta có ngay điều phải chứng minh ■

Bổ đề 12 : Ba số $\sin^3 \frac{2\pi}{7}, \sin^3 \frac{4\pi}{7}, \sin^3 \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{\sqrt{7}}{2}t^2 + \frac{21}{64}t + \frac{7\sqrt{7}}{512} = 0$$

Sử dụng bổ đề 7 ta dễ dàng tính được các đại lượng $a^3 + b^3 + c^3, a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3, a^3b^3c^3$ theo $a + b + c, ab + bc + ca, abc$ ■

Bổ đề 13 : Ba số $\cos^3 \frac{2\pi}{7}, \cos^3 \frac{4\pi}{7}, \cos^3 \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{11}{64}t - \frac{1}{512} = 0$$

Bổ đề 14 : Ba số $\sin \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{8\pi}{7}, \sin \frac{4\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7}, \sin \frac{8\pi}{7} \cos^2 \frac{4\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{3\sqrt{7}}{8}t^2 + \frac{7}{32}t + \frac{\sqrt{7}}{512} = 0$$

Chúng ta sẽ dùng các bổ đề trên và hệ phương trình ta xây dựng bằng Định lý Vi-et để giải quyết đẳng thức của Ramanujan cùng một số đẳng thức khác.

Bài 1 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

Lời giải Đặt $A = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}},$
 $B = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7}}.$ Sử dụng bổ đề 1 và hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} A^3 = 3AB - 2 \\ B^3 = \frac{3}{2}AB - \frac{5}{4} \end{cases}$$

Nhân vế với vế và đặt $AB = t$ ta thu được

$$t^3 = (3t - 2)\left(\frac{3}{2}t - \frac{5}{4}\right) \iff t = \frac{3 - \sqrt[3]{7}}{2}$$

Thay lên phương trình (1) ta được $A^3 = \frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}$ hay

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}} \quad \blacksquare$$

Từ những ví dụ sau, chúng ta sẽ thống nhất đặt A và B như trên

Một số kết quả "ăn theo" của bài toán trên (các bạn có thể thử sức) :

Kết quả 1 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{4 - 3\sqrt[3]{7}}{4}}$$

Kết quả 2 :

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{4 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

Bài 2 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}} = \sqrt[3]{8 - 6\sqrt[3]{7}}$$

Lời giải Quy đồng về trái thành

$$\frac{\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7}}}{\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}}}$$

Sử dụng kết quả 1 cùng bổ đề 1 ta được

$$VT = \sqrt[3]{\frac{\frac{4 - 3\sqrt[3]{7}}{4}}{\frac{1}{8}}} = \sqrt[3]{8 - 6\sqrt[3]{7}}$$

■

Bài 3 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\tan \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\tan \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\tan \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[18]{7} \sqrt[3]{3 \sqrt[3]{3(1 - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})} - 3 \sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49}} - 6 - \sqrt[3]{7}}$$

Lời giải Đặt A và B như trên, sử dụng bổ đề 10 và hệ phương trình xây dựng ta thu được

$$\begin{cases} A^3 = 3AB - \sqrt{7} - 3\sqrt[6]{7} \\ B^3 = 3\sqrt[6]{7}AB - 3\sqrt[3]{7} - 7 \end{cases}$$

Nhân vế với vế và đặt $AB = t$ ta thu được

$$t^3 = 9\sqrt[6]{7}t^2 - (18\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{49} + 21)t + (\sqrt{7} + 3\sqrt[6]{7})(3\sqrt[3]{7} + 7)$$

Phương trình này ta sẽ phải đổi biến và sử dụng công thức Cardano để giải =)). Ta sẽ giải ra

$$t = \sqrt[6]{7} \left(\sqrt[3]{3(1 - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})} - \sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49}} - 1 \right)$$

Thay lên phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} A^3 &= \sqrt[6]{7} \left(3\sqrt[3]{3(1 - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})} - 3\sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49}} \right) - 6\sqrt[6]{7} - \sqrt{7} \\ &= \sqrt[6]{7} \left(3\sqrt[3]{3(1 - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})} - 3\sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49}} - 6 - \sqrt[3]{7} \right) \end{aligned}$$

Đến đây lấy căn bậc 3 hai vế và ta thu được

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\tan \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\tan \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\tan \frac{8\pi}{7}} = \\ \sqrt[18]{7} \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3(1 - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})} - 3\sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49}} - 6 - \sqrt[3]{7}} \end{aligned}$$

■

Bài 4 : Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\cot \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cot \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cot \frac{8\pi}{7}} = \\ \frac{1}{\sqrt[18]{7}} \sqrt[3]{\sqrt[3]{49} - 6 + 3\sqrt[3]{3(1 - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})} - 3\sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49}}} \end{aligned}$$

Bài 5 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7}}} = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt{7}}$$

Lời giải Sử dụng công thức nhân đôi với chú ý $\sin \frac{2\pi}{7} = \sin \frac{16\pi}{7}$ ta sẽ thu được

$$\sqrt[3]{2 \cos \frac{8\pi}{7}} + \sqrt[3]{2 \cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{2 \cos \frac{4\pi}{7}} = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt{7}}$$

Đây chính là bài toán 1

■

Một bài tương tự

Bài 6 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}}} = \sqrt[3]{4 - 3\sqrt{7}}$$

Bài 7 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{1 + 2 \cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{1 + 2 \cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{3\sqrt{7} - 4}$$

Lời giải Không khó khăn dựa vào bổ đề 1 ta sẽ chỉ ra
 $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7}, 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{7}, 1 + 2 \cos \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2t^2 - 2t + 1 = 0$$

Đến đây công việc có lẽ khá đơn giản ■

Một vài bài toán có thể áp dụng ngay các bổ đề.

