TRUNG TÂM TỰ HỌC TOPPER

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
ĐỀ THI VÀO 10 THPT CHUYÊN–HÀ NỘI-2014
Môn: Toán

Đáp án – thang điểm gồm 04 trang

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Đáp án</th></tr>
<tr><td rowspan="8">1
(2,0 điểm)</td><td>1) (1,0 điểm)</td></tr>
<tr><td>Điều kiện $x \ge -\frac{1}{2}$.
Ta có phương trình tương đương $5x^4 + \left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 = 0$ (*).</td></tr>
<tr><td>Ta có $x^4 \ge 0, \left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 \ge 0$ nên
(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \\ \sqrt{2x+1}-1=0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow x = 0.$
Kết hợp với điều kiện ban đầu, ta có $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.</td></tr>
<tr><td>2) (1,0 điểm)</td></tr>
<tr><td>Ta có hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 2xy + (x-y) = -3 \\ (x-y)^2 - 4xy = 9 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Đặt $\begin{cases} x-y=S \\ xy=P \end{cases}$
Ta có $S^2 + 4P = (x+y)^2 \ge 0 \Rightarrow S^2 \ge -4P$ (*)

Thay vào hệ phương trình ta có $\begin{cases} 2P+S=-3 \\ S^2-4P=9 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=-3 \\ P=0 \end{cases} \\ \begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>Kết hợp điều kiện (*) ta có $\begin{cases} S=-3 \\ P=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = \{(-3;0),(0;3)\}$.</td></tr>
</table>

2 (2,5 điểm)

1) *(1,0 điểm)*

Ta có $A = 5^n\left(5^n + 3^n\right) - 2^n\left(9^n + 11^n\right) = 25^n - 22^n - 18^n + 15^n$

+ Ta có $\begin{cases} 25 \equiv 1 \bmod 3 \\ 22 \equiv 1 \bmod 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25^n \equiv 1 \bmod 3 \\ 22^n \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$

Suy ra, $\left(25^n - 22^n\right) \vdots 3.$

Do đó, $A \vdots 3$ (1).

+ Ta có $\begin{cases} 25 \equiv 4 \bmod 7 \\ 18 \equiv 4 \bmod 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25^n \equiv 4^n \bmod 7 \\ 18^2 \equiv 4^n \bmod 7 \end{cases}$

Suy ra, $\left(25^n - 18^n\right) \vdots 7$

Tương tự ta có $\left(22^n - 15^n\right) \vdots 7$

Do đó, $A \vdots 7$ (2).

Mặt khác, ta có $21 = 3.7$ và kết hợp với (1) và (2) ta có $A \vdots 21$.

2) *(1,0 điểm)*

Ta có $5x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x - y + 1\right)^2 + 4x^2 = 5$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 5 - \left(x - y + 1\right)^2 \le 5$ (*).

Ta có $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \le x^2$.

Kết hợp với (*) ta có $x^2 = \{0;1\} \Leftrightarrow x = \{-1;0;1\}$.

+ Với $x = -1$ ta có $\left(x - y + 1\right)^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2.$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $\left(x;y\right) = \left\{\left(-1;-2\right);\left(-1;2\right)\right\}$.

+ Với $x = 0$ ta có $\left(x - y + 1\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \left(y - 1\right)^2 = 5$ (loại)

+ Với $x = 1$ ta có $\left(x - y + 1\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(y - 2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $\left(x;y\right) = \left\{\left(1;0\right);\left(1;4\right)\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $\left(x;y\right) = \left\{\left(-1;-2\right);\left(-1;2\right);\left(1;0\right);\left(1;4\right)\right\}$.

3) *(0,5 điểm)*

Giả sử không tồn tại ít nhất ba số bằng nhau.

Giả sử $a_1 \le a_2$

Ta có $A = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_{2014}^2} \le \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2013^2}$

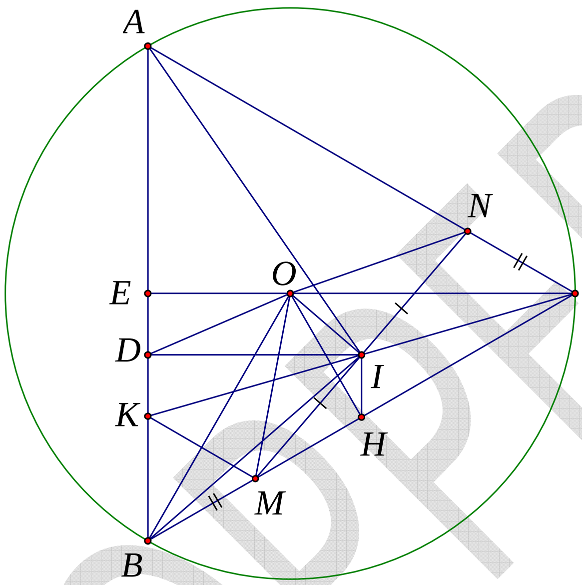
$\Rightarrow A \le 2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{2013^2}$

