

ỨNG DỤNG LƯỚI ĐIỂM NGUYÊN GIẢI TOÁN SỐ HỌC VÀ TỔ HỢP

Huỳnh Tấn Châu²

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi điểm có các tọa độ đều nguyên gọi là một *điểm nguyên* và tập hợp các điểm nguyên gọi là *lưới điểm nguyên* (hay lưới Gauss). Do chỉ giới hạn trong tập $\mathbb{Z}$ nên việc sử dụng lưới điểm nguyên tỏ ra thuận lợi khi giải quyết các bài toán Số học.

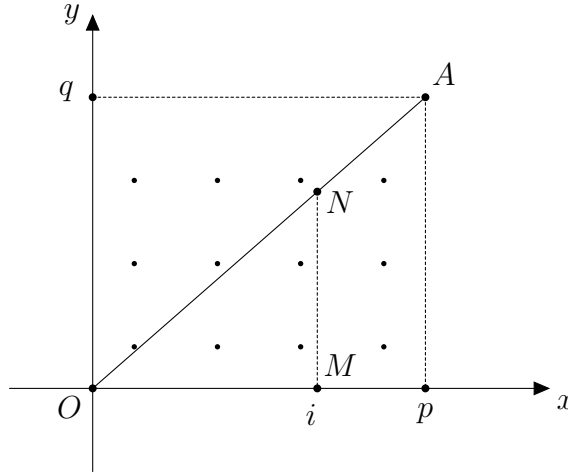
Bài viết này sẽ trình bày một số ứng dụng của lưới điểm nguyên trong giải toán. Trước hết, chúng ta sẽ bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài toán 1. Cho $p, q \in \mathbb{Z}^+$ và $(p, q) = 1$. Chứng minh rằng

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

ở đây $\lfloor a \rfloor$ là phần nguyên của số a , tức số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

Chứng minh. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét các điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật đường chéo OA , với $A(p, q)$. Ta thấy ngay có $(p-1)(q-1)$ điểm.



Do $(p, q) = 1$ nên không có điểm nào nằm trên đường chéo, do đó OA chia chúng thành hai phần đối xứng nhau. Xét phần nằm dưới OA , ta thấy số điểm nằm trên đường thẳng $x = i$, $0 < i < p$ là

$$\lfloor MN \rfloor = \left\lfloor \frac{OM \cdot AB}{OA} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor.$$

Vậy số điểm nằm dưới đường chéo OA là

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Do tính đối xứng của p và q nên ta có điều phải chứng minh. □

²Giáo viên trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên.

Với cách nhìn như trên, bạn đọc có thể dễ dàng giải quyết được bài toán:

Bài toán 2. Cho $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $(a, b) = 1$. Tìm số các số tự nhiên n sao cho

$$n \notin \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Bây giờ, ta tiếp tục với:

Bài toán 3. Với mọi $t > 0$, gọi $d(t)$ là số các phân số tối giản $\frac{p}{q}$ mà $0 < p, q \leq t$. Với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, hãy tính tổng

$$S = d\left(\frac{m}{1}\right) + d\left(\frac{m}{2}\right) + \cdots + d\left(\frac{m}{n}\right).$$

Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ta đồng nhất mỗi phân số $\frac{a}{b}$ (không nhất thiết tối giản) với điểm $M(a, b)$. Xét các điểm nguyên không nằm ngoài hình chữ nhật đường chéo AB , với $A(1, 1)$ và $B(m, n)$. Giả sử một đường thẳng l nào đó qua O và chứa các điểm nguyên $(p, q), (2p, 2q), \dots, (kp, kq)$ với $(p, q) = 1$. Vì $kp \leq m$ và $kq \leq n$ nên ta có

$$p \leq \frac{m}{k} < \frac{m}{k-1} < \cdots < \frac{m}{1}, \quad q \leq \frac{n}{k} < \frac{n}{k-1} < \cdots < \frac{n}{1}.$$

Suy ra phân số tối giản $\frac{p}{q}$ được tính k lần trong các số $d\left(\frac{m}{1}\right), d\left(\frac{m}{2}\right), \dots, d\left(\frac{m}{k}\right)$. Điều đó cho thấy S chính là số tất cả các điểm không nằm ngoài hình chữ nhật đường chéo AB , và như vậy ta có $S = mn$. $\square$

Bài toán 4.