Bài 8 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2 + \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{2 + \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{2 + \frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}} = \sqrt[3]{6\sqrt[3]{7} - 10}$$

Bài 9 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cos^2 \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos^2 \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos^2 \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{(5 - 3\sqrt[3]{7})^2}{4}} - \sqrt[3]{8 - 6\sqrt[3]{7}}$$

Bài 10 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}} = -\sqrt[3]{7}$$

Lời giải Ta sẽ tìm xem 3 số $x = \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}, y = \frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}, z = \frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}$ là nghiệm của phương trình nào. Ta sẽ dùng 1 số bổ đề ở trên để tìm.

Dễ thấy $xyz = 1$. Tiếp theo ta sẽ tìm $xy + yz + zx$ là cái gì.

$$\text{Ta có } xy + yz + zx = \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}$$

Chú ý $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ và $\cos \frac{2\pi}{7} = \cos \frac{16\pi}{7}$. Vậy

$$xy + yz + zx = 2(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}) - (\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 4 = 3$$

Cuối cùng

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{\sum \cos^2 \cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}} = 8 \sum \cos^2 \cos \frac{8\pi}{7} = 4 \sum (1 + \cos \frac{4\pi}{7}) \cos \frac{8\pi}{7} \\ &= 4 \sum \cos \frac{8\pi}{7} + 4 \sum \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = -4 \end{aligned}$$

Như vậy $A = \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}}$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} A^3 = 3AB - 7 \\ B^3 = 3AB \end{cases} \iff A^3 = -7$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}} = -\sqrt[3]{7} \quad \blacksquare$$

Cuối cùng là một vài kết quả khác, những đẳng thức này thực sự là khó hơn so với những bài toán ở trên và sử dụng biến đổi đại số với các bài toán này là rất lâu. Có lẽ sẽ phải sử dụng một số kết quả của đa thức và dãy số.

Bài 11 : Chứng minh rằng

$$\cos \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \cos \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \cos \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49}} \quad (1)$$

Bài 12 : Chứng minh rằng

$$\cos \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \cos \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}} + \cos \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}} = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}(1 + \sqrt[3]{7})^2} \quad (2)$$

Bài 13 : Chứng minh rằng

$$\cos \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \cos \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}} + \cos \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}} = 0 \quad (3)$$

Bài 14 : Chứng minh rằng

$$\cos^2 \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \cos^2 \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{128}} \sqrt[3]{12\sqrt[3]{7} - (4 + 3\sqrt[3]{7})^2} \quad (4)$$

Bài 15 : Chứng minh rằng

$$\cos^2 \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \cos^2 \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}} = \sqrt[3]{\frac{(5 - 3\sqrt[3]{7})^2}{64}} \quad (5)$$

Bài 16 : Chứng minh rằng

$$\cos^3 \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \cos^3 \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \cos^3 \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}} = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{7} \quad (6)$$

Bài 17 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}} = 0 \quad (7)$$

Bài 18 : Chứng minh rằng

$$\cos \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \cos \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} + \cos \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{49}} \quad (8)$$

Bài 19 : Chứng minh rằng

$$\cos \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \cos \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \cos \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}(2 - \sqrt[3]{7})} \quad (9)$$

Bài 20 : Chứng minh rằng

$$\cos^2 \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \cos^2 \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}} = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{49} \quad (10)$$

Bài 21 : Chứng minh rằng

$$\cos^2 \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} + \cos^2 \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{128}} \sqrt[3]{47 + 3\sqrt[3]{7} - 12\sqrt[3]{49}} \quad (11)$$

Bài 22 : Chứng minh rằng

$$\cos^2 \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}} + \cos^2 \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{32}} \sqrt[3]{73 + 36\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{49}} \quad (12)$$

Bài 23 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos^2 \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos^2 \frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos^2 \frac{2\pi}{7}}} = \sqrt[3]{22 - 6\sqrt[3]{49}} \quad (13)$$

Bài 24 : Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}}}{\cos \frac{4\pi}{7}} + \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}}}{\cos \frac{8\pi}{7}} + \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}}}{\cos \frac{2\pi}{7}} = -\sqrt[3]{36 + 36\sqrt[3]{7}} \quad (14)$$

Bài 25 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos^2 \frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{4\pi}{7}}{\cos^2 \frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{8\pi}{7}}{\cos^2 \frac{4\pi}{7}}} = \sqrt[3]{6(-1 + \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{49})} \quad (15)$$

Bài 26 : Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}}}{\cos \frac{8\pi}{7}} + \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}}}{\cos \frac{2\pi}{7}} + \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}}}{\cos \frac{4\pi}{7}} = \sqrt[3]{4(26 - 6\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{49})} \quad (16)$$

Bài 27 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 \frac{8\pi}{7}}} = \sqrt[3]{4(12 + 6\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{49})} \quad (17)$$

Bài 28 : Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{\cot \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cot \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cot \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{8\pi}{7}}} = \sqrt[9]{\frac{8}{7}} \sqrt[3]{6 - 2\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{3(1 + \sqrt[3]{7})^2} - 3\sqrt[3]{-26 + 6\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{49}}} \quad (18)$$

Bài 29 : Chứng minh rằng

$$\sin^2 \frac{2\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}}} + \sin^2 \frac{4\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7}}} + \sin^2 \frac{8\pi}{7} \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{8\pi}{7}}} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{77 - 21\sqrt[3]{49}} \quad (19)$$

Bài 30 : Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}}}{\sin \frac{4\pi}{7}} + \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}}}{\sin \frac{8\pi}{7}} + \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}}}{\sin \frac{2\pi}{7}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{7}} \sqrt[3]{3\sqrt[3]{7} - 5} \quad (20)$$