Mặt khác, $2^2 > 1.2; 3^2 > 2.3; ...; 2013^2 > 2012.2013$

Do đó, $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; ...; \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{2012.2013}$

Do đó, $A < 2 + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{2012.2013}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... - \frac{1}{2013}\right)$

$\Rightarrow A < 3 - \frac{1}{2013}$ (vô lý vì theo giả thiết $A \ge 4$).

3 (1,5 điểm)	Ta có $\dfrac{1-x^2}{x+yz}=\dfrac{1-x^2}{x(x+y+z)+yz}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x+y)(x+z)}\ge\dfrac{4(1-x^2)}{(2x+y+z)^2}=\dfrac{4(1-x)}{1+x}$ Tương tự ta có $\dfrac{1-y^2}{y+zx}\ge\dfrac{4(1-y)}{1+y};\dfrac{1-z^2}{z+xy}\ge\dfrac{4(1-z)}{1+z}$
	Do đó, $VT\ge\dfrac{4(1-x)}{1+x}+\dfrac{4(1-y)}{1+y}+\dfrac{4(1-z)}{1+z}=4\left[\dfrac{2}{1+x}+\dfrac{2}{1+y}+\dfrac{2}{1+z}-3\right]$
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}\ge\dfrac{9}{3+x+y+z}=\dfrac{9}{4}$
	Do đó, $VT\ge 8.\dfrac{9}{4}-12=6.$ (đpcm) Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}.$
4 (3,0 điểm)	**1) *(1,0 điểm)***
	 Ta có $\widehat{OCN}=\widehat{OBM}=30^\circ$. Suy ra, $\Delta OCN=\Delta OBM\,(c.g.c)\Rightarrow ON=OM.$
	Do đó, OI là đường trung trực của đoạn thẳng MN. Suy ra, $OI\perp MN\Rightarrow\widehat{OIM}=90^\circ=\widehat{OHM}$ Suy ra, O, M, H, I cùng nội tiếp đường tròn đường kính OM (đpcm).
	2) *(1,0 điểm)*
	Ta có $MN=2MI.$ Ta có $MI^2=OM^2-OI^2=OH^2+HM^2-OI^2$ Do đó, MI nhỏ nhất khi và chỉ khi MH nhỏ nhất và OI lớn nhất.
	$\Leftrightarrow M\equiv H.$ Vậy khi M là trung điểm của BC thì độ dài MN nhỏ nhất.
	3) *(1,0 điểm)*
	Kẻ $MK\,//\,CA$. Ta có ΔBMK đều (vì $\widehat{KBM}=\widehat{KMB}=60^\circ$. Suy ra, $MK=MB=CN$ Suy ra, CMKN là hình bình hành.

	Do đó, K, I, C thẳng hàng.
	Kẻ $ID \perp AB$ và E là trung điểm AB. Ta có $CE \perp AB \Rightarrow CE // ID$ Suy ra, DI là đường trung bình tam giác KCE.
	Suy ra, $ID = \frac{1}{2}CE$ (không đổi). Do đó, $S_{IAB} = \frac{1}{2}.ID.AB = \frac{1}{4}CE.AB$ không đổi. Vậy khi M thay đổi, diện tích tam giác IAB không đổi.
5 (1,0 *điểm*)	Ta có từ 1 đến 36 có 12 số: $\{2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;34\}$ là các số nguyên tố. Suy ra, trong 25 số được chọn có ít nhất 01 số nguyên tố. Mặt khác, $\{4;9;25\},\{4;33;35\},\{9;22;35\}$ là 03 bộ ba số đôi một nguyên tố cùng nhau.
	+ Nếu trong 25 số được chọn chỉ có 1 số nguyên tố. Suy ra, các số 4; 9; 22; 25; 33; 35 thuộc trong 25 số đó. Suy ra, có ba bộ số đôi một nguyên tố cùng nhau.
	+ Nếu trong 25 số được chọn chỉ có 2 số nguyên tố a, b. Gọi c, d là hai số nguyên tố thuộc $\{2;3;5;7\}$ và khác a, khác b. Ta có bộ ba $\{(a;b;cd)\}$ là bộ ba số đôi một nguyên tố cùng nhau.
	+ Nếu trong 25 số được chọn có ít nhất 3 số nguyên tố thì hiển nhiên đúng.

—— Hết ——