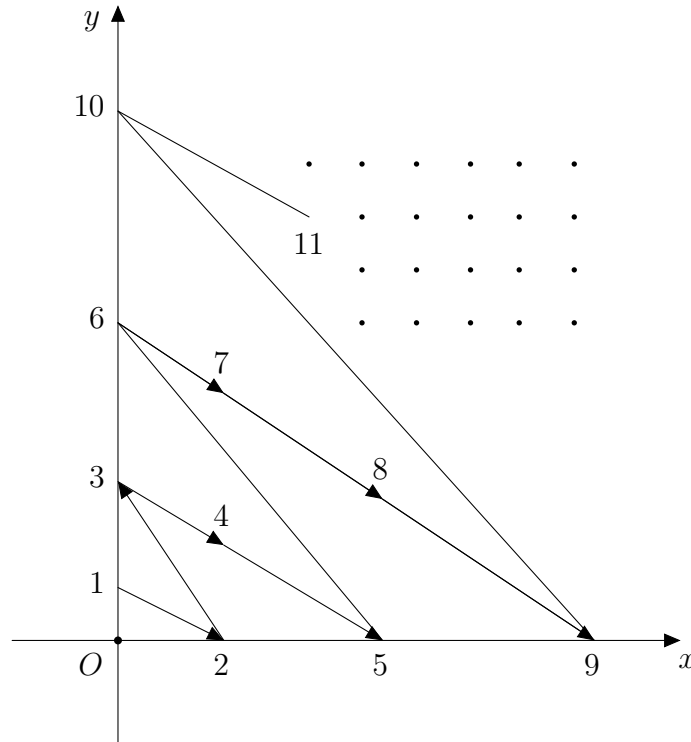
(a) Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$2n = (x_n + y_n)^2 + 3x_n + y_n.$$

(b) Với các cặp (x_n, y_n) tìm được ở câu (a), hãy chứng minh

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2015} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{2015} = 41664.$$

Chứng minh. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi T_n là điểm thứ n trong dãy điểm chỉ ra trên hình vẽ dưới đây.



Dễ dàng chứng minh nếu tọa độ của T_n là (x_n, y_n) thì ta có $(x_n + y_n)^2 + 3x_n + y_n = 2n$. Do đó, kết quả câu (a) là hiển nhiên.

Bây giờ, ta chứng minh câu (b). Để ý rằng T_{2015} là điểm thứ 62 trên trục hoành và

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{2015} \overrightarrow{OT_i} = \left(\sum_{i=1}^{2015} x_i, \sum_{i=1}^{2015} y_i \right).$$

Gọi $\vec{v}$ là vector đường chéo hình vuông đơn vị. Dễ thấy tổng các vector $\overrightarrow{OT_i}$ với các điểm T_i nằm trên cạnh huyền của tam giác cạnh k vuông cân ở O bằng $\frac{k(k+1)}{2}\vec{v}$, do đó

$$\vec{V} = \frac{\vec{v}}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 62 \cdot 63) = \frac{\vec{v}}{6}[1 \cdot 2 \cdot (3 - 0) + \cdots + 62 \cdot 63 \cdot (64 - 61)] = 41664\vec{v},$$

từ đây suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Ứng dụng lưới điểm nguyên, chúng ta có một phương pháp thuận tiện để thiết lập và chứng minh các công thức tổ hợp: Trong hệ tọa độ Oxy , người ta gọi một đường đi từ M tới N là một đường gấp khúc nối M và N , còn đường đi ngắn nhất là đường gấp khúc tạo bởi các đoạn thẳng đơn vị ngang và dọc sao cho số đoạn thẳng là ít nhất. Phương pháp chứng minh một công thức tổ hợp bởi số đường đi ngắn nhất gọi là *phương pháp quỹ đạo*.

Chẳng hạn, công thức quen thuộc $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ có thể nhìn nhận như sau: có C_n^k đường đi ngắn nhất để đi từ $O(0, 0)$ tới $A(n, n - k)$, trong đó gồm C_{n-1}^{k-1} đường đi ngắn nhất từ O tới $B(k - 1, n - k)$ và C_{n-1}^k đường đi ngắn nhất từ O tới $C(k, n - k - 1)$ (lưu ý rằng mỗi đường đi từ O tới A nhất thiết phải qua B hoặc C).

Bài toán 5. Cho $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ và $m > k$. Chứng minh rằng

$$C_{m+n+1}^k = C_m^k C_n^0 + C_{m-1}^{k-1} C_{n+1}^1 + \cdots + C_{m-k}^0 C_{n+k}^k.$$

Chứng minh. Có C_{m+n+1}^k đường đi nối $O(0, 0)$ với $M(m + n - k + 1, k)$. Mặt khác, dễ thấy có $C_{m-i}^{k-i} C_{n+i}^i$ đường cắt đường thẳng $x = n + \frac{1}{2}$ tại điểm có tung độ i ($i = 0, 1, \dots, k$) gồm: C_{n+i}^i đường nối O với điểm (n, i) , 1 đường nối điểm (n, i) với điểm $(n + 1, i)$ và C_{m-i}^{k-i} đường nối điểm $(n + 1, i)$ với M . Từ đó, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cần lưu ý rằng bản chất của phương pháp quỹ đạo là sử dụng song ánh bằng cách đếm số phần tử một tập hợp theo hai cách khác nhau. Bạn đọc có thể tìm thấy lời giải khác của bài toán 5 trong bài “Phương pháp song ánh trong toán tổ hợp” (xem ở [5]).

Với cách sử dụng phương pháp quỹ đạo như trên, bạn đọc hãy thử giải bài toán sau:

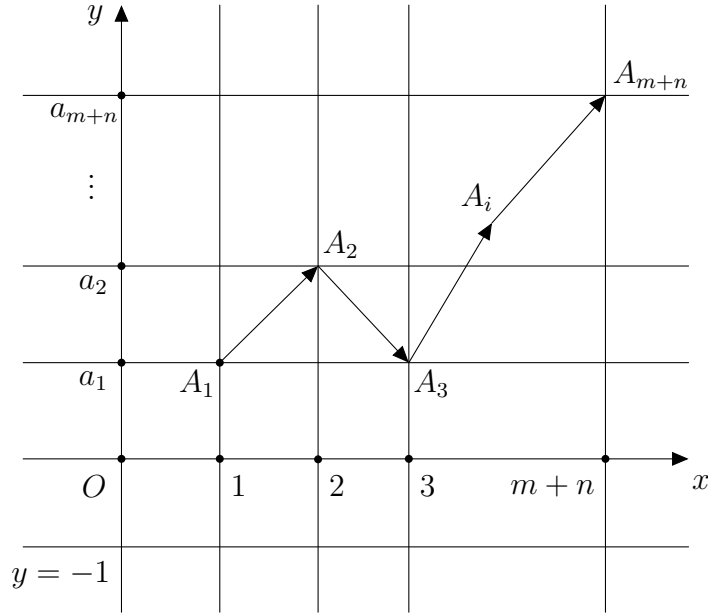
Bài toán 6. Cho $m, n \in \mathbb{Z}^+$ và $m \geq 2n - 1$. Chứng minh rằng

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-1} + \cdots + C_{m-n}^{n-1}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ khảo sát trường hợp phức tạp hơn là các đường đi bị chặn bởi một đường thẳng nào đó.

Bài toán 7. Có $m + n$ người đi mua vé ($n > m$), trong đó có m người mang tiền loại 2 đồng, n người mang tiền loại 1 đồng và mỗi vé giá 1 đồng. Biết rằng ban đầu người bán vé không mang theo tiền, hỏi có bao nhiêu cách xếp $m + n$ người vào mua vé để người nào cũng được thối tiền (nếu có) ngay lập tức?

Lời giải. Đặt $a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$, trong đó x_i bằng 1 nếu người thứ i mang tiền loại 1 đồng và bằng -1 nếu ngược lại.



Bài toán quy về việc đếm số đường đi qua các điểm $A_i(i, a_i)$ mà không nằm dưới trục hoành trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Muốn vậy ta sẽ đếm số đường đi cắt đường thẳng $(d) : y = -1$. Xây dựng một song ánh từ mỗi đường Q như vậy đến một đường Q' là đường nhận được từ Q khi cho đối xứng phần của Q kể từ điểm đầu tiên gặp (d) . Nếu Q' có x đoạn hướng lên và y đoạn hướng xuống thì $x + y = m + n$ và $y - x = n - m + 2$, suy ra $y = n + 1$. Vậy số đường Q' là C_{m+n}^{m+1} , từ đó suy ra đáp số cần tìm là $C_{m+n}^n - C_{m+n}^{m+1}$. $\square$

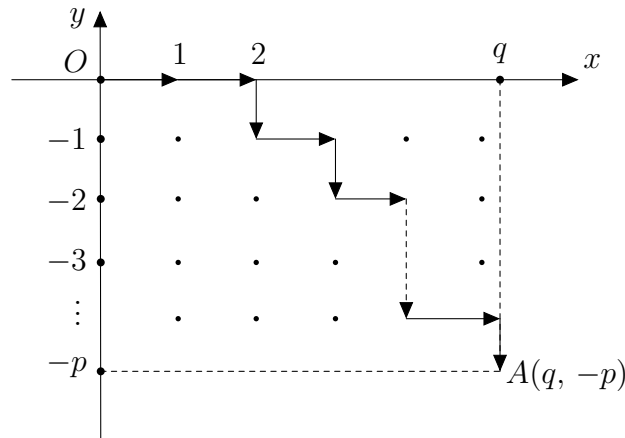
Một cách tương tự, bạn có thể giải “bài toán bầu cử” nổi tiếng sau:

Bài toán 8 (Bài toán Bectơrăng). Trong một cuộc bầu cử, ông A có a phiếu bầu, ông B có b phiếu bầu ($a > b$). Giả thiết rằng mọi phiếu đều hoặc bầu cho A hoặc bầu cho B, không có phiếu trắng và không có phiếu gạch bỏ cả hai. Hỏi xác suất mà ông A luôn thắng ông B tại mọi thời điểm? (Đáp số: $\frac{a-b}{a+b}$.)

Cuối cùng, chúng ta đến với một bài toán Số học pha trộn Tổ hợp tương đối khó sau đây:

Bài toán 9 (IMOSL 41). Cho $p, q \in \mathbb{Z}^+$ và $(p, q) = 1$. Hỏi có bao nhiêu tập S gồm các số tự nhiên sao cho $0 \in S$ và nếu $x \in S$ thì $x + p$ và $x + q$ cũng thuộc S ?

Lời giải. Mỗi số nguyên n được biểu diễn duy nhất dưới dạng $px + qy$, với $0 \leq x < q$, nên ta có thể đồng nhất mỗi số nguyên n với điểm (x, y) trong mặt phẳng tọa độ.



Rõ ràng S chứa mọi điểm n không nằm dưới trục hoành, nên bài toán quy về việc tìm số cách đánh dấu các điểm nằm trong tam giác vuông cạnh huyền OA với $A(q, -p)$, sao cho nếu một điểm được đánh dấu thì những điểm bên phải và nằm trên nó cũng được đánh dấu. Ta thấy rằng mỗi cách đánh dấu như vậy tương ứng với một chuỗi gồm q số 0 và p số 1 thể hiện một con đường đi từ O tới A (0 là sang phải, còn 1 là đi xuống) mà nằm hoàn toàn trên đường OA (để ý là trừ hai đầu mút, đoạn OA không chứa điểm nguyên nào).

Phân hoạch tất cả các chuỗi thành các lớp, mà hai chuỗi bất kỳ trong một lớp là hoán vị vòng quanh của nhau. Dễ thấy mỗi lớp có $p+q$ chuỗi, hơn nữa trong mỗi lớp chỉ có đúng một chuỗi thoả mãn. Từ đó ta đi tới đáp số là $\frac{C_{p+q}^p}{p+q}$. $\square$

Bạn đọc hãy suy nghĩ để giải quyết bài toán sau:

Bài toán 10. Có bao nhiêu cách đánh dấu các điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật đường chéo OM (M là một điểm nguyên) sao cho nếu điểm N được đánh dấu thì tất cả các điểm nằm trong hoặc trên cạnh hình chữ nhật ON (tất nhiên trừ N) không được đánh dấu?

Để kết thúc bài viết này, xin nêu thêm một số bài toán để luyện tập:

Bài tập 1. Cho các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau $a_1, a_2, \dots, a_n$. Hãy tìm số tất cả các số tự nhiên m sao cho

$$m \notin \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \mid x_i \in \mathbb{N}\}.$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì

$$C_{2n}^m = (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

Bài tập 3. Tìm số các dãy hữu hạn $(a_i)_{i=0}^n$ thoả đồng thời các tính chất:

- (a) $a_0 = 0$ và $a_i \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i \leq n$;
- (b) $|a_i - a_{i+1}| = 1, \forall 0 \leq i \leq n-1$.

Bài tập 4. Trong một lần bầu cử, ứng cử viên A được a phiếu bầu, ứng cử viên b được b phiếu bầu ($a > b$). Cử tri bỏ phiếu liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ phiếu để ứng cử viên A luôn dẫn đầu về số phiếu bầu cho mình?

Bài tập 5. Cho n là số nguyên không âm. Chứng minh rằng nó có thể biểu diễn được dưới dạng (và đó là biểu diễn duy nhất):

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2},$$

ở đây x, y là các số nguyên không âm.

Bài tập 6. Cho số nguyên dương n . Ký hiệu τ_n là số ước số của n và σ_n là tổng các ước số của n . Chứng minh rằng

- (a) $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$;
- (b) $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + n \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề Tổ hợp và rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.
- [2] Phan Huy Khải, *Các phương pháp giải toán Giải tích-Tổ hợp*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2002.
- [3] Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ, *Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990-2006)*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.
- [4] Vũ Đình Hòa, *Lý thuyết Tổ hợp và các bài toán ứng dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.
- [5] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Toán rời rạc và một số vấn đề liên quan*, tài liệu bồi dưỡng hè 2007.
- [6] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
- [7] *Các nguồn tài liệu trên Internet*.